编 写 说 明

本书是《普通高中课程标准实验教科书·数学选修 2－2（理科）》的教师教学用书. 编写时按教材分章、节安排，每章首先阐述了该章的教学目标、教材说明、课时安排建议、教学建议、评价建议，然后按教材分节编写，每节内容包括教材线索、教学目标、教材分析、教学建议、例题解析、相关链接. 在每章的最后给出教材中练习、习题和复习题的参考解答.

编写此书的目的是为了帮助教师更好地把握教材，包括教材线索、教学目标、教材分析、内容结构及教学中应予以关注的重点和难点，所提教学建议及例题解析仅供教师在教学过程中参考. 在相关链接中所提供的短文或例题是编者精心编写并与该章、节相关的内容，旨在扩大教师的知识视野，使教师用较高的观点把握教材，不要求学生掌握.

希望本书能成为教师使用教材的好帮手，恳请广大教师在使用过程中提出宝贵意见和建议. 谢谢!

目　　录

第 4 章　导数及其应用

一、教学目标

1. 通过对大量实例的分析，经历由平均变化率到瞬时变化率的过程，了解导数概念的实际背景，知道瞬时变化率就是导数，体会导数的思想及其内涵.

2. 通过函数图象直观地理解导数的几何意义.

3. 能根据导数定义求函数 $y=c$，$y=x$，$y=x^2$，$y=x^3$，$y=\frac{1}{x}$，$y=\sqrt{x}$ 的导数.

4. 能利用给出的基本初等函数的导数公式和导数的四则运算法则求简单函数的导数，能求简单的复合函数（仅限于形如 $f(ax+b)$）的导数.

5. 会使用导数公式表.

6. 结合实例，借助几何直观探索并了解函数的单调性与导数的关系；能利用导数研究函数的单调性，会求不超过三次的多项式函数的单调区间.

7. 结合函数的图象，了解函数在某点取得极值的必要条件和充分条件；会用导数求不超过三次的多项式函数的极大值、极小值，以及闭区间上不超过三次的多项式函数最大值、最小值；体会导数方法在研究函数性质中的一般性和有效性.

8. 通过使利润最大、用料最省、效率最高等优化问题，体会导数在解决实际问题中的作用.

9. 通过实例（如求曲边梯形的面积、变力做功等），从问题情境中了解定积分的实际背景；借助几何直观体会定积分的基本思想，初步了解定积分的概念.

10. 通过实例（如变速运动物体在某段时间内的速度与路程的关系），直观了解微积分基本定理的含义.

11. 收集有关微积分创立的时代背景和有关人物的资料，并进行交流；体会微积分的建立在人类文化发展中的意义和价值.

二、教材说明

微积分的创立是数学发展中的里程碑，它的发展和广泛应用开创了向近代数学过渡的新时期，为研究变量和函数提供了重要的方法和手段. 导数概念是微积分的核心概念之一，它有极其丰富的实际背景和广泛的应用. 在本章中，学生将通过大量实例，经历由平均变化率到瞬时变化率刻画现实问题的过程，理解导数概念，了解导数在研究函数的单调性、极值等

性质中的作用，初步了解定积分的概念，为以后进一步学习微积分打下基础. 通过本章的学习，学生将体会导数的思想及其丰富内涵，感受导数在解决实际问题中的作用，了解微积分的文化价值.

本章的重点是了解导数概念的实际背景和几何意义，掌握一些函数的求导方法，利用导数研究函数的单调性，会求不超过三次的多项式函数的极值和在闭区间上的最值，并用导数解决一些优化问题. 难点是导数概念，导数与函数单调性的关系，优化问题的数学建模，以及定积分的概念.

本章教材的主要特点是：

1. 突出导数概念产生的实际背景.

教材通过大量实例，让学生经历由平均变化率到瞬时变化率刻画现实问题的过程，从中理解导数概念. 教材中没有出现函数极限的形式化定义，并且默认基本初等函数在其定义域内处处可导，这样处理教材，既回避了极限理论的难点，又让学生体会到导数的思想及其内涵，掌握微积分的基本方法.

2. 突出导数的工具作用，增强导数的应用意识.

历史上，微积分就是伴随着物理学和数学的研究需要应运而生的，用微积分的方法，成千上万的问题被一举突破. 教材在介绍了导数的概念和运算后，着重探讨导数在研究函数的单调性、极值、最值中的工具作用，并进一步将导数应用于解决生活中的优化问题，如利润最大、用料最省、效率最高等问题，反映出数学的应用价值.

3. 注重数学思想方法的渗透.

本章教材包含着丰富的数学思想方法，例如从具体到抽象、从有限到无限的转化思想，函数的思想，数形结合的思想等等，通过这些数学思想方法的渗透，提高学生的数学思维品质，有助于学生对客观事物中隐含的数学模式进行思考和做出判断，形成理性思维.

4. 本章注重数学与文化的联系.

微积分的创立是人类科学文化史上的一件大事，是数学发展中的一座里程碑，它的发展与应用标志着近代数学时期的到来. 恩格斯认为，微积分的发现是人类精神的伟大胜利. 教材粗略地再现了微积分发现、发展的历史进程，有助于学生了解数学对推动社会发展的作用，了解数学的科学思想体系和美学价值，了解数学家的创新精神，逐步形成正确的数学观.

