湘教版 普通高中课程标准实验教科书

教师教学用书

数学

选修 1–2 文科

主编：傅晋玖
编者：郑 璋 叶文榕 叶 婷 周裕燕
王钦敏 林瑞菊 谢能实

湖南教育出版社

编写说明

本书是《普通高中课程标准实验教科书·数学1-2（文科）》的教师教学用书，编写时按教科书分章、节安排，每章首先阐述了该章的教学目标、教材说明、课时安排建议、教学建议、评价建议，然后按教科书分节编写，每节内容包括教材线索、教学目标、教材分析、教学建议、例题解析、相关链接，在每章的最后给出教科书中练习、习题和复习题的参考解答.

编写此书的目的是为了帮助教师更好地把握教材，包括教材线索、教学目标、教材分析及教学中应予以关注的重点和难点，所提教学建议及参考例题仅供教师在教学过程中参考，在相关链接及阅读材料中所提供的短文是编者精心编写并与该章、节相关的内容，旨在扩大教师的知识视野，使教师用较高的观点把握教材，不要求学生掌握.

希望本书能成为教师使用教科书的好帮手，恳请广大教师在使用过程中提出宝贵意见和建议. 谢谢!

目　　录

第 4 章　典型统计案例

一、教学目标

通过典型案例，学习下列一些常见的统计方法，并能初步应用这些方法解决一些实际问题.

1. 通过对典型案例（如“坏血病的研究”、“静脉吻合分流术”、“脊髓灰质炎”）的探究，了解随机对照试验的基本思想、方法及初步应用.

2. 在具体情境中，了解两个事件相互独立的概念，并能解决一些简单的实际问题.

3. 通过对典型案例（如“交通事故”、“服装推销”、“新药是否有效”）的探究，了解实际推断原理和假设检验的基本思想、方法及初步应用.

4. 通过对典型案例（如“患肺癌与吸烟是否有关”）的探究，了解独立性检验（只要求 2×2 列联表）的基本思想、方法及初步应用.

5. 通过对典型案例（如“机动船的数量与撞死海牛数的关系”、“出口贸易额与 GDP 数据的关系”）的探究，了解回归的基本思想、方法及其初步应用.

二、教材说明

统计是一门具有新特色的独立应用数学，它从日常生活到高新技术领域，都有广泛的应用. 虽然它以概率论作为数学基础，但是它与数学的其他分支有本质的不同，处理问题的出发点是归纳.

高中学生已经具有较丰富的生活经验和一定的科学知识. 因此，教材中选择学生感兴趣的、与其生活实际密切相关的素材，以现实世界中的常见现象或其他科学的实例，展现统计思想和方法的广泛应用.

在本章，学生将在必修课程已学习统计的基础上，通过对典型案例的讨论，了解和使用一些常用的统计方法，进一步体会运用统计方法解决实际问题的基本思想，认识统计方法在决策中的作用.

教材中提供的一些案例所涉及的统计模型都是学生将来走向社会时所要面临的、常见的统计模型，如随机对照试验、假设检验、独立性检验、线性回归等. 在一定程度上，很好地理解和应用这些统计模型会对学生将来的生活和工作质量起到一定的促进作用. 另外，通过对这些统计模型的学习，学生将学习到一些经典的统计方法与统计思想，体验解决特殊问题的统计过程及统计方法，进而感受到统计思想在解决实际问题中的作用，知道统计方法的有效性、局限性和可改进性，体会统计推断可能犯错误.

统计教学必须通过案例来进行. 教材中通过一些案例的处理，使学生经历较为系统的数据处理过程，并在此过程中学习一些数据处理的方法，并运用所学知识、方法去解决实际问题. 例如，在学习一元线性回归案例时，教师可以引导学生体会拟合回归的思想，并根据给出的公式求线性回归方程.

本章主要内容有：随机对照试验案例、事件的独立性、列联表独立性分析案例、一元线性回归案例.

本章教学重点是：假设检验思想、独立性检验的基本思想和回归分析的基本思想.

教学难点是：掌握建立回归模型的基本步骤；利用随机变量 χ^2（读作卡方）来确认“两个分类变量有关系”这一结论成立的可信程度（类似于反证法）.

依据本次课程改革的新理念，在高中数学课程中，“典型统计案例”作为引入的新的课程内容，教材在内容呈现上采取新的处理方式，每一节总是以某个具体案例为线索贯彻始终，详细阐述统计方法的基本思想和实施步骤，注重由浅入深的原则，贴近学生的认知规律.

1. 全章围绕着如何对试验中观测的数据进行分析展开. 为保证设计方案的科学性，要坚持随机对照试验，因此特设计随机对照试验案例这一节，让学生了解随机安排对照组的必要性和重要性. 并在此基础上介绍安慰剂对照，说明试验研究的整个设计实施和资料分析的全过程中，防止数据偏倚产生误差的措施.

2. 本书安排“事件的独立性”一节，主要是由于它是假设检验和独立性检验的知识基础，这样编排有助于体现教材之间的联系，有助于控制教学要求，节省教学时间.

3. 教材在“多知道一点”栏目，通过具体的操作方法，介绍了假设检验的基本思想. 首先作出一个统计假设，在此假设下某些随机事件是否发生，来判断事先所作的统计假设：拒绝这个假设，还是接受这个假设. 这种处理的方法，避免了对假设检验的理论上的论述，使学生更容易理解和掌握，降低了这部分内容的理论难度，这是教材体现标准中所要求的数学教学内容应在理论上、方法上、思想上是最基本的指导思想.

4. 列联表独立性分析所涉及的统计方法对学生来说是比较陌生的，教材在这部分的定位符合高中学生的认知特点，更加强调的是具体案例所使用的方法、具体方法所反映的统计思想.

5. 教材设置“一元线性回归案例”一节，讨论一元线性回归分析的基本思路、方法及初步应用，其步骤为收集具体问题两个变量的数据，并画散点图，进而直观判断它们是否线性相关，然后通过最小二乘法建立回归模型来拟合，最后求出回归直线并得到预测值. 重点是让学生体会过程，理解统计思想.

6. 在现实生活中，我们遇到的总体多为取值连续变化的总体，而其中又以呈正态分布的总体最为重要. 这一方面是因为现实生活中大量的总体都呈正态分布或近似呈正态分布，另一方面呈正态分布的总体在理论上又占有非常重要的地位，因此，教材在“多知道一点”栏目对正态总体及其分布的性质做了初步介绍.

三、课时安排建议

本章教学时间约需 14 课时，具体分配如下（仅供参考）

4.1	随机对照试验案例	2 课时
4.2	事件的独立性	4 课时
4.3	列联表独立性分析案例	3 课时
4.4	一元线性回归案例	4 课时
小结与复习		1 课时

四、教学建议

1. 建议在本章学习新课之前先回顾《必修 3》的相关内容，可以通过具体问题让学生复习统计的有关概念与方法. 要强调，统计学最关心的是：①如何抽取数据；②如何从数据中提取信息；③所得结论的可靠性. 本章“统计”部分内容虽然在《必修 3》的基础上有所扩展和加深，但总的看来，所介绍的仍属于统计中的一些极其初步的知识，因此很多问题在道理上是难以说清的，着眼点在于突出一些重要概念的实际意义. 注意防止随意扩大教学范围，要重其所重，轻其所轻，把握教学的深浅度，抓住教学要求.

2. 统计与现实生活的联系是非常紧密的，这一领域的内容对学生来说应该是充满趣味性和吸引力的. 在教学中，强调典型案例的教学，重点还是感受统计分析的思想，特别注意多选择典型的和学生感兴趣的问题作为案例，通过案例让学生体会其中的统计原理.

3. 统计案例的教学中，应鼓励学生经历数据处理的过程，培养他们对数据的直观感觉，认识统计方法的特点（如统计推断可能犯错误，估计结果的随机性），体会统计方法应用的广泛性. 应尽量给学生提供一定的实践活动机会，可结合数学建模的活动，选择一个案例，要求学生亲自实践. 对于统计案例内容，只要求学生了解.

4. 教学中应鼓励学生使用计算器、计算机等现代技术手段来处理数据，有条件的学校还可运用一些常见的统计软件解决实际问题. 建议让学生学会使用计算器中的“统计功能”对独立性检验和回归分析进行计算.

5. 对于随机对照试验，教学中要求学生了解随机对照试验的意义，体会随机安排对照组对试验评价的作用. 随机对照试验的最大特点，是通过随机抽样及随机分配的方法主动控制、消除某些已知或未知的偏倚因素的干扰，使研究的结果有良好的真实性. 在科研工作中，显然不可能将全部希望研究的对象纳入研究，实际上只能从中选择一定的样本，所选择的样本必须具有总体代表性，这就需要采用随机抽样方法，其意义是使每一个被研究的对象都具有相同的被选择的机会，避免人为的干预. 每一个被选择到的样本是分配到试验组还是分配到对照组，也需要相同的机会，避免研究者主观意愿对分组的干扰. 只有采用随机的方法才能较好地避免各种因素对研究结果的影响.

6. 事件的独立性教学中要注意从集合论角度讲清基本事件、事件、试验之间的关系.

利用事件的独立性的概率乘法公式解决问题要注意其前提条件——两个事件所从属的试验是互相独立的，对公式的理解和试验的解释可以在等可能事件的情形下给出一般的证明.

7. 教材对假设检验概念进行简化处理，使教学要求有所控制，而突出了学习内容的实用性，这是一种较为符合实际的安排. 绝大部分学生适应具体的、表面化的、摸得着的感性内容学习，而不善于理性的、抽象性的思考. 特别是对有的问题只会做，不善于表达，说理就更加难了. 假设的基本思想就是利用小概率事件不会发生的事实来解释的，而它却偏偏发生了，从而否定前面的假设. 教学中要注意让学生掌握其中蕴含的思想.

8. 独立性检验在科学研究、日常生活中有着广泛的应用，有时可以帮助我们采取正确的决策，我们也要重点关注. 对于独立性检验问题，应以 χ^2 的计算与临界值的比较来判断分类变量的相关与无关. 教学中应用实例分析总结得出独立性检验的意义，并且认真体会独立性检验的基本思路类似于反证法，会用类比的思想方法得出独立性检验的基本步骤，让学生真正对统计思维和确定思维的差异有所理解.

9. 通过对典型案例的讨论，了解回归分析的基本思路、方法及其初步应用. 回归分析是对其有相关关系的两个变量进行统计分析的一种常用方法. 教学中应该通过生活中翔实的事例理解回归分析的方法，其步骤为通过散点图，直观地了解两个变量的关系，然后，通过最小二乘法建立回归模型，最后通过分析随机误差、相关系数等，评价模型的好坏. 教学要注重了解线性回归模型与函数模型的差异，判断刻画模型拟合效果的方法——相关系数和随机误差分析，理解蕴含在回归模型中的统计思想及实施步骤.

10. 在教学中，应鼓励学生经历数据处理的过程，培养他们对数据的直观感觉，认识统计方法的特点，体会统计方法应用的广泛性，让学生学会研究问题的科学方法，体会统计思维与确定性思维的区别，独立性检验与反证法的区别.

五、评价建议

本章学习评价，既要重视学生知识、技能的掌握和能力的提高，又要重视其情感、态度和价值观的变化；既要重视学生学习水平的甄别，又要重视其学习过程中主观能动性的发挥. 应将评价贯穿学习的全过程，发挥评价的甄别与选拔功能，突出评价的激励与发展功能.

1. 重视对学生数学学习过程的评价.

通过数学学习过程的评价，努力引导学生正确认识统计案例的价值，产生积极的数学学习态度、动机和兴趣.

统计案例学习过程的评价，应关注学生是否积极主动地参与案例学习活动，是否愿意且能够与同伴交流数学学习的体会、与他人合作探究问题.

本章评价应特别重视考察学生能否从实际情境中抽象出数学知识以及能否应用数学知识解决问题，重视考察学生能否理解并有条理地表达假设检验、独立性检验、线性回归等数学内容.

2. 正确评价学生的数学基础知识和基本技能.

评价要注重对统计思想本质的理解和思想方法的把握，避免片面强调机械记忆、模仿以及复杂技巧.

评价对统计分析的理解，可以关注学生能否独立举出一定数量的案例用于说明问题.

评价应关注学生能否建立不同知识之间的联系，把握数学知识的结构、体系.

对数学基本技能的评价，应关注学生能否在理解方法的基础上，针对问题特点对所学的统计分析知识进行合理选择和运用.

能否恰当地运用数学语言及自然语言进行表达与交流统计问题也是评价的重要内容.

3. 重视对学生能力的评价.

能力是通过知识的掌握和运用水平体现出来的，因此对于能力的评价应贯穿学生数学知识的建构过程与问题的解决过程.

在本章学习中，尤其是数学探索与数学建模活动中，应注重评价学生是否具有问题意识，是否善于发现和提出问题.

能否选择有效的方法和手段收集数据、联系相关知识、提出解决问题的思路，建立恰当的数学模型，进而尝试解决问题.

能否对统计分析的结果进行质疑、调整和完善.

能否将解决问题的方案与结果，用书面或口头等形式比较准确地表达并进行交流，根据问题的实际要求进行分析、讨论或应用.

4.1　随机对照试验案例

教材线索

本小节通过对案例“坏血病的研究”的探究，意图让学生了解安排试验的基本原则.通过对案例“静脉吻合分流术”的探究，解释无对照组、非随机对照试验、随机对照试验对试验结果的影响，说明随机安排对照组的必要性，否则可能得出错误的结论.“脊髓灰质炎”的案例体现安慰剂在试验中的作用.这三个案例编排遵循学生的认知规律，由简单到复杂而展开.本节内容虽在课程标准中没有体现，但是由于它在应用中的广泛性并且在科学研究中的极其重要的地位，因此补充本节作为统计案例的基础课程.

教学目标

（一）知识与技能

了解随机对照试验；了解使用安慰剂的方法；了解随机对照试验的基本思想、方法及初步应用.

（二）过程与方法

通过对典型案例（如“坏血病的研究”、“静脉吻合分流术”、“脊髓灰质炎”）的探究，加深对随机对照试验的感知，进一步体会随机对照试验的必要性和重要性.

（三）情感、态度与价值观

让学生体会到统计知识在研究中的初步运用，提高学生学习数学的乐趣.

教材分析

1. 重点：

让学生理解随机对照试验的基本思想、方法及初步应用，学会在试验中使用安慰剂.

2. 难点：

无对照组、非随机对照试验、随机对照试验、随机对照试验中使用安慰剂的区别，及其对试验结果判断的影响.

3. 注意对随机对照试验的理解.

教材中的随机对照试验是随机同期对照试验，它属于前瞻性研究，是采用随机数表或其他的随机方法，将符合入组要求的研究对象随机分配到试验组或对照组，接受相应的试

验措施，在一致的条件下或环境里，同步地进行研究和观察试验效应，并用客观的效应标准对试验结果进行科学的衡量和评价的试验设计.

4. 在科研工作中，显然不可能将全部希望研究的对象纳入研究，实际上只能从中选择一定的样本，所选择的样本必须具有总体代表性，这就需要采用随机抽样方法. 在实际应用中，试验的研究者或受试者都不知道试验对象分配的所在组接受的是试验措施还是对照措施，其目的是为了有效地避免研究者或受试者的主观偏见.

5. 随机对照试验的最大特点是通过随机抽样及随机分配的方法主动控制及消除某些已知或未知的偏倚因素的干扰，使研究的结果有良好的真实性.

6. 随机对照试验的意义是使每一个被研究的对象都具有相同的被选择的机会，避免人为的干预. 每一个被选择到的样本是分配到试验组还是分配到对照组，也需要相同的机会，避免研究者主观意愿对分组的干扰. 受试者在试验过程中的变化是难以预测的，只有采用随机的方法才能较好地避免这些因素对研究结果的影响.

教学建议

1. 本小节着重向学生介绍随机对照试验的概念、特点、必要性及其重要性，进一步介绍在随机对照试验中使用安慰剂在试验中的作用. 与此同时，尽可能多介绍一些随机对照试验在科研中的应用.

2. 可以多举一些案例来让学生判断哪些是随机对照试验，哪些是非随机对照试验，在判断中学会识别理解.

3. 随机对照试验教学举例中需注意如下问题：

（1）试验组与对照组必须同步开展研究，不能先做一组，再做另一组，并且试验的条件和环境必须一致，否则将会对结果造成影响，导致结论错误.

（2）试验组与对照组的试验期必须一致，不能一组观察时间长，另一组观察时间短.

（3）要有明确公认的判断标准.

（4）要有合理的纳入与排除标准，选择合格的研究对象，排除有其他可能不适于参加试验的研究对象.

（5）有合适的样本容量，样本量太少不能达到试验的目的，样本量太多会造成人力物力等方面的浪费.

（6）检验某药对某种疾病是否有效最好使用安慰剂.

例题解析

案例 1 （坏血病的研究）17 世纪初期，长期在海上航行的水手经常患坏血病. 坏血病的症状是牙龈肿大出血，皮肤上出现青灰的斑点. 英国海军部试图考察坏血病的起因. 他们怀疑这是因为水手体内缺少柑橘类水果中的某种成分造成的. 当此想法提出时，刚好有 4 艘军舰要远航. 为了调查水手是否由于缺少柑橘类的水果而导致坏血病，海军部设计了一次

试验：随机地安排一艘军舰上的水兵每天喝柑橘汁，另外 3 艘军舰不供应柑橘汁.

试验的结果是：航行还没结束，没有提供柑橘汁的水手多数得了坏血病，而提供柑橘汁的军舰没有发现坏血病. 最后，提供柑橘汁的军舰不得不把携带的柑橘汁分给其他的军舰，以帮助他们顺利返航.

分析 设想如果不设对照组，让 4 艘军舰都提供柑橘汁，就没有士兵患上坏血病，海军部无法作出判断是否其他的食品或治疗避免了坏血病. 因此，好的试验设计都应当有一个试验组和一个对照组. 这个案例说明设计对照试验在研究问题中的必要性.

案例 2 （静脉吻合分流术）在一些肝硬化病例中，许多病人会肝出血直至死亡. 历史上有一种称为“静脉吻合分流术”的外科手术用于治疗肝硬化，其原理是运用外科手术的方法使血液改变方向. 这种手术花费很大，并且有很高的危险性. 值得做这样的手术吗？

为了解决上述问题，一共进行了三批共 51 次手术试验. 第一批进行了 32 次无对照组的试验. 结果如下：

设计方法	试验次数	显著有效	中等有效	无效
	32	24	7	1
所占比例		75%	21.9%	3.1%

第二批共进行了 15 次手术试验，这批试验有对照组，但是对照组的病人不是随机选取的. 医生根据病人的临床诊断情况决定是将病人编入试验组做手术，还是编入对照组不做手术. 结果如下：

设计方法	试验次数	显著有效	中等有效	无效
	15	10	3	2
所占比例		66.7%	20%	13.3%

第三批是随机选取对照组. 这批试验共有 4 次手术. 随机选取的方式可以是掷硬币，如果硬币正面朝上就将病人选入试验组做手术，否则放入对照组不做手术. 这次试验的结果如下：

设计方法	试验次数	显著有效	中等有效	无效
	4	0	1	3
所占比例		0%	25%	75%

分析 第一批试验说明有 75%的手术显著有效，21.9%的手术中等有效，看来手术是值得做的. 第二批试验结果是 66.7%的手术显著有效，20%的手术中等有效，13.3%的手术无效. 这次试验结果与无对照组的试验结果差别不大. 第三批试验结果显示“静脉吻合分流术”几乎没有什么价值.

本案例通过无对照组、非随机有对照组、随机有对照组试验结果的比较说明在试验研究中“随机化原则”的重要性和必要性，如果不随机安排对照组就可能得出错误的结论.

遵循“随机化”原则，即参加试验的所有病人被随机地分配到不同的组，病人将进入哪一组完全是随机产生的，而不是人为地挑选哪些病人进入治疗组，哪些病人进入对照组．如果参加试验的病人群体足够大，随机化分配的结果将会使治疗组和对照组的病人有相似的特点．否则，如果由研究人员来挑选的话，就可能有意无意地把病情较轻的病人挑选入治疗组，使得治疗组的疗效过于显著．

在做对照试验时，为了尽量避免主观偏差，还需要遵循其他一些原则．在有可能影响效果的各个方面，治疗组和对照组的病人都应该相同或相似．而且，治疗组和对照组的病人的年龄、体重、健康状况、接受其他治疗的情况等各个方面也应该尽量相似．

案例 3　1916 年小儿麻痹症（脊髓灰质炎）袭击了美国，以后的 40 年间，受害者成千上万．20 世纪 50 年代，人们开始发现研究疫苗．当时萨凯（Salk）培育的疫苗最有希望．他的疫苗在实验室中表现良好：安全，产生对脊髓灰质炎病毒的抗体．但是在大规模使用前必须进行临床试验，通过试验最后确定疫苗是否有效．只有这样才能达到保护儿童的目的．

当时采用了随机对照的研究方案，对每个儿童用类似投掷一个硬币的方法决定是否将他编入试验组：正面朝上分在试验组，否则分在对照组．除了试验的设计人员，连医生也不知道哪个儿童分在试验组，哪个儿童分在对照组．

然后给分在试验组的儿童注射疫苗；给分在对照组的儿童注射生理盐水，让他们认为也被注射了疫苗．得到的结果如下：

	试验人数	试验后的发病率
试验组	20 万	28/100 000
对照组	20 万	71/100 000

试验结果显示，疫苗将小儿麻痹症的发病率从$\frac{71}{100\ 000}$降低到$\frac{28}{100\ 000}$．由于 71 和 28 的差别超出了随机性本身所能解释的范围，所以宣布疫苗是成功的．进一步分析指出，能以接近 100％的概率保证疫苗是有效的．

我们把对照组中的处理方法称为使用安慰剂，案例 3 中的安慰剂是注射生理盐水．给对照组的儿童使用安慰剂是为了避免儿童的心理作用影响试验的结果．尽管可以认为光靠精神作用不能抵抗小儿麻痹症，但是为了确认试验结果的可靠性，使用安慰剂是必要的．

不让医生知道儿童是来自试验组还是对照组，是为了使医生能够作出更公正的诊断，避免在诊断儿童是否患有小儿麻痹症时受到心理因素的影响．

分析　案例 3 中的随机对照试验又称为随机对照双盲试验，双盲之一是指儿童不知道自己是在试验组还是在对照组，也就是说不知道自己被注射的是疫苗还是安慰剂，甚至不知道有安慰剂，这就有效地避免了潜在的心理影响．另一盲是指医生不了解他诊断的病人在对照组还是在试验组，这就避免了医生对疫苗的主观看法带来的可能影响．在可能的场合，随机对照双盲试验可以最大限度地避免心理因素的影响．

如果使用列联表进行统计分析，得到的结果是：否定疫苗无效的概率是零.

如果没有对照组，就无法得到真实可靠的结论. 因为如果注射疫苗后发病率仍高，那可能是脊髓灰质炎大规模流行的原因，不利于疫苗的肯定.

如果注射疫苗后发病率较低，那可能是脊髓灰质炎没有大规模流行的原因，也不利于疫苗的正确判断.

相关链接

1. 对照试验类型介绍

（1）队列对照研究.

队列对照研究可采用前瞻性方式，也可以采用回顾性方式，将被观察的人群按其是否接触可能的致病因素或措施，分为两个群体，随访一定时期后，确定并比较各群体中，新发生病例数或某种效应的差异. 在队列研究中开始观察的时间，选用现在始点为前瞻性队列研究，选用过去始点为回顾性队列研究.

队列对照研究是群体研究中常用的方案，被观察的人群是否接触某种致病因素，是自然分配而形成的两个群体，研究者既不能随机安排，也不可能加以控制. 研究对象要有足够的观察时间，在自然病程中要有充分的时间，使危险因素的作用能够表现出来. 全部被观察者都必须进行随访，队列中失访人数增加，将会影响所观察的结果.

凡在群体中研究可能的致病因素或某项处理措施对固定人群的影响，均可使用队列研究，常用于病因研究、治疗性研究、预防性研究或预后研究.

（2）前与后对照研究.

前与后对照研究属于前瞻性研究，是将前后两个阶段，不同措施或治疗方法的结果进行比较，此方案至少要有两种或两种以上的处理措施，每种措施使用数日到数周，然后与另一种措施的结果进行比较. 两种措施之间，由于不同疾病的症状或药物的作用各不相同，因此可以不间隔或为期数日的间隔，可根据具体疾病或使用药物的性能而定. 该方案仅适用于慢性复发性疾病的治疗性试验，两个阶段的时间通常相等.

药物依赖者的戒断症状有自愈的特性，因此不适于采用该方案. 药物依赖者合并的其他持续存在、没有自愈特性的疾病则可以考虑采用.

（3）交叉对照试验.

交叉对照试验属于前瞻性研究，是对两组受试者使用两种不同的处理措施，然后互相交换处理措施，最后将结果进行对照比较的设计方法. 每个受试者或先或后都接受试验组或对照组的处理和治疗，至于谁先进入试验组或对照组，可采用随机的方法确定.

2. 随机对照试验阅读材料

1954 年，按照美国公共卫生署的组织，一共有大约 200 万个儿童参加了疫苗的现场试验. 在人类历史上还有许多类似的成功的例子，也有许多没有正确使用统计方法的惨重教训.

例如：随机对照试验成功地否定了治疗冠状动脉病的冠状旁道外科手术（手术昂贵，危险，病人痛苦），否定了抗凝剂治疗心脏病突发，否定了 5-FU 结肠癌化疗，否定了乙烯雌酚预防流产.

医疗方法结论	随机对照试验		历史对照试验	
结论	有效	无效	有效	无效
冠状旁道手术	1	7	16	5
抗凝剂治疗	1	9	5	1
5-FU 结肠癌化疗	0	5	2	0
乙烯雌酚预防流产	0	3	5	0

特别需要指出的是有关乙烯雌酚的试验，随机对照试验完全否定了这种预防流产的药. 而糟糕的设计试验却赞同药的疗效，这是一个医学的悲剧.

20 世纪 60 年代末，在美国医生每年大约为 5 万名孕妇发放这种药. 后来揭示，怀孕期间的母亲服用乙烯雌酚，20 年后给她们的女儿带来灾害性的副作用，引发她们的女儿得一种罕见的癌症.

人们从太多的悲剧中总结了教训：对一种新药不做随机对照试验是非常危险的.

4.2 事件的独立性

教材线索

本小节学习概率中的重要概念事件的独立性，目的是为了运用所学的独立事件的概率乘法公式，结合推断原理和假设检验的基本思想来解决一些简单的实际问题. 在“多知道一点”栏目，通过对典型案例（如“交通事故”、“服装推销”、“新药是否有效”）具体的操作，介绍了假设检验的基本思想. 另外，在下一节列联表独立性分析中，事件的独立性也是作为分析的一个工具. 因此，事件的独立性在本章中的地位和重要性是可想而知的.

教学目标

（一）知识与技能

在具体情境中，了解两个事件相互独立的概念，理解相互独立事件同时发生的概率的计算公式，并能解决一些简单的实验问题. 了解实际推断原理和假设检验的基本思想、方法及初步应用.

（二）过程与方法

借助相互独立事件同时发生的概率的公式处理较为复杂的概率计算，通过对典型案例（如“交通事故”、“服装推销”、“新药是否有效”）的探究，经历统计推断的过程，掌握事件的独立性的应用.

（三）情感、态度与价值观

培养学生分析问题，解决问题的能力；会利用学过的数学工具解决问题，体会数学的魅力；感受统计在现实生活中的应用，认识假设检验的基本思想中蕴藏的数学的思维方法.

教材分析

1. 重点：

理解事件 A 与 B 独立的概念，并能运用相互独立事件的概率乘法公式解决实际问题.

2. 难点：

让学生了解假设检验的概念、基本思想、方法及初步应用.

3. 将假设检验的原理与反证法的原理进行类比. 反证法原理：在一个已知假设下，如果推出一个矛盾，就证明了这个假设不成立. 假设检验原理：在一个已知假设下，如果一

个与该假设矛盾的小概率事件发生，就推断这个假设不成立.

4. 教材限于要求，不出现“事件的积”的名称，而只是结合实例说明事件 A，B 独立的应用. 教材中介绍的事件 A，B 独立是分别从属两个独立的试验. 对于 n 个试验是独立的应给出解释：一般地，如果有 Ω_1，Ω_2，…，Ω_n　n 个试验，而每个试验的结果彼此不发生关系，那么这些试验是独立的.

5. 相互独立事件的概率乘法公式，对于等可能性事件的情形可以一般地给予证明.

设甲试验共有 N_1 种等可能的不同结果，其中属于 A 发生的结果有 m_1 种；乙试验共有 N_2 种等可能的不同结果，其中属于 B 发生的结果有 m_2 种. 由于事件 A 与 B 互相独立，这里的种数 N_1，m_1 与 N_2，m_2 之间互相没有影响. 那么，甲、乙两试验的结果搭配在一起，总共有 $N_1 \cdot N_2$ 种不同的搭配. 显然，这些搭配都是具有等可能性的.

现在考察属于事件 $A \cap B$ 的试验结果. 显然，凡属于 A 的任何一种甲试验的结果同属于 B 的任何一种乙试验的结果的搭配，都表示 A 与 B 同时发生，即属于事件 $A \cap B$，这种结果总共有 $m_1 \cdot m_2$ 种. 因此得 $P(A \cap B)=\frac{m_1 \cdot m_2}{N_1 \cdot N_2}=\frac{m_1}{N_1} \cdot \frac{m_2}{N_2}$，$\therefore P(A \cap B)=P(A)P(B)$.

6. 如果事件 A 与 B 相互独立，那么下列各对事件——A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也都相互独立. 这些性质都很重要. 在解决这一小节的例 2、例 4 和例 5 时都用到了. 教材在介绍了事件的独立性后，没有明确指出. 教学中应让学生领会其意义，并会运用这些结论.

7. 假设检验是利用样本的实际统计量，去检验事先对总体某些数量特征所作的假设是否可信，进而为决策取舍提供依据的一种统计分析方法，是推断性统计学中的一项重要内容.

假设检验的基本思路是：

（1）对总体参数作某种假设；

（2）根据样本得到的信息，考虑接受假设是否会导致不合理的结果，如结果合理就接受假设，结果不合理就拒绝假设.

假设的命题是：

（a）原假设；（b）备择假设. 如：新进口的薄钢板的平均厚度等于 4 mm. 原假设 H_0：$x=4$ mm；备择假设 H_1：$x \neq 4$ mm.

8. 小概率原理：

小概率事件在一次试验中几乎不可能发生，是假设检验的基本依据. 其基本逻辑是：先作出关于总体的一个假设（原假设），然后随机从总体中抽取一个样本，如果样本调查的结果在原假设成立的情况几乎是不可能发生的，就拒绝原假设，而接受原假设的对立面备择假设. 小概率原理这种推理方法决定了无论是接受或是拒绝原假设都可能犯错误，但两者的机会不同. 本小节将假设检验安排在“多知道一点”栏目中，通过案例让学生了解假设检验的基本思想方法，而未对假设检验的概念、原理、相关术语、方法、步骤、与区间估计的关系等进行详细阐述，教学中不必补充介绍.

9. 对小概率原理的说明：

（1）“小概率事件”：概率必须很小，那么，究竟要小到什么程度？在体育统计中一般认为在 0.05 以下为小. 但在实际中，与具体问题有关. 比如，买奖券，中奖概率很小，但人们还是愿意试一试，碰碰“运气”，原因在于花钱不多. 如果是 1 000 元一张奖券，那些想中奖的人便不会购买. 对于生命攸关的事，则对小概率的要求会更高. 例如，乘坐飞机，尽管出事的概率很小，但人们还是担心，有的购买保险人甚至写遗嘱.

（2）“一次试验”：若多次试验，尽管是小概率事件，也很可能发生. 比如，买奖券，一张中奖的可能性很小，但如果买很多，中奖的可能性会增大，如全部买下，则中奖可能性为 100％.

（3）“原理”：这是个原理，不是定理，有人为规定的含义，存在犯错误的风险，但是犯错误的概率又是小概率，所以人们共同遵循.

教学建议

1. 对于选修文科的学生，由于缺少一大块概率知识，必须向他们补充事件独立性的知识，所以在本节中应向学生较详细地介绍两事件 A 与 B 相互独立的含义.

2. 根据标准的要求，教学重点不要放在事件间的“互斥”与“相互独立”两个不同概念的识别上，而应让学生认识到事件的独立性在统计分析中的地位和作用.

3. 解本小节的应用题，运用两种思路：正向思考与逆向思考. 正向思考时，可通过“分类”或“分步”，对稍复杂的问题进行分解；逆向思考，用集合的观点看，就是先从问题涉及的集合在全集中的补集入手，这种方法常使一些较复杂的问题得到简化.

4. 要解释清楚假设检验的思想必须明确以下两点：

（1）假设检验的假设构成：

假设检验问题由两个互斥的假设构成，其中一个叫作原假设，用 H_0 表示；另一个叫作备择假设，用 H_1 表示.

（2）求解假设检验问题的思路：

①在 H_0 成立的条件下，构造与 H_0 矛盾的小概率事件；

②如果样本使得这个小概率事件发生，就能以一定把握断言 H_1 成立，否则，断言没有发现样本数据与 H_0 相矛盾的证据.

5. 由于假设检验思想理解起来比较困难，教学中要尽可能多举些案例，让学生在案例的学习中体会假设检验的思想方法.

例题解析

1. 事件的独立性.

例 1 投掷一枚骰子和一枚硬币，计算骰子出现 2 或 4 点，硬币正面朝上的概率.

分析 要强调事件“骰子出现 2 或 4 点”与事件“硬币正面朝上”分别属于两个独立

试验，它们相互之间是没有影响的，这样才能运用相互独立事件的概率乘法公式进行计算. 通过本题使学生理解事件 A 与 B 独立的含义.

例 2 同学甲的数学作业得优的概率为 0.8，同学乙的语文作业得优的概率为 0.7. 今天同时留了数学和语文作业，计算甲的数学作业得优，乙的语文作业没得优的概率.

分析 本题说明如果事件 A 与 B 相互独立，那么事件 A 与 $\overline{B}$ 也相互独立. 教学中应让学生领会其意义，并会运用这些结论.

例 3 高中每个年级三个班的羽毛球水平相当，各年级举办班级羽毛球比赛时，计算都是三班得冠军的概率.

分析 本题是 n 个事件相互独立的一个应用，要注意审题，区分三个班与三班的不同，向学生分析三个班的羽毛球水平相当，说明每个班级获胜的概率均为 $\frac{1}{3}$，而三班均分别在不同的三个年级，它们获得冠军这个事件的概率是相互独立的.

例 4 一服装店出售标价为 180 元的夹克. 售货员对前来问价的顾客以 180 元推销成功的概率是 0.8. 如果一小时内有两位顾客前来问价，计算服务员对这两位顾客都没有推销成功的概率.

分析 通过本题让学生理解：如果事件 A 与 B 相互独立，那么 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立. 教学中还可以向学生解释利用对立事件概率的性质，先计算服务员对这两位顾客至少有一位推销成功的概率.

例 5 下围棋时，李浩每局赢张岚的概率只有 0.45. 假设他们下棋时各局的输赢是独立的.

(1) 计算李浩连输 3 局的概率；

(2) 计算 3 盘棋中李浩至少赢 1 局的概率.

分析 这是一个涉及事件加法与乘法运算、带有综合性的典型概率计算问题. 其中第(1)小题较为简单，其解法与例 4 一样. 对于第(2)小题，是“至少一个发生”模式的应用题，这类题一般有正向思考与逆向思考两种思路，教材中列出其中一种，教学中可以介绍另一种思路，并比较它们解法的优劣.

2. 假设检验案例.

案例 1 一条新建的交通干线全长 10 km，前半段 5 km，后半段 5 km. 在刚刚通车的一个月中，后半段就发生了 4 起交通事故，而前半段没有发生交通事故. 能否认为后半段发生交通事故的概率比前半段大?

分析 初看起来的确是后半段发生交通事故的概率比前半段大，但有的人可能会提出如果前后半段发生交通事故的概率相同，则每一起事故发生在后半段的概率都是 0.5，也有可能 4 起交通事故都发生在后半段是非常凑巧的，并不能说明后半段发生交通事故的概率比前半段大. 在不同想法产生冲突的基础上，学生将体会到需要一个“衡量标准”. 在此基础上，教师引导学生体会下面的“标准”：假设后半段发生交通事故的概率比前半段小，发生 4 起交通事故的可能性不大. 若这件事发生的概率很小，在一次试验中几乎不会发生，那

么现在发生了，就应该是后半段发生交通事故的概率比前半段大. 通过本例让学生初步体会假设检验的整个过程，体会假设检验的思想方法.

案例 2 一服装店出售标价为 180 元的夹克. 售货员声称对前来问价的顾客以 180 元推销成功的概率 $p=0.6$. 现在一小时内有 4 位顾客前来问价，服务员对这 4 位顾客都没有推销成功. 能否判定售货员的 $p=0.6$ 不对?

分析 在推销成功的概率 $p=0.6$ 成立的条件下，构造与其矛盾的小概率事件“4 位顾客都没有推销成功”，计算结果使得这个小概率事件发生，就能以一定把握断言“推销成功的概率 $p=0.6$ 不对”成立；否则，断言没有发现样本数据与“推销成功的概率 $p=0.6$ 成立”相矛盾的证据.

案例 3 某地区的山羊患某种疾病的概率是 0.4，且每只山羊患病与否是相互独立的. 现在为了判断一种新的预防药是否有预防作用，随机选取了 6 只山羊做试验，这 6 只山羊用药后都没有得这种病. 问此新药是否有效?

分析 初看起来，会认为这药一定有效，因为服药的山羊均未患病. 但细想一下，会有问题，因为大部分山羊不服药也不会患病，患病的只占 0.4 左右. 这 6 只山羊都未患病，未必是药的作用.

分析这问题的一个自然想法是，若药无效，随机抽取 6 只山羊都不患病的可能性不大，这件事发生的概率很小，几乎不会发生，那么现在我们随机抽取这几只山羊都未患病，应该是药的效果，即药有效.

现假设新药无效，在此假设下令 X 为任取 6 只山羊中患病的头数，则 X 服从 $n=6$，$p=0.4$ 的二项分布.

$$P(X=k)=C_6^k 0.4^k 0.6^{6-k},\quad k=0,1,\cdots,6.$$

6 只山羊都不生病的概率是

$$P(X=0)=0.6^6\approx 0.046\ 7.$$

这概率很小，该事件几乎不会发生，但现在它确实发生了，说明我们的假设不对，新药是有效的.

这里的分析思想有些像反证法，但并不相同. 给定假设后，我们发现，一个概率很小几乎不会发生的事件却发生了，从而否定我们的“假设”. 在此前提下，已发生的事件“6 只山羊都未生病”的概率极小，几乎不会发生，从而否定前提假设.

相关链接

1. 条件概率

设有事件 A 与 B，在事件 B 已经发生的条件下，事件 A 发生的概率，叫作事件 A 在事件 B 已发生的条件下的条件概率，记作 $P(A|B)$.如果 $P(A|B)=P(A)$成立，就说事件

A 对事件 B 是独立的.同样,如果 $P(B|A)=P(B)$成立，就说事件 B 对事件 A 是独立的.

在概率论中，可以证明：$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B)$.

这就是说，两个事件同时发生的概率，等于其中一个事件发生的概率与另一事件在前一事件已发生的条件下的条件概率的积. 根据这个公式，容易证明：如果事件 A 对事件 B 独立,那么事件 B 对事件 A 也独立.事实上，根据上面的公式，$P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B)$,

又已知事件 A 对事件 B 独立，即 $P(A|B)=P(A)$.

我们得到：$P(B|A)=P(B)$.

即得到事件 B 对事件 A 独立. 由此可见，事件的独立是一种相互对等的性质. 如果事件 A 对事件 B 独立，那么就可以说事件 A 与 B 相互独立.

当事件 A 与 B 相互独立时，$P(B|A)=P(B)$,

因此，$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=P(A)P(B)$，这就是相互独立事件的概率乘法公式.

2. 假设检验问题

(1) 什么是假设检验问题?

先对总体的某个未知参数作某种假设，然后由所抽取的样本，构造合适的统计量，对所提出的假设作出统计判断——是接受还是拒绝，这类统计推断问题称为假设检验.

(2) 假设检验的推理有何特点?

第一，用了反证法的思想. 为了判断一个“结论”是否成立，先假设“结论”成立，然后在这结论成立的前提下，进行推导和计算，如果导致了一个不合理的现象出现，就表明这个结论不成立，于是我们就认为这个结论不正确. 通常我们称假设“结论”成立为原假设，记为 H_0（又称零假设）；与之对立的“结论”称为备择（选）假设，记为 H_1.

第二，用了小概率原理. 上面所说的导致的“不合理”现象，并非是形式逻辑上的绝对不合理，而是违背了称为小概率原理的常理：小概率事件在一次试验中是不大可能会发生的.

总之，假设检验的推理特点是：在推理思路上是利用了反证法的思想；在推理上是利用了小概率原理.

4.3　列联表独立性分析案例

教材线索

教材由实际问题出发说明分析这些问题需要考察两种因素的关系，提出列联表的独立性分析就是分析两种因素是否相互独立的方法，并通过对“患肺癌与吸烟是否有关?”这一案例分析来学习列联表的独立性分析方法.

教学目标

（一）知识与技能

了解独立性检验（只要求 2×2 列联表）的基本思想、方法及初步应用，让学生经历数据处理的过程，提高探索解决问题的能力.

（二）过程与方法

通过对典型案例（如“患肺癌与吸烟是否有关?）的探究和独立性检验的基本思想的学习，让学生能理解统计思维与确定思维之间的差异，体会统计在现实生活的广泛应用.

（三）情感、态度与价值观

从实例中发现问题，提高学习兴趣，激发学习积极性和主动性，不断自我完善，养成不断探求知识完善自我的良好态度.

教材分析

1. 重点：

理解独立性检验的基本思想.

2. 难点：

利用随机变量 χ^2 来确认“两个分类变量有关系”这一结论成立的可信程度.

3. 独立性检验思想方法的学习重在使用. 这部分内容是《必修 3》统计内容的深化，反映了对已学知识的螺旋式上升的认识过程，也充分体现了这种思想的应用价值，在应用中不断提高对这种思想方法的认识.

4. 分类变量：取不同的值，表示个体所属的不同类型，这类变量称为分类变量. 如性别、国籍、宗教信仰等.

列联表：列出的两个分类变量的频数表. 与表格相比，列联表的三维柱形图和二维条形图能更直观地反映出相关数据的总体状况.

5. 两类分类变量是否有关的判断方法：

（1）用三维柱形图、二维条形图进行直观观测；

（2）进行观测，χ^2 越大，两个分类变量之间有关系的可信程度越大.

6. 利用随机变量来确定在多大程度上可认为“两个分类变量是否有关系”的方法称为两个分类变量的独立性检验. 独立性检验的基本思想类似于反证法. 要确认“两个分类变量有关系”这一结论成立的可信度，首先假设结论 H_0 不成立，即假设“两个分类变量没有关系”成立，在该假设下构造的随机变量 χ^2 应该很小. 如果由观测数据计算得到的 χ^2 的观测值很大，则在一定程度上说明假设不合理.

7. 实际解决问题时，只凭列联表的数据下结论不够确切，原因是列联表中的数据是样本数据，它只是总体的代表，具有随机性. 用列联表检验的方法确认所得结论，能够确切判断在多大程度上适用于总体.

8. 运用独立性检验的基本思想、方法解决实际问题得出的结论往往是有条件的，不能不顾条件，扩大范围使用. 如数据来自于医院的住院病人，因此题目中的结论能够很好地适用于住院的病人群体，而这个结论推广到其他群体则可能会出现错误，除非有其他的证据表明可以进行这种推广.

教学建议

1. 教学中应用实例分析总结得出独立性检验的意义，并且认真体会独立性检验的基本思路类似于反证法，会用类比的思想方法得出独立性检验的基本步骤. 重点是了解独立性检验的思想方法，对其理论基础不作要求，避免学生单纯记忆和机械套用公式进行计算. 另外，通过这种思想方法的学习，让学生真正对统计思维和确定思维的差异有所理解.

2. 提供学生感兴趣的典型实例，激发学生的学习兴趣.

教学中，教师首先要选择实际的、学生感兴趣的、能反映统计方法的典型案例，组织学生就如何解决案例中的问题展开讨论，以激发学生的学习兴趣. 标准中已经提供了一些典型案例，教师还可以自己收集一些实例.

3. 鼓励学生探索解决问题的方法，经历数据处理的过程.

在选择完适当的统计案例进行讨论后，教师应鼓励学生尝试探索解决问题的方法，以使他们经历数据处理的过程，培养他们对数据的直观感觉，认识统计方法的特点（如统计推断可能犯错误，估计结果的随机性），体会统计方法应用的广泛性. 教师还应尽量给学生提供一定的实践活动机会，选择某些案例，要求学生亲自实践.

4. 虽然这部分所涉及的统计方法对学生来说是比较陌生的，但教师不宜采取直接介绍方法，让学生模仿应用的教学模式，而要学生自己设计解决问题的方案，并通过交流和引导使学生认识到所学方法的基本思想. 因为统计学习的一个主要目标是培养学生数据处理的能力，而这一能力需要建立在学生亲自处理数据、解决问题的基础之上.

5. 在 2×2 列联表独立性检验的教学中，教师应指导学生关心如何选用一个量，用它的大小来说明独立性是否成立，从直观上关注其方法的合理性，至于最后选取的量及其大小

的界定超出了高中的范围，可以只告诉其结果，使之能够操作即可.

例题解析

案例 患肺癌与吸烟是否有关?

分析

吸烟的人在调查总人数中所占的百分比：54%.

患肺癌的人在调查总人数中所占的百分比：60%.

既吸烟又患肺癌的人在调查总人数中所占的百分比：39%.

显然，$54\%\times60\%\neq39\%$. 我们有理由相信吸烟是与肺癌有关的.

在解决具体实例的基础上，教师要引导学生总结出一般情况下的解决问题的方法. 若 $\frac{a}{n}=\frac{a+b}{n}\cdot\frac{a+c}{n}$，则吸烟与肺癌无关联，可以认为它们相互独立. 这个式子还可以改写为：$a=\frac{(a+b)(a+c)}{n}$. 在吸烟与患肺癌问题中，$\frac{(a+b)(a+c)}{n}=32.4<39$，这说明既吸烟又患肺癌的人数比独立时要多，在这种情况下，吸烟会使患肺癌的人数增加.

需要注意的是，在式子 $\frac{a}{n}=\frac{a+b}{n}\cdot\frac{a+c}{n}$ 中的各个分式在实际中都是频率，不能等同于概率. 实际上，为了应用概率论得到统计量的近似的分布，统计学家最终选用了：

$$\chi^2=n\left[\frac{\left(\frac{a}{n}-\frac{a+b}{n}\cdot\frac{a+c}{n}\right)^2}{\frac{a+b}{n}\cdot\frac{a+c}{n}}+\frac{\left(\frac{b}{n}-\frac{a+b}{n}\cdot\frac{b+d}{n}\right)^2}{\frac{a+b}{n}\cdot\frac{b+d}{n}}+\frac{\left(\frac{c}{n}-\frac{a+c}{n}\cdot\frac{c+d}{n}\right)^2}{\frac{a+c}{n}\cdot\frac{c+d}{n}}+\frac{\left(\frac{d}{n}-\frac{c+d}{n}\cdot\frac{b+d}{n}\right)^2}{\frac{c+d}{n}\cdot\frac{b+d}{n}}\right]$$

来衡量独立性的大小,它可以化简为 $\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$.

当 $\chi^2>3.841$ 时，有 95%的把握判定两个属性不独立；当 $\chi^2>6.635$ 时，有 99%的把握判定两个属性不独立.

例 用两种检验方法对某食品做沙门氏菌检验. 结果如下. 试比较两种方法和阴性结果是否有关系.

	阳性	阴性	合计
荧光抗体法	160	5	165
常规培养法	26	48	74
合计	186	53	239

分析 本题主要是 2×2 列联表的基本思想及简单应用，先假设 H_0：检验方法与检验结果无关，算出 χ^2 的值：

$$\chi^2=\frac{239\times(160\times48-26\times5)^2}{165\times74\times186\times53}\approx113.185.$$

查表可知 $P(\chi^2\geqslant10.828)\approx0.001$，而 113.185 远大于 10.828，所认有 99.9%的把握认为它们之间有关系.

相关链接

统计量 χ^2 的意义

为了便于理解，现结合一实例说明统计量 χ^2 的意义. 根据遗传学理论，动物的性别比例是 1∶1. 统计某羊场一年所产的 876 只羔羊中，有公羔 428 只，母羔 448 只. 按 1∶1 的性别比例计算，公、母羔均应为 438 只. 以 A 表示实际观察次数，T 表示理论次数，可将上述情况列成如下表：

羔羊性别实际观察次数与理论次数

性别	实际观察次数 A	理论次数 T	$A-T$	$(A-T)^2/T$
公	$428(A_1)$	$438(T_1)$	-10	0.228 3
母	$448(A_2)$	$438(T_2)$	10	0.228 3
合计	876	876	0	0.456 6

从表看到，实际观察次数与理论次数存在一定的差异，这里公、母各相差 10 只. 这个差异是属于抽样误差（把对该羊场一年所生羔羊的性别统计当作是一次抽样调查）还是羔羊性别比例发生了实质性的变化？要回答这个问题，首先需要确定一个统计量用以表示实际观察次数与理论次数偏离的程度；然后判断这一偏离程度是否属于抽样误差，即进行显著性检验. 为了度量实际观察次数与理论次数偏离的程度，最简单的办法是求出实际观察次数与理论次数的差数. 从表看出：$A_1-T_1=-10$，$A_2-T_2=10$，由于这两个差数之和为 0，显然不能用这两个差数之和来表示实际观察次数与理论次数的偏离程度. 为了避免正、负抵消，可将两个差数 A_1-T_1、A_2-T_2 平方后再相加，即计算 $\sum(A-T)^2$，其值越大，实际观察次数与理论次数相差亦越大，反之则越小. 但利用 $\sum(A-T)^2$ 表示实际观察次数与理论次数的偏离程度尚有不足. 例如某一组实际观察次数为 505、理论次数为 500，相差 5；而另一组实际观察次数为 26、理论次数为 21，相差亦为 5. 显然这两组实际观察次数与理论次数的偏离程度是不同的，因为前者是相对于理论次数 500 相差 5，后者是相对于理论次数 21 相差 5. 为了弥补这一不足，可先将各差数平方除以相应的理论次数后再相加，并记之为 χ^2，即

$$\chi^2=\sum\frac{(A-T)^2}{T}.$$

也就是说 χ^2 是度量实际观察次数与理论次数偏离程度的一个统计量，χ^2 越小，表明实际观察次数与理论次数越接近；$\chi^2=0$，表示两者完全吻合；χ^2 越大，表示两者相差越大.

对于表中的资料，可计算得

$$\chi^2=\sum\frac{(A-T)^2}{T}=\frac{(-10)^2}{438}+\frac{10^2}{438}\approx 0.456\ 6,$$

这表明实际观察次数与理论次数是比较接近的.

4.4　一元线性回归案例

教材线索

教材通过对典型案例“船只数量与撞死海牛数的关系”的探究，揭示了统计中用相关系数 r 来衡量两个变量之间线性关系的强弱，在《必修 3》学习建立回归直线的基础上，介绍一元线性回归模型，进而通过案例“出口贸易额与 GDP 数据的关系”巩固所学的知识.

教学目标

（一）知识与技能

理解变量之间的相关关系、相关系数等概念，熟练运用公式求相关系数，掌握求一元线性回归直线方程的方法，了解回归的基本思想、方法及其初步应用.

（二）过程与方法

通过对典型案例（如“船只数量与撞死海牛数的关系”、“出口贸易额与 GDP 数据的关系”）的探究，培养学生分析问题、解决问题的能力，处理数据的能力.

（三）情感、态度与价值观

初步体会两个变量间的相关关系，树立辩证唯物主义的世界观，培养学生的情感、意志、刻苦耐劳、科学求是求实的非智力因素，要有科学方法和态度.

教材分析

1. 重点：

学生了解线性回归的基本思想和方法.

2. 难点：

掌握建立回归模型的基本步骤.

3. 变量之间存在着两类关系：一类关系是函数关系，这是确定性关系. 另一类关系是相关关系，这是非确定性关系. 这里仅介绍两个变量中，一个变量为可控制变量，另一个变量为随机变量的情形. 例如在水稻产量与施肥量的关系中，施肥量是可控制变量，而水稻产量是随机变量.

在现实生活中，相关关系是大量存在的. 从某种意义上看，函数关系是一种理想的关系模型，而相关关系是一种更为一般的情况. 因此研究相关关系，不仅可使我们处理更为

广泛的数学应用问题，还可使我们对函数关系的认识上升到一个新的高度.

4. 我们研究的是回归分析中最简单也是最基本的一种类型：一元线性回归分析.

首先，在具有相关关系的变量中，如果因变量仅与一个自变量有关，相应的统计分析称为一元回归分析；如果因变量与多个自变量有关，相应的统计分析称为多元回归分析. 其次，因变量与自变量的关系，有线性的和非线性的两种，因此相应的统计分析分别称为线性回归分析和非线性回归分析. 可见，本小节中研究的一元线性回归分析，是回归分析中最简单的一种情形，它不仅有着广泛的直接应用，而且是进一步学习回归分析的基础.

5. 对两个变量的线性相关性进行检验，教材中采用的是相关系数检验法. 相关系数取值在$[-1,1]$之间，该值刻画出两个变量之间关系的有无、强弱和方向. $|r|$越接近于1，表明相关程度越好；$|r|$越接近于0，表明相关程度越差. 相关性检验是一种假设检验. 这种检验的统计假设是两个变量不具有线性相关关系. 由于假设检验并非本小节讨论的重点，这项内容在处理上力求简化.

教学建议

1. 建议在本章学习新课之前先回顾《必修3》的相关内容，可以通过具体问题让学生复习统计的有关概念与方法. 要强调，统计学最关心的是：①如何抽取数据；②如何从数据中提取信息；③所得结论的可靠性.

2. 通过对典型案例的讨论，了解回归分析的基本思路、方法及其初步应用. 回归分析是对其有相关关系的两个变量进行统计分析的一种常用方法. 教学中应该通过生活中翔实的事例理解回归分析的方法，其步骤为通过散点图直观地了解两个变量的关系，然后，通过最小二乘法建立回归模型，最后通过分析随机误差、相关系数等，评价模型的好坏. 重点是了解回归分析的思想方法，对其理论基础不作要求，避免学生单纯记忆和机械套用公式进行计算.

3. 通常在具体问题中，是先进行相关性检验. 通过检验确认两个变量具有线性相关关系后，再求其线性回归方程. 否则，所求的线性回归方程是无意义的. 鼓励学生使用计算器、计算机等现代技术手段来处理数据，有条件的学校还可运用一些常见的统计软件解决实际问题.

4. 本节“回归分析”的过程相当完整，从收集两个变量的数据开始，先画散点图，进而直观判断它们是否线性相关，然后在相关前提下尝试用线性回归模型来拟合，最后还通过回归直线得到预测值. 教学时应让学生结合案例1体会这一完整的过程.

5. 在教学中，首先要让学生理解这里讨论的相关关系和过去学的函数关系的区别. 这很重要.

在估计问题中，应要求学生自己探索回归直线的求法. 在统计中，没有对与错，只有好与坏. 重要的是寻找好的方法. 从历史上看，拉普拉斯、欧拉等许多大数学家都曾为寻找

这一直线而努力，他们的做法并不成功. 后来，由勒让德、高斯提出了最小二乘法. 课本套用公式计算回归系数，对学生来说并不困难. 但这里应该让学生体会到，数学中介绍的方法是前人经过长期探索才得到的，体会在统计中寻找方法的重要.

作为老师应该清楚，之所以用最小二乘法，是因为这样得到的估计量，在许多标准下是好的. 而这些标准我们在中学暂时无法讲授. 另外，根据实际问题的需要，完全可以用别的方法，例如，把误差的平方改为误差的绝对值，或把误差改为求点到直线的距离等等. 人们现在正是这样做的. 不应该让学生错误地以为最小二乘法是绝对的、永远是最优的.

应该让学生关注方程的意义和合理性. 可以通过例子，提示回归系数计算的“不合理性”：比如，如果在圆上取一组点，仍可套用公式，用这组点的坐标得到一个回归直线方程，这样的直线显然是没意义的.

6. 教学中要引导学生通过实例，从感性到理性逐层深入地探求对线性相关程度进行检验的统计量（相关系数），从而建立线性回归分析的基本算法步骤. 对为什么相关系数 r 可以估计相关的程度只要求从直观上加以感受，不必介绍理论依据.

例题解析

案例 海牛是一种体型较大的水生哺乳动物，体重可达到 700 kg，以水草为食. 美洲海牛生活在美国的佛罗里达州，在船舶运输繁忙季节，经常被船的螺旋桨击伤致死. 下面是佛罗里达州记录的 1977 年至 1990 年机动船只数量 x 和被船只撞死的海牛数 y 的数据.

年　份	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983
机动船只数量 x	447	460	481	498	513	512	526
撞死海牛数 y	13	21	24	16	24	20	15
年　份	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990
机动船只数量 x	559	585	614	645	675	711	719
撞死海牛数 y	34	33	33	39	43	50	47

现在问：

(1) 随着机动船只数量的增加，被撞死的海牛数是否会增加？

(2) 当机动船增加到 750 只，被撞死的海牛会是多少？

分析 在这个案例中，被撞死的海牛数是随机数，无法与机动船只数量建立函数关系. 画出这组数据的散点图，发现这些点分布在一条直线的附近，且有上升的趋势. 那么第一个问题的回答就需要知道被撞死的海牛数与船只数量的密切程度，进而引入相关系数. 根据画出的散点图，观察出点分布在一直线的附近，以及求出的相关系数可以知道被撞死的海牛数会随着船只的增加而增加，那么要回答第二个问题，只要构建一元线性回归模型，求出 x_i 与 y_i 的回归直线 $y=bx+a$ 即可. 通过本案例的学习使学生了解利用一元线性回归

模型解决变量间关系的思想及其步骤.

例 下面是我国1990年至2000年出口贸易额 x（百亿美元）和我国 GDP y（人民币百亿元）的数据.

年　份	1990	1991	1992	1993	1994	1995
x	6.21	7.19	8.49	9.17	12.10	14.88
y	185.48	216.18	266.38	346.34	467.59	584.78
年　份	1996	1997	1998	1999	2000	
x	15.11	18.29	18.37	19.49	24.92	
y	678.85	744.63	783.45	820.68	894.42	

试建立 y 与 x 之间的回归直线.

分析 通过画散点图、列表、计算相关系数、建立回归直线、利用回归直线作出预测的过程，让学生进一步巩固所学的知识，这也体现线性回归模型的广泛应用.

相关链接

用 Excel 作回归曲线和求回归方程的操作步骤

1. 作回归曲线的步骤：

（1）将数据输入 Excel 表格中，行表示或列表示均可.

（2）选定数据区域，然后单击工具栏中的“图表向导”，弹出对话框，选择“XY 散点图”，再选择子图表中的第一个散点图.

（3）按“下一步”，大概的图就完成了，它会让你选择所产生的数据是“行”或“列”，根据你的要求选择. 再点击下一步，可以将行或列的标题内容填入. 接着点击“下一步”之后点“完成”. 图表就完成了.

（4）选择图表上的任意一个点（选中一个点之后，其余的点都变为黄色了），单击右键，选择“添加趋势线”. 在“添加趋势线”对话框中的“类型”中选“线性”，在“选项”中把“显示公式”和“显示 R 平方值”点上，如果你不想设置截距，就不用点击“设置截距”. 然后确定.

2. 求回归方程的步骤：

（1）将数据输入 Excel 表格中.

（2）选择“插入”、“函数”、“统计”.

（3）选择 slope，点箭头，选择 x，y，可以算出斜率.

（4）选择 intercept，可以算出截距.

教材习题参考解答

P.5　练习

(D)(B)

习题 1

1. 20 世纪 60 年代末，在美国医生每年大约为 5 万名孕妇发放乙烯雌酚. 后来揭示，怀孕期间的母亲服用乙烯雌酚，20 年后给她们的女儿带来灾害性的副作用，引发她们的女儿得一种罕见的癌症. 人们从太多的悲剧中总结了教训：对一种新药不做随机对照试验是非常危险的.

2. (1) 不能.

(2) 采取随机对照的试验方案，参加试验的高血压患者 200 位，对每个高血压患者用投掷一个硬币的方法决定是否将他编入试验组：正面朝上的分在试验组，否则分在对照组. 除了试验的设计人员，连医生也不知道哪个高血压患者分在试验组，哪个高血压患者分在对照组. 然后给分在试验组的高血压患者使用磁疗手表；给分在对照组的高血压患者使用外观完全相同的普通手表，让他们认为也使用了磁疗手表.

(3) 设计中用投掷一个硬币的方法说明试验组和对照组是随机选取的.

(4) 在设计中使用了“安慰剂”，“安慰剂”是外观完全相同的普通手表.

(5) 不能让医生知道.

P.9 练习

1. (1) $p=99\%$；

(2) $p_n=0.99^{100}$；

(3) $1-0.99^{100}$.

2. 0.999^n.

习题 2

1. $\frac{1}{12}$.

2. (1) $\frac{144}{133\ 225}$；

(2) $\frac{288}{133\ 225}$.

3. (1) 0.028 9；

(2) $2\times(0.001\ 7+0.015+0.04)=0.113\ 4$；

(3) 该手机明天和后天一共收到 0 条短信的概率是 0.000 1；

该手机明天和后天一共收到 1 条短信的概率是 0.001 2；

该手机明天和后天一共收到 2 条短信的概率是 0.006 8；

该手机明天和后天一共收到 3 条短信的概率是 0.024 2；

该手机明天和后天一共收到 4 条短信的概率是 0.060 6；

该手机明天和后天一共收到 5 条短信的概率是 0.113 4；

故该手机明天和后天一共收到至多 5 条短信的概率是 0.206 3.

P. 17 练习

先假设 H_0：高中生是否喜欢参加体育锻炼与性别无关.

先计算 χ^2 的值：

$$\chi^2=\frac{500\ (197\times120-135\times48)^2}{245\times255\times332\times168}\approx42.25.$$

由于 45.25＞10.828，所以有 99.9％以上的把握认为是否喜欢参加体育锻炼与性别有关.

习题 3

$\chi^2=\dfrac{100\times(15\times26-35\times24)^2}{50\times50\times39\times61}=3.40>2.706$，于是得出结论：在概率为 90％的意义下，服用新药是有效的.

P. 24 练习

算得 $r_{xy}\approx0.884$，

因为 0.884＞0.8，这表明体重和身高有很强的线性相关关系.

求得回归直线为：$y=0.836x-84.670$.

所以，身高 172 cm 的女生的体重

$$y=0.836\times172-84.670\approx59\ (\text{kg}).$$

习题 4

1.（1）散点图，如图 4-1.

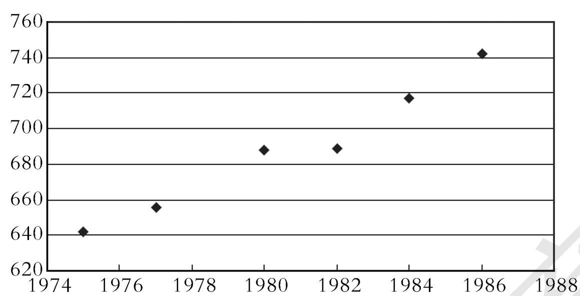


图 4-1

（2）0.985.

（3）比萨斜塔的倾斜情况会逐年恶化.

（4）$y=8.75x-16\ 638.05$.

（5）略.

2.（1）相关系数为：0.986；

（2）回归直线为：$y=9.723x-1.853$；

（3）工作年限为 7 年和 11 年时的年推销金额分别为 66.2 和 105.1 万元.

复习题四

1.（1）不能作出新药比常用药更有效的结论；

（2）采用随机对照试验；

（3）对参加试验的 20 名患者用投掷一枚硬币的方法决定是否将他编入试验组：正面朝上分在试验组，否则分在对照组；

（4）本例中可以使用安慰剂，给分在试验组的患者使用新的安眠药；给分在对照组的患者使用外观完全相同的非助眠的普通药品，让他们认为也使用了新的安眠药.

2.（A）

3.（1）0.216；

（2）0.288.

4. 现假设广告真实，5 个病人用药后都无效的概率是 $0.2^5=0.000\,32$.

这个概率很小，该事件几乎不会发生，但现在它确实发生了，说明我们的假设不对，认为广告是不真实的.

5. 根据列表中的数据，得到：

$$\chi^2=\frac{326\times(19\times149-17\times141)^2}{160\times166\times36\times290}\approx0.221\leqslant2.706.$$

因为 $P(\chi^2\geqslant2.706)=0.1$，所以判死刑和被告的肤色无关.

6. 若要以 99% 的把握击中飞机，需要 3 门高炮.

7.（1）0.8；

（2）0.032；

（3）至少需要试跳 3 次.

第 5 章　推理与证明

一、教学目标

1. 结合已学过的数学实例和生活中的实例，了解合情推理的含义，能利用归纳和类比等进行简单的推理，体会并认识合情推理在数学发现中的作用（参见教材中例 2、例 3）.

2. 结合已学过的数学实例和生活中的实例，体会演绎推理的重要性，掌握演绎推理的基本方法，并能运用它们进行一些简单推理.

3. 通过具体实例，了解合情推理和演绎推理之间的联系和差异.

4. 结合已经学过的数学实例，了解直接证明的两种基本方法——分析法和综合法；了解分析法和综合法的思考过程、特点.

5. 结合已经学过的数学实例，了解间接证明的一种基本方法——反证法；了解反证法的思考过程、特点.

6. 通过对实例的介绍（如欧几里得《几何原本》、马克思《资本论》、杰弗逊《独立宣言》、牛顿三定律等），体会公理化思想.

7. 介绍计算机在自动推理领域和数学证明中的作用.

二、教材说明

本章教材安排学生学习关于推理与证明的初步知识. 结合已学过的数学知识和实际生活中的相关问题，让学生明确合情推理与演绎推理的概念、知识及其关系，理解数学证明中的分析法、综合法与反证法.

推理与证明是数学的基本思维过程，也是人们学习和生活中经常使用的思维方式. 推理是从一个或几个判断得出一个新判断的思维过程. 一个推理由前提和结论两部分所组成，推理时所依据的判断称为前提，从前提通过推理得到的新判断称为结论. 推理一般包括合情推理和演绎推理. 合情推理是根据已有的事实和正确的结论（包括定义、公理、定理等）、实验和实践的结果，以及个人的经验和直觉等获得新论断的过程. 归纳、类比是合情推理常用的思维方法. 在解决问题的过程中，合情推理具有猜测和发现结论、探索和提供思路的作用，有利于创新意识的培养. 演绎推理是根据已有的事实和正确的结论（包括定义、公理、定理等），按照严格的逻辑法则得到新论断的推理过程. 培养和提高学生的演绎推理或逻辑证明的能力是高中数学课程的重要目标. 合情推理和演绎推理之间联系紧密、

相辅相成．依据一个或一些真实的判断，进而断定另一个判断真实的推理，就叫作论证．由推理的意义可知，论证由一个或一系列推理组成．论证的论据必须是真实的，而推理的依据——前提却不必一定真实，所以推理不一定是论证．只有当前提被断定为真实时，推理才是一个论证．数学中的论证即数学证明．也就是说，数学证明是根据已确定其真实性的公理、定理、定义、公式、性质等数学命题来论证某一数学命题的真实性的推理过程．其往往表现为一系列数学中的推理．证明通常包括逻辑证明和实验、实践证明，但是数学结论的正确性必须通过演绎推理或逻辑证明来保证，即在前提正确的基础上，通过正确使用推理规则得出结论．教材通过对已学知识的回顾，让学生体会合情推理、演绎推理以及二者之间的联系与差异；体会数学证明的特点，了解数学证明的基本方法，包括直接证明的方法（如分析法、综合法）和间接证明的方法（如反证法），感受逻辑证明在数学以及日常生活中的作用，养成言之有理、论证有据的习惯．

教材通过实例，引导学生运用合情推理去探索、猜测一些数学结论，并用演绎推理确认所得结论的正确性，或者用反例推翻错误的猜想．教学的重点在于通过具体实例理解合情推理与演绎推理，而不追求对概念的抽象表述．

教材中设置的证明内容是对学生已学过的基本证明方法的总结．在教学中，应通过实例，引导学生认识各种证明方法的特点，体会证明的必要性．对证明的技巧性不宜作过高的要求．

教材的编写比较注重创设一些有趣味性的情境引入相关知识，从浅显的问题出发，引导学生思考、探索，理解有关推理、证明中的抽象问题．

教材内容的安排为引导学生自主探索留下了充分的时间与空间，更有利于教师个性化教学的开展，教学课堂上师生的“创作激情”与“创作冲动”有可能得到很好的发挥．

三、课时安排建议

本章教学时间约需 10 课时，具体分配如下（仅供参考）

5.1　合情推理与演绎推理	
5.1.1　合情推理（一）——归纳	1 课时
5.1.2　合情推理（二）——类比	1 课时
5.1.3　演绎推理	1 课时
5.1.4　合情推理与演绎推理的关系	1 课时
5.2　直接证明与间接证明	
5.2.1　直接证明：分析法与综合法	2 课时
5.2.2　间接证明：反证法	2 课时
小结与复习	1 课时

四、教学建议

1. 新一轮数学课程改革从理念、内容到实施，都有较大变化，推理与证明这一章节中的许多内容是以前教材所没有的. 教师应充分认识到本章内容对学生理解数学内容，进行数学再创造性学习方面所起的引导作用. 在教学设计中充分考虑高中学生的心理特点，运用多样化的课堂教学模式，引导学生积极主动地学习，掌握推理与证明的基本技能，发展创新意识，使学生对数学的推理与证明问题有较为全面的认识，从而提高学生的数学素养，为未来发展和进一步学习打好基础.

2. 教学中应通过实例，引导学生运用合情推理去探索、猜测一些数学结论，并用演绎推理确认所得结论的正确性，或者用反例推翻错误的猜想. 教学的重点在于通过具体实例理解合情推理与演绎推理，而不追求对概念的抽象表述.

推理与证明中的许多基本概念和基本思想贯穿于高中数学教学的始终，在日常的数学教学过程中可以适时地指点，帮助学生逐步加深理解，同时应通过具体的问题加强推理与证明的基本技能训练.

3. 在本章节的教学中，要从不同分支的数学知识中寻找它们在推理与证明时存在的共同方法，应注意沟通已学习过的数学内容之间的联系，通过类比、联想、知识的迁移和应用等方式，使学生体会数学知识在推理与证明时的有机联系，感受数学的统一性，进一步理解数学的本质，提高解决问题的能力. 教学中还要注重教学内容与日常生活以及其他学科的联系，引导学生应用合情推理与演绎推理进行简单的数学发现，让学生经历探索、解决问题的过程，品味引人入胜的数学思维. 数学课要讲逻辑推理，更要讲道理，通过典型例子的分析和学生自主探索活动，使学生理解数学概念逐步形成的过程，体会蕴含在其中的思想方法，追寻数学发展的历史足迹，把数学的学术形态转化为学生易于接受的教育形态.

4. 在推理与证明章节的知识中有很好的例子可以说明数学是人类文化的重要组成部分，是人类社会进步的产物，也是推动社会发展的动力. 教学中应引导学生了解数学科学与人类社会发展之间的相互作用，体会数学的科学价值、应用价值、人文价值，开阔视野，探寻数学发展的历史轨迹，提高文化素养，培养求实、说理、批判、质疑等理性思维的习惯和锲而不舍地追求真理的精神. 在教学中，应尽可能结合教学内容，介绍一些对数学发展起重大作用的历史事件和人物，反映数学在人类社会进步、人类文明建设中的作用，同时也反映社会发展对数学发展的促进作用. 例如，教师在教学中可以向学生介绍欧几里得建立公理体系的思想方法对人类理性思维、数学发展、科学发展、社会进步的重大影响，让学生感受数学内部动力、外部动力以及人类理性思维对数学产生和发展的作用.

5. 丰富学生的学习方式、改进学生的学习方法是高中数学课程追求的基本理念. 学生

的数学学习活动不应只限于对概念、结论和技能的记忆、模仿和接受，独立思考、自主探索、动手实践、合作交流、阅读自学等都是学习数学的重要方式. 在高中数学教学中，教师的讲授仍然是重要的教学方式之一，但要注意的是必须关注学生的主体参与以及师生间的互动. 高中数学课程在教育理念、学科内容、课程资源的开发利用等方面都对教师提出了挑战，在教学中，教师应根据高中数学课程的理念和目标、学生的认知特征和数学的特点，积极探索适合高中学生数学学习的教学方式. 本章节许多内容是高中数学课程新增加的，对于这些内容，教师要把握标准的定位进行教学，教学中既要有教师的讲授和指导，也要有学生的自主探索与合作交流. 教师要创设适当的问题情境，鼓励学生在发现数学的规律和问题解决途径的过程中，掌握本章的基本概念与基本技能.

6. 在学生学习和解决问题的过程中，合情推理对激发学生学习的兴趣，增强创新意识方面有很好的作用. 教学过程中，教师应不断反思自己的教学，在数学教学中经常应用合情推理，改进教学方式，提高教学水平，形成个性化的教学风格.

7. 在教学中，应重视利用信息技术来呈现以往课堂教学中难以呈现的课程内容. 恰当使用信息技术，引导学生借助信息技术进行数学探索、数学发现，研究一些有意义、有价值的数学问题.

五、评价建议

1. 本章教学中，学生对推理与证明的基本知识与基本技能的理解与掌握是教学的基本要求，也是评价学生学习的基本内容. 评价中要注重评价学生对数学思维本质的理解与对推理与证明思想方法的把握.

2. 本节的教学评价要较为重视学习内容对学生数学学习情感、态度和价值观方面的促进性影响. 在课堂上要对学生适时激励，营造良好的课堂育人环境，处理数学教与学活动过程的调控，做到学生和教师的共同成长. 要在课堂合作与交流过程中观察每个学生的发展变化，关注学生是否积极主动地参与数学学习活动、是否愿意和能够与同伴交流数学学习的体会、与他人合作探究数学问题，关注他们在数学学习上的信心、独立思考的习惯、合作交流的意识、数学认知的发展水平等.

3. 本章节的教学评价应特别重视考察学生能否从问题解决中领悟数学推理与证明的思想方法，重视考察学生能否理解并有条理地表达数学推理与证明的过程，关注学生能否不断反思自己的推理与证明的过程，并不断优化这个过程. 本章节的学习中，数学学习活动应倡导自主探索、合作交流、阅读自学等学习数学的方式. 这些方式有助于发挥学生学习的主动性，使学生的学习过程成为在教师引导下的“再创造”过程.

4. 评价对推理与证明基本概念的理解，可以看学生能否举出有关归纳、类比、三段论式推理、反证法的例子，能否用分析法和综合法进行数学证明，能否用数学归纳法的正确

格式证明一些简单的数学问题.

5. 推理与证明能力的获得与提高是高中学生进行有效的数学学习的关键，能力是通过推理与证明方法的运用水平体现出来的，对这个能力的评价应贯穿于高中学生数学知识建构与问题解决的全过程. 比如，看学生是否能利用合情推理进行数学探索，主要是要看在日常的数学学习中，是否具有问题意识，是否善于发现和提出问题. 看学生是否能利用演绎推理进行数学证明，就要看学生是否能对解决问题的方案进行质疑、调整和完善，能否将解决问题的方案与结果，用书面或口头等形式有条理地表达出来并进行交流，根据问题的实际要求进行分析、讨论或应用.

6. 适度关注学生能否对自己提出问题和解决问题的过程进行自评与互评. 在评价中，要注意肯定学生在数学学习中的发展和进步、特点和优点.

5.1 合情推理与演绎推理

5.1.1 合情推理(一)——归纳

教材线索

本节课从日常生活中涉及的归纳实例入手，引出归纳的概念. 在教材例1中，通过对等式的简单观察归纳出一个浅显的结论. 在教材例2中，利用欧拉公式的发现过程进一步阐释了运用归纳推理的一般步骤. 最后，在教材例3中指出归纳推理所得的结论未必是可靠的，它只是一种合情推理. 通过观察归纳可以提出猜想，获得科学发现，这是本课的主要线索.

教学目标

（一）知识与技能

1. 结合已学过的数学实例和生活中的实例，了解合情推理中的归纳推理的含义，能利用归纳方法进行简单的推理.

2. 归纳推理是进行数学发现时的创新思维的重要组成部分，也是数学知识再创造性学习时必不可少的思维方法，同时它还是解决数学问题的一种重要思维方法.

（二）过程与方法

让学生亲身经历对已学过的数学实例和生活中的实例进行探究的过程，提高归纳探究的能力. 通过问题的解决让学生具有较强的归纳意识，敢于质疑，勤于思索，逐步形成独立思考的能力.

（三）情感、态度与价值观

1. 通过例习题的讲解让学生初步认识到合情推理在数学发现中的重要作用，养成认真观察、善于归纳、敢于猜想和勇于创新的精神，塑造学生良好的个性品质.

2. 通过小组合作、自主探究的学习方式，让学生体验到成功，感受到乐趣，激发起强烈的学习意愿.

教材分析

1. 重点：

（1）合情推理与归纳推理的概念；

（2）运用归纳推理的一般步骤；

（3）归纳推理在数学发现中的应用.

2. 难点：

归纳推理在数学发现中的应用.

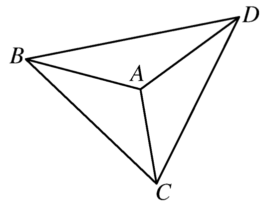


图 5-1

3. 简单多面体的顶点数 V、棱数 E 及面数 F 间有关系式 $V+F-E=2$，这个定理叫做欧拉定理（其关系式叫做欧拉公式）.

欧拉公式描述了简单多面体顶点数、面数、棱数的特有规律，它只适用于简单多面体. 在欧拉公式中，令 $f(p)=V+F-E$，$f(p)$叫做欧拉示性数. 简单多面体的欧拉示性数 $f(p)=2$.

在课本的归纳猜想的基础上，我们可以用四面体 $ABCD$ 来验证欧拉定理，如图 5-1.

步骤 1：对于四面体 $ABCD$，去掉一个面 BCD，再使它变为平面图形，数一数，四面体 $ABCD$ 的顶点数 V、棱数 E 与剩下的原四面体的表面面数 F_1 分别是多少？

顶点数 $V=4$，棱数 $E=6$，面数 $F_1=3$. 我们发现，变形后以上数值都没有变. 因此，要研究 V，E 和 F 的关系，只要去掉一个面，将立体图形变形为平面图形即可.