三、课时安排建议

本章教学时间约需 **24** 课时，具体分配如下（仅供参考）：

4.1　导数概念

4.1.1　问题探索——求自由落体的瞬时速度	1 课时
4.1.2　问题探索——求作抛物线的切线	1 课时
4.1.3　导数的概念和几何意义	2 课时

4.2 导数的运算

4.2.1	几个幂函数的导数	1课时
4.2.2	一些初等函数的导数表	1课时
4.2.3	导数的运算法则	2课时

4.3 导数在研究函数中的应用

4.3.1	利用导数研究函数的单调性	2课时
4.3.2	函数的极大值和极小值	1课时
4.3.3	三次函数的性质：单调区间和极值	2课时

4.4 生活中的优化问题举例 2课时

4.5 定积分与微积分基本定理

4.5.1	曲边梯形的面积	1课时
4.5.2	计算变力所做的功	1课时
4.5.3	定积分的概念	2课时
4.5.4	微积分基本定理	2课时

小结与复习 3课时

四、教学建议

1. 对导数概念的教学应注意从实例出发，并且只要求学生“了解”导数的概念. 教材通过运动物体瞬时速度概念的建立及计算方法得出：运动物体在任意时刻 t 的瞬时速度 $v(t)$ 就是平均速度 $v(t, d)=\frac{f(t+d)-f(t)}{d}$ 在 d 趋于 0 时的极限. 又用割线的斜率 $k(u, d)=\frac{f(u+d)-f(u)}{d}$ 在 d 趋于 0 时的极限 $k(u)$ 作为曲线 $y=f(x)$ 在点 $(u, f(u))$ 处的切线的斜率. 由上述实例抽象出导数的概念：差商（平均变化率）$\frac{f(x_0+d)-f(x_0)}{d}$ 在 d 趋于 0 时的极限称为函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数，记作 $f'(x_0)$. 教材没有出现导数和极限的精确定义，而是通过实例让学生体会极限的思想，了解导数的实质：导数即函数的瞬时变化率.

导数的几何意义是：函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的导数值 $f'(x_0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率. 要区别“在点 P 处的切线”与“过点 P 的切线”. 在点 P 处的切线，P 点是切点，若切点 P 坐标为 (x_0, y_0)，则切线方程为：$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$. 过点 P 的切线，P 点可以是切点，也可以不是切点. 光滑曲线在其上一点处的切线只有一条，而过其上一点的切线可以不止一条. 曲线的切线与曲线可以有不止一个公共点.

2. 导数的运算重点在于熟记教材给出的基本初等函数的导数公式，掌握导数的四则运算法则及形如 $f(ax+b)$ 的简单复合函数的求导. 几个幂函数的导数的计算只是为了复习导数的定义，它们都已包含在公式 $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$ 中，不必花费太多的时间. 重点应放在学

生较难掌握的求导法则：$(f(x)g(x))'=f(x)g'(x)+g(x)f'(x)$，$\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)'=\frac{f(x)g'(x)-g(x)f'(x)}{f^2(x)}$及$(f(ax+b))'=af'(ax+b)$. 以上各个导数公式及求导法则的推导都涉及函数极限的运算，不要求学生掌握. 可让学生适当多做一些简单函数的求导题，尤其是如 $y=x\tan(\pi x-1)$，$y=\frac{\sin(1+2x)}{x}$一类综合应用求导公式和法则的函数的求导问题，使学生在应用中熟记求导公式与法则.

3. 导数在研究函数中的应用突出显示了导数的工具作用. 教学时应把重点放在导数符号与函数增减性的关系和函数极值的求法，特别是利用导数求三次函数的单调区间和极值上.

首先应启发学生观察同一坐标系中函数 $f(x)$ 的图象与导函数 $f'(x)$的图象之间的关系，从中发现、归纳出导数符号与函数增减性的关系. 教材用导数取代差分来解释利用导数的正负判断函数增减性的法则，这是因为必修中是用差分来定义函数的增减性. 如果用传统教材中单调性的定义，如对某一区间(a, b)内的任意两点 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$，都有$f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 是 (a, b) 内的增函数，可以这样解释：记 $h=x_2-x_1$，因为$x_1<x_2$，所以 $h>0$，“$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}>0$”与“当 $x_1<x_2$，都有$f(x_1)<f(x_2)$”是等价的. 不过差分>0并不能保证导数 $f'(x)>0$（只能推出导数 $f'(x)\geqslant 0$）. 我们的结论是：在某个区间内，若 $f'(x)>0$，则函数递增；若 $f'(x)<0$，则函数递减.

4. 函数的极值是函数的局部性质，函数的最值是函数的整体性质. 教材用函数 $f(x)$ 在某个开区间 (u, v) 上的最大值（最小值）来定义 $f(x)$ 的一个极大值（极小值），这个极大值（极小值）只是 $f(x)$ 在含极值点的区间 (u, v) 上的最大值（最小值），并不一定就是 $f(x)$ 在整个定义域上的最大值（最小值）. 同时，极大值不一定大于极小值，极小值也不一定小于极大值. 这些都可以让学生通过观察函数的图象得到直观的认识.

按照函数极值的定义，若在区间 (u, c) 上 $f'(x)>0$，在区间 (c, v) 上 $f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在区间 $(u, c]$ 上递增，在区间 $[c, v)$ 上递减，从而 $f(x)$ 在 $x=c$ 处取得极大值. 反之，若在区间 (u, c) 上 $f'(x)<0$，在区间 (c, v) 上 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在区间 $(u, c]$ 上递减，在区间 $[c, v)$ 上递增，从而 $f(x)$ 在 $x=c$ 处取得极小值. 由导数的正负确定函数的增减性，又由函数的增减变化确定函数的极值和极值点，这就是用导数判断函数极值的方法.

基本初等函数在其定义域内都是连续的、可导的. 导数的符号在极值点左右从正变负或从负变正必定要经过导数等于0的时刻，因此在极值点 $x=c$ 处必有 $f'(c)=0$. 但是 $f'(c)=0$ 只是 $x=c$ 是函数极值点的必要条件，而不是充分条件，还要看导数在 $x=c$ 的两侧是否变号.

5. 特别注重用导数研究三次函数的性质.