步骤 2：对平面图形，我们发现，去掉一条棱，就减少一个面，例如去掉 BC，就减少一个面 ABC. 同理，去掉棱 CD，BD，也就各减少一个面 ACD，ABD. 现在数数，E，V，F_1 分别是多少？

$$V=4，E=3，F_1=0. 那么 V+F_1-E=1.$$

步骤 3：对剩下的树枝形，去掉一条棱，就会减少一个顶点. 例如去掉 CA，就减少一个顶点 C. 同理，去掉 DA 就减少一个顶点 D，最后剩下 AB. 现在再数数，E，V，F_1 分别是多少？

$$V=2，E=1，F_1=0. 那么 V+F_1-E=1.$$

别忘了我们在前面去掉的一个面，于是得到 $V+F-E=2$. 因为对任意的简单多面体运用这样的方法，最后都是只剩一条线段，所以都可得到上面的结果，从而欧拉公式对任意简单多面体都是正确的.

4. 认识合情推理：

合情推理，是美籍数学家波利亚在 20 世纪 30 年代提出的概念，它是指“观察、归纳、类比、实验、联想、猜测、矫正和调控等方法”. 波利亚在致力改变美国数学落后状态的工作中，大力倡导合情推理的方法，获得极大成功. 所谓合情推理，就是一种合乎情理的推理. 物理学家的归纳推理，律师的案情推理，历史学家的史料论证和经济学家的统计论证都属于合情推理之列. 波利亚说：“数学家的创造性工作成果是论证推理，即证明，但是这个证明是通过合情推理，通过猜想而发现的”；“为了取得真正的成就他还必须学习合情推理，这是他的创造性工作赖以进行的那种推理”. 数学中的合情推理是多种多样的，其中归纳推理和类比推理是两种用途最广泛的特殊的合情推理，法国数学家拉普拉斯说：“甚至在数学里发现真理的工具也是归纳和类比.” 其他合情推理都是由这两种推理衍生出来的.

合情推理是数学发展的动力，科学发现的先导. 数学史上一些著名的发现，如欧拉公式的发现就得益于合情推理. 合情推理促进了数学的发展，也促进了数学方法论的研究，它对数学的研究和发展，起了积极的推动作用.

合情推理是进行数学发现时的创新思维的重要组成部分，也是数学知识再创造性学习时必不可少的思维方法，同时它还是解决数学问题时的一种重要思维方法. 建构主义认为，知识并非是主体对客体的被动的镜面式反映，而是一个主动的建构过程. 数学建构主义学习的内部过程是学习者通过不断对各种信息进行加工、转换并形成假设和检验的一个过程，所以合情推理是数学建构中主体思维的关键步骤，它可以促进知识的同化，加速知识的迁移.

让合情推理走进数学课堂，在数学课堂教学中以合情推理方式揭示知识的发生过程，以合情推理的教学过程去促进学生的合情推理能力的形成，让学生自主经历数学知识的探索过程，真正成为学习的主体，这也是本章节教学的一个重要目标.

5. 推理与归纳推理：

推理是从一个或几个判断（前提）得出一个新判断（结论）的思维过程. 一个推理由前提和结论两部分组成，推理时所依据的判断称为前提，从前提通过推理得到的新判断称为结论.

判断有内容和形式两方面的问题，推理也有内容和形式两方面的问题. 内容方面即前提和结论的真假问题，这个问题要靠各门具体科学，靠实践解决；形式方面即推理的结构问题，形式逻辑学是从形式方面来研究什么样的推理形式是正确的，提供关于前提和结论之间的逻辑规则. 正确的推理首先要求前提必须真实，其次必须遵守推理规则，合乎逻辑，这样才能反映客观事物间的逻辑关系. 推理的种类很多，数学中常用的推理有归纳推理、类比推理和演绎推理三种.

由特殊到一般的推理叫做归纳推理. 即在研究事物的特殊情况所得到的结论的基础上，得出有关事物的一般结论的推理方法. 归纳推理也简称为归纳法.

在归纳推理中，根据所研究的是否是事物的一切特殊情况，归纳推理一般又可分成完全归纳推理和不完全归纳推理，也称为完全归纳法和不完全归纳法.

（1）完全归纳法. 在研究事物的一切特殊情况所得的结论的基础上，得出有关事物的一般性结论的推理方法叫做完全归纳法.

因为完全归纳法是在考察事物的各种情形之后得出有关事物的结论的，所以只要考察各种情形得出的结论是真实的，则最后所得结论也必定是真实的. 因此，完全归纳法可以作为数学的严格推理方法. 用完全归纳法进行推理时，要注意对考察事物的各种特殊情形都要进行讨论，不要重复也不要遗漏. 例如：德国数学家高斯，在十岁时曾迅速而准确地得出老师出的一道算术题的答案. 这道题是这样的：$1+2+3+\cdots+98+99+100=?$ 高斯在观察之后发现，从 1 到 100 这些数，两头对称的两个数相加得数都是 101. 而两头对称的数，在 1 到 100 中共有 50 对. 于是他得到了 $101\times50=5\ 050$ 这一答案. 在这里，高斯就是用完全归纳推理的方法得出“两头相加为 101”这一结论的. 完全归纳推理有很大的局限

性，因为它要求对一类事物的全部因子都进行考察，才能推出结论.

（2）不完全归纳法. 在研究事物的某些特殊情况所得到的结论的基础上，得出有关事物的一般性结论的推理方法叫做不完全归纳法. 不完全归纳推理又可分为简单枚举归纳推理、科学归纳推理、概率预测推理和统计推理.

用不完全归纳法作为逻辑推理是不严密的，因而在数学证明中并不采用. 但不完全归纳法在探索的过程中能帮助我们比较迅速地发现事物的规律，它为我们提供研究方向和线索的作用是不容忽视的. 科学上的很多发现，往往就是通过观察、分析、归纳、猜想得到的.

6. 合情推理是根据已有的事实和正确的结论、实验和实践的结果以及个人的经验和直觉等推测某些结果的推理过程. 归纳和类比是合情推理常用的思维方法. 在解决问题的过程中，合情推理具有猜测和发现结论、探索和提供思路的作用，有利于创新意识的培养. 运用归纳推理的一般步骤是：

具体问题 → 实验、观察 → 概括、推广 → 猜测一般性结论

教学建议

归纳推理是一种最常见的合情推理，教学中应通过丰富的实例，引导学生观察数与形，积极思考，归纳出存在其中的一般规律，并合乎情理地提出数学猜想. 课堂要创设学生语言交流和自由发表见解的情境和机会，让学生充分体验全身心投入到数学中进行数学发现时的那一种激情，那一份追求，以及获得成功时的那一股在瞬间爆发出的永恒的喜悦.

在日常生活中，归纳推理也因其合情而成为自然的思维，常是在不经意间进行的. 教学中举出一些实例能引发学生的学习兴趣，例如：①第一只天鹅是白的，第二只天鹅是白的……第 n 只天鹅也是白的，所以所有的天鹅都是白天鹅；②一个小孩在跳楼梯，大人看见后就告诫他这样会摔倒的，小孩反驳说，他跳第一次时没摔倒，跳第二次时也没摔倒，就一直跳下去，也一直没摔倒，所以，这样跳是不会摔倒的.

在例 2 的讲解中，可使用多媒体展示若干几何体，让学生对着多面体的直观图去计算面数、顶点数与棱数，教材中给出的塔顶体是六面体四棱锥顶形，而截角立方体是六面体截三棱角形.

例题解析

例 1　教材 P. 33 例 1.

分析　本例是数列中最基本的归纳问题，自然数中存在着许多普遍规律，我们可以通过归纳从一些具体的特殊的数式中发现这种规律. 使用归纳法进行数学发现时，要先发现一些带有明显规律性的数式，然后通过自然数的递进关系进行类比推广. 这个例子的图解

过程比较有趣，可联系数阵的问题进行更深入的探究.

例 2 教材 P. 34 例 2.

分析 本例中各个几何体的面数、顶点数、棱数的计数过程繁多，可以让学生完成部分内容，塔顶体与截角立方体的相关计数过程可以使用多媒体辅助. 要尽可能创设探究环境让学生充分思考、交流，教师适当设问引导，归纳出欧拉公式.

例 3 教材 P. 35 例 3.

分析 归纳法得到的结论可能是错误的，这也是初学者使用归纳法时很容易忽略的一个问题. 讲解几个归纳法例题之后，学生形成了习惯性思维，通过教师提示，学生很可能会得到错误的结论，这是一个归纳结论错误的经典例题.

可在教材例题基础上补充以下例题：

例 4 定义 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=a_1+a_2+\cdots+a_n$，并设 $f(x)=\dfrac{a^x}{a^x+\sqrt{a}}$（其中 $a>0$，且 $a\neq1$），试求 $\sum\limits_{k=1}^{999}f\left(\dfrac{k}{1\ 000}\right)$ 的值.

解 通过计算，$f\left(\dfrac{1}{1\ 000}\right)+f\left(\dfrac{999}{1\ 000}\right)=\dfrac{a^{\frac{1}{1\ 000}}}{a^{\frac{1}{1000}}+\sqrt{a}}+\dfrac{a^{\frac{999}{1\ 000}}}{a^{\frac{999}{1\ 000}}+\sqrt{a}}=\dfrac{a^{\frac{1}{1\ 000}}}{a^{\frac{1}{1\ 000}}+\sqrt{a}}+\dfrac{a^{1-\frac{1}{1\ 000}}}{a^{1-\frac{1}{1\ 000}}+\sqrt{a}}=\dfrac{a^{\frac{1}{1\ 000}}}{a^{\frac{1}{1\ 000}}+\sqrt{a}}+\dfrac{a}{a+\sqrt{a}\cdot a^{\frac{1}{1\ 000}}}=\dfrac{a^{\frac{1}{1\ 000}}}{a^{\frac{1}{1\ 000}}+\sqrt{a}}+\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+a^{\frac{1}{1\ 000}}}=1$，类比推得 $f\left(\dfrac{2}{1\ 000}\right)+f\left(\dfrac{998}{1\ 000}\right)=1$，至此可以归纳出这样的结论：$f\left(\dfrac{n}{1\ 000}\right)+f\left(\dfrac{1\ 000-n}{1\ 000}\right)=1$（其中 $n\in\mathbf{N}$，$1\leqslant n\leqslant1\ 000$）. 而 $f\left(\dfrac{500}{1\ 000}\right)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{a}}=\dfrac{1}{2}$，所以，$\sum\limits_{k=1}^{999}f\left(\dfrac{k}{1\ 000}\right)=\left[f\left(\dfrac{1}{1\ 000}\right)+f\left(\dfrac{999}{1\ 000}\right)\right]+\left[f\left(\dfrac{2}{1\ 000}\right)+f\left(\dfrac{998}{1\ 000}\right)\right]+\cdots+\left[f\left(\dfrac{499}{1\ 000}\right)+f\left(\dfrac{501}{1\ 000}\right)\right]+f\left(\dfrac{500}{1\ 000}\right)=499+\dfrac{1}{2}=\dfrac{999}{2}$.

例 5 计算出下面数列的前 4 项，归纳出该数列的一个通项公式：

（1）$a_1=1$，$a_{n+1}=1+\dfrac{a_n}{2}$（$n\geqslant1$）；

（2）$a_1=1$，$a_2=2$，$a_n=3a_{n-1}-2a_{n-2}$（$n\geqslant3$）.

解 （1）$\because a_1=1$，$a_{n+1}=1+\dfrac{a_n}{2}$（$n\geqslant1$），$\therefore a_2=1+\dfrac{a_1}{2}=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$，$a_3=1+\dfrac{a_2}{2}=1+\dfrac{3}{4}=\dfrac{7}{4}$，$a_4=1+\dfrac{a_3}{2}=1+\dfrac{7}{8}=\dfrac{15}{8}$，据此可归纳猜想：$a_n=\dfrac{2^n-1}{2^{n-1}}$.

（2）$\because a_1=1$，$a_2=2$，$a_n=3a_{n-1}-2a_{n-2}$（$n\geqslant3$），$\therefore a_3=3a_2-2a_1=3\times2-2=4$，$a_4=3a_3-2a_2=3\times4-2\times2=8$，据此可归纳猜想：$a_n=2^{n-1}$.

相关链接

1. 归纳推理——一种自然的思维

古文献《内经·针刺篇》记载了这样一个故事：一个患头痛病的樵夫，上山砍柴时不慎碰破脚趾，出了点血，但头部不疼了. 他并未在意. 后来，头痛复发，又偶然碰破原处，头痛又好了. 这引起了他的注意. 后来再头痛时，他就有意刺破该处，结果都有相同的效应. 在针灸学中，这个樵夫所碰的地方，称作“大敦穴”. 樵夫根据自己经历的多次个别经验，得出了“碰破脚趾能治好头痛”的一般结论. 他所运用的推理就是归纳推理的简单枚举推理.

归纳推理是一种很自然的思维方式，例如，我们从一个袋子里连摸出 3 个玻璃球，都是红的，就可能开始猜想：全是红的？但如果摸出的第 4 个球是蓝的，接下去第 5、6 个也都是蓝的，就会修正猜想：都是玻璃球？第 7 个是绿玻璃球，增加了自己的信心. 若第 8 个是木球，就会再猜想：全是球体？……但只有到全部摸出来，才能证实. 人们在日常生活中得到的诸如“瑞雪兆丰年”、“鸡不入笼有大雨”、“泥鳅跳水来暴雨”、“冬旱夏淋，夏热冬旱”等经验知识，也都是一种自然的合情的推理结果.

人类获取自然科学、社会科学、历史、文学批评、伦理判断以及关于日常事务的实际知识，都需要仰仗归纳推理.

归纳推理的前提是其结论的必要条件，首先，归纳推理的前提必须是真实的，否则，归纳就失去了意义. 其次，归纳推理的前提是真实的，但结论却未必真实，如根据某天有一只兔子撞到树上死了，推出每天都会有兔子撞到树上死掉，这一结论很可能为假，除非一些很特殊的情况发生，比如地理环境中发生了什么异常使得兔子必以撞树为快.

在许多场合，归纳推理的结论是不可靠的. 伯特兰·罗素在论说“归纳主义者”时描述了一只火鸡的故事：有一只火鸡发现，在火鸡饲养场的第一天上午九点钟有人给它喂食. 然而，作为一个卓越的归纳主义者，它并不马上作出结论，而是在各种情况下进行观察——在星期三和星期四，在热天和冷天，在雨天和晴天. 它每天都在它的表中加进另一个观察陈述. 最后，它的归纳主义的良心感到满意，在圣诞节前夕，它进行了归纳推理，得出结论：“上午九点时总会有人给我喂食.”然而在圣诞节到了的那天，它却被人无情地宰杀了.

佛教《百喻经》中有一则故事，故事说，有一位绅士想吃苹果，打发他的仆人到别人的果园里去买，并告诉他：“你要买甜的苹果回来，不甜的不要买.”仆人拿好钱就去了. 到了果园，园主说：“我这里的苹果个个都是甜的，你尝一个看.”仆人说：“我尝一个怎能知道全体呢？我应当个个都尝过，尝一个买一个，这样最可靠.”仆人于是自己动手摘苹果，并摘一个尝一口，看这苹果到底甜不甜. 现实生活中，如同上面故事里那样不聪明的仆人

一定不多，但生搬硬套某种方法或某种逻辑的人实在为数不少. 归纳推理是一种自然的合乎情理的思维，但思维不合情理的事例每天都有发生.

2. 简单枚举归纳推理与科学归纳推理

简单枚举归纳推理与科学归纳推理都属于不完全归纳法.

简单枚举归纳推理，又称简单枚举法. 它是通过考察某一类事物的部分对象（子类），发现某种情况不断重复出现，而又没有发现相反情况，从而推出关于该类事物一般性结论的不完全归纳推理.

例如，在19世纪，人们注意到铜、铁、锡、铅等一些金属能导电，而在实践中又未发现不导电的金属，于是，人们便作出了结论：所有金属都能导电. 这一结论就是用简单枚举法推出的.

简单枚举归纳推理得出的结论是或然性的. 因此，在应用简单枚举法时，要注意寻找反面事例. 如果发现有与所得结论相矛盾的事例，结论就要被推翻. 例如，在很长一段时间里，人们看到的天鹅是白色的，鱼是用鳃呼吸的，金属是沉于水的，于是通过简单枚举归纳推理得出结论："所有天鹅都是白色的"，"鱼都是用鳃呼吸的"，"金属都沉于水". 后来，人们在大洋洲发现了黑色的天鹅，在南美洲发现了不用鳃呼吸的肺鱼，在科学实验中发现了不沉于水的金属（钠、锂），因而，上述结论就被否定了.

科学归纳推理，又叫科学归纳法. 它是通过考察某类事物中的部分对象，并掌握对象和某种属性的必然联系，特别是事物之间的因果联系，从而概括出关于该类事物一般性结论的不完全归纳推理.

例如，金鸡纳霜的发明就是科学归纳推理的结果. 当年在厄瓜多尔居住的印第安人中流行一种叫疟疾的急性传染病. 患者感觉一阵冷，一阵热，热后大量出汗、头痛、口渴，全身无力. 当时无药可用. 有一天，一名患者在路上发病，因为口渴难挨，便爬到一个死水坑边喝了那里的水，结果病奇迹般地好了. 于是他把经历告诉别人，其他患者也都去那里喝水，病也纷纷好了. 后来科学家经考察发现，那水坑的水中含有奎宁. 原来在那水坑边上长有金鸡纳树，有的树倾覆在水坑里，树皮里含的奎宁溶解在水中了，正是这奎宁杀死了患者体内的疟原虫，治好了他们的病. 明白了这一科学道理之后，科学家们便发明了治疗疟疾的特效药奎宁，将其命名为金鸡纳霜.

科学归纳推理是在简单枚举归纳推理的基础上发展起来的. 简单枚举归纳推理是知其然不知其所以然，而科学归纳推理是既知其然又知其所以然. 因而科学归纳推理比简单枚举归纳推理的可靠性大一些.

5.1.2 合情推理(二)——类比

教材线索

本小节从鲁班发明锯子这个耳熟能详的故事引入类比的概念，接着又通俗地说明了类比推理的原理，然后再以一些数学、物理与医药试验中的类比思维对类比推理的过程进行进一步阐释.

教学目标

（一）知识与技能

1. 结合已学过的数学实例和生活中的实例，了解合情推理中的类比推理的含义，能利用类比方法进行简单的推理.

2. 类比推理是解决数学问题时的一种重要思维方法，类比推理能力的培养须贯穿于中学数学教学的全过程.

（二）过程与方法

1. 通过实例让学生理解类比推理的基本方法，提高类比探究的能力.

2. 教学过程中努力培养学生的类比意识，通过各类问题的讲解让学生学会运用观察、联想等方法提出问题并解决问题.

3. 创设民主、宽松的学习氛围和生动有趣的教学情境，通过小组合作、主动探究的学习方式，努力使课堂教学过程成为学生的一种体验数学发现的过程.

（三）情感、态度与价值观

从现实生活出发，选取富有生活气息和与日常生活有密切联系的让学生感兴趣的学习材料，让学生养成认真观察、善于类比的良好思维品质.

教材分析

1. 重点：

(1) 类比推理的概念；

(2) 类比推理的思维过程；

(3) 类比推理在解题中的应用.

2. 难点：

类比推理在数学发现中的应用.

3. 推理是思维的基本形式，类比是一种重要的推理方式. 所谓类比，就是由两个对象

的某些相同或相似的性质，推断它们在其他性质上也有可能相同或相似的一种推理形式. 演绎推理是由一般到特殊的推理，归纳推理是由特殊到一般的推理，类比推理是由特殊到特殊的推理. 类比推理不限于在同类事物间进行，不受一般原理的限制，亦不必像归纳推理那样，需要考虑归纳材料的个数. 类比推理可以推出事物的本质特征，也可以推出事物的非本质特征，因而，它具有较强的探索和预测作用，是数学发现中最常使用的一种思维方法. “类比是一个伟大的引路人.”（波利亚）“每当理智缺乏可靠论证的思路时，类比这个方法往往能指引我们前进.”（康德）但同时，类比是一种主观的不充分的似真推理，因此，要确认其猜想的正确性，还须经过严格的逻辑论证，教材P. 57例 2 中有关费马大定理的叙述就说明了这一点.

类比推理的思维过程可用框图表示如下：

$$\boxed{\text{观察、比较}} \longrightarrow \boxed{\text{联想、类推}} \longrightarrow \boxed{\text{猜测新的结论}}$$

4. 数学解题与数学发现一样，通常都是在通过类比、归纳等探测性方法进行探测的基础上，获得对有关问题的结论或解决方法的猜想，然后再设法证明或否定猜想，进而达到解决问题的目的. 所以，类比、归纳不仅是数学发现中获得猜想的重要方法，同时也是解决数学问题时获取解题途径的重要方法.

运用类比解决数学问题的关键是寻找一个合适的类比对象. 在解决立体几何和有关次数等问题时，大多应用降维类比，将三维空间的对象降到二维甚至是一维的空间中的对象加以考察. 教材 P. 39 例 1 研究长方体性质以及教材 P. 41 习题 2 第 1 题研究球的有关概念、性质时，就分别将长方体降维成长方形，球降维成圆，通过类比，得到了长方体中与长方形相类似的诸多性质，以及球与圆相类似的诸多概念、性质，这种类比归根结底属于简化类比. 简化类比就是将原命题类比到比原命题简单的类比命题，通过类比命题解决思路和方法的启发，寻求原命题的解决思路与方法. 与简化类比相应的有结构类比，结构类比是凭借命题在结构上的相似性等去寻找类比命题，然后可通过适当的代换，将原问题转化为类比问题来解决. 例如数形结合思想就是基于代数与几何问题在结构上的相似性而产生的，是形与数之间的类比；再比如教材 P. 42 第 2 题中，研究双曲线的性质时，将双曲线与椭圆进行类比也属于这种结构类比.

5. 类比与联想是交织在一起的. 事实上不论用什么方法解决问题都少不了运用“联想”，由此及彼地进行联想是人固有的一种思维习惯. 联想也是研究数学和解决数学问题时的一种基本思考方法，任何一个数学问题，总存在有另一个与之结构类似的问题引发我们的类似联想，根据问题之间的相似性、接近性、对比性进行由此及彼的联想，从而将某个已知的结论和方法的全部或部分移植给所研究的新问题是解决问题的一种基本思想方法. 指导联想的三个基本法则是类似联想、相反联想和接近联想，在解决数学问题时，由类比

引发的类似联想是常见的.

在实际的数学发现中，往往是先从想象开始，对一个已解决的数学问题进行类比拓广，获得新的数学问题或数学猜想，再通过新旧问题之间的类比，参考旧问题的解决方法，获得解决新问题与证明猜想的方法. 总之，数学中问题的发现与问题的解决，都离不开类比推理.

教学建议

类比推理与归纳推理一样，也是一种最常见的合情推理，教学中应通过丰富的数学与生活实例，启发学生思考问题时能善于在类比中联想，在联想中类比. 课堂同样要创设学生语言交流和自由发表见解的情境和机会，让学生能在问题思考中以丰富的想象力展开联想的翅膀，在经验基础上进一步熟悉类比推理的心理机制，在发展学生的合情推理能力的同时培养学生主动探索、敢于实践、勇于发现、合作交流的个性品质.

另一方面，教学中还必须注意到，不完全归纳推理所得的结论不一定可靠. 如“凡鸟皆会飞”这个结论，多少年来被认为是金科玉律、天经地义. 然而，后来在非洲发现了一个“怪物”——鸵鸟. 它属鸟类，但偏偏不会飞. 所谓“凡鸟皆会飞”这个结论也就不成立了. 同样地，由于后来在大洋洲发现了一种黑天鹅，“凡天鹅皆白”的结论也不成立. 不完全归纳之所以不一定可靠，就在于其归纳的不完全. 由于它没有穷举全部对象，因而就不能担保没有例外. 而类比推理与不完全归纳推理一样，也不一定是可靠的，例如：在实数运算时，若 $a \cdot b=0 \Leftrightarrow a=0$ 或 $b=0$，但若类比得到向量运算时有 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}=\boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 就会发生错误.

例题解析

例 1 教材 P. 39 例 1.

分析：本例是一个从二维类比推广至三维的简单实例，可由学生完成.

例 2 教材 P. 40 例 2.

分析：这是物理学中通过类比发现规律的实例，学生容易理解这个过程，可以要求学生找出理、化、生中的更多的相关实例.

例 3 教材 P. 40 例 3.

分析：类比是人在思考问题时最容易被引发的一种思维方式，这种思维的应用实例不胜枚举，应要求学生活学活用，积极思考，将所学的关于类比推理的知识应用到各个学科的学习当中.

可在课本例题基础上补充以下例题：

例 4 在探讨等比数列的性质时，很容易联想到等差数列，因为二者在定义上是非常类似的. 通过类比，可以得到与等差数列的性质相类似的一系列关于等比数列的性质，把它们的定义、通项、性质列表类比如下：

	等差数列	等比数列
定义	$a_n-a_{n-1}=d$（d 为常数，$n\geqslant 2$，$n\in\mathbf{N}$）	$a_n\div a_{n-1}=q$（q 为常数，$n\geqslant 2$，$n\in\mathbf{N}$）
通项	$a_n=a_1+(n-1)d$	$a_n=a_1q^{n-1}$
性质	$m+n=p+q\Leftrightarrow a_m+a_n=a_p+a_q$ $(m,n,p,q\in\mathbf{N}^*)$	$m+n=p+q\Leftrightarrow a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q$ $(m,n,p,q\in\mathbf{N}^*)$

例 5 已知 $0<a<1$，$0<b<1$. 求证：

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(1-a)^2+b^2}+\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{(1-a)^2+(1-b)^2}\geqslant 2\sqrt{2}.$$

证明 观察待证式左端，它的每个根式都使我们类比联想到 Rt△ABC 中的等式 $a^2+b^2=c^2$，激起了我们构造平面图形，利用几何方法证明这个不等式的想法.

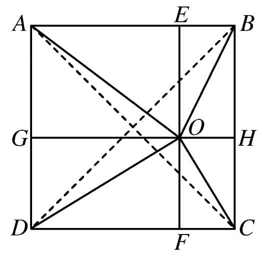


图 5-2

如图 5-2，作边长为 1 的正方形 $ABCD$，分别在 AB，AD 上取 $AE=a$，$AG=b$，过 E，G 分别作 AD，AB 的平行线，交 CD，BC 于 F，H，EF，GH 交于 O 点. 由题设条件及作图可知，△AOG，△BOE，△COF，△DOG 皆为直角三角形.

∴ $$OA=\sqrt{a^2+b^2},\ OB=\sqrt{(1-a)^2+b^2},$$

$$OC=\sqrt{(1-a)^2+(1-b)^2},\ OD=\sqrt{a^2+(1-b)^2}.$$

连接对角形 AC，BD，易知 $AC=BD=\sqrt{2}$，$OA+OC\geqslant AC$，$OB+OD\geqslant BD$，

∴ $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(1-a)^2+b^2}+\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{(1-a)^2+(1-b)^2}\geqslant 2\sqrt{2}$.

合理的类比联想是以正确的观察为基础的. 观察所研究问题的特征和规律，联想似曾相识的问题，类比已知的公式、定理，便可以迅速地找到一个解决新问题的模式.

例 6 证明柯西不等式：

$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)\cdot(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\geqslant(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$（当且仅当 $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b^2}=\cdots=\dfrac{a_n}{b_n}$ 时取“等号”）.

证明 设 $a=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$，$c=b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2$，$b=2(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)$，柯西不等式变为 $b^2-4ac\leqslant 0$，类比联想到一元二次方程的判别式，构造一元二次函数

$$f(x)=(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)x^2-2(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)x+(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2),$$

显然，$f(x)=(a_1x-b_1)^2+(a_2x-b_2)^2+\cdots+(a_nx-b_n)^2\geqslant 0$.

所以，方程 $f(x)=0$ 的判别式不大于 0，即 $b^2-4ac\leqslant 0$.

当且仅当方程 $f(x)=0$ 有唯一解 $x=\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\cdots=\dfrac{a_n}{b_n}$ 时，判别式 $b^2-4ac=0$.

∴$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)\cdot(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\geqslant(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$（当且仅当 $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=$

$\cdots=\frac{a_n}{b_n}$时取“等号”).

例 7 求函数 $y=\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x^2-4x+13}$的最小值.

解 将原函数变形为 $y=\sqrt{(x-1)^2+(0-2)^2}+\sqrt{(x-2)^2+(0-3)^2}$,其几何意义是点 $M(x,0)$到点 $A(1,2)$与到点 $B(2,3)$的距离之和. 如图 5-3,$|MA|+|MB|$的最小值为 A 关于 x 轴对称点 $A'(1,-2)$与点 B 的距离,所以函数 $y=\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x^2-4x+13}$的最小值$y_{\min}=\sqrt{(1-2)^2+(-2-3)^2}=\sqrt{26}$.

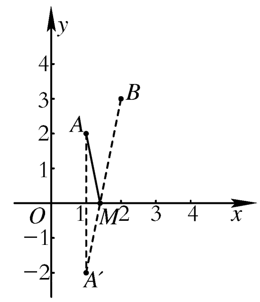


图 5-3

相关链接

1. 中国古代文化与类比思维

很早很早以前，我国就有“触类旁通”、“举一反三”的成语. 它们言简意赅，完备而深刻地说明了类比在认识中的重大作用. 在中国古代文化中，类比思维是指依据事物的外部特征或内在属性进行比照与联系的思维方式.

中国古代传统思维善于抓住事物之间的某种相关进行类比象征，以达到由此及彼、由近及远地分析与表述的目的. 古代中国人很早就发现天地万物、人事习俗存在着类别，并按照特定时期人们的心理、观念与认识水平对事物的类别加以区分. 常见的、主要的是在“天象”、“地法”、“人事”之间作类比，如《说文・序》中有：“古者庖栖氏之王天下也，仰则观象于天，俯则观法于地，视鸟兽之文与地之宜，近取诸身，远取诸物.”这样的文句，与《春秋繁露》中的“帝王之将兴也，其美祥亦先见. 其将亡也，妖孽亦先见. 物固以类相召也”一样，都是属于一种类比的思维方式.

中国古人有“观物比德”的倾向，即将人与物类比，用物的外部特征与内在属性来类比人的品德、志行. 例如《说文・玉部》：“玉，石之美. 有五德：润泽以温，仁之方也；腮理自外可以知中，义之方也；其声舒扬，专以远闻，智之方也；不挠而折，勇之方也……”这是从玉的色泽、纹理、鸣声、质地等来比拟仁人志士的贤德. “观物比德”在上古时使用十分普遍，《论语・雍也》：“子曰：知者乐水，仁者乐山. 知者动，仁者静. 知者乐，仁者寿.”“水”是类比知者“动”、“乐”之德的，“山”是类比仁者“静”、“寿”之德的.《论语・颜渊》中有：“君子之德，风. 小人之德，草. 草上之风，必偃.”这里是用“风”类比君子之德. 又《离骚》：“纷吾既有此内美兮，又重之以修能. 扈江离与辟芷兮，纫秋兰以为佩.”这是屈原用江蓠、辟芷等香草和兰花类比自身的“内美”与“修能”.

《诗经》中的比、兴是类比思维在诗歌创作中的运用. “比”是用他物打比方，其表述的标志是有“如”，例如《诗・淇奥》：“有匪君子，如金如锡，如圭如璧.”“兴”是托事于物，其表述标志是举草木鸟兽以见意，例如《诗・关雎》：“关关雎鸠，在河之洲，窈窕淑

女，君子好逑.”“比”与“兴”都是凭借着具体的事物来类比其他与之有联系的事物或意义.

中国古人擅长从类比中发展出类比推理. 例如中国古代政治学说的主要内容“修身、齐家、治国、平天下”表述了治政应经历的几个阶段：修养个人道德，和谐家庭人伦，治理国家政事，安定百姓与治平天下.《大学》上说：“身修而后家齐，家齐而后国治，国治而后天下平. 自天子以至于庶人，皆以修身为本.”阐明了上述几个阶段的本末先后关系，即四个阶段之间存在着一种可类推的关系.

2. 类比思维是创造性思维中的核心方法

类比是一种重要的解题策略，同时类比也是科学发现的主要方法，它是创造性思维中的核心方法. 牛顿曾经说过：“没有大胆的猜想就没有伟大的发现.”而科学猜想的主要方法是归纳与类比.

卢瑟福及其学生盖革和马斯登为了探索原子结构的奥秘，曾经做了有名的 α 粒子散射实验. 结果使他们发现，原子是由一个原子核和核外电子组成的，原子核所占体积甚小（约十万分之一），但却具有原子总质量的 99.97%. 这同太阳系的情况十分相似. 太阳作为太阳系的核心，它具有太阳系总质量的 99.87%，但所占空间也极小. 并且，已经知道，原子核与电子之间的电吸引力（库仑定律）和太阳与行星之间的吸引力（万有引力定律）的数学形式也是相似的，均与距离的平方成反比. 于是，卢瑟福等作出类比，既然太阳系是由处于核心的太阳和环绕它运行的一系列行星所构成，那么，原子不是宛如太阳系吗？它也可能是由带正电荷的原子核和环绕它运行的带负电荷的电子构成的. 这就是他们于 1911 年正式提出来的原子结构的“行星模型”假说.

由上例可以看出，类比是一种从特殊到特殊的推理，是根据两个（或两类）对象之间在某些方面的相同或相似而推出它们在其他方面也可能相同或相似的一种逻辑方法. 其推理过程首先是比较两个（或两类）不同的对象，找出它们的相同点或相似点，然后，以此为根据，把其中某一对象的已知的知识推移到另一对象中去. 其公式为：

A 对象具有 a，b，c，d 属性，B 对象具有 a_1，b_1，c_1 属性，所以，B 对象可能也具有 d_1 属性. 在这里，a，b，c，d 之间可以有下列几种情形：

（1）它们是并列的、各自孤立的. 例如，人们看到地球是一颗行星，绕日公转，绕轴自转，运行轨道为椭圆形，其上有高等动物；又看到火星也是一颗行星，绕日公转，绕轴自转，运行轨道为椭圆形，因而推出“火星上也可能有高等动物”的结论. 这是初等逻辑所研究的类比. 这种类比，可称为简单共存类比，它与猜测差不多，可靠性甚差.

（2）它们之间存在着因果关系的类比. 例如，1678 年荷兰科学家惠更斯提出的波动说. 他把光与声进行类比，认为声之所以能够直线传播、反射、折射，原因在于声是机械波，具有波动性；而光既然也能直线传播、反射、折射，也可能是由于波动性造成的，故光同

声一样，也是一种机械波.

(3) 它们之间有对称关系. 客观世界中许多事物有对称性，因此人们往往依据这种性质而进行类比，即知道 A 对象有 a 和 b 属性，a 和 b 是对称的，现又知 B 对象有 a_1 属性，由此推论出 B 对象也可能有与 a_1 相对称的 b_1 属性. 1931 年，英国物理学家狄拉克就是根据物质的对称关系提出了存在着正电子的著名预言. 他把电荷和电子加以类比，已知电荷有正负的对称关系，并且已发现了负电子，由此推论出可能有与负电子相对称的正电子存在，这个预言后来为实践所证实了.

此外，可能还有别的情形和更为复杂多样的联系与关系，这在应用类比方法时必须充分估计并善于利用. 在科学高度发达的今天，仅仅懂得初等逻辑的简单共存类比，满足于把对象的各属性简单地列举出来和毫无联系地排列起来，就难于获得重大的科学发现.

辩证唯物主义告诉我们，世界万物存在着普遍联系，发现事物间的联系，探索其中的规律是科学研究的重要任务，也正是事物间的普遍联系促使人们在科学研究中频繁地使用类比的思想方法. 辩证法大师黑格尔明确指出:“类比的方法在经验科学里占很高的地位，而且科学家也曾依这种推论方式获得很重要的结果.”

类比思维是创造性思维中的核心方法. 当面对一个问题时，如果一个人没有直接相关的知识，那他可能会通过类比的方法把不直接相关的知识经验运用到当前的问题中. 类比思维涉及两种观念之间的对应映射，其中一个观念是“源领域”，另一个观念是“靶领域”(比如上面的“太阳系”与“原子”)，类比思维就是把源领域中的观念框架映射到靶领域中，从而形成对该领域的新理解、新洞察. 在类比映射过程中，我们所迁移、推论的是那些融会贯通的、整合性的知识，而不是那些只言片语式的“小零碎”.

诸如生物学中细胞学说、达尔文“自然选择”理论、遗传密码的提出，哈维关于血液循环理论的建立，地球上氦元素的发现，以及现代物理中威尔逊云室、格尔塞的液态氢气泡室的发明等等，都有类比方法的汗马功劳. 类比思维是生成新假设、进行科学发现的一种方式，除此之外，科学发现还需要其他活动，尤其是假设检验活动，即在完成科学发现任务后要设计实验去“检验”自己的假设.

5.1.3 演绎推理

教材线索

本小节首先指出，演绎推理与归纳推理的过程相反，是从一般到特殊的推理，然后指出三段论式推理是演绎推理的主要形式，并给出三段论式推理的公式. 接着提出大前提、小前提、结论等三个概念，举例加以说明，最后指出三段论式推理的省略形式.

教学目标

（一）知识与技能

1. 结合已学过的数学实例和生活中的实例，体会演绎推理的重要性，掌握演绎推理的基本方法，并能运用它们进行一些简单推理.

2. 演绎推理是严谨的数学思维中必不可少的推理方式，通过已学过的数学实例的讲解让学生认识到演绎推理在数学思考中的重要作用.

（二）过程与方法

1. 加强关于演绎推理基础知识的教学和基本技能的训练，让学生能很好地应用三段论法则进行推理.

2. 结合生活中的实例，创设民主的学习氛围和生动的学习情境，鼓励、引导学生通过思考、质疑等丰富多彩的认识过程来获取数学知识.

（三）情感、态度与价值观

1. 通过演绎推理与三段论法则的学习、严谨的逻辑思维训练、缜密的思考与推算过程，可促使学生的道德准则合乎理性，形成诚实、顽强、谨慎和勇敢等个性品质.

2. 发展学习数学的兴趣，让学生乐于探究数与形变化的奥秘，体验数学探究的艰辛和喜悦，感受数学世界的奇妙与和谐.

教材分析

1. 重点：

（1）演绎推理的概念；

（2）三段论式推理的格式.

2. 难点：

三段论式推理的格式.

3. 演绎推理与归纳推理的过程相反，是从一般到特殊的推理. 一般中概括了特殊，凡是一类事物所共有的属性，其中每一特殊事物必然具有. 演绎推理的前提是一般性的，即普遍性的知识、原理、定律、公式等，推出的结论是特殊的知识. 所以，演绎推理是必然性推理，其结论是可靠的.

演绎推理可分为简单判断推理和复合判断推理两种，由大前提、小前提推出结论的三段论式推理是一种简单判断推理. 简单判断推理虽也广泛地应用于科学研究中，但在研究的对象较为复杂时，我们经常使用的是更为复杂的复合判断推理.

4. 三段论的定义及结构.

（1）定义：三段论是由两个包含着一个共同项的性质判断作前提，推出另一个性质判断为结论的间接推理.

在这个定义中，必须注意三点：一是三段论全由性质判断组成；二是两个前提必须有

一个共同项（相同的概念）；三是三段论是间接推理，因为它的前提是由两个判断组成.

（2）结构：

从它们包含的不同概念来看，三段论有大、中、小三个项.

①大项：结论中的谓项. 用“P”表示.