三次函数分成两类：

一类导函数非负（非正），即导函数的 $\Delta\leqslant 0$，相应的三次函数在 **R** 上单调递增（递减），没有极值点，图象与 x 轴只有一个交点（三次方程只有一个解）.

另一类导函数的 $\Delta>0$，相应的三次函数有两个极值点（一个极大值，一个极小值），三个单调区间（两增一减，或两减一增）. 当极大值 <0 或极小值 >0 时，图象与 x 轴只有一个交点（三次方程只有一个解）；当极大值 $=0$ 或极小值 $=0$ 时，图象与 x 轴有两个交点（三次方程有两个解）；当极大值 >0 且极小值 <0 时，图象与 x 轴有三个交点（三次方程有三个解）.

如图 4－1 所示.

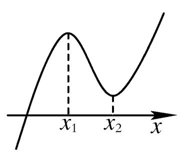
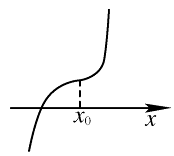
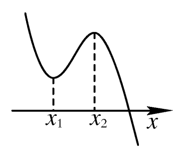
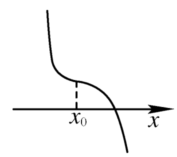
三次函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$ 的图象（$\Delta=4(b^2-3ac)$）			
$a>0$		$a<0$	
$\Delta>0$	$\Delta\leqslant 0$	$\Delta>0$	$\Delta\leqslant 0$
			

图 4－1

研究三次函数的性质一定要结合其导函数（二次函数）的图象，找出导函数的零点及正值区间和负值区间，从而确定三次函数的单调区间和极值点、极值，进而大致画出三次函数的图象，这样对三次函数的性质就认识得十分清楚了.

三次函数在其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 上没有最大值和最小值. 如果有极值，则只有一个极大值和一个极小值，并且极大值总是大于极小值. 在确定的闭区间 $[a, b]$ 上，三次函数一定有最大值和最小值. 只要先求出三次函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内的所有极值（极大值或极小值），再与两个端点值 $f(a)$，$f(b)$ 比较，其中最大的就是最大值，最小的就是最小值.

6. “生活中的优化问题举例”一节是导数的具体应用问题，教材通过使利润最大、用料最省、效率最高等优化问题的解决，让学生体会导数在解决实际问题中的工具作用.

解决此类优化问题，首先要指导学生认真读题，正确理解题意，找出题目中出现的各个已知量和未知量，分析它们之间的函数关系，进而写出目标函数. 这个过程体现了函数和方程的思想以及数学建模思想. 写出正确的目标函数后，实际问题转化为数学问题：求函数的最大值或最小值. 相比以前所用的求最值的特殊方法，如判别式法、均值不等式法、线性规划法、二次函数配方法等，导数是更有力的工具，是更具普遍性的通性通法.

正如以上所说，求函数在一个区间上的最值，要先求出函数在这个区间内的所有极值，再与端点处的函数值比较，从而确定函数的最大值或最小值. 如果函数在我们所讨论的区间（开或闭或半开半闭）内只有一个极值，那么极大值就是最大值，极小值就是最小值，此时最值不会在端点处取到.

求出目标函数的最值后，要回到实际问题中去，对我们得到的数学问题的结果作出实际意义的解释.

7. 定积分的概念是教学中的一个难点，《普通高中数学课程标准（实验）》（以下简称《课标》）只要求“初步了解定积分的概念”. 重点应通过求曲边梯形的面积、变力做功等实例，让学生从问题情景中了解定积分的实际背景，借助几何直观体会定积分的基本思想. 由于缺少极限的必要知识，不可能给定积分作出严格意义上的数学定义. 通过求曲边梯形面积等实例来了解定积分的概念，不但易于被学生接受，也可以让学生经历微积分发现、发展的历程，体会从具体到抽象、从有限到无限以及化整为零、化曲为直等数学思想方法.

教材 4.5.1 节中曲边梯形的面积 $S=\dfrac{3}{4}$ 的证明较为难懂. 其实只要证明曲线 $y=x^2$（$0\leqslant x\leqslant 1$）和 x 轴之间的曲边形的面积 $Q=\dfrac{1}{3}$. 仍然把区间 $[0,1]$ n 等分，记 $x_0=0$，$x_1=\dfrac{1}{n}$，$x_2=\dfrac{2}{n}$，$x_3=\dfrac{3}{n}$，…，$x_{n-1}=\dfrac{n-1}{n}$，$x_n=1$，则

$$\begin{aligned}Q(n)&=(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n-1}^2)d\\&=\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right]\cdot\frac{1}{n}\\&=[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2]\cdot\frac{1}{n^3}.\end{aligned}$$

利用 $(k+1)^3=k^3+3k^2+3k+1$，

得到 $3k^2=(k+1)^3-k^3-3k-1$，

所以

$$\begin{aligned}&3\cdot1^2=2^3-1^3-3\cdot1-1,\\&3\cdot2^2=3^3-2^3-3\cdot2-1,\\&3\cdot3^2=4^3-3^3-3\cdot3-1,\\&\cdots\cdots\\&3(n-1)^2=n^3-(n-1)^3-3(n-1)-1.\end{aligned}$$

将以上各式相加，得

$$3[1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2]=n^3-n-3[1+2+3+\cdots+(n-1)].$$

注意到

$$\begin{aligned}1+2+3+\cdots+(n-1)&=\frac{1}{2}[1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)+(n-1)+(n-2)+\cdots+1]\\&=\frac{1}{2}n(n-1),\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}3[1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2]&=n^3-n-\frac{3}{2}n(n-1)\\&=\frac{1}{2}(2n^3-3n^2+n),\end{aligned}$$

$$Q(n)=\frac{1}{6}\cdot\frac{2n^3-3n^2+n}{n^3}=\frac{1}{3}-\frac{3n-1}{6n^2},$$

$$\left|Q(n)-\frac{1}{3}\right|=\frac{3n-1}{6n^2}<\frac{1}{n}.$$

又因为 $|Q-Q(n)|<\frac{1}{n}$，所以 $\left|Q-\frac{1}{3}\right|<\frac{2}{n}$.

当 n 充分大时，$\frac{2}{n}$ 可以小于任何给定的正数，这表明 $\left|Q-\frac{1}{3}\right|$ 比任何一个正数都小，因此 $Q=\frac{1}{3}$，从而 $S=Q+1=\frac{4}{3}$.

8. 积分是微分的逆运算. 利用微积分基本定理计算函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，关键是找到一个函数 $F(x)$，满足 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微并且 $F'(x)=f(x)$，则 $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=F(b)-F(a)$. 这里 $f(x)$ 是 $F(x)$ 的导函数，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个“原函数”. 连续函数 $f(x)$ 的原函数不是唯一的，因为 $F(x)+c$（c 是常数）的导函数都是 $f(x)$，但这并不妨碍计算 $F(b)-F(a)$. 教材只要求会求幂函数的原函数，即若 $f(x)=x^n$，取 $F(x)=\frac{1}{n+1}x^{n+1}$，则 $F'(x)=x^n=f(x)$. 又根据导数的运算法则，多项式函数的原函数也会求了，例如 $f(x)=1+x^2$，取 $F(x)=x+\frac{1}{3}x^3$；$v(t)=a+bt$，取 $F(t)=at+\frac{1}{2}bt^2$；$f(x)=\frac{cmM}{x^2}$，取 $F(x)=-\frac{cmM}{x}$（c,m,M 是常数），等等.

五、评价建议

1. 重视对学生导数学习过程的评价.

导数一章蕴含着丰富的极限思想，从有限到无限的转化是学生数学学习中继从常量到变量之后的又一次飞跃.《课标》仅要求学生了解导数概念，体会导数的思想内涵，会求简单函数的导数，并将导数工具应用于研究一些简单函数（例如不超过三次的多项式函数）的性质，解决一些实际生活中的优化问题. 教材既没有介绍必要的极限知识，也没有给出精确的导数定义，更没有对导数理论作深入的研究，仅仅停留在“了解”、“体会”的层面. 因此评价既要注意学生对导数的基本运算、基本方法的掌握，更要重视对学生学习过程的评价，要考查学生能否从实际背景中抽象出导数、积分的初步概念，考查学生能否将导数作为工具应用于研究函数性质、解决实际问题.

2. 重视对学生学习能力的评价.

导数一章的学习将十分客观地反映出学生的学习能力，评价中要考查学生能否正确地了解导数的极限思想，理解导数的几何意义，能否自觉地运用导数工具研究函数的性质，能否把实际问题转化为数学问题后正确应用数学知识解决问题. 学生对极限思想的了解与体会、

对从有限到无限的思维方式的转换肯定表现出很大的差异，有一个长短不一的过程，因此评价中要注意肯定学生学习中的发展与进步、特点与优点.

3. 重视对学生学习方法的评价.

导数一章十分注意通过实例让学生了解导数的意义，教学时可以鼓励学生自主学习、合作学习，自己举出一些教材之外的例子，加深对于导数就是瞬时变化率的理解，例如物理中速度对时间的变化率就是加速度；回忆以前研究函数单调性、求函数最值的各种特殊方法并与导数方法比较，从中体会导数的作用. 对学生这种既有独立思考，又有合作探究的学习方法适时加以鼓励，努力让学生能在学习中得到成功的体验，促进学生学习能力的发展.

4.1 导数概念

4.1.1 问题探索——求自由落体的瞬时速度

教材线索

教材从伽利略发现自由落体的运动定律的例子入手，通过了解牛顿计算瞬时速度的思维方式，结合具体事例，向学生渗透了“由近似到精确”，“由有限到无限”的极限思想方法，并给出了瞬时速度的数学概念及其计算方法.

教学目标

（一）知识与技能

1. 能够求解变速运动物体的瞬时速度.

2. 初步了解导数的意义.

（二）过程与方法

1. 通过实例，了解瞬时速度与平均速度的辩证关系，体会用极限思想研究变量的思维方法.

2. 在学习过程中，培养学生思维的严谨性和语言表达能力.

（三）情感、态度与价值观

以学生为主体进行教学设计，让学生有机会参与创新、发现，真正成为学习的主体.

教材分析

1. 重点

(1) 瞬时速度的概念;

(2) 瞬时速度的计算方法.

2. 难点

(1) 用数学语言准确描述瞬时速度;

(2) 正确使用极限思想方法求解变速运动物体的瞬时速度;

(3) 对导数概念的初步了解.

3. 对“瞬时速度”概念的理解

我们在物理学中学习直线运动的速度时，曾涉及到瞬时速度的一些知识. 物理教材中首先指出，运动物体经过某一时刻（或某一位置）的速度，叫作瞬时速度，然后从实际测量角度，结合汽车速度计的使用，对瞬时速度做了说明.

为了让大家更好地理解瞬时速度，物理教材有如下的阐述：

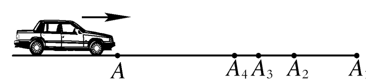


图 4-2

图 4-2 表示一辆做变速运动的汽车，我们要确定汽车经过 A 点时的瞬时速度. 从 A 点起取一小段位移 AA_1，求出汽车在这段位移上的平均速度，这个平均速度可以近似地表示汽车经过 A 点时的快慢程度. 从 A 点起所取的位移越小，比如取 AA_2，AA_3，AA_4 等，汽车在该段时间内的速度变化就越小，所得的平均速度就越能较精确地描述汽车经过 A 点的快慢程度. 当位移足够小（或时间足够短）时，测量仪器就已经分辨不出匀速运动与变速运动的差别，可以认为汽车在这段时间内运动是匀速的，所得的平均速度就等于汽车经过 A 点的瞬时速度了.