②小项：结论中的主项. 用“S”表示.

③中项：前提中的共同项. 用“M”表示.

从它所包含的不同判断来看，三段论有大小前提和结论三部分.

①大前提：包含大项的前提.

②小前提：包含小项的前提.

③结论：推出的新判断.

举例如下：

三角形内角和等于 $180°$，（大前提）

图形 ABC 是三角形，（小前提）

所以，图形 ABC 内角和等于 $180°$.（结论）

在这个例子中，三段论由三个简单判断所组成，其中前两个判断叫前提，后一个判断叫结论. 就主项和谓项说，它包含而且只包含三个不同的概念，每个概念在两个判断中各出现一次. 三段论的公式是：

所有 M 是 P（M—P），

所有 S 是 M（S—M），

所以，所有 S 是 P（S—P）.

其中，S 叫小项，在结论中作主项，如上例中的“图形 ABC”；P 叫大项，结论中作谓项，如上例中的“内角和等于 $180°$”；M 叫中项，在大小前提中出现两次，而在结论中没有出现，如上例中的“三角形”. 中项 M 是媒介，宛如一座桥梁，通过它把小项和大项连接起来，使它们在结论中发生了联系，从而形成一个三段论推理.

5. 三段论的省略式.

在表达思想时，没有明确表达出三段论的某一部分，而只明确表达出其中两部分或一部分的三段论，就是三段论的省略式或简称省略推理. 三段论的省略式中有一个或两个部分被省略，是指语言形式上的省略，这个被省略的部分只是在语言形式上没有明白地表达出来，而绝不能理解为三段论在结构上有了省略.

例如，对三段论的完整式：

一切直角都相等，（大前提）

这两个角是直角，（小前提）

所以，这两个角相等.（结论）

其省略式有两种形式：

（1）省略大前提，而只有小前提和结论.

因为这两个角是直角，(小前提)

所以这两个角相等.(结论)

(2) 省略大前提和小前提，而只有结论.

两个直角相等.(结论)

在实际语言表述时，经常出现以下类型的三段论省略式：

(1) 总得给我饭吃吧，我也是人啦!(省大前提)

(2) 对干部都得审查，你当然不能例外!(省小前提)

(3) 我们的事业是正义的事业，而正义的事业是不可战胜的.(省结论)

教学建议

1. 在教学中，还可以适当地补充形式逻辑学的知识，也可以讲解一些逻辑发展史知识. 关于三段论的最早论述可见于亚里士多德的“前分析篇”.“演绎”一词即源于希腊语. 在逻辑上三段论是从大前提和小前提得出来的，大前提是一般性的原则，小前提是一个特殊陈述，结论是大前提应用在小前提上得到的.

2. 在教学中，还可以补充一些具体实例. 下面的两个例子是亚里士多德给出的经典的三段论：

(1) 如果所有人都是必死的，(大前提)

并且所有希腊人都是人，(小前提)

那么所有希腊人都是必死的.(结论)

(2) 所有人都是必死的，(普遍原理)

苏格拉底是人，(特殊陈述)

苏格拉底是必死的.(把特殊放入一般)

3. 在区分三段论的大小前提和结论时，学生往往会认为大前提一定是第一句，小前提一定是第二句，结论一定在最后，教学中必须对这个问题予以澄清. 一般地说，在关联词“所以”、“因此”等后面的是结论. 比如在三段论“四边形 $ABCD$ 是平行四边形，平行四边形的对角线互相平分，所以，四边形 $ABCD$ 的对角线互相平分”中，小前提是“四边形 $ABCD$ 是平行四边形”，大前提是“平行四边形的对角线互相平分”，结论是“四边形 $ABCD$ 的对角线互相平分”.

例题解析

例 1 教材 P. 43 例 1.

分析 重点讲解本例中的三段论式推理的格式，要求学生加以记忆，学会分辨大前提与小前提.

例 2 教材 P. 43 例 2.

分析 对本例的三段论式证明，学生不知道如何叙述证明过程，多讲解几个相关的例

题能有效地突破这个难点. 在数学证明中，使用三段论的格式叙述证明过程是很烦琐的，为了简洁，通常略去大前提或小前提，甚至有的大前提、小前提都完全加以省略.

例 3　教材 P. 44 例 3.

分析　从这个例题可以看出，三段论是一种从一般到特殊的推理，它是一个由大前提、小前提推出结论的演绎过程，这种过程在数学的思考中极其常见。例题中的大前提是指等式对所有的实数 a 均成立，小前提说的是“1 是一个实数”，结论说的是“等式对实数 1 也成立”.

可在教材例题基础上补充以下例题：

例 4　将三段论省略式“$\angle A$ 一定等于 30°，因为$\angle A$ 的正弦值等于$\frac{1}{2}$”恢复成完整的三段论.

分析　“因为”前面是结论，结论的主项“$\angle A$”是小项，谓项“一定等于 30°”是大项. “$\angle A$ 的正弦值等于$\frac{1}{2}$”中有小项“$\angle A$”，所以是小前提，显然省去了大前提. 要恢复大前提，知道了大项和中项，就好办了. 大项已知是“一定等于 30°”，中项呢？由小前提得知为“正弦值等于$\frac{1}{2}$”. 这样，大前提可恢复为：正弦值等于$\frac{1}{2}$的角一定等于 30°.

相关链接

1. 日常生活中的演绎推理

在地球上，沧海变桑田，桑田变沧海的现象是经常发生的. 比如，号称“世界屋脊”的青藏高原，包括横亘其间的喜马拉雅山系，原来曾是一片汪洋大海，四千多万年以前，才完全成为陆地. 几百万年以前，才横空出世，大幅度隆起，成为今日的巍巍高原，而且，时至今日，仍然神不知鬼不觉地上升着，群峰之最的珠穆朗玛峰，大约每过 1 000 年就升高 70 m.

这个结论是科学家们运用演绎推理的复合判断推理方法获得的. 地质学告诉我们，如果是海生生物的地层，那么就是地质史上的古海洋地区. 科学家们通过实地考察，发现喜马拉雅山系的地层中都有海生生物的化石，如鱼类化石、贝壳化石等. 我国地质工作者曾在珠穆朗玛峰地区发现了鱼龙化石. 由此可见，青藏高原地区原来是古海洋地区，喜马拉雅山脉是从沧海中升起来的.

上述推理的过程是这样的：

如果地层是海生生物的地层，那么就是地质史上的古海洋地区；

喜马拉雅山的地层是海生生物的地层；

所以，它是地质史上的古海洋地区.

类似这样的推理，我们在日常生活中也经常在使用. 例如：

（1）如果你说得对，那么我就照你的办；

你说的是对的；

所以，我照你的办了.

（2）为人民利益而死，就比泰山还重；

雷锋同志是为人民利益而死的；

所以，他的死比泰山还重.

这种推理，可以抽象为下列普遍公式：如果 A 成立，那么 B 成立；A 成立，所以 B 成立. 这是复合判断推理的一种形式，在逻辑学上叫作假言推理.

假言推理，就是以假言判断作前提的演绎推理，其中另一个前提和结论，可以是简单判断，也可以是假言判断. 假言判断是一种条件判断，即前一个判断存在是后一个判断存在的条件. 如上述例子，只要“地层是海生生物的地层”是真的，“就是地质史上的古海洋地区”也是真的，后者依赖于前者，前者是后者存在的条件.

我们知道，条件有充分条件、必要条件、充要条件之分，因此，假言推理也有充分条件假言推理、必要条件假言推理、充要条件假言推理之别，这三种假言推理的公式和规则是各不相同的.

在假言推理中，还有必要提及一种更为复杂的推理形式——假言连锁推理，也就是每一个前提和结论都是假言判断的推理. 其公式是：

充分条件假言连锁推理：如果 A，那么 B；如果 B，那么 C；如果 C，那么 D；如果 D，那么 E. 所以，如果 A，那么 E.

必要条件假言连锁推理：只有 A，才 B；只有 B，才 C；只有 C，才 D；只有 D，才 E；

所以，只有 A，才 E.

现以环境污染对人体危害为例：

如果滥用滴滴涕，那么，它就会扩散到地面和大气中去；

如果它扩散到地面和大气中去，那么就会随雨水降流到江河湖海中；

如果它降流到江河湖海中，那么浮游生物吞食它后就积聚在体内；

如果它积聚在浮游生物体内，那么吞食浮游生物的鱼类就会在体内积聚较高浓度的滴滴涕；

如果鱼类体内积聚较高浓度的滴滴涕，那么长期食用这些鱼类的人体就会发生病变.

所以，如果滥用滴滴涕，那么长期食用这些鱼类的人体就会发生病变.

这个例子使我们看到，应用假言连锁推理，可以把一件事或一种行为的深远后果揭示出来，这对于科学研究工作无疑是重要的.

在演绎推理中还有一种重要的推理叫选言推理，同样是我们从事科学研究时不可缺少的工具. 举例如下：

要么是无产阶级世界观，要么是资产阶级世界观；

共产主义世界观就是无产阶级世界观；

所以，共产主义世界观不是资产阶级世界观.

这种推理在逻辑学上叫作不相容选言推理.作为前提的各个判断(又叫“选言肢”)互相排斥,只能有一肢为真.反之,如果各个选言肢互不排斥,可以同为真,就叫相容选言推理.

2. 三段论的一般规则

三段论的一般规则和导出规则共有六条：

(1) 有且只有三个不同的概念. 否则，一般情况下会犯“四概念”错误.

比如：几何是一门很古老的科学，分形几何是几何，所以，分形几何是一门很古老的科学. 前提真而结论假，推理无效. 由于前提中的两个“几何”不是同一个概念（前一个是指欧几里得几何，后一个是指包括欧几里得几何和现代分形几何在内的所有的几何学)，所以，这个三段论犯了“四概念”错误.

(2) 中项至少周延一次. 否则，犯“中项不周延”错误.

如果中项在前提中一次也没有被断定过它的全部外延（即周延)，那就意味着在前提中大项与小项都分别只与中项的一部分外延发生联系，这样，就不能通过中项的媒介作用，使大项与小项发生必然的确定的联系，因而也就无法在推理时得出确定的结论. 例如，有这样的一个三段论：二次曲线都是轴对称图形，正方形是轴对称图形，所以，正方形是二次曲线. 在这个三段论中，中项的“轴对称图形”在两个前提中一次也没有周延（在两个前提中，都只断定了“二次曲线”、“正方形”是“轴对称图形”的一部分对象)，因而“二次曲线”与“正方形”究竟处于何种关系就无法确定，也就无法得出必然的确定结论，所以这个推理是错误的. 违反这条规则，就要犯“中项不周延”的错误，这样的推理就是不合逻辑的.

(3) 前提中不周延的项，结论中不得周延. 否则，或者犯“小项不当周延”错误，或者犯“大项不当周延”错误.

比如：运动员需要努力锻炼身体，我不是运动员，所以，我不需要努力锻炼身体. 这个推理的结论显然是错误的. 这个推理从逻辑上说错在哪里呢？主要错在“需要努力锻炼身体”这个大项在大前提中是不周延的（即运动员只是需要努力锻炼身体中的一部分人，而不是其全部)，而在结论中却周延了（成了否定命题的谓项). 这就是说，它的结论所断定的对象范围超出了前提所断定的对象范围，因而在这一推理中，结论就不是由其前提所能推出的. 其前提的真也就不能保证结论的真. 这种错误逻辑上称为“大项不当周延”的错误（如果小项扩大则称“小项不当周延”的错误).

(4) 从两个否定的前提不能得到必然的结论. 否则，犯“两否定推结论”的错误.

比如：无理数不能表示成循环小数，2 不是无理数，所以 2 可表示成循环小数. 这里的

前提真而结论亦真，但推理却是无效的. 原因在于两个前提都是否定的，中项不能起到联结大小项以确定它们之间的关系的作用.

(5) 如有一否定前提，结论必否定；如结论否定，必有一否定前提. 否则，犯“由否定推肯定”的错误.

比如：五边形内角和都等于 $540°$，某多边形内角和不等于 $540°$，所以，某多边形是五边形.

(6) 两个特称前提不能得出结论；前提之一是特称的，结论必然是特称的.

两个特称前提是无法得出必然结论的. 前提之一是特称的，结论必然是特称. 例如：所有的实系数一元三次方程都有实数解，有的高次方程是实系数一元三次方程；所以，有的高次方程有实数解. 这个例子说明，当前提中有一个判断是特称命题时，其结论必然是特称命题；否则，如果结论是全称命题就必然会违反三段论的规则.

5.1.4 合情推理与演绎推理的关系

教材线索

本小节通过一个经典的几何最短路径问题的解决总结出探索自然规律的原理与方法：使用合情推理发现问题提出猜想，再使用合情推理总结出解决方案或猜想，最后利用演绎推理加以论证.

教学目标

(一) 知识与技能

1. 通过具体实例，了解合情推理和演绎推理之间的联系和差异. 初步了解探索自然规律的原理与方法：使用合情推理发现问题提出猜想，再使用合情推理总结出解决方案或猜想，最后利用演绎推理加以论证.

2. 进一步提高学生归纳与类比的推理能力，与演绎推理的能力，并能在实际问题中综合应用合情推理与演绎推理.

(二) 过程与方法

1. 结合教学内容，通过具体实例，帮助学生通过丰富多彩的理解活动去发现和学习新的数学知识，让学生在数学知识的形成过程中发现数学规律，感悟数与形的美与理.

2. 合情推理与演绎推理是探索思维的基本原理与方法，鼓励学生努力学会使用合情推理去发现问题并提出猜想，使用合情推理提出解决问题的方案.

(三) 情感、态度与价值观

1. 通过学习让学生体会探索自然规律和证明定理过程中激动人心的一幕，促进学生爱

数学、学数学、应用数学并发现数学，养成学生勤于观察、思考，擅于提出问题、解决问题的优良品质.

教材分析

1. 重点：

合情推理和演绎推理之间的联系和差异.

2. 难点：

合情推理和演绎推理之间的联系和差异.

3. 归纳是把个别事物的特征上升为一类事物的特征，演绎则是从一般原理到特殊事例的推理. 对归纳有三种理解：

（1）它是一种推理方法，用它可以由几个单称判断或特称判断得出一个新的全称判断.

（2）它是一种研究方法，当需要研究某一组对象（或某一种现象）时，用它可以研究各个对象（或具体情况），从中找出所有对象都具有的性质（或出现那个现象的各种情况）.

（3）它是一种叙述内容的形式，在文学作品、谈话和教学过程中，如果要从不太一样的情况过渡到一般情况（结论），就使用这种形式. 归纳推理分不完全归纳和完全归纳. 不完全归纳的结果，只具有猜想的性质，归纳猜想是科学研究中最常用的方法，它具有很大的创造性. 作为教学和学习的方法，不完全归纳合乎学生的学习心理，是自然且合情的.

对演绎有三种理解：

（1）它是一种推理方法，利用它可以从一个全称判断和一个特称判断得出一个新、较少的全称判断和一个特称判断.

（2）它是一种研究方法，为了得到关于某一对象（概念、性质）的新知识，先找出同这一对象最近的一组对象（最近的类概念），再将这组对象的重要性质（类的属性）应用于那个对象（概念、性质）.

（3）演绎可以作为叙述内容的一种形式，也可以作为一种教学方法. 演绎推理的前提中的判断范围包含结论中的判断范围，简单的演绎推理一般是通过三段论来实现的.

归纳和演绎不是孤立地出现的，它们紧密地交织在一起. 一方面，归纳推理的可靠性不仅要用许多事例来验证，而且也要用较一般的原理、较一般的规律来验证（即用演绎法来验证）；另一方面，演绎的前提是通过归纳得出的.

教学建议

合情推理是根据已有的事实和正确的结论以及个人的经验和直觉等推测某些结果的推理过程. 归纳、类比是合情推理常用的思维方法. 在解决问题的过程中，合情推理具有猜测和发现结论、探索和提供思路的作用，有利于创新思维的培养. 传统教学比较注重培养学生的演绎思维，而不重视培养学生合情推理中的归纳和类比的思维，这已经使我国数学教育在学生思维素质培养方面遭受到无法挽回的损失.

任何一门科学的发展都有一个通过观察、实验而积累材料的阶段. 当材料积累到一定程度，就要整理材料，从中概括出带普遍性的结论，即提出假说、定理、定律或公式. 科学研究的根本任务，就是要发现普遍性的规律. 在这个过程中，归纳法大有用武之地. 科学史表明，科学中的许多定律、公式是用归纳法总结出来的，诸如关于气体压强、体积和温度三者关系的波义耳定律、盖-吕萨克定律和查理定律，关于电磁相互作用的奥斯特定律、法拉第定律，关于生物进化的生存竞争规律，以及能量守恒与转化定律等，都是借归纳之助而总结出来的. 如果不用归纳法，就会使认识永远停留在感性经验上，就不会有科学.

在本小节的教学中，可以寻找更多类似于教科书中经典的几何最短路径问题的例子，在问题的解决过程中让学生逐步体会探索自然规律的原理与方法：使用合情推理发现问题提出猜想，再使用合情推理总结出解决方案或猜想，最后利用演绎推理加以论证.

例题解析

可在课本例题基础上补充以下例题：

例　已知前 n 个正整数的和为

$$S_1(n)=1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1),$$

求前 n 个正整数的平方和

$$S_2(n)=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=?$$

思路 1（归纳的方案）

如表 1 所示，列举出 $S_2(n)$ 的前几项，希望从中归纳出一般的结论.

表 1

n	1	2	3	4	5	6	…
$S_2(n)$	1	5	14	30	55	91	…

但是，从表 1 的数据中并没有发现明显的关系，这时我们进一步列举出 $S_1(n)$ 的值（如表 2），比较 $S_1(n)$ 与 $S_2(n)$，希望有所发现.

表 2

n	1	2	3	4	5	6	…
$S_1(n)$	1	3	6	10	15	21	…
$S_2(n)$	1	5	14	30	55	91	…

观察了 $S_1(n)$ 和 $S_2(n)$ 的相应数据，仍然没有发现明显的联系.

尝试计算，终于在计算 $S_1(n)$ 和 $S_2(n)$ 的比时，发现“规律”了（表 3）

表 3

n	1	2	3	4	5	6	…
$S_1(n)$	1	3	6	10	15	21	…
$S_2(n)$	1	5	14	30	55	91	…
$\frac{S_2(n)}{S_1(n)}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{9}{3}$	$\frac{11}{3}$	$\frac{13}{3}$	…

从表 3 中发现

$$\frac{S_2(n)}{S_1(n)}=\frac{2n+1}{3},$$

于是，猜想

$$S_2(n)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

上述公式的正确性还需要证明.

思路 2（演绎的方案）

尝试用直接相加的方法求出正整数的平方和.

（1）把正整数的平方表示出来，有

$$\begin{aligned}
1^2&= 1,\\
2^2&=(1+1)^2=1^2+2\times1+1,\\
3^2&=(2+1)^2=2^2+2\times2+1,\\
4^2&=(3+1)^2=3^2+2\times3+1,\\
&\cdots\cdots\\
n^2&=(n-1)^2+2(n-1)+1,
\end{aligned}$$

左右两边分别相加，得

$$S_2(n)=[S_2(n)-n^2]+[2S_1(n)-2n]+n,$$

等号两边的 $S_2(n)$ 被消去了，所以无法从中求出 $S_2(n)$ 的值，尝试失败了！

（2）从失败中汲取有用信息，进行新的尝试.

前面的失败尝试还是有意义的，因为尽管我们没有求出 $S_2(n)$，却求出了 $S_1(n)$ 的表达式，即

$$S_1(n)=\frac{n^2+2n-n}{2}=\frac{n(n+1)}{2},$$

它启示我们：既然能用上面方法求出 $S_1(n)$，那么我们也应该可以用类似的方法求出 $S_2(n)$.

（3）尝试把两项和的平方公式改为两项和的立方公式. 具体方法如下：

$$\begin{aligned}
1^3&= 1,\\
2^3&=(1+1)^3=1^3+3\times1^2+3\times1+1,\\
3^3&=(2+1)^3=2^3+3\times2^2+3\times2+1,\\
4^3&=(3+1)^3=3^3+3\times3^2+3\times3+1,\\
&\cdots\cdots\\
n^3&=(n-1)^3+3(n-1)^2+3(n-1)+1.
\end{aligned}$$

左右两边分别相加，得

$$S_3(n)=[S_3(n)-n^3]+3[S_2(n)-n^2]+3[S_1(n)-n]+n.$$

由此可

$$\begin{aligned}S_2(n)&=\frac{n^3+3n^2+2n-3S_1(n)}{3}\\&=\frac{2n^3+3n^2+n}{6}\\&=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\end{aligned}$$

终于推出了公式.

相关链接

合情推理与数学猜想

合情推理是根据已有的事实和正确的结论（包括实验和实践的结果）以及个人的经验和直觉等推测某些结果的推理过程，归纳、类比是合情推理常用的思维方法. 在解决问题的过程中，合情推理具有猜测和发现结论、探索和提供思路的作用，而在数学史中，有许多世界著名的数学问题也主要是数学家依靠合情推理得以发现并最终解决的.

（1）哥德巴赫猜想的发现.

哥德巴赫猜想是世界近代三大数学难题之一. 1742 年，德国中学教师哥德巴赫写信给著名的数学家欧拉，提出了两个猜想. 第一个是：任何一个大于 2 的偶数，都是两个素数之和，简单地用“1＋1”来表示；第二个是：每个大于 5 的奇数，都是 3 个素数之和. 欧拉当时表示相信哥德巴赫提出的猜想是对的，但他证明不出来.

两百多年来这个猜想像磁石一样吸引着世界上为数众多的数学家. 经过英国数学家哈代、李特伍德和苏联数学家维诺格拉朵夫的努力，证明了哥德巴赫提出的第二个猜想. 剩下的就是第一个猜想了.

1920 年，挪威数学家布朗改进了已有两千多年历史的埃氏筛法，证明了每一个充分大的偶数是两个素因子个数都不超过 9 的数的和，简称为“9＋9”. 1924 年德国数学家拉代马哈证明了每一个充分大的偶数是两个素因子个数都不超过 7 的数的和，简称为“7＋7”. 1932 年英国的埃斯特曼证明了“6＋6”. 后来苏联的布赫夕塔布又证明了“5＋5”和“4＋4”. 1956 年我国数学家王元证明了“3＋4”. 同年苏联的维诺格拉朵夫证明了“3＋3”. 1957 年王元又证明了“2＋3”. 后来又有人证明了“1＋5”、“1＋4”、“1＋3”. 我国数学家陈景润进一步改进了筛法，终于证明了“1＋2”，取得了目前为止世界上研究哥德巴赫猜想的最好成果. 至于能否证明“1＋1”，我们只好拭目以待了.

在这里，我们感兴趣的是，哥德巴赫怎么能够提出这个令人消磨时光、绞尽脑汁的猜

想？这从逻辑思维方面讲，就是依靠不完全归纳推理. 就第一个猜想来说，其推理形式可以表述如下：

$4=1+3$（两素数之和），$6=3+3$（两素数之和），$8=3+5$（两素数之和），$10=5+5$（两素数之和），$12=5+7$（两素数之和）……所以，任何大于2的偶数都是两素数之和.

这是一个不完全归纳的推理过程，从中我们看到，著名的哥德巴赫猜想的发现正是合情推理中的归纳法的应用.

（2）费马大定理的提出.

费马大定理亦称“费马猜想”，最先是由费马在阅读巴歇（Bachet）校订的丢番图《算术》时作为卷2命题8的一条页边批注而提出的. 1670年费马之子萨缪尔（Samuel）出版了巴歇的书的第二版，此后三个多世纪，费马大定理成为世界上最著名的数学问题. 寻求费马大定理的证明方法，吸引了历史上许多最有才智的数学家的目光，有力地推动了数论乃至整个数学的进步；1995年，这一旷世难题被英国数学家怀尔斯（A. Wiles）解决. 数学家高斯曾经说过：“数学中的一些美丽定理具有这样的特性，它们极易从事实中归纳出来，但证明却隐藏得极深.” 在数论领域，费马大定理也是一个最为美丽的定理，只不过这个定理在提出猜想时并非通过归纳，而是通过类比而得到的.

我们知道，不定方程 $x^2+y^2=z^2$ 有无数多组正整数解，类比之下，得到与之相反的结论，即费马猜想：不定方程 $x^n+y^n=z^n$（$n\geqslant3$，$n\in\mathbf{N}$）不存在正整数解. 这只是简单的升维类比，但是，费马猜想却是一个非常好的数学问题，著名的数学家希尔伯特曾喻之为“一只会下金蛋的母鸡”.

5.2 直接证明与间接证明

5.2.1 直接证明：分析法与综合法

教材线索

本小节以“走迷宫”的游戏作比喻，引出了综合法与分析法的概念. 接着，通过举例，两种方法并用，详细阐释了综合法与分析法在数学证明中的具体使用过程，最后得出结论：先用分析法探索证明的途径，然后用综合法的形式写出证明的过程.

教学目标

（一）知识与技能

1. 结合已经学过的数学实例，了解直接证明的两种基本方法——分析法和综合法；了解分析法和综合法的思考过程、特点.

2. 使学生能更熟练地利用分析法探索证明的途径，然后用综合法的形式写出证明过程，通过例习题讲解着重培养学生的分析、综合能力.

（二）过程与方法

1. 结合已经学过的数学实例，通过分析法与综合法的一题双解方式，让学生进一步提高数学证明的能力.

2. 在学习过程中，让学生能对自己的数学证明过程进行计划、反思、评价和调整，提高分析问题与解决问题的能力.

3. 通过自由发言、小组合作等方式让数学课堂更加生动活泼，促进学生进行有效的数学学习.

（三）情感、态度与价值观

分析法与综合法是数学直接证明的主要方式，通过例习题的讲解让学生认识到分析法与综合法在数学证明中的重要作用，养成善于分析、善于综合、严谨思考的良好数学品质.

教材分析

1. 重点：

直接证明的两种基本方法：分析法和综合法.

2. 难点：

分析法和综合法的思考过程、特点.

3. 证明是通过一连串的推理，由一些真实的命题来确定另一命题真实性的过程. 任何证明都由三部分组成：论题、论据、论证方式.

论题就是需要确定其真实性的命题. 在几何中，论题一般具有假言命题“若 A 则 B”的形式，其中 A 是条件（或题设），B 是结论（未知事项）.

论据是被用来作为证明论题真实性的依据的命题. 在几何证明中，充当论据的命题主要是公理系统内的公理、定义、定理以及论题中的条件等.

论证方式是指论据与论题之间的逻辑联系方式，也就是从论据推出论题的过程中的推理形式. 例如，三段论、联言推理、选言推理、假言推理、关系推理等，它们统称为演绎推理，演绎推理保证了由正确的前提得到正确的结论. 我们通过以下的问题来说明.

例 在四边形 $ABCD$ 中，$AC\perp BD$，求证：$AB^2+CD^2=AD^2+BC^2$.

首先可以确定论题的条件是：$ABCD$ 是四边形，且 $AC\perp BD$. 而论题的结论则是：$AB^2+CD^2=AD^2+BC^2$.

证明 设 AC 与 BD 交于 O，因 $AC\perp BD$（论据 1），所以由垂线的性质（论据 2）知，$\triangle ABO$，$\triangle ADO$ 为直角三角形. 根据勾股定理（论据 3），有

$$AO^2+BO^2=AB^2，AO^2+OD^2=AD^2.$$

因为等量减等量，其差相等（论据 4），

所以 $AB^2-AD^2=BO^2-OD^2$. 同理有 $CB^2-CD^2=BO^2-OD^2$.

因为同等于第三个量的两个量相等（论据 5），

所以 $AB^2-AD^2=CB^2-CD^2$，即 $AB^2+CD^2=CB^2+AD^2$.

在上述证明过程中，论据 1 是条件，论据 2、3 是已知定理，论据 4、5 是公理. 由于采用的演绎推理形式是正确的. 所以，论题是这些论据的逻辑推论. 只要这些论据是真实的，那么，经过证明后的论题的真实性也确定了.

4. 分析与综合是思维活动中彼此相反但又密切联系的基本过程，它们在人类学习和研究过程中起着主导作用. 一般意义下，分析被理解为在思想上把对象的整体分解成各个部分或各个要素，或把整体的某些部分或某个要素分出来. 例如，把中学课程分解为数学、语文、外语等学科，分别加以研究. 这个过程的特点是，撇开各个部分或要素之间的相互关系，而逐一地研究每个部分或各个要素的状态. 综合是在思想上把对象的各个部分或各个要素联系起来，把整体的某些部分或个别要素组合起来. 综合的特点是寻求整体内部各个部分或要素间的相互联系.

在思维方法上，分析是从结果追溯到产生这一结果的原因的一种思维方法；综合是从原因推导到由原因产生的结果的一种思维方法. 在数学证明中，这种方向的差异是显而易见的，分析法是执果索因，而综合法则是由因导果，即分析法是由待证结论走向已知条件，而综合法则是从已知条件走向待证结论.

5. 数学证明方法按证明是否直接证得命题，可以分成直接证法和间接证法. 由命题的已知条件以及已知公理、定理、定义等作为依据，从正面证明命题结论的真实性的证明方法叫做直接证法. 它是数学证明中普遍使用的方法，但是，有些数学命题往往不易，甚至不能用直接证法证明，这时，可不直接证明命题的真实性，而是通过证明所证命题的否命题不真实，或证它的逆否命题成立，从而证得所证命题为真，这种证法叫做间接证法. 直接证法中常见的方法是分析法与综合法.

一般认为，在数学证明中，关键是找到证明的途径. 根据思考时推理的方向不同，思考方法分为分析法和综合法. 如果推理的方向是从已知到求证，这种思考方法叫做综合法；如果推理方向是从求证追溯到已知，这种思考方法叫做分析法；如果既从已知条件出发，又从欲证结论出发，经过推理找到证题的途径，这种思考方法叫做分析综合法. 值得注意的是，按上述划分，判断一个证明用什么方法，主要是从证明过程所体现的思考方向来判断所使用的方法是分析法，还是综合法，或者是分析综合法. 分析和综合，既是科学研究的方法，又是学习数学的重要方法之一. 掌握了上述思考方法，分析问题和解决问题的能力会得到很大的提高.

由上述三种证法知，综合法是由因导果，顺理成章，表达简明，缺点是一因多果，越导越广，有时不易得出结论；而分析法是执果索因，较为集中，易有成效，缺点是叙述不易得当；分析综合法从两个方向思考寻找证题桥梁，比较容易找到证题途径. 所以，在寻求证题思路时，更多使用的是分析综合法；而在书写证明过程时，一般采用综合法思路书写表达.

教学建议

教学中要给学生指出，证明不等式时，有时可以从求证的不等式出发，分析使这个不等式成立的充分条件，把证明不等式转化为判定这些充分条件是否具备的问题. 如果能够肯定这些充分条件都已具备，那么就可以断定原不等式成立，这种方法通常叫做分析法. 分析法是“执果索因”，步步寻求上一步成立的充分条件，它与综合法是对立统一的两种方法. 在不等式与几何问题的证明中，分析法是最为常用的，我们常用分析法探索证明的途径，然后用综合法的形式写出证明过程，但有时，在证题过程中我们也将综合法、分析法结合起来，相辅相成.

例题解析

例 1　教材 P. 47 例 1.

分析　在这个例题中，综合法是由因寻果的过程. 在分析法中，可采用与综合法证明逆向的过程去执果索因. 反过来，在用综合法的时候，可采用与分析法证明逆向的过程去由因寻果. 在实际证明中，我们通常以分析法去探寻解题方法，而用综合法书写解题过程.

例 2 教材 P.48 例 2.

分析 在这个例题的分析法证明中，两边同平方时要注意不等式两边必须都是正数，如果不都是正数，在不等式两边同平方后，不等式可能就不成立了，变形中，是通过同平方去根式以达到化简证明的目的，通过在不等式两边同平方，将原本无法一眼看穿的不等式化为一个显然成立的不等式. 将一个复杂的问题化为一个简单的问题，这是使用分析法时变形的方向.

可在教材例题基础上补充以下例题：

例 3 设 x，$y\in\mathbf{R}_+$ 且 $x+y=1$，求证：$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\geqslant 9$.

证明 （综合法）左边$=\left(1+\frac{x+y}{x}\right)\left(1+\frac{x+y}{y}\right)=\left(2+\frac{y}{x}\right)\left(2+\frac{x}{y}\right)=4+2\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+1\geqslant 5+4=9$.

（分析法）要证$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\geqslant 9$ 成立，

$\because x$，$y\in\mathbf{R}_+$ 且 $x+y=1$，$\therefore y=1-x$.

只需证明$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{1-x}\right)\geqslant 9$，即证$(1+x)(2-x)\geqslant 9x(1-x)$，

即证 $2+x-x^2\geqslant 9x-9x^2$，即证 $4x^2-4x+1\geqslant 0$，

即证$(2x-1)^2\geqslant 0$，此式显然成立，所以原不等式成立.

例 4 若 a，b，c 是不全相等的正数，求证：$\lg\frac{a+b}{2}+\lg\frac{b+c}{2}+\lg\frac{c+a}{2}>\lg a+\lg b+\lg c$.

证明 欲证 $\lg\frac{a+b}{2}+\lg\frac{b+c}{2}+\lg\frac{c+a}{2}>\lg a+\lg b+\lg c$，

只需证 $\lg\left(\frac{a+b}{2}\cdot\frac{b+c}{2}\cdot\frac{c+a}{2}\right)>\lg(abc)$，

只需证 $\frac{a+b}{2}\cdot\frac{b+c}{2}\cdot\frac{c+a}{2}>abc$.

但是，$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}>0$，$\frac{b+c}{2}\geqslant\sqrt{bc}>0$，$\frac{c+a}{2}\geqslant\sqrt{ca}>0$.

且上述三式中的等号不全成立，所以，$\frac{a+b}{2}\cdot\frac{b+c}{2}\cdot\frac{c+a}{2}>abc$.

因此 $\lg\frac{a+b}{2}+\lg\frac{b+c}{2}+\lg\frac{c+a}{2}>\lg a+\lg b+\lg c$ 成立.

注：这个证明中的前半部分用的是分析法，后半部分用的是综合法.

相关链接

1. 逻辑论证与数学证明

依据一个或一些真实的判断，进而断定另一个判断真实的推理，就叫做论证. 由推理

的意义知，论证是由一个或一系列推理所组成的．论证的论据必须是真实的，而推理的依据——前提却不必一定真实，所以推理不一定是论证．只有当前提被断定为真实时，推理才是论证．

任何逻辑论证都由以下三个部分组成：

（1）论题：需要证明其真实性的判断；

（2）论据：确定论题的真实性所根据的已知真实判断；

（3）论证过程：根据论据进行一系列推理证明论题真实性的过程．

数学中的论证即数学证明．也就是说，数学证明是根据已确定其真实性的公理、定理、定义、公式、性质等数学命题来论证某一数学命题的真实性的推理过程．其往往表现为一系列数学中的推理．

类似逻辑论证的组成，数学证明由已知、求证、证明过程三部分组成．其中已知即命题给定的已知条件及已知的公理、定理、公式、定义、性质等，求证就是论题，证明过程即是论证过程．数学证明必须遵守逻辑论证所必须遵守的如下规则：

（1）论题要求明确，始终如一．要论证的命题的条件和结论，必须叙述清楚、准确，在论证过程中不允许有任何更改．

例如，命题“两直线不平行则相交”，没有指明是平面上的还是空间上的两直线，故命题的真假性无法判断．

又如，证明：“凸四边形的内角和等于 $360°$.”

∵矩形是一个四边形，其内角和为 $4\times 90°=360°$，

∴四边形的内角和是 $360°$．

上述证明过程，论题不始终如一，在论证过程中把论题中的四边形改成矩形，而结论又换回了四边形．

（2）论据真实可靠．论证时，不允许使用错误的判断作论据，也不能用真实性尚未证实的判断．

（3）论据不能靠论题来证明．

（4）论据必须能推出论题．即论证过程理由必须充足，否则，不足以推出论题．

2．分析法在数学与科学中所扮演的角色

如果我们相信任何复杂的事物或事理都是由一些基本的要素组成的，则自然就衍生出分析的研究方法．先利用分析方法找出基本要素，然后再用综合方法由基本要素去组合成复杂的事物，从而达到对事物结构的澄清与了解，并且引申出“以简驭繁”的要领．那么，分析法在数学与科学中所扮演的是什么角色呢？

作为一个重要的科学方法，分析法与综合法在数学的发展史上，扮演着主导的角色．几乎每一个数学分支都有它的踪迹，有的甚至还以它来命名，例如综合几何、解析几何、

分析学、调和分析等等.

在字典中，分析就是将事物“分解成简单要素”，综合就是“组合、结合、凑合在一起”. 换言之，将事物分解成组成部分、要素，研究清楚了再凑合起来，事物以新的认知面貌来展现. 这就是采用了分析与综合的方法. 下面我们举几个例子来说明.

古人面对大自然的森罗万象、生成变化，想要探求其原因. 于是去追究物质的结构，提出了“原子论”学说，物质经过逐步的分割，在很大的有穷步骤之内，就会到达不可分割的境地，不可分割就叫做原子，这是本义的分析；反过来，原子的不同排列与组合就形成了各种物质，这是综合. 原子论大师德谟克利特斯说：“万物都是原子组成的. 只有原子与虚空才是最终的真实.”

再比如，白色的光经过三棱镜，可分解成红橙黄绿蓝靛紫七色光，反过来，七色光又可合成为白色光. 这就是光谱的分析与综合，由此可解释彩虹的成因.

分析一篇英文文章的结构，先是得到句子、单词，最后得到 26 个字母，反过来，综合是由字母组成单词、句子，再由句子组成文章，这些是文法所要研究的内容.

笛卡儿在他的《方法论》中说：“将每一个问题尽可能地且恰如所需地分成许多部分，使得每一部分都可以轻易地解决.”这说的其实正是分析法.

在数学中，所谓证明就是要找出从已知条件连接到待证结论的一条逻辑通路，这有时可真不容易，古希腊人想出一种“倒行逆施”的办法：由结论切入，即假设结论成立，投石问路一番，看看能够引出什么结果，这就是所谓的分析法，等找到显然成立的理由后，再回过头来作演绎式的综合，完成证明.

在分析过程中，由结论出发，如果推导出逻辑结果与已知条件、已知的公理、定义、定理及明显的事实相矛盾，那么结论就要被否定掉，这叫做归谬法，也就是反证的思维. 归谬法是分析法的副产物. 古希腊人非常看重它，因为它可以节省综合的步骤，分析法本身就已完成了命题的证明. 英国数学家哈第（Hardy）称归谬法为“弃盘战术”，是数学家的“精致武器”.

由结论出发，推导出一连串的逻辑结论，终于抵达一个已知会显然成立的结论或前提，并且其中的每一个步骤皆可逆，那么我们就找到了解决问题的一个途径，这就是分析法.

5.2.2 间接证明：反证法

教材线索

本小节首先说明间接证明的概念，接着以一个浅显的例子引入反证法，指出使用反证法的一般步骤，最后用反证法证明了$\sqrt{2}$是无理数.

教学目标

（一）知识与技能

1. 结合已经学过的数学实例，了解间接证明的一种基本方法——反证法；了解反证法的思考过程、特点.

2. 反证法是一种间接证法，培养反证的思维有助于激发创新意识，增强思维的批判能力，同时可促进思维的灵活性与对问题进行辩证思考的能力.

（二）过程与方法

1. 反证法是一种重要的证明方法，教学中可以通过生活实例、简单的数学例子以及生动有趣的故事创设具有启发性的问题情境，使学生体会反证法的思想.