物理课上对瞬时速度只给出了直观的描述，有了极限的工具后，才能给瞬时速度以精确的定义. 本节是由物体在一段时间内运动的平均速度的极限来定义瞬时速度的.

4. 关于极限法

所谓极限法，是指用极限概念分析问题和解决问题的一种数学方法. 极限法的一般步骤可概括为：对于被考察的未知量，先设法构思一个与它有关的变量，确认这个变量通过无限过程的结果就是所求的未知量，最后用极限计算来得到所要的结果. 极限法不同于一般的代数方法，代数中的加、减、乘、除等运算都是由两个数来确定另一个数，而在极限法中则是由无限个数来确定一个数.

正如坐标法是解析几何的基本方法一样，极限法是微积分的基本方法，微积分中的一系列重要概念，如：函数的连续性，导数以及定积分等都是借助于极限法定义的. 如果要问“微积分是一门什么学科”，那么可以概括地说：“微积分是用极限法来研究函数的一门学科.”

教学建议

本节的难点是对导数概念的理解. 导数的概念比较抽象，其定义方法学生也不大熟悉. 而在高中阶段，没有必要在导数与微分概念的严谨性，知识的系统性上花过多的时间与精力. 所以在本小节的教学中，应结合大量的“非匀速直线运动物体的瞬时速度”的实际背景，从物理学方面入手，引导学生感受极限法思想，让学生掌握运用定义求解非匀速直线运动物体的瞬时速度，从而为后续学习中能够理解导数概念打好基础.

例题解析

例 运动员从 10 m 高台跳水时，从腾空到进入水面的过程中，不同时刻的速度是不同的. 设起跳 t s 后运动员相对于水面的高度为 $H(t)=-4.9t^2+6.5t+10$，用代数推导方法计算在 2 s 时运动员的速度（瞬时速度），再用数值计算列表观察检验计算的结果.

分析 首先，我们可以从物理学的角度来看瞬时速度，知道运动物体经过某一时刻（或某一位置）的速度，叫作瞬时速度. 那么，如何考虑这一时刻（或这一位置）的时间与位移呢？这在常量数学中显然是无能为力的. 为此，我们采用逼近的思想方法，先求第 2 s 末到第（$2+d$）s 末的平均速度$\overline{v_2}$，然后将其作为第 2 s 末的瞬时速度的近似值，随着 d 的缩小，近似值的精确度在提高（即第 2 s 末到第（$2+d$）s 末的时间间隔在缩小，也就是$\overline{v_2}$与第 2 s 末的瞬时速度的误差在缩小）. 当 d 趋于 0 时，这个误差也趋于 0. 所以，我们可以很自然地将$\overline{v_2}$的极限值作为第 2 s 末的瞬时速度. 这种方法学生初次接触，为了能让学生更好地理解，教学过程中要将“逼近”的过程展现给学生，如本题在求 2 s 左右的平均速度时，分别将时间间隔取为 0.1，0.01，0.001，0.000 1，0.000 01，并将结果列表. 这样做，一方面有利于比较，另一方面则让学生得到对极限法思想的直观感受. 同时教材中给出了求瞬时速度的书写格式，要求学生通过模仿练习掌握利用定义求解的基本格式.

相关链接

第二次数学危机

17 世纪由牛顿和莱布尼茨建立起来的微积分学，由于在自然科学中的广泛应用，揭示了许多自然现象，而被高度重视. 但在持续的一二百年内，这门科学却缺乏令人信服的严格的理论基础，存在着明显的逻辑矛盾. 例如：对于 $y=x^2$ 而言，根据牛顿的流数计算法，有：

$$y+\Delta y=(x+\Delta x)^2, \quad ①$$

$$x^2+\Delta y=x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2, \quad ②$$

$$\Delta y=2x\Delta x+(\Delta x)^2, \quad ③$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x+\Delta x, \quad ④$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x. \quad ⑤$$

在上面的推导过程中，从③到④，要求 Δx 不等于零，而从④到⑤，又要求 Δx 等于零.

正因为在无穷小量中存在着这种矛盾，才引起当时颇具影响的红衣大主教贝克莱对无穷小量的抨击. 1734 年贝克莱在其所著的一本书名为《分析学家》的小册子里说，Δx 为“逝去的鬼魂”. 意思是说，在微积分中有时把 Δx 作为零，有时又不为零，自相矛盾. 贝克莱的指责，在当时的数学界中引起混乱，这就是第二次数学危机的爆发.

在无穷小量的危机中，无穷小量顶住了各种形式的责难，以自己不可取代的应用优势发挥着巨大的作用. 经过了一个多世纪之后，最终在以零为极限的序列中找到了位置. 从 19 世纪下半叶开始，极限理论逐渐取代了无穷小量的方法，并且在分析基础理论中具有统治地位，这样自然而然地解决了第二次数学危机.

4.1.2 问题探索——求作抛物线的切线

教材线索

本小节从大家所熟悉的斜抛、平抛运动的轨迹入手，通过探求抛物线的切线的做法，结合具体事例，向学生渗透了“由近似到精确”，“由有限到无限”的极限思想方法，并给出了连续曲线在某一点处切线斜率的求法.

教学目标

（一）知识与技能

1. 了解过曲线上一点的切线与曲线割线之间的辩证关系.

2. 能够求解过曲线上一点切线的斜率.

（二）过程与方法

1. 借助超级画板，直观了解过曲线上一点切线的实际意义.

2. 通过实例，了解曲线的切线与割线的辩证关系，体会用极限思想研究变量的思维方法.

（三）情感、态度与价值观

1. 养成用联系变化的观点和应用数学的意识.

2. 培养自身的创新意识和不断探求新问题的能力.