2. 注重对学生学习过程的评价与调控，应该考察学生是否积极主动地参与数学学习活动，是否乐意与同伴进行交流和合作，是否具有较强的学习兴趣.

（三）情感、态度与价值观

课题引入时讲解故事以激发学生对反证法的学习兴趣，反证法思维的培养有助于辩证思维的形成，可增强思维的批判性.

教材分析

1. 重点：

反证法在证明有关问题时的思考过程、特点.

2. 难点：

应用反证法证明数学问题.

3. 直接证法与间接证法. 按证明是否直接证得命题，数学证明又可以分成直接证法和间接证法. 由命题的已知条件以及已知公理、定理、定义等作为论据从正面证明命题结论的真实性的证明方法叫做直接证法. 它是数学证明中普遍使用的方法，但是，有些数学命题往往不易甚至不能用直接证法证明，这时，可不直接证明命题的真实性，而是通过证明所证命题的否定命题不真实，或证它的逆否命题成立从而达到证明所证命题真实，这种证法叫做间接证法. 下面仅介绍间接证法，常用间接证法有反证法和同一法.

（1）反证法. 由否定命题结论的正确性出发，根据假设、定义、公理、定理，进行一系列正确的推理，最后得出一个矛盾的结果，以表明结论的反面不成立，从而肯定结论的正确性. 这种驳倒反面的证法，叫做反证法. 当证题结论的反面只有一种情况时，否定了这一反面结论，根据排中律，即可证得原命题的结论是正确的，这种单纯的反证法，叫做归谬法；当命题结论的反面不止一种情况，就得一一驳倒，最后肯定命题结论的正确性. 这种结论的反面不唯一的反证法叫做穷举法.

（2）同一法. 一般情况下，原命题与逆命题不具有等效关系. 但是，当命题的条件与结论所确定的对象都是唯一存在，即它们所指的是同一概念时，这个命题与它的逆命题等效.

这一原理称为同一原理.

对符合同一原理的命题，通过证明它的逆命题成立，从而肯定原命题成立的证明方法称为同一法. 应用同一法证题时，往往先作出一个满足命题结论的图形，然后证明图形符合命题已知条件，确定所作图形与题设条件所指的图形相同. 从而证得命题成立.

同一法与反证法都是用间接的方法证明结论. 但同一法只适用于证符合同一原理的命题，反证法则普遍适用于能用间接方法证明的命题. 能用同一法证明的命题，一般也可用反证法证明，只需在证明时先将结论否定，在最后不指出图形重合，仅指出“根据唯一性，出现两个性质相同的不同图形是矛盾的”即可.

4. 反证法的证明步骤是：(1) 从命题的结论的否定面出发；(2) 根据正确的逻辑推理，推出矛盾（与已知矛盾，与已知定义、公理、定理等矛盾，出现与临时假设矛盾，在证明过程中出现自相矛盾，等等）则否定假设；(3) 肯定原命题的结论是正确的.

如果一个命题的结论难以直接证明时，可考虑用反证法，此即数学解题的“正难则反”原则. 宜用反证法证明的题型有：(1) 以否定性判断作为结论的命题；(2) 某些定理的逆命题；(3) 以“至多”、“至少”或“不多于”等形式陈述的命题；(4) 关于“唯一性”结论的命题；(5) 整除性问题；(6) 一些不等式命题的证明；(7) 某一知识体系的起始阶段的基本定理；(8) 涉及各种“无限”结论的命题；等等.

5. 反证法的理论依据是形式逻辑中的两个基本规律——矛盾律和排中律. 所谓“矛盾律”，即在同一论证过程中，两个互相反对或互相否定的判断，其中至少有一个是假的；而所谓“排中律”，即任何一个判断或者为真或者为假，二者必居其一. 也就是说结论“P 真”与“非 P 真”中有且只有一个是正确的.

对于反证法，法国数学家 J. 阿达玛曾说过：“这种方法在于表明：若肯定定理的假设而否定其结论，就会导致矛盾.”这句话可以理解为假设命题的结论不正确，并运用此判断，在正确的逻辑推证下导致逻辑矛盾，根据矛盾律可知该相反判断的错误性，再根据排中律可知判断本身的正确性. 这就是反证法的逻辑依据. 由此可见，证明原命题的逆否命题只是反证法的一种具体形式.

教学建议

1. 用反证法证题时，应提醒学生注意：(1) 周密考察原命题结论的否定事项，防止否定不当或有所遗漏；(2) 推理过程必须完整，否则不能说明命题的真伪性；(3) 在推理过程中，要充分使用已知条件，否则推不出矛盾，或者不能断定推出的结果是错误的.

2. 用反证法证明问题存在逻辑上的困难，课堂上的例题宜简不宜难，应着重于让学生先掌握反证法使用的逻辑过程，比如可以让学生试着用反证法证明下列各题：

(1) 求证：过同一直线上的三点不能作一个圆.

(2) 求证：在一个三角形中不可能有两个直角.

(3) 已知：直线 $a /\!/ b$，$b /\!/ c$. 求证：$a /\!/ c$.

（4）求证：一条直线与两条平行线中的一条相交，必定与另一条相交.

（5）求证：圆的两条非直径的相交弦不能互相平分.

3. 在教材例 2 的教学时，可以讲述关于无理数$\sqrt{2}$的发现者希帕索斯的故事.

例题解析

例 1 教材 P.50 例 1.

分析 “两条直线相交，只有一个交点”是平面几何中的一个命题，通过假设这个命题的否定成立，经过推理得出与公理相矛盾的结果，从而说明了这个命题的否定不成立，最终得到命题成立. 讲解中要让学生掌握使用反证法证明数学问题的一般步骤.

例 2 教材 P.51 例 2.

分析 使用反证法证明“$\sqrt{2}$是无理数”这个命题，首先要理解无理数、有理数、小数、分数、无限循环小数、无限不循环小数、质因数等相关的概念，讲解之前可做适当的复习. 对学生来说，这个推导过程较为复杂，讲解时要做到条理清晰，理由充足.

可在课本例题基础上补充以下例题：

例 3 已知 $a+b+c>0$，$ab+bc+ca>0$，$abc>0$. 求证：$a>0$，$b>0$，$c>0$.

证法 1 反证法.

假设 a，b，c 不全是正数，即至少有一个小于或等于 0. 又 $abc>0$，不妨假设 $a<0$，则 $bc<0$. $\because b+c>-a>0$，$\therefore -a(b+c)>0$，$\therefore a(b+c)<0$，又 $bc<0$，$\therefore bc+a(b+c)<0$，即$ab+bc+ca<0$，与 $ab+bc+ca>0$ 矛盾，所以假设不成立，故 $a>0$，$b>0$，$c>0$ 成立.

证法 2 构造函数法.

设 $f(x)=(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$，$\because a+b+c>0$，$ab+bc+ca>0$，$abc>0$，$\therefore$当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)>0$ 恒成立，则 $f(x)=0$ 的三个根均为负根，即$-a<0$，$-b<0$，$-c<0$，$\therefore a>0$，$b>0$，$c>0$.

例 4 已知 $f(x)=x^2+px+q$.

（1）求证：$f(1)+f(3)-2f(2)=2$；

（2）求证：$|f(1)|$，$|f(2)|$，$|f(3)|$中至少有一个不小于$\dfrac{1}{2}$.

证明 （1）$f(1)+f(3)-2f(2)=(1+p+q)+(9+3p+q)-2(4+2p+q)=2$.

（2）反证法：假设$|f(1)|$，$|f(2)|$，$|f(3)|$都小于$\dfrac{1}{2}$，则$|f(1)|+|f(3)|+2|f(2)|<2$，而$|f(1)|+|f(3)|+2|f(2)|\geqslant f(1)+f(3)-2f(2)=2$，出现矛盾，$\therefore |f(1)|$，$|f(2)|$，$|f(3)|$中至少有一个不小于$\dfrac{1}{2}$.

例 5 证明：lg 2 是无理数.

证明 假设 $\lg 2$ 是有理数，则存在二个互质的正整数 p，q，使得 $\lg 2=\frac{p}{q}$，由对数定义可得 $10^p=2^q$，则有 $2^p\cdot 5^p=2^q$，则同一个数既含因子 5，又不含因子 5，与算术基本定理矛盾. $\therefore \lg 2$ 为无理数.

相关链接

1. 与反证法有关的故事

很早以前，中国成语中就有一个“自相矛盾”的故事，说的是有一个人同时贩卖矛与盾，他向买家吹嘘他的矛是“无坚不摧”的，盾是“刀枪不入”的. 于是，有人马上提议他“以子之矛，攻子之盾”来验证一下他的宣传是否可靠，于是这人当场被弄得哑口无言.

在数学上人们也常用这种“以子之矛，攻子之盾”的方法来证明一些问题，这种证法就是反证法. 反证法的思维在日常生活中并不鲜见，以下列举的是与反证法有关的故事.

(1) 南方某风水先生到北方看风水，恰逢天降大雪. 乃作一歪诗：“天公下雪不下雨，雪到地上变成雨. 早知雪要变成雨，何不当初就下雨.”他的歪诗又恰被一牧童听到，亦作一打油诗讽刺风水先生：“先生吃饭不吃屎，饭到肚里变成屎. 早知饭要变成屎，何不当初就吃屎.”

(2) 王戎小时候，爱和小朋友在路上玩耍. 一天，他们发现路边的一棵树上结满了李子，小朋友一哄而上，去摘李子，独有王戎没动. 等到小朋友们摘了李子一尝，原来是苦的！他们都问王戎：“你怎么知道李子是苦的呢?”王戎说：“假如李子不苦的话，早被路人摘光了，而这树上却结满了李子，所以李子一定是苦的.”

(3) 一个心脏病患者梦见刮台风，自己从楼上跌下来，接着整个住房倒塌下来压在他身上，他害怕极了，于是心脏病发作，死在床上. 分析：事实上，这则故事是不真实的，可以用反证法来证明. 假设这则故事是真实的，由于故事是在梦中发生的，除了做梦的人谁也不知道. 因此故事情节只能由做梦者说出来，而做梦者又死在梦中，由死者说出梦中的情节与常理不符.

(4) 从前有个国王总认为自己是个“至高无上的权威”，又是个“大慈大悲”的救世主. 在处决犯人前，总要叫犯人抽签决定自己命运，即在两张小纸片上，一张写“活”字，一张写“死”字，抽到“活”字可幸免一死. 一个囚犯一天将要被处决，他的死对头买通了狱吏，把两张纸片都写上了“死”字让他去抽，心想：这下犯人必死无疑. 谁知那个狱吏把此消息透露给了犯人.

犯人一听，乐得眉开眼笑，高兴地说：“这下我可死里逃生了.”他用了什么妙法呢?

原来国王宣布抽签开始后，那犯人胸有成竹、不慌不忙地抽出一纸片，看也不看便放进嘴里，直吞下肚，这倒使在场的人慌了手脚，因为谁都搞不清犯人抽到的是“死”还是

“活”，此时，国王查看剩下的纸片上写的是“死”字，由此反证，可知被犯人吞下的是“活”字了. 于是国王下令，将犯人痛打一顿，以责罚他不该擅自吞吃纸片，随后又不得不将犯人释放了.

2. 第一次数学危机

从某种意义上来讲，现代意义下的数学（也就是作为演绎系统的纯粹数学）来源于古希腊的毕达哥拉斯学派. 这个学派兴旺的时期为公元前500年左右，它是一个唯心主义流派. 他们重视自然及社会中不变因素的研究，把几何、算术、天文学、音乐称为“四艺”，在其中追求宇宙的和谐及规律性. 他们认为“万物皆数”，认为数学的知识是可靠的、准确的，而且可以应用于现实的世界. 数学的知识是由于纯粹的思维而获得，并不需要观察、直觉及日常经验.

毕达哥拉斯学派所认识的数是指整数和由整数相除得到的分数，他们在数学上的一项重大发现是证明了勾股定理. 他们知道满足直角三角形三边长的一般公式，但由此也发现了一些直角三角形的三边比不能用整数来表示，也就是勾长或股长与弦长是不可通约的，比如说，边长为1的正方形的对角线长就是一个无法使用整数比加以表示的数. 这样一来，就否定了毕达哥拉斯学派的信条：宇宙间的一切现象都能归结为整数或整数之比.

不可通约性的发现引起第一次数学危机. 有人说，这种性质是希帕索斯约在公元前400年发现的，为此，他的同伴把他抛进大海. 不过更有可能是毕达哥拉斯已经知道这种事实，而希帕索斯因泄密而被处死. 不管怎样，这个发现对古希腊的数学观点有极大的冲击. 这表明，几何学的某些真理与算术无关，几何量不能完全由整数及其比来表示，反之数却可以由几何量表示出来. 整数的尊崇地位受到挑战，于是几何学开始在希腊数学中占有特殊地位.

同时这也反映出，直觉和经验不一定靠得住，而推理证明才是可靠的. 从此希腊人开始由“自明的”公理出发，经过演绎推理，并由此建立了几何学体系，这不能不说是数学思想上的一次巨大革命，这也是第一次数学危机的自然产物.

回顾以前的各种数学，无非都是“算”，也就是提供算法. 即使在古希腊，数学也是从实际出发，应用到实际问题中去的. 比如泰勒斯预测日食，利用影子距离计算金字塔高度，测量船只离岸距离等，都属于计算技术范围. 至于古埃及、古巴比伦、中国、印度等国的数学，并没有经历过这样的危机和革命，所以也就一直停留在“算学”阶段. 而古希腊数学则走向了完全不同的道路，形成了欧几里得《几何原本》的公理体系与亚里士多德的逻辑体系.

3. 数学悖论

“悖论”也可叫“逆论”，或“反论”，这个词的意义比较丰富，它包括一切与人的直觉

和日常经验相矛盾的数学结论，这些结论常会使我们惊讶无比. 悖论有三种主要形式：

（1）一种论断看起来好像肯定错了，但实际上却是对的（佯谬）；

（2）一种论断看起来好像肯定是对的，但实际上却错了（似是而非的理论）；

（3）一系列推理看起来好像无懈可击，可是却导致逻辑上自相矛盾.

悖论是强烈违反我们直觉的问题. 在这里，悖论只是直接导致彼此矛盾的结果，就像证明了 2+2 又等于 4，又不等于 4 一样. 逻辑悖论是“不可解”的，除非能找到一种方法来完全消除矛盾.

尽管从古希腊起到今天，逻辑悖论一直给人们带来很大乐趣，可是最伟大的数学家都总是极严肃地对待它. 现代逻辑学和集合论中的一些巨大进展正是努力解决了一些经典悖论而产生的结果.

在悖论中最古老的应是著名的说谎者悖论，下面是它的最简单的形式.

甲：这句话是错的.

分析：上面这句话如果是对的，那么这句话就是错的！如果这句话是错的，那么这句话就是对的！

这一悖论有各种各样其他的说法. 例如，罗素曾经说，他相信哲学家乔治・摩尔平生只有一次撒谎，就是当某人问他：是否他总是说真话时，摩尔想了一会儿，就说：“不是.”

这个悖论还可以有下面的变化：

（1）柏拉图：下面苏格拉底说的话是假的.

苏格拉底：柏拉图说了真话！

（2）在一张白卡片的一面写：这张卡片背面的句子是真的.

该卡片的背面写的是：这张卡片背面的句子是假的.

不管你让哪一句话是真的，另一句总与之矛盾. 两句话谈的都不是它本身，但放到一起，仍会出现说谎者悖论.

小说《唐吉诃德》里描写过一个国家. 它有一条奇怪的法律：每一个旅游者都要回答一个问题——你来这里做什么？如果旅游者回答对了，一切都好办. 如果回答错了，他就要被绞死. 一天，有个旅游者这样回答：我来这里是要被绞死. 这时，卫兵一下慌了神，如果他们不把这人绞死，他就说错了，就得受绞刑. 可是，如果他们绞死他，他就说对了，就不应该绞死他. 为了做出决断，旅游者被送到国王那里. 国王苦苦想了好久才说：不管我做出什么决定，都肯定要破坏这条法律. 我们还是宽大为怀算了，让这个人自由吧.

著名的理发师悖论是伯特兰・罗素提出的. 一个理发师的招牌上写着告示：城里所有不自己刮脸的男人都由我给他们刮脸，我也只给这些人刮脸.

谁给这位理发师刮脸呢？

如果他自己刮脸，那他就属于自己刮脸的那类人. 但是，他的招牌说明他不给这类人刮脸，因此他不能自己来刮.

如果另外一个人来给他刮脸，那他就是不自己刮脸的人. 但是，他的招牌说他要给所

有这类人刮脸．因此其他任何人也不能给他刮脸．看来，没有任何人能给这位理发师刮脸了！

什么是悖论？笼统地说，是指这样的推理过程：它看上去是合理的，但结果却得出了矛盾．悖论在很多情况下表现为能得出不符合排中律的矛盾命题：由它的真，可以推出它为假；由它的假，则可以推出它为真．由于严格性被公认为是数学的一个主要特点，因此如果数学中出现悖论会造成对数学可靠性的怀疑．如果这一悖论涉及面十分广泛的话，这种冲击波会更为强烈，由此导致的怀疑还会引发人们认识上的普遍危机感，在这种情况下，悖论将直接导致“数学危机”的产生．

教材习题参考解答

P. 36　练习

1. 6.

2. 等式左边各项幂的底数之和与右边幂的底数相等，由归纳可猜想规律：

$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2$.

习题 1

1. (1) 21；

(2) $\frac{22}{12}=\frac{11}{6}$.

2. 这个数列的通项公式为 $a_n=\frac{1}{n}$.

3. $\sqrt{11-2}=\sqrt{9}=3$，$\sqrt{1\,111-22}=\sqrt{1\,089}=33$，$\sqrt{111\,111-222}=\sqrt{110\,889}=333$，…，

$\sqrt{\underbrace{111\cdots1}_{2n个}-\underbrace{222\cdots2}_{n个}}=\underbrace{333\cdots3}_{n个}$.

4. (1) 10；

(2) 55；(由 $1+2+3+\cdots+10=55$ 可得)

(3) $\frac{n(n+1)}{2}$.

5. $f(1)=43$，$f(2)=47$，$f(3)=53$，$f(4)=61$，$f(5)=71$，$f(6)=83$，$f(7)=97$，$f(8)=113$，$f(9)=131$，$f(10)=151$ 均为素数，故猜想：$f(n)=n^2+n+41(n\in\mathbf{N}_+)$为素数，$n=40$ 时，$f(40)=41^2$ 不是素数，故猜想不正确.

6. 凸 n 边形的内角和在 $n=3$ 时等于$(3-2)\times180°$；在 $n=4$ 时等于$(4-2)\times180°$；在 $n=5$ 时等于$(5-2)\times180°$；归纳可得凸 n 边形的内角和等于$(n-2)\times180°$. 证明方法是凸 n 边形沿同一顶点出发的 $n-3$ 条对角线切割成 $n-2$ 个三角形.

7. (1)

	顶点数	边数	区域数
(a)	4	6	3
(b)	8	12	5
(c)	6	9	4
(d)	10	15	6

(2) 顶点数＋区域数＝边数＋1；

(3) 边数＝顶点数＋区域数－1＝999＋999－1＝1 997.

P. 40 练习

1. 三条线段；四个三角形.
2. 平行六面体的对面平行且对应边相等.

习题 2

1. 略.
2. 略.
3. (1) 不正确；(2) 不正确；(3) 不正确.

P. 44 练习

证明 因为任意的平行四边形的两条对角线互相平分，(大前提)
而矩形是平行四边形，(小前提)
所以矩形的两条对角线互相平分.(结论)

习题 3

1. 因为任意的等腰$\triangle ABC$的两底角相等，(大前提)
   而$\angle ABC$和$\angle ACB$是等腰$\triangle ABC$的两底角，(小前提)
   所以$\angle ABC=\angle ACB$.(结论)
2. 因为不在同一直线上的三点可以确定一个圆，(大前提)
   A，B，C三点不在同一直线上，(小前提)
   所以A，B，C三点可以确定一个圆.(结论)
3. 因为所对的弦是直径的圆周角是直角，(大前提)
   而已知一圆周角所对的弦是直径，(小前提)
   所以这个圆周角是直角.(结论)
4. 因为两条互相垂直的直线所成角是$90°$，(大前提)
   而两条直线都与第三条直线垂直，(小前提)
   所以这两条直线与第三条直线所成角都是$90°$.(结论)
   因为同位角相等两直线平行，(大前提)
   而两条直线与第三条直线所成的同位角都等于$90°$，(小前提)
   所以这两条直线平行.(结论)

P. 49 练习

1. **证法 1　综合法.**
   设两个不相等的正数分别是a，b，则

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2>0\Rightarrow a+b-2\sqrt{ab}>0\Rightarrow a+b>2\sqrt{ab}\Rightarrow\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}.$$

即两个不相等的正数的算术平均数大于它们的几何平均数.

证法 2　分析法.

设两个不相等的正数分别是 a，b，

$$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}\Leftarrow a+b>2\sqrt{ab}\Leftarrow a+b-2\sqrt{ab}>0\Leftarrow(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2>0.$$

最后一个不等式成立，故 $\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$.

即两个不相等的正数的算术平均数大于它们的几何平均数.

2. **证法 1　综合法.**

左边 $=\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)-3$，

$\because a$，b，c 为不全相等的正数，

$\therefore \frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2$，$\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\geqslant 2$，$\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\geqslant 2$，且这三式的等号不能同时成立.

$\therefore \left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)-3>6-3=3$，即

$$\frac{b+c-a}{a}+\frac{c+a-b}{b}+\frac{a+b-c}{c}>3.$$

证法 2　分析法.

$$\frac{b+c-a}{a}+\frac{c+a-b}{b}+\frac{a+b-c}{c}>3$$

$$\Leftarrow\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)>6$$

$\because a$，b，c 为不全相等的正数，

$\therefore$ 最后一个不等式成立，故原不等式成立.

习题 4

1. **证法 1　综合法.**

$$\left.\begin{array}{l}\text{由平行四边形 } ABCD \text{ 得 } AD=BC,\ AD\parallel BC\\ BM=MC=\frac{1}{2}BC\\ AN=ND=\frac{1}{2}AD\end{array}\right\}\Rightarrow \text{四边形 } ANCM \text{ 是平行四边形}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow AM\parallel CN\\ BM=MC\end{array}\right\}\Rightarrow BE=EF.$$

同理可得 $FD=EF$，$\therefore BE=EF=FD$.

证法 2　分析法.（略）

2. **证法 1　综合法.**

$$(x^2-1)^2\geqslant 0\Rightarrow x^4+1\geqslant 2x^2\Rightarrow\frac{x^2}{1+x^4}\leqslant\frac{1}{2}.$$

证法 2　分析法.

$$\frac{x^2}{1+x^4}\leqslant\frac{1}{2}\Leftarrow x^4+1\geqslant 2x^2\Leftarrow(x^2-1)^2\geqslant 0.$$

最后一个不等式成立，故$\dfrac{x^2}{1+x^4}\leqslant\dfrac{1}{2}$.

3. **证法 1　分析法.**

$a^3+b^3>a^2b+ab^2\Leftarrow a^2(a-b)+b^2(b-a)>0\Leftarrow(a-b)(a^2-b^2)>0\Leftarrow(a-b)^2(a+b)>0$.

$\because a$，b 均为正实数，且 $a\neq b$，$\therefore$最后一个不等式成立，故原不等式成立.

证法 2　综合法.

$\because a$，b 均为正实数，且 $a\neq b$，

$\therefore(a-b)^2(a+b)>0$，$\therefore(a-b)(a^2-b^2)>0$.

$\therefore a^2(a-b)+b^2(b-a)>0$.

$\therefore a^3+b^3>a^2b+ab^2$.

本题还可用作差法来证明,请学生自己完成.

4. **证法 1　综合法.**

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}AE\perp BD\\ CF\perp BD\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}AE/\!/CF\\ \angle AED=\angle CFB\end{array}\right.\\ \left.\begin{array}{l}\angle AED=\angle CFB\\ \text{平行四边形 }ABCD\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\angle ADE=\angle CBF\\ AD=BC\end{array}\right.\end{array}\right\}\Rightarrow\triangle AED\cong\triangle CFB\Rightarrow AE=CF\end{array}\right\}\Rightarrow AECF\text{ 是平行四边形.}$$

证法 2　分析法.(略)

5. **证法 1　分析法.**

$\sqrt{3}+\sqrt{7}<2\sqrt{5}$

$\Leftarrow(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2<(2\sqrt{5})^2$

$\Leftarrow 10+2\sqrt{21}<20$

$\Leftarrow 2\sqrt{21}<10$

$\Leftarrow 84<100$.

最后一个不等式成立，故原不等式成立.

证法 2　综合法.

$84<100$

$\Rightarrow 2\sqrt{21}<10$

$\Rightarrow 10+2\sqrt{21}<20$

$\Rightarrow(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2<(2\sqrt{5})^2$.

因为$\sqrt{3}+\sqrt{7}>0$，$2\sqrt{5}>0$，所以$\sqrt{3}+\sqrt{7}<2\sqrt{5}$.

P. 52 练习

证明　假设 $a /\!/ \alpha$ 不成立，$\because a \not\subset \alpha$，$\therefore a$ 与 α 相交，设 $a \cap \alpha = A$.

$\because a /\!/ b$，$\therefore A \notin b$. 在平面 α 内过点 A 作直线 $c /\!/ b$，

根据公理 4，$a /\!/ c$，这与 $a \cap c = A$ 矛盾. $\therefore a /\!/ \alpha$.

习题 5

1. **证明**　设$|f(1)|$，$|f(2)|$，$|f(3)|$都小于$\frac{1}{2}$.$\because f(1)+f(3)-2f(2)=(1+a+b)+(9+3a+b)-2(4+2a+b)=2$，$\therefore |f(1)|+|f(3)|+2|f(2)| \geqslant |f(1)+f(3)-2f(2)|=2$，由假设知$|f(1)|+|f(3)|+2|f(2)|<2$,矛盾,故题中结论成立.
2. **证明**　假设 a，b，c，d 都是非负实数，由 $a+b=1$，$c+d=1$ 知 $0 \leqslant a$，b，c，$d \leqslant 1$，$\therefore ac+bd \leqslant a+b=1$，这与已知的 $ac+bd>1$ 矛盾. 假设不成立，故 a，b，c，d 中至少有一个是负数.
3. **证明**　设 $a(2-b)$，$b(2-c)$，$c(2-a)$都大于 1.

   $\because 0<a<2$，$0<b<2$，$0<c<2$.

   $\therefore a(2-b)b(2-c)c(2-a) \leqslant \left[\frac{a+(2-a)}{2}\right]^2 \cdot \left[\frac{b+(2-b)}{2}\right]^2 \cdot \left[\frac{c+(2-c)}{2}\right]^2=1$.

   由假设易得 $a(2-b)b(2-c)c(2-a)>1$，矛盾，故题中结论成立.
4. **证法 1**　假设方程 $x^2+px+q=0$ 有整数根 m，则有 $m^2+pm+q=0$，$\therefore m(m+p)=-q$. $\because p$ 为奇数，$\therefore$ 不论 m 为奇数还是偶数，m 与 $m+p$ 中必有一个是偶数，$\therefore m(m+p)$必为偶数，$\therefore -q$ 为偶数，即 q 为偶数，这与已知 q 为奇数矛盾. 假设不成立，故方程$x^2+px+q=0$不可能有整数根.

   证法 2　假设方程 $x^2+px+q=0$ 有整数根 x_1，x_2，则 $x_1+x_2=-p$，$x_1 \cdot x_2=q$. $\because q$ 为奇数，$\therefore x_1$，x_2 均为奇数，则 x_1+x_2 为偶数，即 p 为偶数，这与 p 为奇数矛盾. 假设不成立，故方程 x^2+px+q 不可能有整数根.

复习题五

1. 100^2.
2. 16；$4n$.
3. $S_n=4(n-1)$.
4. $a_1=\frac{5}{4}a-b$；$a_2=\frac{5}{4}\left(\frac{5}{4}a-b\right)-b=\left(\frac{5}{4}\right)^2 a-\frac{9}{4}b$；

   $a_3=\left(\frac{5}{4}\right)^3 a-\frac{5^2+5\times 4+4^2}{4^2}b$；

$$a_n=\left(\frac{5}{4}\right)^n a-\frac{5^{n-1}+5^{n-2}\cdot 4+\cdots+4^{n-1}}{4^{n-1}}b=\left(\frac{5}{4}\right)^n\cdot a-\frac{5^n-4^n}{4^{n-1}}b.$$

5. **证明**　等腰梯形的两个底角相等，(大前提)

由已知 $AD\parallel BC$，$AB=DC$ 知梯形 $ABCD$ 是一个等腰梯形，(小前提)

所以，梯形 $ABCD$ 的两个底角相等，即$\angle B=\angle C$.(结论)

6. **证明**　由已知 a，b，c 为不全相等的三个正实数，

$\therefore a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$，$b+c\geqslant 2\sqrt{bc}$，$c+a\geqslant 2\sqrt{ca}$，且三个不等式中不能同时取“＝”号，

$\therefore (a+b)(b+c)(c+a)>8abc$.

7. **证法 1　分析法.**

$\sqrt{3}+\sqrt{7}<2+\sqrt{6}$

$\Leftarrow(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2<(2+\sqrt{6})^2$

$\Leftarrow 10+2\sqrt{21}<10+4\sqrt{6}$

$\Leftarrow 2\sqrt{21}<4\sqrt{6}$

$\Leftarrow 84<96$.

最后一个不等式成立，故原不等式成立.

证法 2　综合法.

$84<96$

$\Rightarrow 2\sqrt{21}<4\sqrt{6}$

$\Rightarrow 10+2\sqrt{21}<10+4\sqrt{6}$.

$\Rightarrow(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2<(2+\sqrt{6})^2$.

因为$\sqrt{3}+\sqrt{7}>0$，$2+\sqrt{6}>0$，所以$\sqrt{3}+\sqrt{7}<2+\sqrt{6}$.

证法 3　反证法.

假设不等式$\sqrt{3}+\sqrt{7}<2+\sqrt{6}$不成立，则$\sqrt{3}+\sqrt{7}\geqslant 2+\sqrt{6}$.

$\sqrt{3}+\sqrt{7}\geqslant 2+\sqrt{6}$

$\Leftarrow(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2\geqslant(2+\sqrt{6})^2$

$\Leftarrow 10+2\sqrt{21}\geqslant 10+4\sqrt{6}$

$\Leftarrow 2\sqrt{21}\geqslant 4\sqrt{6}$

$\Leftarrow 84\geqslant 96$.

因为 $84\geqslant 96$ 不成立，所以假设不成立，故$\sqrt{3}+\sqrt{7}<2+\sqrt{6}$.

8. **证明**　假设$\sqrt[n]{a}\geqslant\sqrt[n]{b}$不成立，则$\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$.

$\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}\Rightarrow(\sqrt[n]{a})^n<(\sqrt[n]{b})^n\Rightarrow a<b$，与已知 $a\geqslant b$ 矛盾，假设不成立，故$\sqrt[n]{a}\geqslant\sqrt[n]{b}$.

9. 按图进行归纳，由周期性变化知第 2 005 次的图应与第 1 次的图一样，故小兔应坐在 1 号座位上.

10. **证法 1　综合法.**

由已知 a，b 为互不相等的正数，且 $a+b=1$，

$\Rightarrow a+b>2\sqrt{ab}$

$\Rightarrow 1>2\sqrt{ab}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{ab}>4$

$\Rightarrow \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{a+b}{ab}=\dfrac{1}{ab}>4$.

证法 2　分析法.

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>4$

$\Leftarrow \dfrac{a+b}{ab}=\dfrac{1}{ab}>4$

$\Leftarrow 1>2\sqrt{ab}$

$\Leftarrow a+b>2\sqrt{ab}$.

最后一个不等式成立，故原不等式成立.

证法 3　反证法.

假设不等式 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>4$ 不成立，则 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\leqslant 4$.

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\leqslant 4$

$\Leftarrow \dfrac{a+b}{ab}=\dfrac{1}{ab}\leqslant 4$

$\Leftarrow 1\leqslant 2\sqrt{ab}$

$\Leftarrow a+b\leqslant 2\sqrt{ab}$.

由 a，b 为互不相等的正数，得 $a+b>2\sqrt{ab}$，两个不等式矛盾，所以假设不成立，故 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>4$.

11. **证明**　假设圆内两条非直径的弦相交于点 P 并且互相平分，连接圆心 O 与点 P，则过点 P 有两条弦都垂直于 OP，这与“平面内过一点作直线的垂线有且仅有一条”矛盾，假设不成立，故圆内两条非直径的弦相交，它们不可能互相平分.

12. **证明**　（1）对任意实数 x，y 均有 $C_n^0x^n+C_n^1x^{n-1}y+C_n^2x^{n-2}y^2+\cdots+C_n^ny^n=(x+y)^n$，（大前提）

而 1，-1 是实数，（小前提）

所以，$C_n^0-C_n^1+C_n^2-C_n^3+\cdots+(-1)^nC_n^n=0$.（结论）

（2）对任意实数 x，y 均有 $C_n^0x^n+C_n^1x^{n-1}y+C_n^2x^{n-2}y^2+\cdots+C_n^ny^n=(x+y)^n$，（大前提）

而 $1-x$，x 是实数，（小前提）

所以，$C_n^0(1-x)^n+C_n^1(1-x)^{n-1}x+C_n^2(1-x)^{n-2}x^2+\cdots+C_n^n x^n=1$.（结论）

13. **证明** 任一存在反函数的函数 $y=f(x)$ 的图象与它反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称，（大前提）

而函数 $y=\dfrac{x-a}{ax-1}$ 的反函数由 $y=\dfrac{x-a}{ax-1}\Rightarrow x=\dfrac{y-a}{ay-1}$ 可求得 $f^{-1}(x)=\dfrac{x-a}{ax-1}$，（小前提）

所以，函数 $y=\dfrac{x-a}{ax-1}$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称.（结论）

14. **证明** 计算得

$$S_1=\frac{1}{1\times2}=\frac{1}{2},\ S_2=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3},$$

$$S_3=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{3}{4},$$

由此推测 $S_n=\dfrac{n}{n+1}$. 证明如下：

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{n\times(n+1)}\\&=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}.\end{aligned}$$

15. 将勾股定理推广到直四面体可以猜想：“设直四面体 A-BCD 的三个侧面 ABC，ACD，ADB 两两相互垂直，且三个侧面面积分别等于 S_1，S_2，S_3（简称“直角面”的面积），底面 $\triangle BCD$ 的面积 S（简称“斜面”面积），则 $S^2=S_1^2+S_2^2+S_3^2$.”

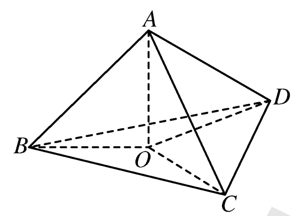


图 5-4

16. 通过类比可以得到正四面体的性质：正四面体内任一点 P 到四个面的距离之和等于正四面体的高. 证明如下：

如图 5-5，点 P 是正四面体内的任一点，设点 P 到面 ABC，面 ACD，面 ADB，面 BCD 四个面的距离分别是 h_1，h_2，h_3，h_4，正四面体的高为 h，则有，

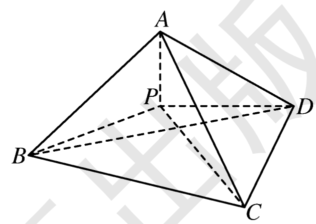


图 5-5

$V_{A-BCD}=V_{P-ABC}+V_{P-ACD}+V_{P-ADB}+V_{P-BCD}$，

$$\therefore \frac{1}{3}S_{\triangle BCD}\cdot h=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot h_1+\frac{1}{3}S_{\triangle ACD}\cdot h_2+\frac{1}{3}S_{\triangle ADB}\cdot h_3+\frac{1}{3}S_{\triangle BCD}\cdot h_4.$$

$\because S_{\triangle BCD}=S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ACD}=S_{\triangle ADB}$，

$\therefore h=h_1+h_2+h_3+h_4$，

即正四面体内任一点 P 到四个面的距离之和等于正四面体的高.

17. **证明** 设面积等于 1 的凸四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 和 BD 相交于点 O，则有

$$S_{ABCD}=1=\frac{1}{2}(AO\cdot BO+BO\cdot CO+CO\cdot DO+DO\cdot AO)\cdot\sin\angle AOB$$

$$=\frac{1}{2}(AO+CO)(BO+DO)\sin\angle AOB$$

$$=\frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin\angle AOB\leqslant\frac{1}{2}AC\cdot BD$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{AC+BD}{2}\right)^2,\therefore AC+BD\geqslant2\sqrt{2}.$$

$$2S_{ABCD}=2=\frac{1}{2}(AB\cdot AD\cdot\sin\angle A+BA\cdot BC\cdot\sin\angle B+CB\cdot CD\cdot\sin\angle C+DC\cdot DA\cdot\sin\angle D)\leqslant\frac{1}{2}(AB+CD)(AD+BC)$$

$$\leqslant\frac{1}{8}(AB+BC+CD+DA)^2.$$

$\therefore AB+BC+CD+DA\geqslant4.$

因此，任何面积等于 1 的凸四边形的周长及两条对角线的长度之和不小于 $4+2\sqrt{2}$.

18. **证明** $\because x_i\geqslant0(i=1,2,\cdots,n)$，且 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$.

$\therefore 0\leqslant x_i\leqslant1(i=1,2,\cdots,n)$. $\therefore 0\leqslant x_i\leqslant\sqrt{x_i}\leqslant1$.

$\therefore \sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n}\geqslant x_1+x_2+\cdots+x_n=1$.

而 $(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n})^2=(x_1+x_2+\cdots+x_n)+2(\sqrt{x_1x_2}+\sqrt{x_1x_3}+\sqrt{x_1x_4}+\cdots+\sqrt{x_{n-1}x_n})\leqslant n(x_1+x_2+\cdots+x_n)=n$.

$\therefore 1\leqslant\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n}\leqslant\sqrt{n}$.

第6章 框　图

一、教学目标

1. 通过实例，了解结构图；会运用结构图梳理已学过的知识、整理收集到的资料信息，并能结合作出的结构图与他人进行交流，体会结构图在揭示事物联系中的作用.

2. 通过具体实例，了解工序流程图（即统筹图）. 能绘制简单实际问题的流程图，体会流程图在解决实际问题中的作用. 学会运用框图表示数学计算与证明过程中的主要思路与步骤、实际问题中的工序流程图、某一数学知识的结构关系.

3. 了解程序框图，通过具体实例，进一步认识程序框图. 在运用框图的过程中理解流程图和结构图的特征，体验用框图表示数学问题的解决过程以及事物发生、发展过程的优越性；掌握框图的用法.

4. 提高学生抽象概括能力和清晰地表达与交流思想的能力.

二、教材说明

1. 本章知识结构框图，如图 6-1.

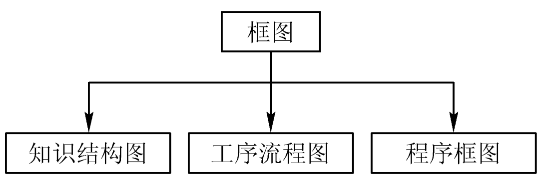


图 6-1

2. 框图是新增的高中数学课程内容. 框图的重要性是基于：框图是表示一个系统各部分和各环节之间的图示，它能清晰地表达比较复杂的系统各部分之间的关系，如能够清晰地表明算法，展示工序的流程顺序，揭示知识的内在联系等，使复杂问题简单明了，增加直观性，体现了用数学图形、符号表示解决某问题的过程和某事物的发生、发展过程的简洁性、清晰性、逻辑性. 框图不仅在数学中运用（如算法、计算机程序设计），而且在实际生活和其他学科中也有广泛的应用（如工序流程的表述、设计方案的比较、项目管理等方面）. 它也是表示数学计算与证明过程中主要逻辑步骤的工具. 正是由于数学的对象及其之间的关系简单、严谨，框图的特点在数学中体现得更加清晰，学生更容易感受和体会. 新教材强调了框图与其他学科以及实际生活的联系，提倡通过生活实例与数学实例认识、体会框图在解决实际问题中的作用. 这样处理打破了以往数学与其他学科以及实际生活的人

为壁垒，有助于学生体会数学与其他学科以及实际生活的联系.

通过本章的学习，使学生会运用框图表示数学计算与证明过程中的主要思路与步骤、实际问题中的工序流程或结构关系等；理解框图表示的工序流程或结构关系，根据框图表示的工序流程或结构关系完成任务；让学生在运用框图的过程中理解流程图和结构图的特征，掌握框图的用法，体验用框图表示解决问题过程的优越性. 从而为人们掌握算法、编制程序，安排工程作业进度，分配调整工程作业人员以提高效率，为更深入地领会知识结构、洞悉事物之间的联系等提供帮助.

本章的章头图表现了平行四边形、矩形、正方形、菱形的关系用框图进行表示的优越性，概述了本章要学习的主要内容，强调了框图利用数学图形、符号表示解决问题过程和事物发生发展过程的简洁性、清晰性、逻辑性. 通过生活实例与数学实例认识、体会框图在解决实际问题中的作用.

本章主要供希望在人文、社会科学方面发展的学生学习，提高他们思维的条理性、清晰性，养成用框图清晰地表达和交流思想的习惯.

三、课时安排建议

本章教学时间约需 7 课时，具体分配如下（仅供参考）

6.1　知识结构图	1 课时
6.2　工序流程图	3 课时
6.3　程序框图	2 课时
小结与复习	1 课时

四、教学建议

1. 新一轮数学课程改革无论从理念、内容还是到实施，都有较大变化，框图这一章节中的许多内容是以前教材所没有的. 教师应充分认识本章内容对学生理解数学内容、进行数学创造性学习方面所起的引导作用. 在教学设计中充分考虑数学的学科特点，高中学生的心理特点，不同水平、不同兴趣学生的学习需要，运用多种教学方法和手段，引导学生积极主动地学习，掌握框图的基础知识和基本技能以及它们所体现的数学思想方法，发展应用意识和创新意识. 充分考虑高中学生的心理特点，运用多样化的课堂教学模式，引导学生积极主动地学习，使学生对运用框图问题有较为全面的认识，从而提高学生的数学素养，为未来发展和进一步学习打好基础.

2. 在教学中要引导学生经历运用框图表示数学计算与证明过程中的主要思路与步骤、实际问题中的工序流程或结构关系等；理解框图表示的工序流程或结构关系，根据框图表示的工序流程或结构关系完成任务；让学生在运用框图的过程中理解流程图和结构图的特征，掌握框图的用法，体验用框图表示解决问题过程的优越性. 从而为人们掌握算法、编

制程序，安排工程作业进度，分配调整工程作业人员以提高效率，为更深入地领会知识结构、洞悉事物之间的联系等提供帮助.

3. 教学中应注意沟通本章与其他内容之间的联系，可以变隐性为显性、变分散为集中，结合以前所学的内容，通过挖掘、提炼、明确化等方式，使学生感受和体验如何学会数学思考方式，尤其应注意算法思想在本章内容中的渗透、升华. 通过类比、联想、知识的迁移和应用等方式，使学生体会知识之间的有机联系，感受数学的整体性，进一步理解数学的本质，提高解决问题的能力. 通过丰富的实例引入数学知识，引导学生应用框图解决算法、编制程序，安排工程作业进度，分配调整工程作业人员等实际问题，经历探索、解决问题的过程，体会框图的应用价值. 帮助学生认识到：数学与我有关，与实际生活有关，数学是有用的，我要用数学，我能用数学. 向学生介绍数学在社会中的广泛应用，鼓励学生注意数学应用的事例，开阔他们的视野.

4. 改善教与学的方式，使学生主动地学习. 教学中，应鼓励学生积极参与教学活动，包括思维的参与和行为的参与. 教师要把握标准的定位进行教学，既要有教师的讲授和指导，也要有学生的自主探索与合作交流. 教师要创设适当的问题情境，鼓励学生发现数学的规律和问题解决的途径，使他们经历知识形成的过程. 本章的教学应从分析实例入手，引导学生运用框图表示数学计算与证明过程中的主要思路与步骤、实际问题中的工序流程、某一数学知识系统的结构关系等，使学生在运用框图的过程中理解流程图和结构图的特征，掌握框图的用法，体验用框图表示解决问题过程的优越性. 教师应不断地反思、思考自己的教学现状，还要与同行交流、向同行学习、向书本学习，学习理论、开阔视野，再回到课堂教学中，指导教学实践，改进教学方式，提高自己的教学水平，形成个性化的教学风格.

5. 值得注意的问题：不同的学生对知识掌握的程度不同，对问题的认识不同，观察、考虑问题的角度不同，因此作出的知识框图也会有较大差别，具有一定的开放性. 因此，对于学生作出的框图，只要他们有理有据，都应该认为是“合格”的，不要用“唯一标准”去束缚学生的思维. 尊重学生，正确面对学生的差异，允许并鼓励学生的个性化发展也是新课程的基本理念. 因此，教师不要用“正确答案”来约束学生的思维，应鼓励学生各自构建他们自己的认知结构.

6. 丰富学生的学习方式、改进学生的学习方法是高中数学课程追求的基本理念. 学生的数学学习活动不应只限于对概念、结论和技能的记忆、模仿和接受，独立思考、自主探索、动手实践、合作交流、阅读自学等都是学习数学的重要方式. 本章可适当安排学生以自主学习或合作学习的方式进行，通过学生的自主探索、合作、交流，完成知识框图的构建.

7. 在教学中，应重视信息技术与数学课程内容的有机整合，利用信息技术来呈现以往课堂教学中难以呈现的课程内容. 恰当使用信息技术，引导学生借助信息技术进行数学探索、数学发现，研究一些有意义、有价值的数学问题. 教师应充分尊重学生的人格和学生

在数学学习上的差异，采用适当的教学方式，在数学学习和解决问题的过程中，激发学生对数学学习的兴趣，帮助学生养成良好的学习习惯，形成积极探索的态度，勤奋好学、勇于克服困难和不断进取的学风.

五、评价建议

1. 本章教学中，学生对流程图、知识结构图的基本知识与基本技能的理解与掌握是教学的基本要求，也是评价学生学习的基本内容.

2. 框图章节的教学评价，既要重视学生知识、技能的掌握和能力的提高，又要重视其情感、态度和价值观的变化；既要重视学生学习水平的甄别，又要重视其学习过程中主观能动性的发挥；既要重视定量的认识，又要重视定性的分析. 在课堂上要对学生适时激励，营造良好的课堂育人环境，处理数学教与学活动过程的调控，做到学生和教师的共同成长.

3. 本章节的教学评价应特别重视考察学生能否运用框图表示数学计算与证明过程中的主要思路与步骤、实际问题中的工序流程图、某一数学知识的结构关系. 评价应当重视考察学生能否理解并有条理地表达数学内容. 相对于结果，过程更能反映每个学生的发展变化，体现出学生成长的历程. 因此，数学学习的评价既要重视结果，也要重视过程. 对学生数学学习过程的评价，包括学生参与数学活动的兴趣和态度、数学学习的自信、独立思考的习惯、合作交流的意识、数学认知的发展水平等方面. 要在课堂合作与交流过程中观察每个学生的发展变化，关注学生是否积极主动地参与数学学习活动，是否愿意和能够与同伴交流数学学习的体会、与他人合作探究数学问题，关注他们在数学学习上的信心、独立思考的习惯、合作交流的意识、数学认知的发展水平等.

4. 独立思考是数学学习的基本特点之一，评价中应关注学生是否肯于思考、善于思考、坚持思考并不断地改进思考的方法与过程，能否在解决问题的过程中，既能够独立思考，又能够与他人很好地交流与合作，能否对解决问题的方案进行质疑、调整和完善.

5. 本章节的学习中，数学学习活动应倡导自主探索、合作交流、阅读自学等学习数学的方式. 自主学习、合作交流是新课程所倡导的学习方式. 学生在知识学习完成之后再去构建各自的“认知结构”，将知识系统化、条理化，更便于学生掌握知识. 因此，这一选题符合新课程的基本理念及教学要求. 这些方式有助于发挥学生学习的主动性，使学生的学习过程成为在教师引导下的“再创造”过程.

6. 评价学生能否在运用框图的过程中理解流程图和结构图的特征，掌握框图的用法，体验用框图表示数学问题解决过程以及事物发生、发展过程的优越性，就看学生面对实际问题能否独立地从实际情境中选择有效的方法和手段收集信息、联系相关知识抽象出数学知识、灵活地建立不同知识之间的联系，把握数学知识的结构、体系，以及能否以合理的角度进行数学分析与归纳，即“有理有据”，并将解决问题的方案与结果，用书面或口头等形式比较准确地表达并进行交流，根据问题的实际要求进行分析、讨论或应用，最后用框图作出解答.

7. 评价要重视学生做数学作业的过程，充分发挥数学作业在学生评价中的作用. 作业的类型应多样化，例如常规作业，开放性、探索性数学问题，数学实验，数学建模，课题研究作业，专题总结报告等；作业结果的呈现形式也应是多样的，例如习题解答，数学学习体会，数学小论文，研究、实验或调查报告（书面、口头）等；对作业的评价可以是量化的，也可以是定性的. 评价过程应积极主动、简单可行，避免增加学生负担.

6.1 知识结构图

教材线索

本小节从同学们熟悉的数系的分类引入，说明框图对知识体系进行梳理的优越性，接着又分别对代数和几何中同学们所熟悉的知识，利用框图从整体上把握知识的脉络与联系，使学生觉得框图确实有用，且不难学，激发学生进一步学习的兴趣，最后再以当今社会的热门话题：地球的温室效应与化学的元素周期表的空缺，带动新元素的发现等进行进一步阐释.

教学目标

（一）知识与技能

通过已学过的教学实例与生活实例，了解结构图的含义；引导学生运用框图表示数学知识的结构关系.

（二）过程与方法

通过模仿、操作、探索，经历运用知识结构图梳理已学过的知识、整理收集到的资料信息，结合作出的结构图与他人进行交流，体会结构图在揭示事物联系中的作用.

（三）情感、态度与价值观

使学生在运用框图的过程中理解结构图的特征，掌握框图的用法，体验用框图表示数学知识的结构关系，提高学生抽象概括能力和清晰地表达与交流的能力.

教材分析

1. 重点：

(1) 引导学生树立把知识归类的意识，从而使自己的认知结构不断地得以优化；

(2) 学生在自己组织知识结构图中，使自己原有的知识经过重新梳理；

(3)“引导学生运用框图表示某一数学知识的结构关系”对于学生理清知识联系，形成知识体系，完善认知结构，有十分重要的作用.

2. 难点：

由于每个模块中各知识要素之间的从属关系的复杂性，如有些表现为“线”形结构，有些表现为“环”形结构，有些又表现为“线形与环形混合”结构，对于基础较差的学生

而言，要作出符合要求的知识结构图有很大的困难.

3. 本节学习的知识结构图是一种把某学科的基本原理、基本概念以及它们之间的内在联系用框图来进行表达，从而达到从整体上把握知识的脉络以及知识之间的相互关系，为学生更深入地领会知识结构、洞悉事物之间的联系等提供帮助. 可以说数学的框图就像一张“地图”，当思维的汽车在知识原野上奔驰时，有了这样一张“知识地图”，目标才明确，才能少走冤枉路，走的路程越远，地图就越显得重要. 美国著名的心理学家布鲁纳认为，不论我们选教什么学科，要教授学生懂一门学问的基本结构和主要概念，而不是没完没了地记诵资料，不要把孩童训练成为一个活动的图书馆，要培养他们能像数学家般思考，历史学家般研究问题. 因此，为了克服学生中存在的死记硬背现象，帮助其掌握基本概念，优化学习的认知结构，在教学中教师有必要引导学生运用框图表示某一数学知识的结构关系，通过学生经历模仿、操作、探索活动，运用知识结构图梳理已学过的知识、整理收集到的资料信息，将会有事半功倍的效果.

4. 通过评价让学生发现每个知识结构图的优点，评价的过程就是学生反思的过程，同时又是学生从别人的知识结构中获益的过程，是学生进一步优化认知结构的过程.

教学建议

1. 通过框图描述某领域中各阶段知识展开的主要线索与相互关系时，从不同的角度出发，有不同的描述法：结构关系、分类关系、层次关系、逻辑关系、成分关系等，都能得到很好的体现. 由于每个模块中各知识要素之间的从属关系的复杂性，如有些表现为“线”形结构，有些表现为“环”形结构，有些又表现为“线形与环形混合”结构. 对于基础较差的学生而言，要作出符合要求的知识结构图有很大的困难. 因此，对框图的复杂程度要加以控制，同时要帮助学生建立画知识结构图的基本步骤. 应关注学生能否建立不同知识之间的联系，把握数学知识的结构、体系.

2. 参照教材中的知识结构图，结合自己的学习经历，作出《必修 4》第三章“三角恒等变换”的知识结构图.

《课程标准》对于“三角恒等变换”的教学要求是：(1) 经历用向量的数量积推导出两角差的余弦的过程，进一步体会向量方法的作用；(2) 能从两角差的余弦公式导出两角和与差的正弦、余弦、正切公式，二倍角的正弦、余弦、正切公式，了解它们的内在联系；(3) 能运用上述公式进行简单的恒等变换（包括引导导出积化和差、和差化积、半角公式，但不要求记忆）. 设计意图：让学生回顾三角公式推导的过程，自主地发现数学规律，了解知识的内在联系，从而感受学习数学的乐趣.

例题解析

例 1　在数系中，实数、有理数、整数之间的成分关系，可以用图 6-2 的框图描述.

分析　探求数系中的实数、无理数、有理数、整数、分数、负整数、自然数（包括 0）

之间的成分关系，如图 6-2 所示.（这块内容为学生所熟悉，可由学生独立思考，并独立完成. 同时要求学生将自己作出的结构图与他人进行交流、完善.）

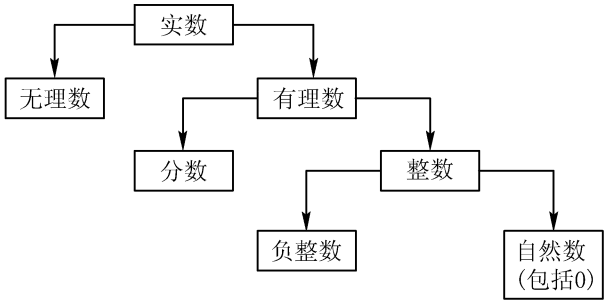


图 6-2

例 2　对代数方程中的一元一次方程、二元一次方程组、一元二次方程，可以进行如下分类（如图 6-3）：

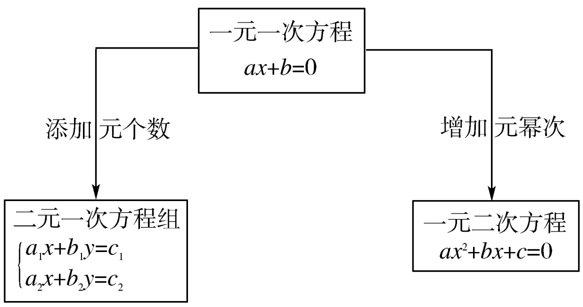


图 6-3

点评　以上两例框图均表现为“线”形结构. 通过框图，我们看清了知识之间相互渗透与综合的关系，便于从整体上把握知识的脉络以及各知识之间的相互联系，既见树木又见森林.

例 3　在平面几何中，特殊四边形的分类关系可以用图 6-4 所示的框图描述.

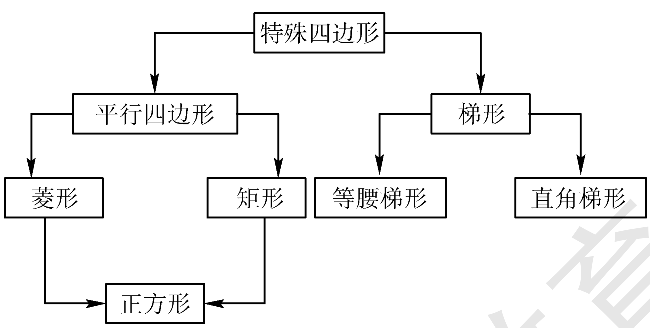


图 6-4

分析　（1）回忆学过哪些特殊四边形？

（2）决定特殊四边形的基本要素是什么？

（3）确定分类标准.

点评 以上框图表现为“线形与环形混合”结构.

例 4 地球温室效应示意图，如图 6-5 所示.

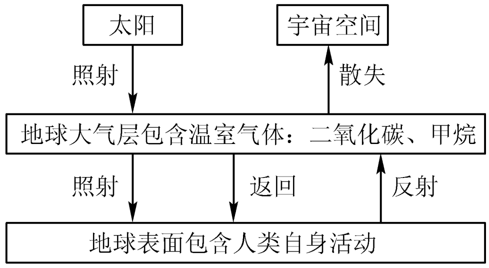


图 6-5

分析 （1）什么是温室效应？

（2）生活中我们可以见到的典型的温室有哪些？（玻璃育花房和蔬菜大棚）

（3）为何使用玻璃或透明塑料薄膜可以做温室？（使用玻璃或透明塑料薄膜是让太阳光能够直接照射进温室，加热室内空气，同时玻璃或透明塑料薄膜又可以阻碍室内的热空气向外散发，使室内的温度保持高于外界的状态，以提供有利于植物快速生长的条件.）

（4）地球的温室是如何形成的？

由于二氧化碳这类气体的功用和温室玻璃有着异曲同工之妙，都是只允许太阳光进，而阻止其反射出去，进而实现保温、升温作用，因此被称为温室气体. 大气中的每种气体并不都能强烈吸收地面长波辐射，在法律意义上被确认为影响气候变化的温室气体，除了二氧化碳外，还包括甲烷（CH_4）、一氧化氮（NO）、氟氯甲烷（HFCs，氟利昂是其中一种）、全氟化碳（PFCs）、六氟化硫（SF_6）等. 种类不同，吸热能力也不同，每分子甲烷的吸热量是二氧化碳的 21 倍，而一氧化氮（NO）更高，是二氧化碳的 270 倍. 不过和人造的某些温室气体相比就不算什么了，目前为止吸热能力最强的是氟氯甲烷（HFCs）和全氟化碳（PFCs）. 地球的大气层和云层由于有类似的保温功能，故俗称温室效应.

看了这个框图，同学们对于自然界热能的交换和自然平衡过程，应该有一个直观的概念.

6.2 工序流程图

教材线索

1. 教材结合实例，说明了如何用框图的形式来表达工序流程. 在此基础之上，介绍工序流程图的概念、形式.

2. 教材通过例 3 介绍了统计活动工序流程图的绘制，首先用自然语言描述统计活动的步骤，接着用流程图的形式来表达步骤，本例重在使学生掌握流程图的特征、形式及绘制方法.

3. 教材结合例 4 展示如何用流程图来表达数学计算过程中的主要思路（即表达算法步骤）；接着以流程图的形式呈现数学建模的过程，并结合“皮鞋厂产量预测”这一实例辅以说明.

教学目标

（一）知识与技能

通过实例，引导学生运用框图表示实际问题中的工序流程；掌握工序流程图的特征、形式及绘制方法；了解流程图在解决实际问题中的应用.

（二）过程与方法

让学生通过模仿、操作、探索，体会工序流程图在解决实际问题中的作用与价值，培养学生学习数学、应用数学去解决实际问题的意识与能力，同时提高抽象概括能力和逻辑思维能力，以及清晰地表达和交流的能力.

（三）情感、态度与价值观

让学生体验数学学习中的成功与快乐，激发学生学习数学的热情；在小组活动中培养学生的合作精神与全面细致地考虑问题的科学态度.

教材分析

1. 重点：

学会绘制简单实际问题的流程图，体会工序流程图在解决实际问题中的作用.

2. 难点：

绘制简单实际问题的流程图.

3. 本节知识结构，如图 6-6 所示.

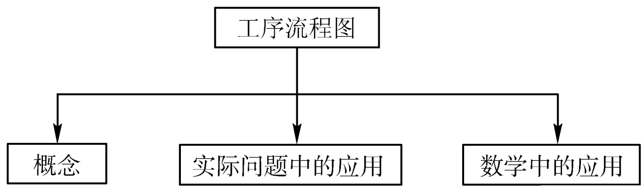


图 6-6

4. 流程图是一种动态图示，通常用来描述一种过程性的活动. 例如，流程图可以用来表示实际问题中的工序流程、设计方案、数学建模过程中的主要逻辑步骤等. 教材通过实例介绍流程图的结构、特征及一般画法，使学生体会框图在各个领域广泛应用的同时掌握流程图的用法，体会流程图在表示数学问题的解决过程以及事物发生发展过程中的优越性.

5. 调查问卷，又称调查表，是调查者根据一定的调查目的精心设计的一份调查表格，是现代社会用于收集资料的一种最为普遍的工具. 调查问卷设计的质量对专项调查的成败影响极大. 根据调查目的、调查对象、调查方法来设计科学、有效的调查问卷，是一项技术性较强的工作. 通常，在设计问卷之前，要初步熟悉和掌握调查对象的特点及调查内容的基本情况，然后结合实际需要与可能，全面、慎重地思考，多方征询意见，把专项调查问卷设计得科学、实用，以保证取得较好的调查效果. 在这里，应让学生通过阅读工序流程图来理解社会统计调查工作的流程，使其进一步理解流程图的特征，体验流程图在解决社会统计调查活动中的作用.

6. 数学建模是运用数学思想、方法和知识解决实际问题的过程，它已经成为不同层次数学教育重要和基本的内容. 它为学生提供了自主学习的空间，有助于学生体验数学在解决实际问题中的价值和作用，体验数学与日常生活和其他学科的联系，体验综合运用知识和方法解决实际问题的过程. 教材以流程图的形式给出数学建模的过程并辅以案例，其目的是让学生明晰通过数学建模解决一般数学问题的过程，进一步理解流程图的特征和作用.

教学建议

1. 流程图通常用来描述一个过程性的活动，活动的每一个明确的步骤构成流程图的一个基本单元.《数学 5（必修）》“算法初步”一章介绍的程序框图是流程图的一种，而本节重点介绍描述工业生产流程的工序流程图.

教材首先呈现例 1——以自然语言描述一个零件的加工过程. 这显然不够直观、清楚，而以流程图的形式来解读整个工序流程，便捷、明确、直观. 在此基础上，教材给出了稍复杂的空调机（单冷机）的工作流程图. 在教学过程中，教师可以让学生在课前收集一些流程图，然后结合课本上的流程图进行交流、讨论. 如（1）流程图是由哪几部分构成的？

（图形符号和文字说明）（2）流程图有哪些特征？（如有一个“起点”，一个或多个“终点”）（3）使用流程图有哪些优越性？（4）如何将自然语言描述的活动步骤转化为流程图？最后，教师应总结流程图的特征及绘制方法（适当回顾必修5介绍的方法），并对读图环节给予必要的说明.

2. 第2节课例3用流程图表示社会调查工作的流程，这对于学生来说有一定难度，但有利于培养他们的抽象概括能力. 教学时，可以先引导学生回顾统计活动的过程，用自己的语言叙述工作思路，然后与同伴进行讨论，最后根据描述过程尝试画出流程图，再与课本的图6-7进行比较，以加深对流程图特征的认识以及社会调查活动过程的理解.

同时，例3还涉及无记名调查问卷的设计方法，这尽管不是本节课的重点，但在教学中还要向学生说明如此设计调查问卷，才能较好地保证调查效果.

3. 第3节课介绍流程图在数学中的应用，要求学生进一步掌握流程图的用法，体验用框图表示数学建模过程的优越性. 例4要求学生回顾算法步骤，在此基础上自行绘制流程图. 例5的教学可以收集一些数学建模的例子并结合“皮鞋厂产量预测”的案例，引导学生分析解决问题的过程，然后总结规律，将其中类似的步骤明确地表述出来，并分析各步骤之间的关系，最后画出流程图，以培养学生的抽象概括能力.

例题解析

例1 某工厂加工一种零件，有三道工序：粗加工、精加工和返修加工. 每件坯料先进行粗加工，经过检验后，合格的进行精加工，不合格的交付返修加工. 返修后合格的仍可以再交付精加工，返修后还不合格的当作废品. 精加工后，再进行最后一道检验，合格的作为成品，不合格的当作废品. 请用框图画出以上的工序流程图.

分析 （1）工序流程图是将组成整个工艺过程的所有工序按照其合理的先后顺序及流入生产的位置，用特定的符号和相互的连线绘制成的工序安排程序的示意图，如图6-7所示.

（2）

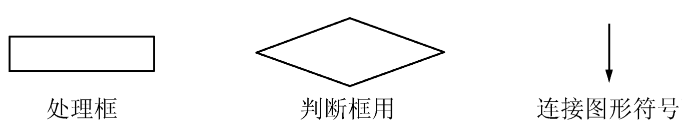


图 6-7

（3）画流程图的基本规则：

①使用标准的框图符号.

②从上到下，从左到右.

③开始符号只有一个退出点，结束符号只有一个进入点，判断符号允许有多个退出点.

④判断可以是两分支结构，也可以是多分支结构.

⑤语言简练.

解　第一道工序应是粗加工，不合格产品才返修加工，返修加工的结果有合格与不合格；所有合格品才进入精加工环节. 精加工后也有合格与不合格两种结果，不合格的成为废品，合格的成为成品. 故得到工序流程图如图 6-8 所示：

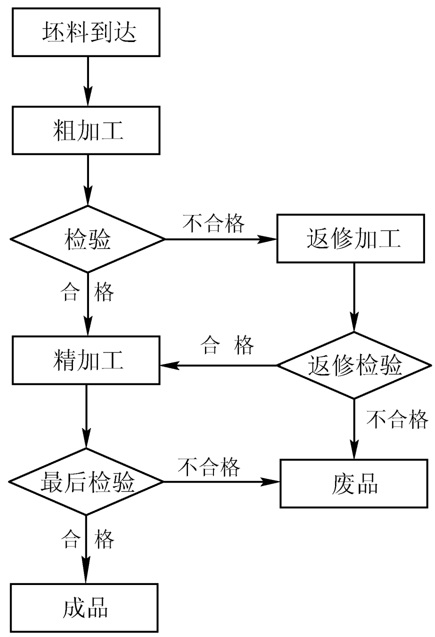


图 6-8

小结：将一项工作分解成若干道工序，分别标明成若干道工序之间的衔接关系，用箭头表示其先后顺序，这样所得的箭头图——即工序流程图，能使复杂的问题明了、直观.

例 2　编制空调机（单冷机）的工作流程框图.

分析　（1）学生交流上网搜寻的有关空调单冷机的工作原理的相关资料.

空调制冷原理. 炎夏之日，道路上洒水会使人感觉凉快，这是因为水蒸发时从地面和空气中吸热所致. 同样道理，注射前用酒精进行皮肤表面消毒时，会感到局部清凉，这也是因为酒精蒸发时从皮肤吸热所致. 因此液体蒸发时，会从周围吸热，周围变冷. 空调在做制冷运行时，低温低压的制冷剂气体被压缩机吸入后加压变成高温高压的制冷剂气体，高温高压的制冷剂气体在室外换热器中放热（通过冷凝器冷凝）变成中温高压的液体（热量通过室外循环空气带走），中温高压的液体再经过节流部件节流降压后变为低温低压的液体，低温低压的液体制冷剂在室内换热器中吸热蒸发后变为低温低压的气体（室内空气经过换热器表面被冷却降温，达到使室内温度下降的目的），低温低压的制冷剂气体再被压缩机吸入，如此循环.

（2）讨论如何编制工作流程图，并互相讨论.

（3）形成结论.

解　如图 6-9 所示.

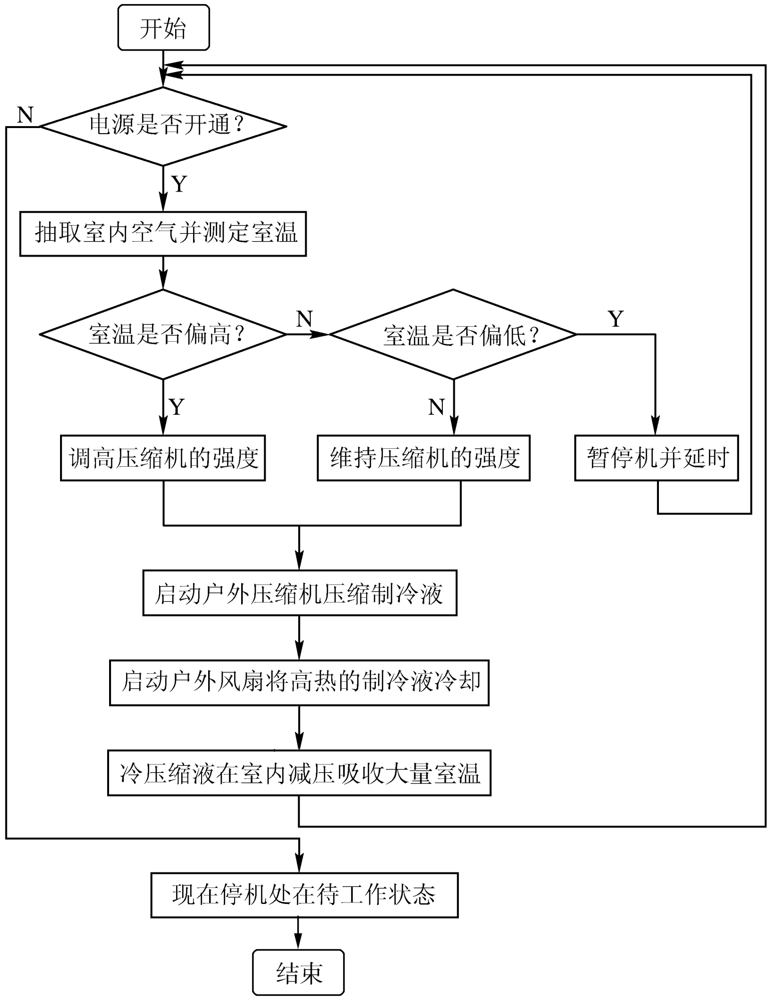


图 6-9

例 3　社会调查工作的流程.

分析　学生回答，教师补充. 完成一项社会调查至少需要做：

（1）设计需要调查的问题.

（2）确定调查的对象、人数、方法.

（3）设计好问卷格式.

（4）统计.

（5）对数据处理.

（6）形成结论.

教师：专项调查问卷设计的质量对专项调查的成败影响极大. 根据调查目的、调查对象、调查方法来设计科学、有效的调查问卷，是一项技术性较强的工作. 通常，在问卷设计之前，要初步熟悉和掌握调查对象的特点及调查内容的基本情况，然后结合实际需要与

可能，全面、慎重地思考，多方征询意见，把专项调查问卷设计得科学、实用，以保证取得较好的调查效果. 调查问卷的主体内容设计的好坏，将直接影响整个专项调查的价值. 本题要想调查学生在某个敏感问题上是否愿意与父母坦诚交流，不太容易，因为这牵涉到个人的隐私权，一般的问卷会遭到拒绝. 如果调查者把调查的方式设计好，既保护了学生的隐私权，又能获得有效的调查数据. 可让学生展开讨论，通过思维碰撞，最后形成思路.

教师应充分肯定学生的创新思维，并与学生一起探讨教材的方法.

教师说明解答：见教材 P.75. 第一步，设计无记名问卷格式，要求学号是奇数的回答问题 A，学号是偶数的回答问题 B. 问题 A：你的学号是奇数吗？问题 B：在早恋问题上你不愿意与父母坦诚交流，是吗？答案栏：是（　　）不是（　　）

第二步，统计接受调查的学生总数（设有 m 个），统计奇数号的学生（设有 n 个）.

第三步，统计回答是的数目（设有 y 个）.

第四步，处理数据.

真正对问题 B 作出回答的人数是：$(m-n)$ 个.

不愿意与父母坦诚交流的人数是：$(y-n)$ 个.

不愿意与父母坦诚交流的比率是：$(y-n)/(m-n)$.

（引导学生体会这种调查方式的合情合理之处，其与炒花生时放入许多沙子的异曲同工之妙）画出此项社会调查工作的流程图，如图 6-10.

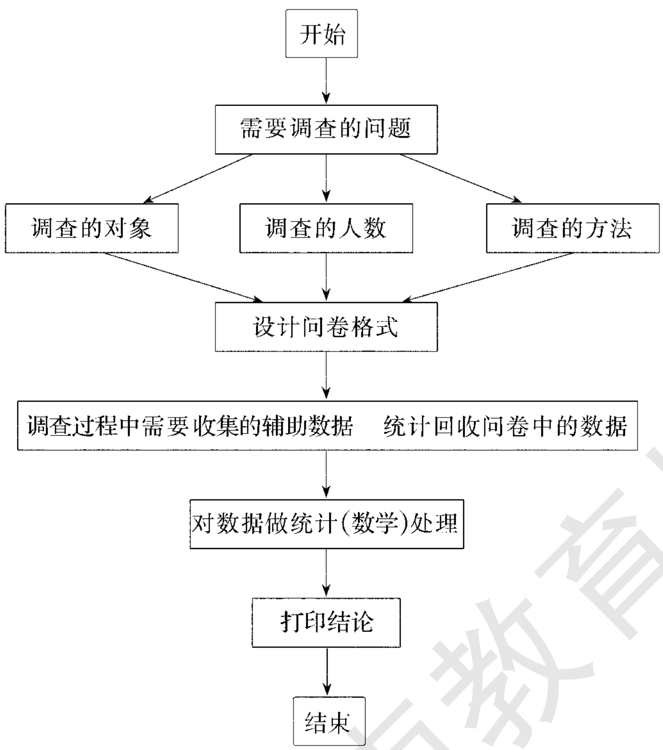


图 6-10

例 4 求一般一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）的根的流程图.

分析 解一元二次方程首先是判断根的存在性，然后求解. 因此可采用条件结构来构造算法.

解 如图 6-11 所示.

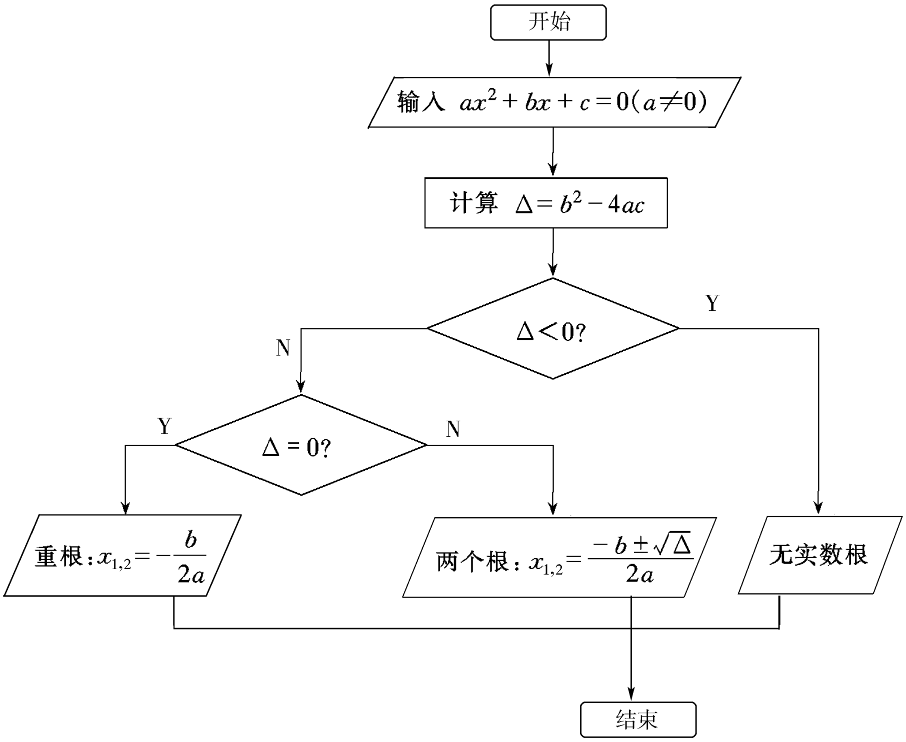


图 6-11

例 5 数学建模过程的流程图，如图 6-12 所示.

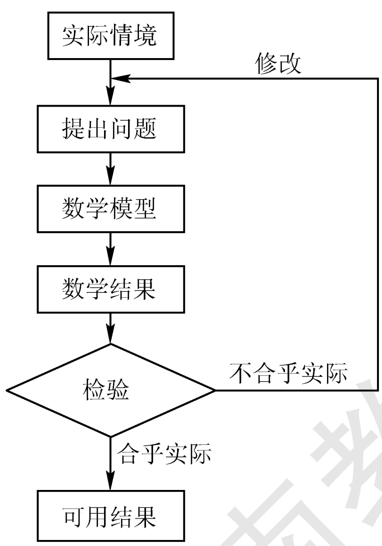


图 6-12

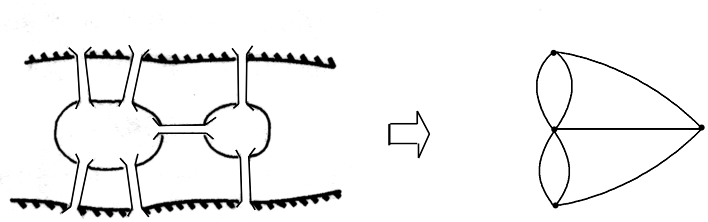
根据这个流程图，课本结合一个实例说明数学建模的过程.

培养学生建模能力是一个循序渐进的过程. 开始应从简单实际问题入手提出问题，教师引导学生初步掌握用数学形式刻画和构造模型的方法，随后组织学生展开分析讨论，分析每种模型的有效性，提出修改意见，讨论是否有进一步扩展的意义. 下面，我们补充一个案例来进一步体会数学建模的过程.

例 6 （补充例题）哥尼斯堡七桥问题

（1）实际情境

在 18 世纪的东普鲁士，有一个叫哥尼斯堡的城市. 城市中有一条河，河中有两个小岛，河上架有七座桥，把小岛和两岸都连结起来（图 6-13（1））.



(1)　　　　　　(2)

图 6-13

（2）提出问题

人们常常从桥上走过，于是产生了一个有趣的想法：能不能一次走遍七座桥，而在每座桥上只经过一次呢？

尽管人人绞尽脑汁，谁也找不出这样的一条路线来.

（3）建立数学模型

1736 年，这件事传到了瑞士大数学家欧拉（*Euler*，1707～1783）的耳里，他立刻对这个问题产生了兴趣，动手研究起来. 作为一个数学家，他的研究方法和一般人不同，他没有到桥上去走走，而是将具体问题转化为一个数学模型.

欧拉用点代表两岸和两岛，用线代表桥，于是上面的问题就转化为能否一笔画出图 6-13 (2)中的网络图形，即“一笔画”问题，所谓“一笔画”，通俗地说，就是笔不离开纸面，能不重复地画出网络图形中的每一条线.