教材分析

1. 重点

（1）曲线的切线的概念；

（2）过曲线上一点切线的斜率的计算方法.

2. 难点

（1）用数学语言准确描述曲线的切线的概念；

（2）正确使用极限思想方法求解过曲线上一点切线的斜率；

（3）对导数概念的初步了解.

3. 关于曲线的切线

在初中，我们学习过圆的切线：直线与圆有唯一公共点时，叫作直线与圆相切. 这时直线叫作圆的切线，唯一的公共点叫作切点.

圆是一种特殊的曲线，能否将圆的切线推广到一般曲线的切线：直线与曲线有唯一公共点时，直线叫作曲线过该点的切线？显然，这种推广是不妥的.

观察图 4－3 中的曲线 C：直线 l_1 虽然与曲线 C 有唯一公共点 M，但我们不能说直线 l_1 与曲线 C 相切；而直线 l_2 尽管与曲线 C 有不止一个公共点，但我们还是说直线 l_2 是曲线 C 在点 N 处的切线. 因此，必须重新寻求曲线切线的定义.

教材中是用割线的极限位置上的直线来定义切线的.

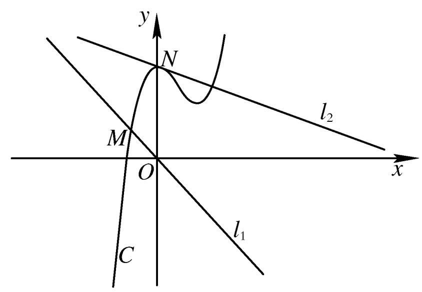


图 4－3

教学建议

曲线的切线的斜率及质点直线运动的瞬时速度分别是导数的几何意义及物理意义，如果在学好瞬时速度的基础上，能学好切线的定义，切线斜率的定义，就能为接下来学习导数定义打下良好的基础. 因此在教学过程中，应结合实例向学生讲清楚曲线的切线的概念及过曲线上一点切线的斜率的计算方法.

例题解析

例 1 求二次函数 $y=f(x)=ax^2+bx+c$（a, b, c 为常数，$a\neq 0$）图象上点 $P(u, f(u))$ 处切线的斜率.

分析 要求二次曲线在某一点处的切线的斜率，我们的学生可能首先会想到解析几何的方法：显然，本题中切线的斜率一定存在，故先用直线的点斜式方程设所求切线的方程为 $y-f(u)=k(x-u)$，再与二次曲线的方程联立，消元，进而利用判别式求出 k 值. 对于二次曲线而言，这种方法是可行的. 但是对于其他函数，如 $y=\sin x$，$y=x^3+2x-8$ 等，这种方法就行不通了. 因此，通过本题，我们介绍了一种求切线斜率的更为普遍的方法——“极限法”. 其做法类似于瞬时速度的求法，先在点 P 附近任意取一点 $Q(u+d, f(u+d))$，对于直线 PQ 的斜率——利用解析几何中过两点的直线的斜率公式可以求出. 接着，让 d 趋

近于0，则点Q趋近于点P，直线PQ的斜率与曲线在点P处的切线的斜率之间的误差也趋近于0. 这样，我们就可以很自然地将直线PQ的斜率的极限值作为曲线在点P处的切线的斜率. 本题如果能够利用超级画板将直线由割线向切线的转化过程演示出来，效果会更好.

例2 初速大小为v（m/s）的炮弹，如果发射方向和地面所成的角为θ，则炮弹所经过的曲线在不计空气阻力时为抛物线，以炮弹到发射点的水平距离为自变量x（m），炮弹到发射点的垂直距离y（m）可以看成是x的函数，其表达式为$y=f(x)=x\tan\theta-\dfrac{gx^2}{2v^2\cos^2\theta}$，其中$g=9.8\ \text{m/s}^2$，是重力加速度. 根据例1的结果，求$f(x)$的曲线上任一点$(x,f(x))$处切线的斜率.

分析 本题是例1的实际应用问题. 我们可以将函数$y=f(x)=x\tan\theta-\dfrac{gx^2}{2v^2\cos^2\theta}$看作是二次项系数为$-\dfrac{g}{2v^2\cos^2\theta}$，一次项系数为$\tan\theta$的二次函数，利用例1的结果，很容易得到答案.

相关链接

殊途同归
——抛物线切线和运动质点速度有何异同

中学平面几何熟知的一个事实：圆周的切线是与圆周仅相交于一点的直线P_0T（如图4－4）.

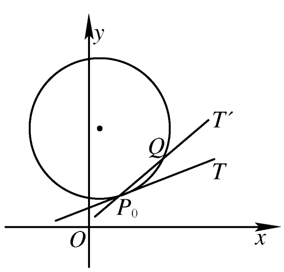


图4－4

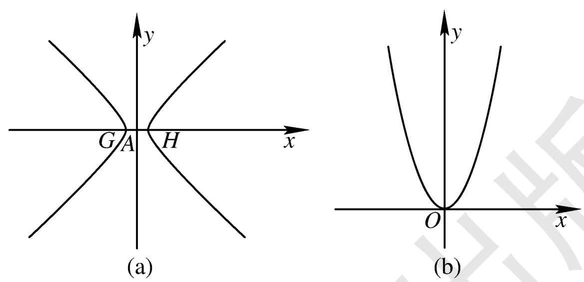


图4－5

但是，对其他曲线，例如：双曲线、抛物线（如图4－5）是不是也有切线？如果有，那么抛物线的“切线”定义是否也是“与抛物线仅相交于一点的直线”？显然不行！在图4－5（b）中可发现，点O在抛物线上，有两条直线（Ox轴，Oy轴）都与抛物线仅有一个公共点，但直觉告诉我们Oy轴不是切线，可为什么它不是切线呢？

再回到圆周情形，进一步研究发现：圆周上过点P_0的切线P_0T可以看成是过点P_0的割线P_0Q当点Q沿圆周移动到点P_0时该割线的最终位置，也就是说，当$Q\to P_0$时，割线

P_0Q 的极限位置. 人们把这个处于极限位置的直线称为曲线在点 P_0 的切线，而把切线的斜率称为导数.