（4）得到数学结果

在“一笔画”问题中，如果一个点不是起点和终点，那么有一条走向它的线，就必须有另一条离开它的线. 这就是说，连结这点的线条数目是偶数，这种点称为偶点. 如果连结一个点的线条数目为奇数，那么，这种点称为奇点，显然，奇点只能作为起点或终点.

因此，能够一笔画出一个网络图形的条件，就是它要么没有奇点，要么最多只有两个

奇点（分别作为起点和终点）. 而图 6-13（2）中所有的点均为奇点，且共有 4 个奇点，所以这个图形不能“一笔画”.

（5）检验

欧拉最后得出结论：找不出一条路线能不重复地走遍七座桥.

相关链接

1. 丁谓施工

传说宋真宗在位时，皇宫曾起火. 一夜之间，大片的宫室楼台殿阁亭榭变成了废墟. 为了修复这些宫殿，宋真宗派当时的晋国公丁谓主持修缮工程. 当时，要完成这项重大的建筑工程，面临着三个大问题：第一，需要把大量的废墟垃圾清理掉；第二，要运来大批木材和石料；第三，要运来大量新土. 不论是运走垃圾还是运来建筑材料和新土，都涉及大量的运输问题. 如果安排不当，施工现场会杂乱无章，正常的交通和生活秩序都会受到严重影响. 丁谓研究了工程之后，制订了这样的施工方案：首先，从施工现场向外挖了若干条大深沟，把挖出来的土作为施工需要的新土备用，于是就解决了新土问题. 第二步，从城外把汴水引入所挖的大沟中，于是就可以利用木排及船只运送木材、石料，解决了木材、石料的运输问题. 最后，等到材料运输任务完成之后，再把沟中的水排掉，把工地上的垃圾填入沟内，使沟重新变为平地.

简单归纳起来，就是这样一个过程：挖沟（取土）→引水入沟（水道运输）→填沟（处理垃圾）. 按照这个施工方案，不仅节约了许多时间和经费，而且使工地秩序井然，使城内的交通和生活秩序不受施工太大的影响，因而确实是很科学的施工方案. 实际上它也蕴含着运筹学的思想.

2. 借助数学建模的思想构建人口模型

国家统计局通过人口统计得到以下数据：

年份	1953	1964	1979	1982	1987
人口数（亿）	6.019	7.231	9.709	10.319	10.723
年份	1989	1990	1995	2001	
人口数（亿）	10.960	11.600	12.078	12.953	

为掌握人口增长规律，作出人口预测，需要建立人口增长模型.

由马尔萨斯人口论得到的数学模型为

$$N(t)=N_0 e^{r(t-t_0)},$$

其中 t_0 表示初始年份，N_0 表示初始年份人口数，t 表示年份（$t>t_0$），$N(t)$表示第 t 年人口数，r 表示人口增长率.

取 $t_0=1979$，将模型求解结果与实际情况对照，发现模型对开始几年的人口预测还是比较准确的，但随着时间 t 不断增加，人口总数趋近无穷大，显然这与事实不符. 经过分析修改后的模型为

$$N(t)=\frac{aN_0 e^{a(t-t_0)}}{a-bN_0+bN_0 e^{a(t-t_0)}},$$

其中 $a=0.038\ 545$，$b=0.002\ 409$.

以上模型称为 logistic 模型. 从上式可以看出该模型中，当 t 趋近无限时，人口总数具有一个极限值. 这个结果比较合乎实际，是一个可用的结果.

6.3　程序框图

教材线索

在数学中，流程图主要用于表达数学计算或证明过程中的主要思路.《数学 5（必修）》“算法初步”一章介绍的程序框图就是流程图的一种. 本节将进一步认识程序框图，用程序框图来表达算法步骤.

教材首先通过具体实例设计一个算法，求 100 个数 a_1，a_2，…，a_i，…，a_{100}之和. 引导学生从知识结构的角度来看程序框图的意义. 接着介绍用程序框图来表示求解分式方程的过程，并介绍程序框图在生活中的两个应用（闰年问题、邮费问题），最后还学习计算机程序中的替换程序、删除程序的原理. 通过丰富的案例使学生体会程序框图在解决某类数学问题以及实际问题中的作用.

教学目标

（一）知识与技能

进一步理解程序框图的意义；学会灵活、正确地画出程序框图；会用框图表示算法，理解替换程序与删除程序的设计原理，会编制合理的程序框图.

（二）过程与方法

通过模仿、操作、探索、经历通过设计程序框图表达解决问题的过程，提高学生分析问题、解决问题的能力.

（三）情感、态度与价值观

认识到学习程序框图是我们学习计算机的一个基本步骤，也是我们学习计算机语言的必经之路. 通过本节的学习提高学生分析问题、解决问题的能力，逐步养成在编写程序解决问题的过程中，扎实严谨的科学态度.

教材分析

1. 本节知识结构，如图 6-14 所示.

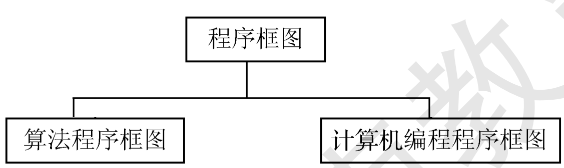


图 6-14

2. 重点：

用程序框图表达数学计算中的主要思路（算法步骤）.

3. 难点：

对于某个具体的数学问题，理解设计程序框图时逻辑结构的选择和应用是难点.要求学生既会将自然语言转化为程序框图，又会将程序框图转化为程序语句，也是教学中的难点.

4. 本节学习的程序框图是流程图的一种，这是学生在《算法》中已学习过程序框图、具备了程序框图的初步知识后，进一步用程序框图来描述算法. 其实描述算法可以用自然语言，也可以用流程图直观地表示算法的整体结构. 如果要在计算机上实施算法，则还需将算法转化为程序语句.

教学建议

1. 张奠宙先生指出："算法应该从小学开始教"，"算法贯穿整个中学数学". 的确，算法的思想和知识、技能，是学生的终身发展所必需的. 但是要求学生通过 12 课时就能一步到位，系统地掌握程序的设计和编写，显然是不现实的. 之前，学生学习的是从算法编制的角度认识程序框图，而本小节主要引导学生从知识结构的角度来看程序框图的意义. 从而达到提高学生抽象概括能力和清晰地表达与交流思想的能力.

2. 让学生进一步体会算法的思想，理解算法的重要性与有效性，加强逻辑思维，在经历过程中理解逻辑结构和语句. 可以要求学生在观察、模仿的基础上，在教师的指导下尝试解决一些简单的问题，不应过分注重技术操作.

3. 本节内容属于"默会知识"，学之道在于"悟". 教学中应当充分重视学生亲身感受、实践操作、合作交流，给学生提供探索与交流的空间，使数学学习过程真正成为学生在已有经验基础上的主动建构过程，在知识的形成与应用过程中认识和掌握双基，在经历过程中感悟算法的思想和方法. 在强调学生自主探究的同时，教师也应适度地给予引导、帮助，如教学情境的设计、适时的点拨、情感激励等.

4. 循环结构是指在算法设计中，从某处开始有规律地反复执行某一处理步骤，这个处理步骤称为循环体. 循环体的执行次数由一个控制循环条件决定. 满足条件反复做，不满足则停止. 循环结构分为两种——当型（While 型）和直到型（Until 型）. 当型循环在执行循环体前对控制循环条件进行判断，当条件满足时反复做，不满足则停止；直到型循环在执行了一次循环体之后，对控制循环条件进行判断，当条件不满足时反复做，满足则停止. 在循环结构中，要注意根据条件设计合理的计数变量、累加变量等. 首先要求对表达式进行判断，如果表达式为真，则执行循环体部分，每次开始执行循环体前，都要判断表达式是否为真. 这样重复执行，一直到表达式值为假时，就跳过循环体部分，结束循环. 其中计数变量用于记录循环次数，累加变量用于输出结构，计数变量和累加变量一般是同步执行的，累加一次，计数一次. 在循环结构中，要注意根据条件设计合理的计数变量和累加变量. 循环结构要在某个条件下终止循环结构，但不允许"死循环".

例题解析

例 1 设计一个算法，求 100 个数 a_1，a_2，…，a_i，…，a_{100}之和.

解 流程图如 6-15 所示.

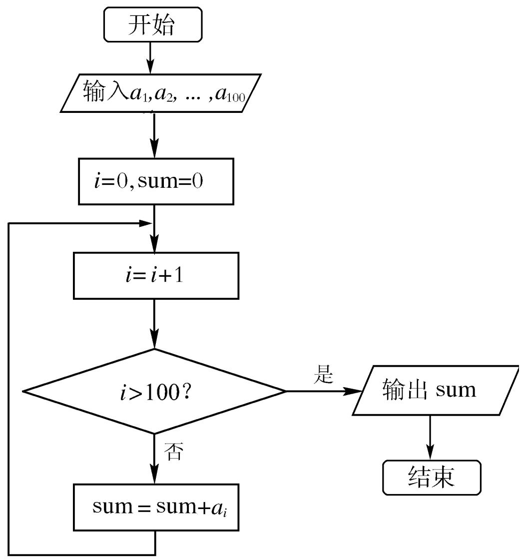


图 6-15

分析 在生活中，我们有时需要重复做一些事情（如求 100 个学生的总成绩，需要做 100 次加法运算，每次加入一个学生的成绩）. 从完成这类事情的过程中，可以找出 3 个关键的地方，即“从什么地方开始”“反复做什么”“在什么条件下结束”. 计算机为什么运算速度快？因为它最善于进行重复性的工作，可以将人们从繁重的重复运算中解救出来. 循环结构可以让计算机在某个条件成立的情况下重复执行某个步骤. 在构造循环结构时，也必须保证完成下面的事情.

（1）循环前，初始化变量的值.

例如，在“输出 1～100”的循环结构中，要先给输出的变量 i 赋初值 0.

（2）确定循环体.

循环体就是在循环结构中反复执行的操作步骤，例如，上述循环结构中的循环体是“输出变量 i”和“$i=i+1$”.

（3）设置循环终止条件.

循环结构不能是永无终止的“死循环”，一定要在某个条件下终止循环，这就需要条件结构来做出判断，因此，循环结构中一定包含条件结构. 例如，上述循环结构中的终止条件是“$i=100$”.

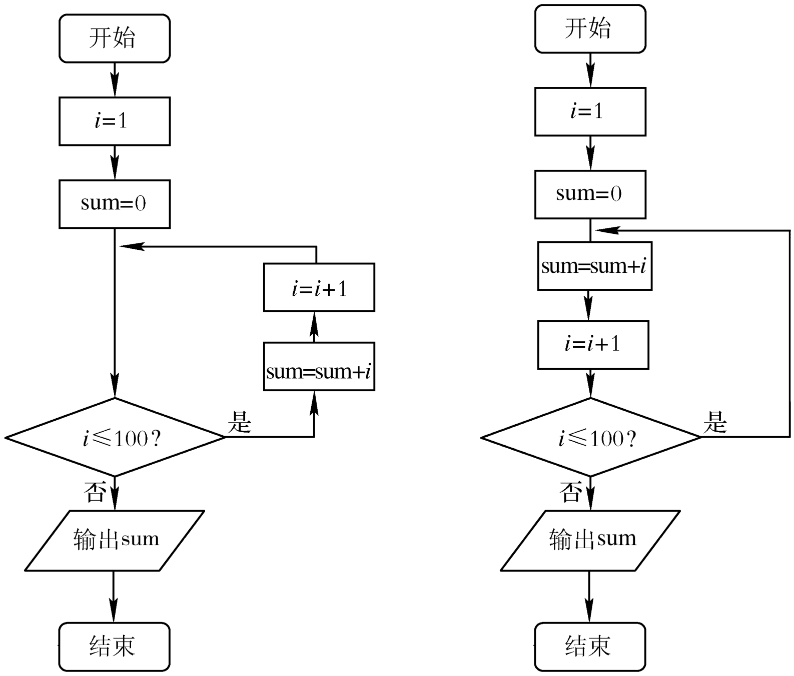
循环结构有两类，当型循环和直到型循环. 循环结构是教学的难点. 而“累加器”是一个很好的载体，借助于“累加器”，可以使学生经历把“递推求和”转化为“循环求和”的过程，同时经历“初始化变量”“确定循环体”“设置循环终止条件”3 个构造循环结构的关键步骤，从而初步理解循环结构和学习构造循环结构的一般方法.

对生源较一般的班级，本题讲之前建议可以选择复习最简单的“累加器”问题，例如求 $1+2+\cdots+100$ 的值. 这个例子非常简单，该计算只是重复简单的加法，对于人来说，这样的计算是复杂、乏味的，但计算机却可以在转瞬间完成这些复杂的计算. 因此，这样一个加法的循环运算，可以用一个循环结构的算法来完成. 这个问题的自然求和过程可以表示为：$S_2=S_1+2$，$S_3=S_2+3$，$S_4=S_3+4$，…，$S_n=S_{n-1}+n$（$n=2$，3，…，100），用递推公式表示为：

$$\begin{cases} S_1=1, \\ S_n=S_{n-1}+n\ (1<n\leqslant 100). \end{cases}$$

循环结构蕴含的是“递推”的思想，由于学算法时学生还没有学习数列，对这种思想方法还是初次接触.

如图 6-16 所示，若直接利用这个递推公式构造循环结构，可得设计算法流程图：



当型（While 型）循环　　直到型（Until 型）循环

图 6-16

让学生画其他的类似框图. 结合程序框图的教学，复习算法的三种基本逻辑结构，有利于学生对后者的进一步理解和掌握. 类似地，对算法的优化或改造，在算法的程序框图上进行，也有利于学生看清算法的结构和更好地把握“算理”.

小结：循环体再认识. 循环表达式“$\mathrm{sum}=\mathrm{sum}+a_i$”的理解：$i=1$，$\mathrm{sum}=\mathrm{sum}+a_1$，并把 $0+a_1$ 赋值给 sum，第一次循环结束 sum 为 a_1，此时 sum 记录了第一个数的值，并开始第二次循环；

$i=2$，$\mathrm{sum}=\mathrm{sum}+a_2$，并把 a_1+a_2 赋值给 sum，第二次循环结束 sum 为 a_1+a_2，此时 sum 记录了前两个数的和，于是开始第三次循环；

$i=3$，$\mathrm{sum}=\mathrm{sum}+a_3$，并把 $(a_1+a_2)+a_3$ 赋值给 sum，第三次循环结束 sum 为 $a_1+a_2+a_3$，此时 sum 记录的是前三个数的和，开始第四次循环……

所以，$\mathrm{sum}=\mathrm{sum}+a_i$ 是一个赋值过程.

例 2　写出求形如 $\dfrac{c}{x+a}=\dfrac{d}{x+b}$ 的分式方程的解的流程图，其中 a，b，c，d 是已知数.

分析　求分式方程的步骤：

方法一：移项、通分、化简、化为整式方程，计算解，验根，得出结论.

方法二：去分母、整理、计算解、验根、得出结论.

解 流程图如 6-17 所示：

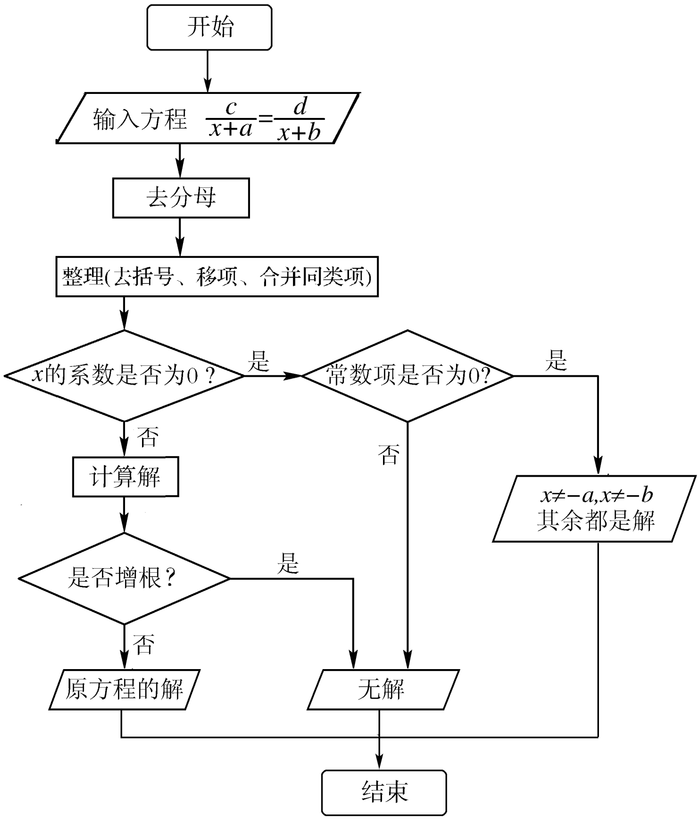


图 6-17

注意：对增根问题的处理.

例 3 公历规定：如果年份数字被 4 整除而不被 100 整除，就是闰年；如果年份数字被 400 整除，也是闰年. 其他的年份都不是闰年. 请用程序框图表示这个规则，并判断 1980 年是不是闰年.

分析 每四年一闰、百年不闰、四百年再闰的历法，即格里历.格里历是从公元 1582 年开始实行的闰年.这里必须设置三判断环节：(1)被 4 整除；(2)不被 100 整除；(3)被 400 整除.

“判断某一年是否为闰年”的问题根据“算理”的不同有不同的算法，不同的程序框图.

例 4 在某地投寄平信，每封信质量 x g（不超过 80 g）的邮费（单位：分）标准为：

$$y=\begin{cases}80，x\in(0，20]；\\160，x\in(20，40]；\\240，x\in(40，60]；\\320；x\in(60，80].\end{cases}$$

写出计算邮费的程序框图，要求输入重量输出邮费.

解　计算邮费的程序框图如下（图 6-18）：

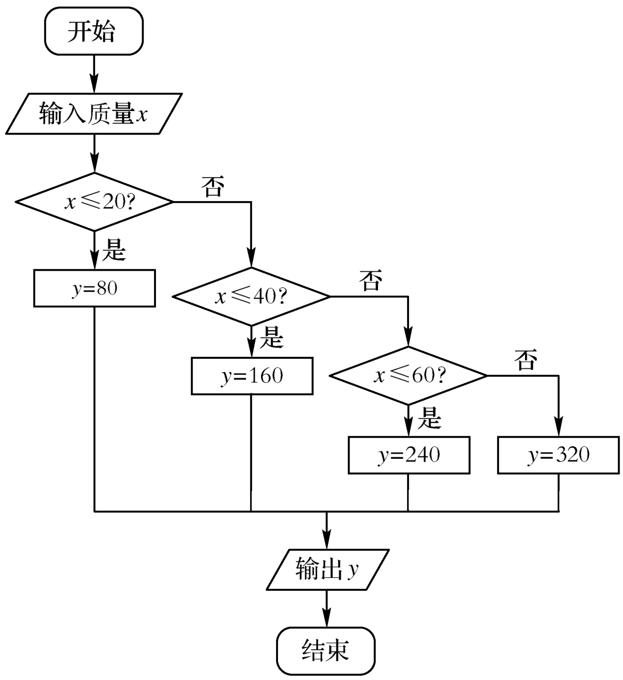


图 6-18

分析　分段函数是学生已经熟悉的内容，它的表达式根据自身取值范围的不同而有不同的形式，在进行算法一章条件结构的教学时，可以将条件结构与分段函数联系起来，让学生设计含有条件结构的算法来计算分段函数的值.

例 5　（补充例题）在音乐唱片超市里，每张唱片售价 25 元. 顾客如果购买 5 张以上（含 5 张）唱片，则按照九折收费；如果顾客购买 10 张以上（含 10 张）唱片，则按照八五折收费. 请设计流程图.

解　流程图如 6-19 所示.

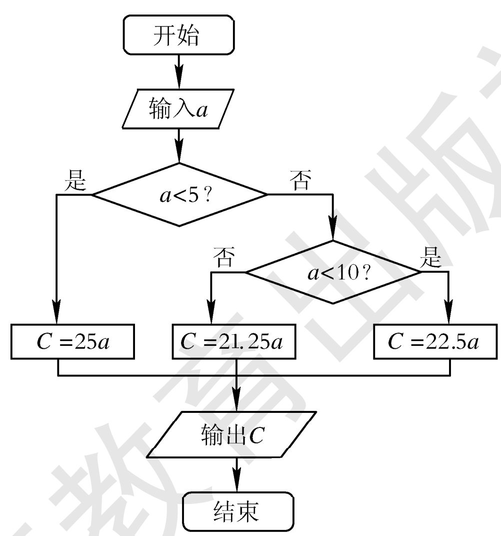


图 6-19

相关链接

1. 公　历

公历，即格里历，现行国际通行的历法，属于阳历的一种，通称阳历．一年 365 天，划分为 12 个月．是教宗格里高利十三世在公元 1582 年改革儒略历制定的历法，儒略历计算的每天大约相差 11 分 14 秒，当时儒略历和地球实际位置的误差已达 14 天，格里历将误差纠正，确定所有整数世纪年除了可被 400 整除的外一律不设闰年，理论上可以达到两万年内误差不超过一天，但由于地球自转的变化，实际到公元 4909 年误差就可达一天．由于新历法是教皇颁布的，新教国家予以抵制，直到 18 世纪，英国才采纳格里历；伊斯兰教国家仍然使用伊斯兰历；佛教国家采用佛教历．

公历的闰年：

由于地球绕太阳运行周期为 365 天 5 小时 48 分 46 秒（合 365.242 19 天）即一回归年，公历把一年定为 365 天．所余下的时间约为四年累计一天，加在 2 月里，所以平常年份每年 365 天，2 月为 28 天，闰年为 366 天，2 月为 29 天．每 400 年中有 97 个闰年．

闰年的计算方法：公元纪年的年数可以被 4 整除而不被 100 整除，即为闰年；被 400 整除的年数也为闰年．纪元是从传说的耶稣诞生那年算起．

公历每月有月大、月小和月平的说法，月大为 31 天，月小为 30 天，月平只有 2 月，为 28 天（闰年 29 天）．公历一年中每月天数：

月份	1 月	2 月	3 月	4 月	5 月	6 月	7 月	8 月	9 月	10 月	11 月	12 月
天数	31	28（闰年 29）	31	30	31	30	31	31	30	31	30	31

我国是在 1912 年开始采用公历．

2. 用框图将证明中常用的三种方法进行表示

“综合法”参考框图如下：

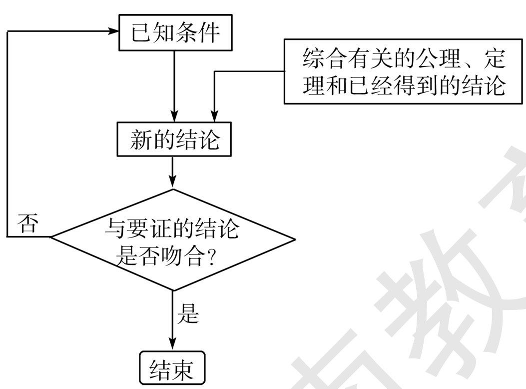


图 6-20

“分析法”参考框图如下：

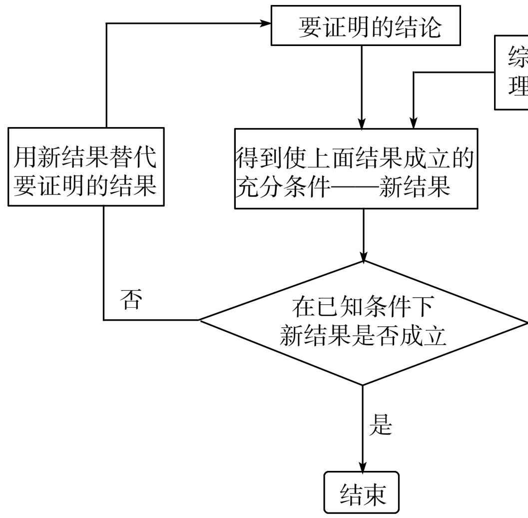


图 6-21

“反证法”参考框图如下：

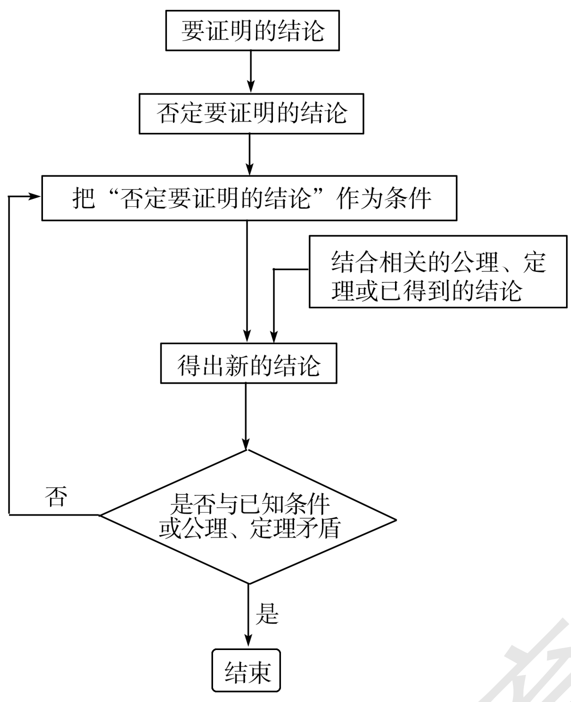


图 6-22

教材习题参考解答

习题 1

1. 例如条件(1) 四边形 $ABCD$ 是平面四边形；

　　(2) $AB \parallel CD$；

　　(3) $AB = CD$.

2. 若$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{A'C'}=\dfrac{AC}{A'C'}$，则$\triangle ABC \backsim A'BC'$；

若$\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$，则$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$；

若 $AB=A'B'$，$BC=B'C'$，$AC=A'C'$，则$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. 等等.

若$\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$，$AB=A'B'$，则$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. 等等.

3.

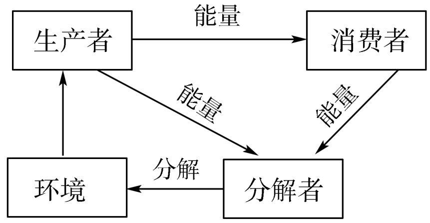


图 6-23

4.

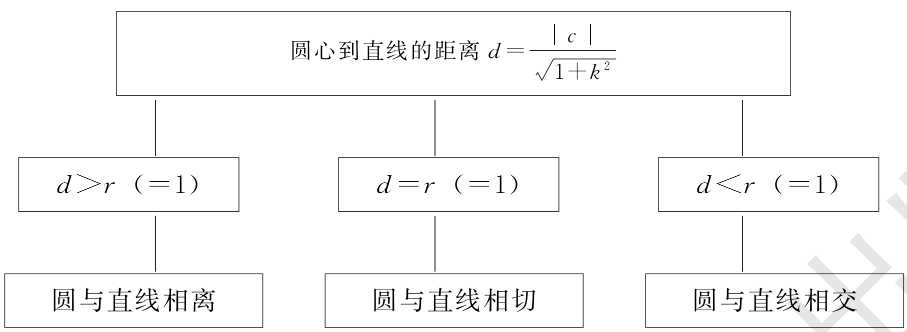


图 6-24

P. 75 练习

(1) 可能是电源未开通，或者室温已经偏低.

(2) 有可能是测定室温的温度计有故障，或者根据室温来控制压缩机停机的控制器有故障.

习题 2

1. 流程图如图 6-25.

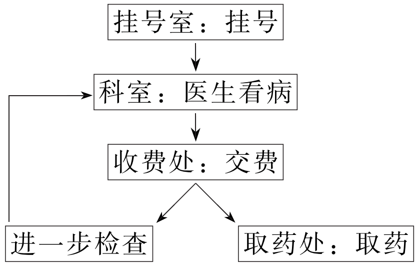


图 6-25

2.

计分 计分	篮球 1 队	篮球 2 队	篮球 3 队	总成绩（几胜几负）
篮球 1 队				
篮球 2 队				
篮球 3 队				

3. 略.

4. 设计一个调查商店伪劣产品的工作流程图，如图 6-24.

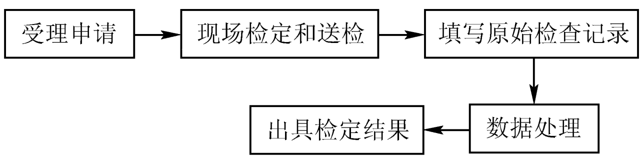


图 6-26

习题 3

1.

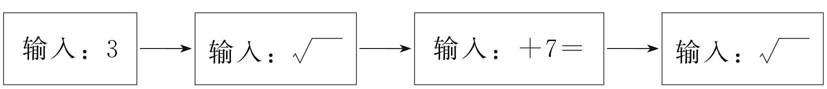


图 6-27

2.

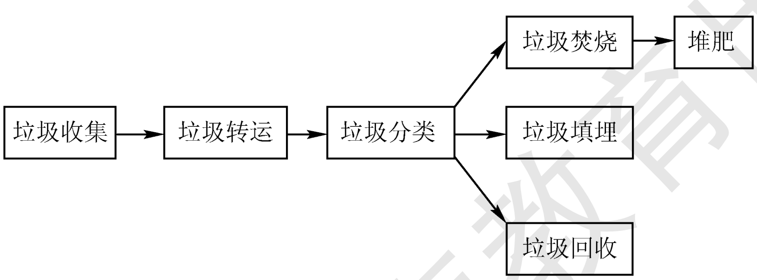


图 6-28

3.

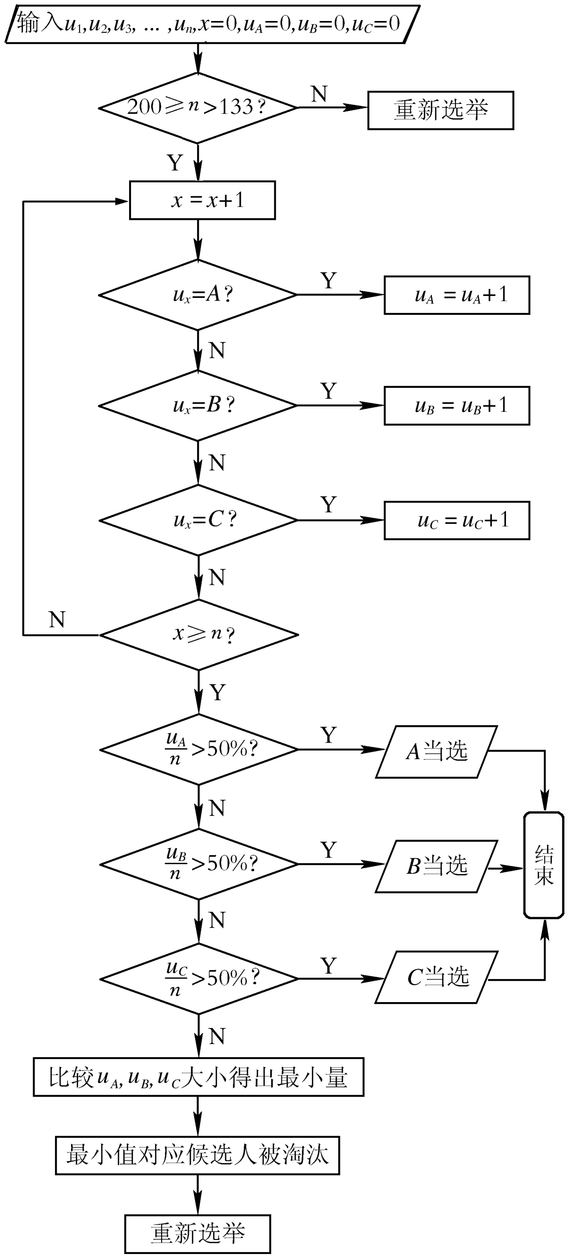


图 6-29

4. 将九个球均分三组，任取两组，放在天平两边，若平衡，说明这两组中没有空心球，空心球在剩余一组. 任取剩余一组的两球，把它们放在天平两边，判断平衡情况：若平衡，则第三个球是空心球；若不平衡，轻的为空心球. 三组取两组，若不平衡，取轻的一组. 任取两球，若平衡，空心球为第三球；若不平衡，轻的为空心球.

P. 85 练习

1.

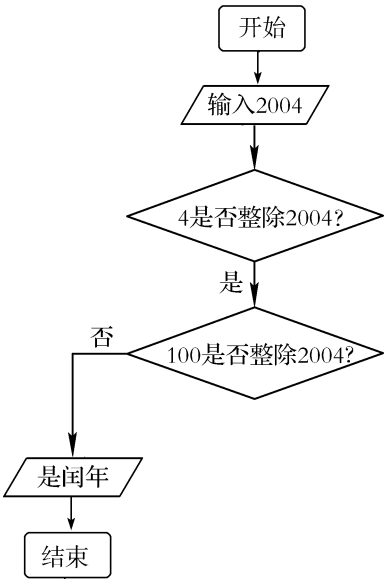


图 6-30

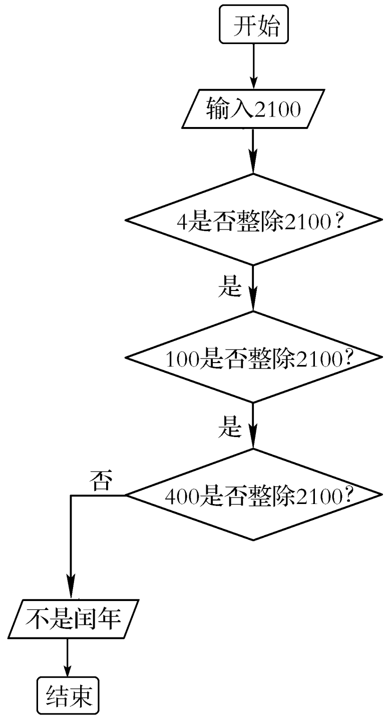


图 6-31

2.（1）$\frac{5}{2}$；（2）“是负数”

习题 4

1．解：去分母得　$1=(3x+4)(x+2)$，

整理得　$3x^2+10x+7=0$，

解之得　$x=-\frac{7}{3}$或 $x=-1$，

经检验都不是增根，

原方程解为　$x=-\frac{7}{3}$或 $x=-1$.

2．解：前 8 项为 1，1，2，3，5，8，13，21.

3.

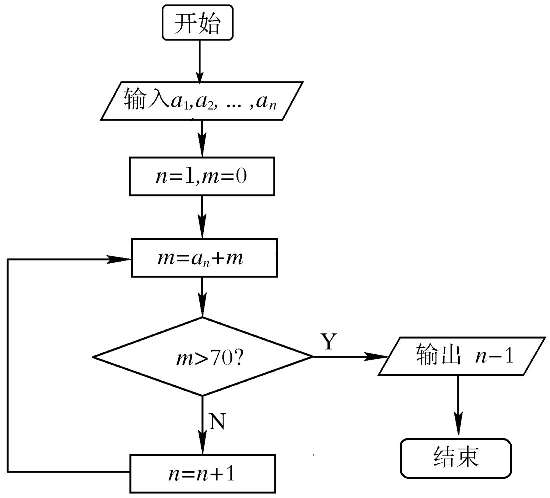

开始
输入$a_1,a_2,\ldots,a_n$
$n=1,m=0$
$m=a_n+m$
$m>70?$
Y
输出 $n-1$
N
$n=n+1$
结束

图 6-32

4.

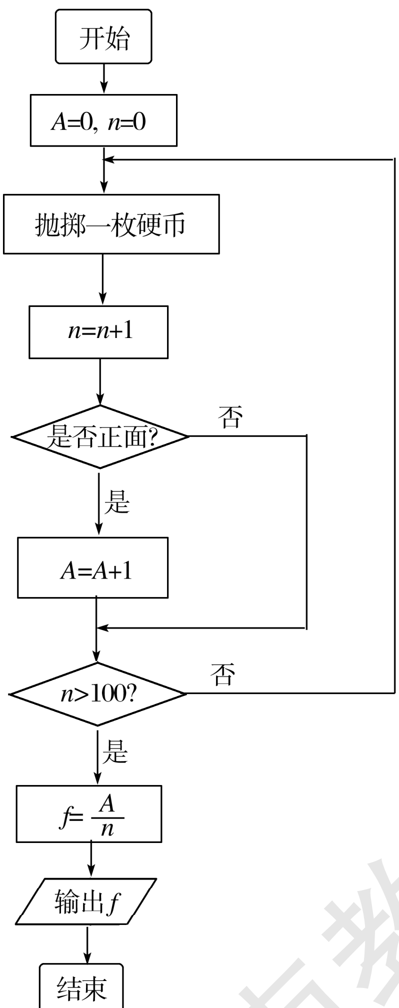

开始
$A=0,\ n=0$
抛掷一枚硬币
$n=n+1$
是否正面?
否
是
$A=A+1$
$n>100?$
否
是
$f=\frac{A}{n}$
输出f
结束

图 6-33

习题 5

1.

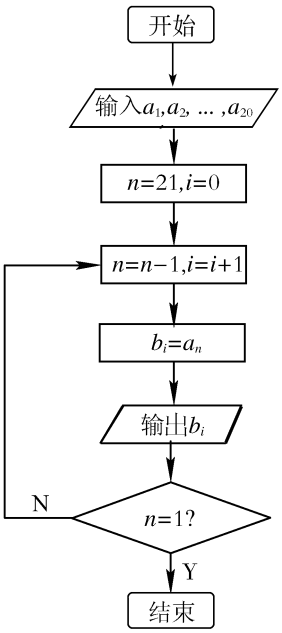


图 6-34

2.

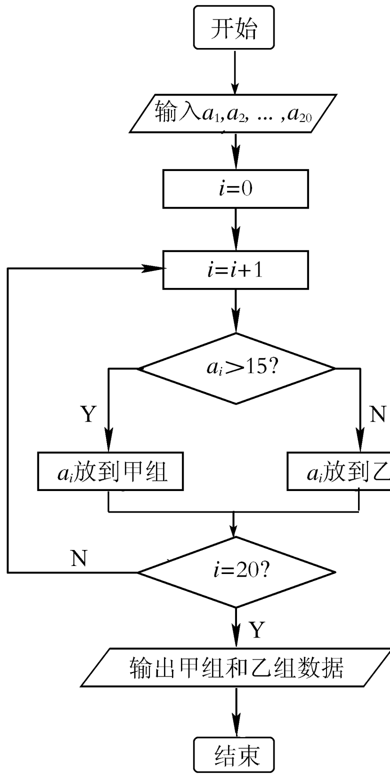


图 6-35

3.

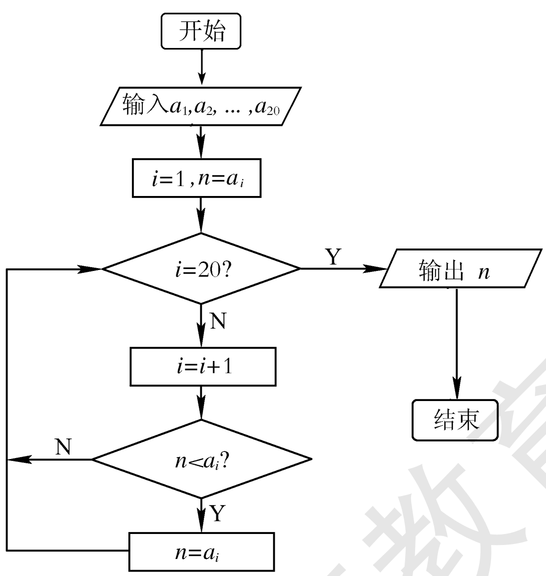


图 6-36

4.