1684 年，莱布尼茨在《教师学报》上第一次公开发表了关于微积分的论文《一种求极大与极小和求切线的新方法》，它也适用于分式和无理量，以及这种新方法的奇妙类型的计算"，文中叙述了微分学的基本原理. 此后，经过许许多多数学家的努力，特别是在极限理论建立后，它使我们得到了"导数"的定义.

设函数 $y=f(x)$的图象如图 4－6 所示，点 P_0 是曲线 l 上取定的一点，假设它的坐标为 $(x_0, f(x_0))$. 在曲线 l 上再任取一点 $Q(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$. 由平面解析几何知识，割线 P_0Q 的斜率为 $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{x_0+\Delta x-x_0}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$，$Q\to P_0$，即 $\Delta x\to 0$ 时，我们称极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 为 $f(x)$在 x_0 点的导数， 记为 $f'(x)$. 过点 P_0 以导数 $f'(x_0)$为斜率的直线就定义为曲线 l 在点 P_0 处的切线.

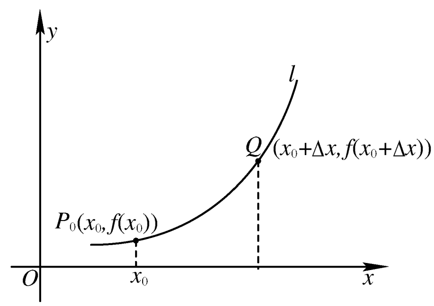


图 4－6

令人惊讶的是，物理学家牛顿也是微积分的创始人.牛顿是英国物理学家、天文学家、数学家.他幼年家境贫寒，学习成绩也比较差.直到 12 岁后开始发奋图强，学习意志渐强，于 1661 年以优异成绩考入剑桥大学.在那里，牛顿受到良好的数学和物理教育.1665 年，年仅 22 岁的牛顿就发现了二项式定理，并在当年的手稿中就有了"流数术"的记载.牛顿认为：线是点运动的结果，角是它的边旋转的结果，体是表面运动的结果；变量是运动着的点，叫流动量，运动的速度叫流数，流数是流动量对时间的导数.牛顿用路程的改变量 Δs 与时间的改变量 Δt 的比 $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ 表示物体运动的平均速度，令 Δt 无限逼近于 0，就得到该物体的瞬时速度，并由此建立了导数的概念.

曲线切线的斜率与运动质点的瞬时速度有着惊人的相似之处：曲线切线的斜率是 $f(x)$ 关于 x 的导数，运动质点的速度是 $s(t)$关于 t 的导数.事实上，还有许许多多自然现象可以归结为求导数问题，如：化学实验时测定溶液的沉淀情况，医学中化验人体的血液沉淀，天气预报时台风移动的快慢……

牛顿和莱布尼茨，这两位公认的、并称为微积分学创始人的科学家，从不同的出发点创建了微积分.前者从力学的角度，研究速度、加速度和变化率；后者从几何的角度，研究曲线的切线和曲边梯形的面积，分别独立地得出了导数、积分的概念和运算法则，并分别独立地证明了求导数和求积分是互逆的两种运算.至此，微积分成为一门独立的学科展现在科学家的面前，并十分成功地应用到天文、力学、物理和地质等学科上，大大推动了整个自然科学的发展.微积分则完成了它发展的第一阶段.

4.1.3　导数的概念和几何意义

教材线索

本小节在讲述了曲线的切线斜率及非匀速直线运动物体的瞬时速度的求法的基础上，得到了导数的定义，并由导数定义归纳出按定义求导数的方法.

教学目标

(一)知识与技能

1. 了解导数概念的实际背景.

2. 通过函数图象直观了解导数的几何意义.

(二)过程与方法

1. 通过对大量实例的分析，经历由平均变化率到瞬时变化率的过程，了解导数概念的实际背景，知道瞬时变化率就是导数，体会导数的思想及其内涵.

2. 通过练习，掌握用定义法求函数的导数的一般步骤，并能利用函数的导数知识解决一些应用性问题.

(三)情感、态度与价值观

通过"极限法"的学习，提高数学素质，增强分析问题和解决问题的能力，能认识事物之间的相互联系，会用联系的观点看问题.

教材分析

1. 重点

导数的定义与求导的方法.

2. 难点

对导数概念的理解.

3. 对导数概念的理解

导数是研究在点 x_0 处及其附近函数的改变量 Δy 与自变量的改变量 Δx 之比的极限，它是一个局部性的概念，如果当 $\Delta x\to 0$ 时，$\frac{\Delta y}{\Delta x}\to a$(常数)，函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处就有导数，否则，就没有导数.

从导数的定义可以看出：导数是函数的"局部"性质，即函数在一点的导数只与函数在该点

附近的性质(即函数值)有关,而与其他地方无关.

4. 导数的几何意义

函数 $y=f(x)$在 x_0 处的导数的几何意义是曲线 $y=f(x)$在点 $P(x_0,f(x_0))$处的切线的斜率.也就是说,曲线 $y=f(x)$在点 $P(x_0,f(x_0))$处的切线的斜率是 $f'(x_0)$.相应地,切线方程为 $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$.

5. 导数的物理意义

如果把函数 $y=f(x)$ 看作是物体的运动方程(也叫作位移公式,自变量 x 表示时间),那么导数 $f'(x_0)$ 表示物体在时刻 x_0 的速度,即在 x_0 的瞬时速度.