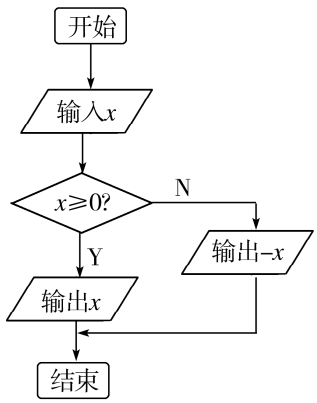


图 6-37

5.

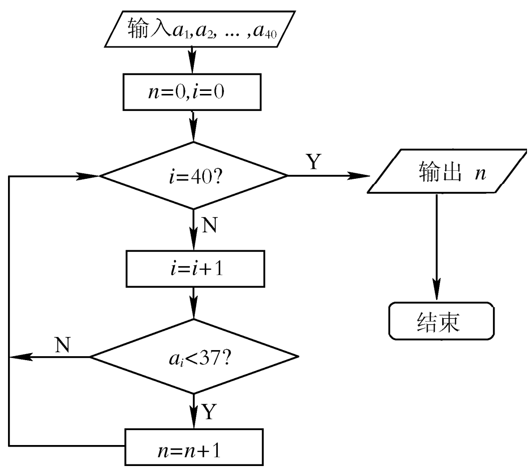


图 6-38

复习题六

1. $15^2 \;+(20)^2 = \;25^2$

$\quad + \qquad\quad + \qquad\quad +$

$(36)^2 + \;48^2 \;=(60)^2$

$\quad \| \qquad\quad \| \qquad\quad \|$

$39^2 \;+(52)^2 =(65)^2$

框图：

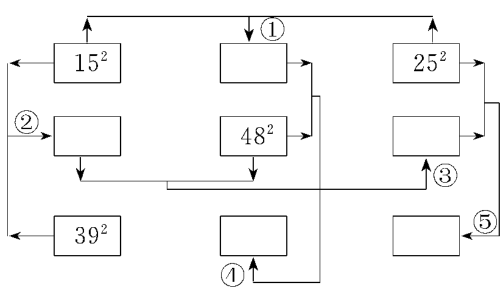


图 6-39

说明：①②③④⑤表示运算的先后顺序.

2.

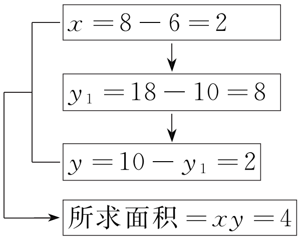

$x=8-6=2$
$y_1=18-10=8$
$y=10-y_1=2$
所求面积$=xy=4$

图 6-40

3.

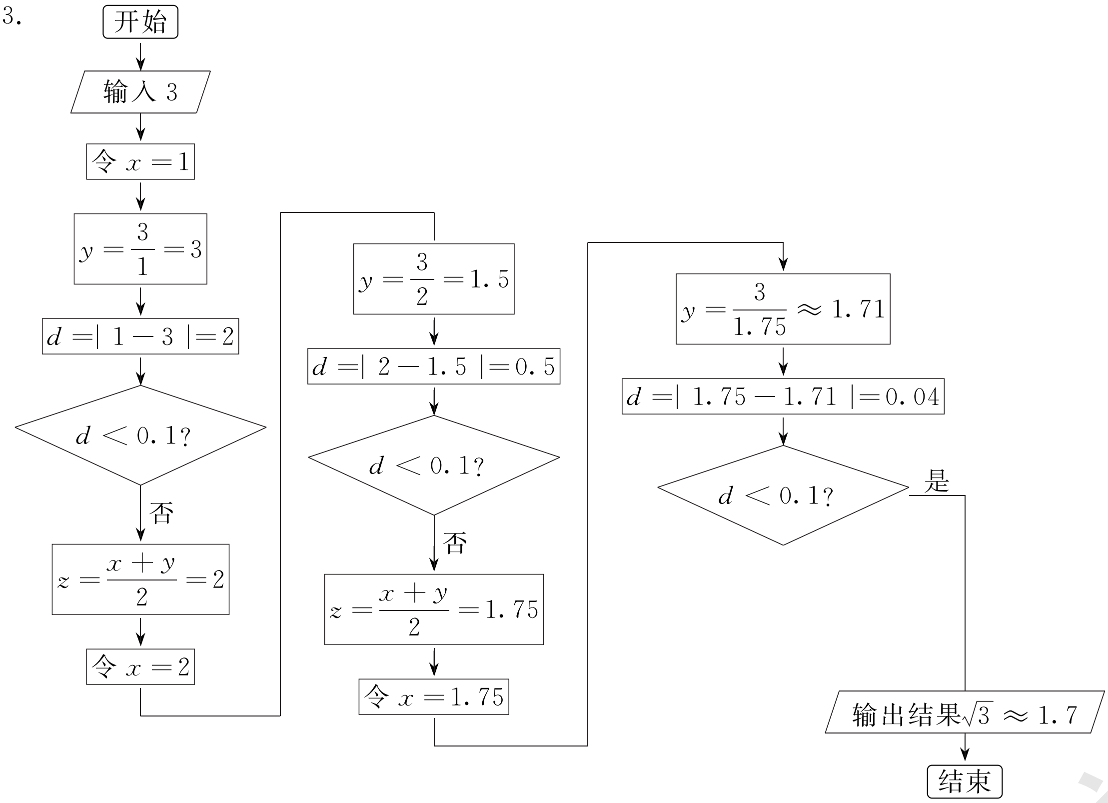

开始
输入 3
令 $x=1$
$y=\frac{3}{1}=3$
$d=|1-3|=2$
$d<0.1$?
否
$z=\frac{x+y}{2}=2$
令 $x=2$
$y=\frac{3}{2}=1.5$
$d=|2-1.5|=0.5$
$d<0.1$?
否
$z=\frac{x+y}{2}=1.75$
令 $x=1.75$
$y=\frac{3}{1.75}\approx 1.71$
$d=|1.75-1.71|=0.04$
$d<0.1$?
是
输出结果$\sqrt{3}\approx 1.7$
结束

图 6-41

第 7 章　数系的扩充与复数

一、教学目标

1. 理解复数的基本概念、代数表示形式以及复数相等的充要条件.

2. 理解并掌握复数代数形式的加（减）运算法则.

3. 理解并掌握复数代数形式的乘除运算法则.

4. 了解复数的几何表示及加（减）运算的几何意义.

5. 体验复数问题实数化的思想方法，能运用数形结合、待定系数法等数学思想方法解决复数问题.

6. 在问题情境中，了解数系的扩充过程，体会实际需求与数学内部的矛盾（数的运算规则、方程理论）在数系扩充过程中的作用，感受人类理性思维的作用以及数与现实世界的联系.

二、教材说明

数系的扩充和复数概念，新《课程标准》与原《教学大纲》教学内容相同，但在处理方式和目标定位上存在差异.

新《课程标准》将复数作为数系扩充的结果引入，原《教学大纲》教科书先安排复数的概念，再研究复数的运算，最后介绍数系的扩充. 新《课程标准》实验教科书在介绍数系扩充的思想方法的基础上引入复数的概念，力求还原复数的发现与建构过程.

新《课程标准》强调在问题情境中了解数系的扩充过程，体会实际需求与数学内部的矛盾在数系扩充过程中的作用，感受人类理性思维的作用以及数与现实世界的联系. 从这点上看，新《课程标准》要求提高了.

在复数的代数表示法及其几何意义上，新《课程标准》的教学定位是“了解”，而原《教学大纲》要求“掌握”. 从这点上看，新《课程标准》要求降低了.

复数代数形式的四则运算，新《课程标准》与原《教学大纲》教学内容与要求基本相同，都要求能进行代数形式的四则运算. 但新《课程标准》要求了解复数代数形式的加、减运算的几何意义，从这一点上看，新《课程标准》对复数的向量表示提出了要求，强化了数形结合思想方法. 在复数代数形式的四则运算上，新《课程标准》明确强调“淡化烦琐的计算和技巧性训练”.

三、课时安排建议

本章教学时间约需 5 课时，具体分配如下（仅供参考）

7.1　解方程与数系的扩充	1 课时
7.2　复数的概念	1 课时
7.3　复数的四则运算	1 课时
7.4　复数的几何表示	1 课时
小结与复习	1 课时

四、教学建议

1. 数学的发展既有内在的动力，也有外在的动力. 在高中数学的教学中，要注重数学的不同分支和不同内容之间的联系，数学与日常生活的联系，数学与其他学科的联系，沟通数学学科内各部分内容之间的联系. 通过类比、联想、知识的迁移和应用等方式，使学生体会知识之间的有机联系，感受数学的整体性，进一步理解数学的本质，提高解决问题的能力. 在教学中要注重复数相等条件应用中等价转化的思想，加法、乘法运算法则与多项式加法、乘法法则的类比思想，复数的几何表示与平面向量结合的数形结合思想等在有关内容中的渗透，在不同内容中的应用.

2. 在教学中，应鼓励学生积极参与教学活动，包括思维的参与和行为的参与. 既要有教师的讲授和指导，也要有学生的自主探究与合作交流. 教师要创设适当的问题情境，鼓励学生发现数学的规律和问题解决的途径，使他们经历知识形成的过程. 例如数系扩充的教学，应师生一起穿过时空，回顾数系几次扩充的历史，让学生体会到数集的扩充是生产实践的需要，也是数学学科自身发展的需要，从而让学生积极主动地建构虚数的概念、复数的概念、复数的分类.

3. 数学是人类文化的重要组成部分，是人类社会进步的产物，也是推动社会发展的动力. 教学中应引导学生初步了解数学科学与人类社会发展之间的相互作用，体会数学的科学价值、应用价值、人文价值，开阔视野，探寻数学发展的历史轨迹，提高文化素养，培养求实、说理、批判、质疑等理性思维的习惯和锲而不舍地追求真理的精神. 可以根据数的发展历史，收集一些古今中外的历史事件和人物的有关资料或现实生活的实例，采取小组合作的方式写一篇有关数的概念形成、发展和应用的文章，在班级中交流，反映数学在人类社会进步、人类文明建设中的作用，同时也反映社会发展对数学发展的促进作用.

五、评价建议

数系的扩充与复数的引入是高中数学课程中的基础知识，教学评价既要关注基础知识和基本技能的掌握，又要关注学生在学习过程中的体验. 将教学过程、教学目标和学生发展有机地结合起来，可通过课堂提问、学生作业、学习交流、成绩测定、数学探究性课题学习，撰写小论文等方法进行评价.

本章涉及的基础知识有：复数概念、加减乘除运算、复数的几何表示等.

本章涉及的基本技能有：运算的技能、分析问题和解决问题的能力等.

本章涉及的基本数学思想方法有：数形结合的思想、类比的思想、等价转化和分类讨论的思想等.

在进行本章教学评价时，应尽可能覆盖本章的基础知识、基本技能和基本数学思想方法，对重点知识、能力要求加大评价的力度.

7.1 解方程与数系的扩充

教材线索

本小节首先从方程 $x^2+1=0$ 在实数集内无解，提出在研究代数方程的过程中，如果限于实数，有些问题就无法解决．然后回顾整数、有理数扩充的历史．一个自然的想法是，能否像引进分数、无理数一样，通过引进新的数而使实数系得到进一步扩充，从而使问题得以解决．使学生对数的形成、发展历史和规律，各种数集之间的关系有着比较清晰、完整的认识．具体做法是：引入新数 i，规定 $i^2=-1$ 且实数可以与它进行四则运算，还有加乘运算律仍然成立．

教学目标

（一）知识与技能

理解并掌握虚数单位及虚数单位与实数进行四则运算的规律．

（二）过程与方法

通过解方程等具体问题，体会实际需求与数学内部的矛盾（数的运算规则、方程理论）．在数系扩充过程中的作用，感受引入复数的概念的必要性，感受人类理性思维在数系扩充中的作用．

（三）情感、态度与价值观

培养学生正确的人生观、价值观，使之深刻认识到人在事物发展变化中所应体现的价值和作用．

教材分析

1．重点：

数系的扩充过程，数系扩充的原因和特征，虚数单位 i 的引进．

2．难点：

数系扩充的原因和特征的认识．

3．课标分析：

数系的扩充，新《课程标准》与原《教学大纲》教学内容相同，但在处理方式和目标定位上存在差异．

（1）新《课程标准》将复数作为数系扩充结果引入，原《教学大纲》教科书先安排复数的概念，再研究复数的运算，最后介绍数系的扩充. 新《课程标准》实验教科书在介绍数系扩充的思想方法的基础上引入复数的概念，力求还原复数的发现与建构过程.

（2）新《课程标准》强调在问题情境中了解数系的扩充过程，体会实际需求与数学内部的矛盾在数系扩充过程中的作用，感受人类理性思维的作用以及数与现实世界的联系，从这点上看，新《课程标准》要求提高了.

教学建议

1. 建构主义学习理论认为，学习不应该被看成是对于教师所授予的知识的被动接受，而是学习者从自身已有的知识和经验为基础的主动的建构活动. 因此，教师必须为学生提供必要的背景知识，并与学生一起探索新知识. 教学时，我们采用体验已学过的数集的扩充的历史，让学生体会到数集的扩充是生产实践的需要，也是数学学科自身的需要. 介绍数的概念发展过程，使学生对数的形式、发展历史、各种数集之间的关系有着比较清晰、完整的认识，从而激发学生积极主动地建构新的数系.

2. 教学时，可从方程在给定范围内是否有解提出问题：

（1）在自然数集 **N** 中，方程 $x+1=0$ 有解吗？

（2）在整数集 **Z** 中，方程 $2x=1$ 有解吗？

（3）在有理数集 **Q** 中，方程 $x^2=2$ 有解吗？

（4）在实数集 **R** 中，方程 $x^2+1=0$ 有解吗？

3. 回顾从自然数集 **N** 扩充到实数集 **R** 的过程，帮助学生认识数系扩充的主要原因和共同特征. 可让学生思考如下问题：

（1）从自然数集 **N** 扩充到实数集 **R** 经历了几次扩充？

（2）每次扩充的主要原因是什么？

（3）每次扩充的共同特征是什么？

然后师生共同归纳总结：

扩充原因：

①满足解决实际问题的需要；

②满足数学自身完善和发展的需要.

扩充特征：

①引入新数；

②原数集中的运算规则在新数集中得到保留和扩展.

提出新的问题：

如何对实数集进行扩充，使方程 $x^2+1=0$ 在新的数集中有解？引入虚数单位 i.

相关链接

数集扩充的基本原则

由自然数集 **N** 逐步扩充到复数集 **C**，我们经过了四个主要历程：**N**→**Z**，**Z**→**Q**，**Q**→**R**，**R**→**C**. 在这四个扩充过程中，必须遵循下列基本原则：

1. 为了解决原有数集中运算遇到的矛盾，在原有数集的基础上，增加一种新的数，把原有数集扩充为一个更大的，并以原有数集作为子集的新数集.

2. 引进新数后，规定新数与原数，新数与新数之间的运算法则.

3. 在新的数集中，原数与原数、新数与原数之间仍满足原有的运算律.

4. 新的数集解决了原有数集所不能解决的一部分运算上的矛盾.

依据上述原则，从自然数集 **N** 逐步扩充到复数集 **C**，随着各种扩展的不断进行，数集本身的内部结构就逐渐完善，数集内部结构的变化，使得数集中总可以实施的运算逐渐增多. 自然数集扩展到整数集，使加法运算的逆运算——减法运算可以进行；整数集扩展到有理数集，使乘法运算的逆运算——除法运算可以进行；实数集扩展到复数集，使乘方运算的逆运算——开方运算可以进行，从而加、减、乘、除、乘方、开方这六种运算在复数集中都能顺利实施.

7.2　复数的概念

教材线索

本节内容是在引入虚数单位 i，并同时规定了它的两条性质后，自然得出复数的概念，然后给出实部、虚部、虚数、纯虚数等概念，告诉学生实数集是复数集的真子集，最后规定了两个复数相等的充要条件.

教学目标

（一）知识与技能

1. 理解并掌握复数的有关概念（复数、虚数、纯虚数、实部、虚部等）.

2. 理解并掌握复数相等的充要条件.

（二）过程与方法

1. 能利用复数的有关概念对复数进行分类，并求出有关参数的取值范围.

2. 会用复数相等的定义求有关参数（未知数）的值.

3. 培养学生分类讨论、等价转化等数学思想和方法.

（三）情感、态度与价值观

让学生体会矛盾转化、分与合、实与虚等辩证唯物主义观点.

教材分析

1. 重点：

复数的概念、虚数单位 i、复数的分类和复数相等的定义是本节课的重点.

2. 难点：

虚数单位 i 的引进及复数的概念、复数的分类是本节课的难点.

3. 复数及复数集.

在复数的定义之后，教科书给出了复数的代数形式 $z=a+bi$，这既与“7.4　复数的几何表示”相对应，也说明任何一个复数均可以由一个有序实数对 (a,b) 唯一确定，是复数能由复平面内的点来表示的理论基础.

必须弄清复数中的实部和虚部含义，同时要分清实数、虚数、纯虚数所具备的条件. 如设 $m\in\mathbf{R}$，复数 $z=(2+\mathrm{i})m^2-3(1+\mathrm{i})m-2(1-\mathrm{i})$.

（1）若 z 为实数，则 $m=$________；（2）若 z 为纯虚数，则 $m=$________.

对于本题复数用非标准形式给出，应先化成标准形式 $a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$.

复数集用 **C** 表示，至此我们所学过的有关数集的关系如下：

$$\text{复数 } a+b\text{i}(a,b\in\mathbf{R})\begin{cases}\text{实数}(b=0)\\ \text{虚数}(b\neq 0)\begin{cases}\text{纯虚数}(a=0)\\ \text{非纯虚数}(a\neq 0)\end{cases}\end{cases}$$

由此可知，实数集、虚数集都是复数集的真子集.

给出复数相等的定义后，由这个定义即得推论 $a+b\text{i}=0\Leftrightarrow a=0$，$b=0$. 应明确：复数相等的意义是在复数集中解方程的重要依据，提供了将复数问题化归为实数问题的解决途径.

教学建议

虚数单位 i 的引入及复数的概念是本节教学的难点和关键. 教学时可从前几次数系的扩充、指数概念推广进行类比，让学生明确在数的概念扩充中，始终保持加法、乘法的交换律、结合律及乘法对加法的分配律成立.

数学中很多概念本身就是解题手段和方法，认真理解复数的基本概念并运用它去解题也是本节的重要学习方法，教科书中已有一些实例，教学中可多举些例子让学生学习，以加深学生理解.

告诉学生“两个复数只能说相等或不相等，不能比较大小”，明确复数问题实数化是解决复数问题的最基本的思想方法.

例题解析

课本例题注重基础，强调从定义出发，现补充几个例题如下：

例 1 实数 m 分别取什么值时，复数 $z=(m^2-3m)+(2m^2-5m-3)\text{i}$ 是（1）实数？（2）虚数？（3）纯虚数？

解 （1）当 $2m^2-5m-3=0$，即 $m=3$ 或 $m=-\dfrac{1}{2}$时，复数 z 是实数.

（2）当 $2m^2-5m-3\neq 0$，即 $m\neq 3$ 且 $m\neq -\dfrac{1}{2}$时，复数 z 是虚数.

（3）当$\begin{cases}m^2-3m=0,\\ 2m^2-5m-3\neq 0,\end{cases}$即 $m=0$ 时，复数 z 是纯虚数.

评注：复数分类的标准是复数的实部和虚部是否为零.

①复数 $z=a+b\text{i}$（a，$b\in\mathbf{R}$）为实数的充要条件是 $b=0$.

②复数 $z=a+b\text{i}$（a，$b\in\mathbf{R}$）为虚数的充要条件是 $b\neq 0$.

③复数 $z=a+b\text{i}$（a，$b\in\mathbf{R}$）为纯虚数的充要条件是 $a=0$ 且 $b\neq 0$.

例 2 设 $m\in\mathbf{R}$，复数 $z=(2+\text{i})m^2-3(1+\text{i})m-2(1-\text{i})$.

（1）若 z 为实数，则 $m=$________；（2）若 z 为纯虚数，则 $m=$________.

解 $z=(2m^2-3m-2)+(m^2-3m+2)\text{i}$.

（1）依题意：$m^2-3m+2=0$，即 $m=1$ 或 $m=2$ 时，复数 z 是实数.

(2) 依题意：$\begin{cases}2m^2-3m-2=0,\\ m^2-3m+2\neq 0,\end{cases}$ 即 $m=-\dfrac{1}{2}$ 时，复数 z 是纯虚数.

评注： 本题复数用非标准形式给出，应先化成标准形式 $a+bi$（a，$b\in\mathbf{R}$）

例 3 若不等式 $m^2-(m^2-3m)i<(m^2-4m+3)i+10$ 成立，求实数 m 的值.

解 分析此题主要考查复数能比较大小的条件及方程、不等式的解法.

$\because m^2-(m^2-3m)i<(m^2-4m+3)i+10$，

$\therefore\begin{cases}m^2<10,\\ m^2-3m=0,\\ m^2-4m+3=0,\end{cases}$

解得：$\begin{cases}|m|<\sqrt{10},\\ m=0 \text{ 或 } m=3,\\ m=3 \text{ 或 } m=1.\end{cases}$

$\therefore$ 当 $m=3$ 时，原不等式成立.

评注： 本题应抓住复数能比较大小时，必须都是实数这一条件.

相关链接

两个复数“不能比较大小”

实数集 $\mathbf{R}$ 中的大小关系具有以下性质：

(1) 对于任意两个实数 a，b 来说，$a<b$，$a=b$，$a>b$ 这三种情况有且仅有一种成立；

(2) 如果 $a<b$，$b<c$，那么 $a<c$；

(3) 如果 $a<b$，那么 $a+c<b+c$；

(4) 如果 $a<b$，$c>0$ 那么 $ac<bc$.

然而在复数集 $\mathbf{C}$ 中，不论我们如何规定大小关系，都无法同时满足上述四个性质. 我们用反证法证明这一结论.

假设在复数集 $\mathbf{C}$ 中能规定一种大小关系，使它同时满足上述四个性质. 我们比较两个复数 0 与 i. 由性质 (1) 及 $i\neq 0$，可知 $i<0$ 或 $i>0$ 有且只有一种成立.

①若 $i>0$，这时由性质 (4)，可得 $0\cdot i<i\cdot i\Rightarrow 0<-1$，再次由性质 (4) 可得 $0\times(-1)<(-1)^2\Rightarrow 0<1$；

另一方面，由 $0<-1$，根据性质 (3) 可得 $0+1<-1+1\Rightarrow 1<0$.

这样 $0<1$ 与 $1<0$ 同时成立，这与性质 (1) 矛盾.

②再看 $i<0$ 的情况. 这时由性质 (3) 可得 $i+(-i)<0+(-i)\Rightarrow 0<-i$，由性质 (4) 得 $0\times(-i)<(-i)^2\Rightarrow 0<-1$.

由此同 (1) 可得 $0<1$ 与 $1<0$ 同时成立，与性质 (1) 矛盾. 综上可知，在复数集 $\mathbf{C}$ 中，对任何两个数都适用的大小关系是不存在的.

7.3 复数的四则运算

教材线索

本节内容首先规定了复数代数形式的加法、减法运算和乘法、除法运算等内容；然后，通过在复数范围内求负数的平方根入手，进而尝试讨论在复数范围内开平方问题，实系数一元二次方程 $\Delta<0$ 时，方程的求根公式.

教学目标

（一）知识与技能

1. 掌握复数代数形式的加减法运算、乘除法运算.

2. 能进行复数开方运算，在复数集中求解实系数一元二次方程.

（二）过程与方法

体验复数问题实数化的思想方法.

（三）情感、态度与价值观

培养学生从特殊到一般、具体到抽象的概括能力.

教材分析

1. 重点：

(1) 复数代数形式的加法、减法运算；

(2) 复数代数形式的乘法、除法运算；

(3) 复数开平方、求平方根问题；

(4) 实系数一元二次方程求根公式；

(5) 复数问题实数化的思想方法的理解与运用.

2. 难点：

(1) 复数代数形式的除法法则；

(2) 复数求平方根问题.

3. 关于复数代数形式的加法运算.

复数代数形式的加法运算法则是一种规定，帮助学生理解这个规定的合理性，是教学的关键所在. 可从两个方面理解复数代数形式的加法法则的合理性.

（1）复数问题实数化是处理复数问题的基本策略（这一策略源于复数的定义），因此复数的运算应转化为它们的实部与虚部之间的运算．又由于复数集以实数集为真子集，因此我们规定的加法运算，要保证在复数均为实数的情况下，与原有的实数加法法则一致．

（2）我们规定的加法运算要保证实数加法运算的交换律、结合律在复数集 $\mathbf{C}$ 中仍然成立．

4．关于“复数代数形式的乘法运算”．

（1）总结复数的加减法则，向学生明确：两个复数相加减就是把实部与实部、虚部与虚部分别相加减，即若将复数 $a+bi$ 与 $c+di$ 中的虚数单位 i 看作多项式中的 x，则复数的加减运算可按照多项式的加减运算的合并同类项法则进行．由此类比，向学生指明：复数的乘法可按与两个多项式相乘类似的办法进行，并注意把 i^2 换成 -1．

（2）复数代数形式的乘法法则，也是一种规定．通过操作演算，让学生掌握复数乘法的方法，而不必专门记忆公式．

（3）可向学生指明，复数的乘法运算满足乘法交换律、结合律及乘法对加法的分配律．

5．关于复数代数形式的除法法则．

（1）引导学生类比初中分子有理化过程：将含根号的分母 $c+d\sqrt{D}$ 乘以 $c-d\sqrt{D}$ 化为有理式 c^2-d^2D，自主探索在两复数作商情况下，如何将分母实数化，适时引入共轭复数概念，明确公式 $(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$．

（2）通过操作演算让学生掌握复数除法的“分母实数化”方法，而不必专门记忆复数除法法则．

（3）类比实数的除法是乘法的逆运算，可规定复数的除法是乘法的逆运算，即把满足 $(c+di)(x+yi)=a+bi(c+di\neq0)$ 的复数 $x+yi$ 叫做 $a+bi$ 除以复数 $c+di$ 的商，用待定系数法求出实数 x，y，为后面教学复数开方埋下伏笔．

6．求负数 a 的平方根及实系数一元二次方程求根公式．

求负数 a 的平方根关键在于利用 i 的性质及合理的推理验证 $(\pm\sqrt{-a}\,i)^2=a$，由此在复数范围内顺利解决实系数一元二次方程求根问题，尤其是 $\Delta<0$ 时，有了求根公式 $\dfrac{-b\pm\sqrt{-\Delta}\,i}{2a}$．

7．复数 $a+bi$（a，$b\in\mathbf{R}$）开平方问题．

应将复数 $a+bi$ 开平方问题归结为用待定系数法求解．

设 $x+yi(x,y\in\mathbf{R})$ 满足 $(x+yi)^2=a+bi$，通过列方程组求解待定实数 x，y．

教学建议

1．由复数的定义，复数的运算类似于多项式的运算法则，故在解决复数问题时可仿照多项式的运算进行运算，在教学中应注意复数运算与实数运算之间的联系，运用化归思想、待定系数法思想解决问题，并向学生指明实系数一元二次方程解的问题在复数范围内得到

彻底、完善的解决.

2. 在复数代数形式的四则运算的教学中，要“淡化烦琐的计算和技巧训练”，将教学重点放在帮助学生理解理论，体验复数问题实数化的过程与方法上.

例题解析

例 1　已知复数 $z_1=1+2\mathrm{i}$ 与 $z_2=4-3\mathrm{i}$. 试求它们的和 z_1+z_2，差 z_1-z_2，积 z_1z_2.

分析　总结复数的加减法则，向学生明确：两个复数相加减就是把实部与实部、虚部与虚部分别相加减，即若将复数 $a+b\mathrm{i}$ 与 $c+d\mathrm{i}$ 中的虚数单位 i 看作多项式中的 x，则复数的加减运算可按照多项式的加减运算的合并同类项法则进行. 由此类比，向学生指明：复数的乘法可按与两个多项式相乘类似的办法进行，并注意把 i^2 换成 -1.

例 2（补充）　解方程 $3+z=5+4\mathrm{i}$.

解法 1　令 $z=x+y\mathrm{i}$（x，$y\in\mathbf{R}$），则方程变形为 $3+x+y\mathrm{i}=5+4\mathrm{i}$.

$\therefore\begin{cases}3+x=5,\\ y=4,\end{cases}$　即$\begin{cases}x=2,\\ y=4.\end{cases}$　$\therefore$　$z=2+4\mathrm{i}$.

解法 2　$z=5+4\mathrm{i}-3=2+4\mathrm{i}$.

体验复数问题转化为实数问题的重要思想方法.

例 3　已知复数 $z_1=1+2\mathrm{i}$，$z_2=4-3\mathrm{i}$. 求 z_2^{-1} 及 $\dfrac{z_1}{z_2}$.

分析　通过操作演算让学生掌握复数除法的“分母实数化”方法，而不必专门记忆复数除法法则.

例 4（补充）　解方程 $(1+\mathrm{i})z=3-\mathrm{i}$.

解法 1　令 $z=x+y\mathrm{i}$，x，$y\in\mathbf{R}$，则 $x-y+(x+y)\mathrm{i}=3-\mathrm{i}$.

$\therefore\begin{cases}x-y=3,\\ x+y=-1,\end{cases}$　即$\begin{cases}x=1,\\ y=-2.\end{cases}$　$\therefore$　$z=1-2\mathrm{i}$.

解法 2　由 $(1+\mathrm{i})z=3-\mathrm{i}$ 得 $z=\dfrac{3-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{(3-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=1-2\mathrm{i}$.

本题的解法体现了化归思想，解法 2 重在运用除法为乘法的逆运算这一概念.

例 5　在复数范围内解下列方程：

（1）$x^2=-3$；　　　　（2）$x^2=\mathrm{i}$.

分析　（1）求负数 a 的平方根可直接用公式 $\pm\sqrt{-a}\,\mathrm{i}$.

（2）求其他复数的平方根可通过设 $x=a+b\mathrm{i}$（a，$b\in\mathbf{R}$），通过复数相等的充要条件，利用待定系数法求解.

例 6　在复数范围内解一元二次方程 $x^2+x+1=0$.

分析　求实系数一元二次方程根的问题，关键先验证系数是否都为实数，再确定 $\Delta=b^2-4ac$ 的符号，代入相关公式求根.

7.4 复数的几何表示

教材线索

本节首先回顾了实数的几何表示法，由此得到启发，联想到用平面上的点和向量来表示复数，即复数 $a+b\mathrm{i}$（a，$b\in\mathbf{R}$）可以用平面上的点 $Z(a,b)$表示，也可以用向量$\overrightarrow{OZ}=(a,b)$表示.其次通过向量模的定义给出了复数 z 的模$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$及共轭复数与复数模之间的关系：$z\bar{z}=|z|^2=a^2+b^2$，最后利用向量加法（减法）的几何意义引入复数的加（减）法几何意义.

教学目标

（一）知识与技能

1. 了解复平面的概念，复数 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$两种几何表示：点 $Z(a,b)$及向量$\overrightarrow{OZ}$.

2. 了解复数的加、减运算的几何意义.

3. 了解共轭复数及复数模的定义，并会简单运用.

（二）过程与方法

通过对复数几何表示加法、减法运算的几何意义的学习认识过程，让学生感受形与数之间的和谐与统一，体会思考问题的方式和方法，提高实践动手操作能力.

（三）情感、态度与价值观

通过对复数的代数语言与几何语言相互转换的情境学习，体会解决复数问题的手段，培养学生勇于创新的精神.

教材分析

1. 重点：

（1）复数的几何表示：点 $Z(a,b)$，向量$\overrightarrow{OZ}$.

（2）复数加（减）法运算的几何意义. 它们是复数与几何衔接的桥梁.

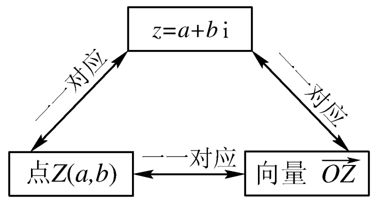
2. 难点：

复平面概念的建立，加（减）法运算的几何意义是本节的难点.

3. 明确复平面的概念.

4. 在本节教学过程中应注重向学生渗透类比、联想的思想方法，启发学生从向量知识、向量角度出发，研究复数集 $\mathbf{C}$ 与复平面内所有点，所有以点 O 为始点，点 Z 为终点的

向量$\overrightarrow{OZ}$间建立了如下对应关系（由此获得复数的几何表示、向量表示）：



这些知识都为数形结合解决有关复数问题提供了良好的条件.

5. 用数形结合的思想方法，强化对复数几何意义的认识.

在复平面内，实数与实轴上的点一一对应，纯虚数与虚轴上的点（原点除外）一一对应，非纯虚数的虚数与象限内的点一一对应，可通过一组练习题来强化这一认识.

教学建议

1. 在本节教学过程中，要向学生呈现本套教材的最大特色之一，以向量为主线，把代数、几何联系起来，把向量引进复数体系，通过引入复数的向量表示，再由向量加减法的几何意义顺理成章地获得复数加减法的运算的几何意义. 该节有一定难度，新课本通过类比等思想方法入手，有效降低了难度，使得教材内容简单易学，减轻了学生的学习负担，优化了课程的知识结构. 这种数形结合的思想丰富了我们研究问题和解决问题的范围和手段. 复数作为一种新的数学语言，也为我们今后用代数方法解决几何问题提供了可能.

2. 在向量和几何变换的基础上继续研究复数的运算和应用，不仅更为直观易懂，而且更有利于体验数学的思维特色，提高数学素养.

例题解析

例 1 （1）在复平面上画出分别表示以下复数 z_1，z_2，z_3，z_4 的点 P_1，P_2，P_3，P_4.

$$z_1=1，z_2=\mathrm{i}，z_3=4+3\mathrm{i}，z_4=4-3\mathrm{i}.$$

（2）求出表示以上复数的向量$\overrightarrow{OP_1}$，$\overrightarrow{OP_2}$，$\overrightarrow{OP_3}$，$\overrightarrow{OP_4}$的模. 试推广你的结论.

（3）表示以上复数的点中是否有两个点关于实轴对称？它们所代表的复数有什么关系？

分析 通过本例应让学生熟练掌握复数的两种几何表示，并由此得出模的概念及共轭复数的概念.

例 2 已知 $OACB$ 是复平面上的平行四边形，O 是原点，A，B 分别表示复数 $3+\mathrm{i}$，$2+4\mathrm{i}$，M 是 OC，AB 的交点，如图 7-1. 求 C，M 表示的复数.

分析 求点 C，M 表示的复数应转化为求向量$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OM}$对应的复数且$\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OC}$，由加法几何意义知$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.

∴ $\overrightarrow{OC}$对应的复数为 $5+5\mathrm{i}$，$\overrightarrow{OM}$对应的复数为$\dfrac{5}{2}+\dfrac{5}{2}\mathrm{i}$.

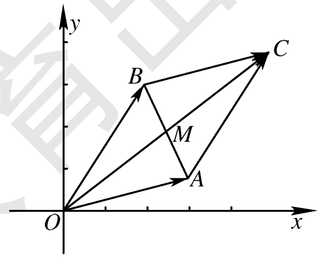


图 7-1

教材习题参考解答

P. 97　练习

1.（2）（3）可以进行加、减、乘、除运算.

2. 实部分别是-1，$\frac{\sqrt{2}}{2}$，2，0；虚部分别是1，$\frac{\sqrt{2}}{2}$，$-\sqrt{2}$，$-\frac{1}{2}$.

3.（1）$\begin{cases} x=-\frac{2}{3}, \\ y=-\frac{4}{3}; \end{cases}$　（2）$\begin{cases} x=-8, \\ y=3 \end{cases}$或$\begin{cases} x=3, \\ y=-8. \end{cases}$

习题 1

1.（D）　2.（A）　3.（A）

4.（1）$\begin{cases} a=2, \\ b=-1; \end{cases}$（2）$\begin{cases} a=1, \\ b=3 \end{cases}$或$\begin{cases} a=-1, \\ b=-3. \end{cases}$

5.（1）$m=5$；　（2）$m=3$或$m=-2$；　（3）$m\neq 5$且$m\neq -3$.

P. 102　练习

1.（1）$3+4\mathrm{i}$；　（2）-4；　（3）10；　（4）i.

2. $m=\pm\sqrt{2}$.

3.（1）$x=-1+\sqrt{2}\,\mathrm{i}$或$x=-1-\sqrt{2}\,\mathrm{i}$；　（2）$x=2+\mathrm{i}$或$x=2-\mathrm{i}$.

习题 2

1. $z^2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，$z^3=1$，$z^2+z+1=0$.　2. $a^4=-4$.　3. $x=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{7}}{4}\mathrm{i}$或$x=\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{7}}{4}\mathrm{i}$.

4.（1）-1，$-\mathrm{i}$，1，i.　（2）$\mathrm{i}^{4k}=1$，$\mathrm{i}^{4k+1}=\mathrm{i}$，$\mathrm{i}^{4k+2}=-1$，$\mathrm{i}^{4k+3}=-\mathrm{i}$，（$k\in\mathbf{N}$）$\mathrm{i}^{100}=1$.
（3）0.

5.（1）$z=1-\mathrm{i}$；　（2）$z=\frac{1}{2}+\frac{7}{2}\mathrm{i}$.

P. 108　练习

1. 图略，$\sqrt{10}$，$2\sqrt{5}$，5，6，$\frac{\sqrt{61}}{2}$.

2. $a=0$.　3. $-\sqrt{3}<k<-\sqrt{2}$或$\sqrt{2}<k<\sqrt{3}$.

习题 3

1. 四.　2. 以原点为圆心，分别以 2，5 为半径的圆围成的圆环（含边界）.

3.（1）k 值不存在；（2）$k=5$.

4. 证明：设 $z=x+y\mathrm{i}$（x，$y\in\mathbf{R}$），（1）$z+\bar{z}=x+y\mathrm{i}+(x-y\mathrm{i})=2x\in\mathbf{R}$；

（2）若 z 是实数，则 $y=0$，$\bar{z}=x=z$. 又若 $\bar{z}=z$，则 $x+y\mathrm{i}=x-y\mathrm{i}$，所以 $y=0$，故 $z=x\in\mathbf{R}$，所以 z 是实数$\Leftrightarrow\bar{z}=z$

5. 根据向量的三角形法则及三角形三边长的性质证明.

复习题七

1.（1）（2）.

2. $\dfrac{\pi}{2}$或$\dfrac{3\pi}{2}$.

3. 1.

4. 2i.

5.（1）$z=1-\mathrm{i}$；　（2）$z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{7}}{2}\mathrm{i}$ 或 $z=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{7}}{2}\mathrm{i}$；　（3）$z=3+4\mathrm{i}$；

（4）$z=4+3\mathrm{i}$ 或 $z=-4-3\mathrm{i}$.

6. $|z_1-z_2|=\sqrt{2}$.

7. $|z-\mathrm{i}|$的最大值是 3.

8. $x=1$ 或 $x=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ 或 $x=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

9. 这些点组成边长为$\sqrt{3}$的正三角形.

10. 略.

11. $\alpha=2k\pi$ 或 $\alpha=\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi$ 或 $\alpha=\dfrac{4\pi}{3}+2k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$）.

$x_1=\cos 2k\pi+\mathrm{i}\sin 2k\pi=1$ 或 $x_2=\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi\right)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ 或 $x_3=\cos\left(\dfrac{4\pi}{3}+2k\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{4\pi}{3}+2k\pi\right)=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

这些根的对应点组成边长为$\sqrt{3}$的正三角形.