6. 导数的应用范围

在数学上,把函数在点 x_0 处的变化率称为函数在点 x_0 处的导数,在自然科学和技术科技领域内,只要遇到有关函数变化率的问题,如化学反应速度、物体温度变化率等都需要用到导数.

7. “函数在某一点处的导数”、“导函数”、“导数”的区别与联系

函数在某一点处的导数 $f'(x_0)$ 是一个常数,不是变量.

函数的导数,是针对某一区间内任意点 x 而言的. 函数 $f(x)$ 在区间(a,b)内每一点都可导,是指对于区间(a,b)内每一个确定的值 x_0,都对应着一个确定的导数$f'(x_0)$,根据函数的定义,在开区间(a,b)内就构成了一个新的函数,就是函数 $f(x)$的导函数$f'(x)$.

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 就是导函数 $f'(x)$在点 $x=x_0$ 处的函数值,即 $f'(x_0)=f'(x)|_{x=x_0}$.

教学建议

1. 导数是从大量问题中抽象出来的具有相同数学表达式的一个重要概念,所以在教学过程中,可以通过研究增长率、膨胀率、效率、密度、速度等反映导数应用的实例,引导学生经历由平均变化率过渡到瞬时变化率的过程,知道瞬时变化率就是导数. 进而学会用事物在全过程中的发展变化规律来确定其在某一时刻的状态.

2. 导数概念的基础是极限理论,无限逼近的极限思想是导数概念的基本思想. 在教学过程中,要逐步向学生灌输极限思想.

3. 对“函数在某一点处的导数”、“导函数”、“导数”的区别与联系要讲清楚.

4. 由导数定义求导数是求导数的基本方法,在进行导数定义教学时,应注意以下几点:

(1) Δx 是自变量 x 在 x_0 处的增量.

(2) 导数定义中还包含了可导和可微的概念,如果当 $\Delta x\to 0$ 时,$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\to a$(常数),才有函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导或可微,进而才能得到 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数.

例题解析

例 1 某市环保局在规定的排污达标的日期前,对甲、乙两家企业进行检查,其连续检

测结果如图 4-7 所示（图中 $W_1(t)$，$W_2(t)$ 分别表示甲、乙企业在时刻 t 的排污量）．试问哪个企业的治污效果较好？

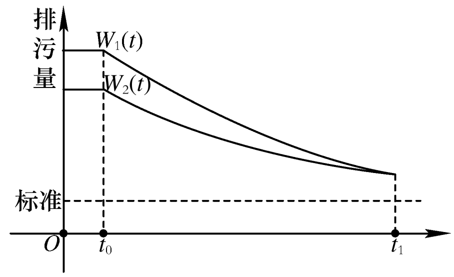


图 4-7

分析　本题主要体现差商（即差分和对应步长的比）定义在现实生活中的运用，要想知道哪个企业的治污效果好，关键要看哪个企业在单位时间内企业的治污率较大．

例 2　投石入水，水面产生圆形波纹区，且圆的面积随着波纹的传播半径 r 的增大而增大（如图 4-8），计算：

（1）半径 r 从 a 增加到 $a+h$ 时，圆面积相对于 r 的平均变化率；

（2）半径 $r=a$ 时，圆面积相对于 r 的瞬时变化率．

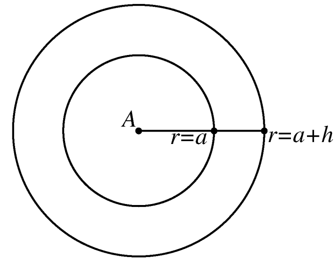


图 4-8

分析　本例中的（1）小题是求变化中的几何图形（圆）面积的平均变化率．它同例 1 及我们前面讨论过的运动物体的平均速度，以及函数曲线的割线斜率一样，从数学的角度看，都是函数值的改变量与对应的自变量的改变量的比，即差商．而（2）小题则是求圆面积的瞬时变化率，实际上就是求函数 $S=\pi a^2$ 的瞬时变化率．而它与我们已经较为熟悉的瞬时速度，切线的斜率等都是相应函数的瞬时变化率．利用本例，教材给出了函数导数的概念，而学生则又一次体验了寻求瞬时变化率（即平均变化率在某点处的极限）的过程，有利于学生更深刻地理解导数的概念．

例 3　在初速度为零的匀加速直线运动中，路程 s 和时间 t 的关系为 $s=s(t)=\dfrac{at^2}{2}$．

（1）求 s 关于 t 的瞬时变化率，并说明其物理意义；

（2）求运动物体的瞬时速度关于 t 的瞬时变化率，说明其物理意义．

分析　本题是导数概念在物理学中的运用，（1）小题直接利用导数的定义运算得出位移函数 s 关于时间 t 的导数（即运动物体的瞬时速度），而（2）小题则是求瞬时速度关于时间 t 的瞬时变化率（运动物体的加速度）．通过本例，一方面加深学生对导数定义的理解，另一方面则从数学的角度对加速度作了较为严格的定义．

相关链接

（一）基础练习

1．在导数定义中，自变量的增量 Δx（　　）

（A）$\Delta x>0$　　（B）$\Delta x<0$　　（C）$\Delta x=0$　　（D）$\Delta x\neq 0$

答案：D.

2．设函数 $y=f(x)$，当自变量 x 由 x_0 改变到 $x_0+\Delta x$ 时，函数的改变量 Δy 为（　　）

（A）$f(x_0+\Delta x)$　　（B）$f(x_0)+\Delta x$

(C) $f(x_0)\cdot\Delta x$　　　　　　　　　(D) $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$

答案：D.

3. 若函数 $f(x)=2x^2-1$ 的图象上一点（1，1）及邻近一点（$1+\Delta x$，$1+\Delta y$），则 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 等于（　　）

(A) 4　　　(B) $4+2(\Delta x)^2$　　　(C) $4+2\Delta x$　　　(D) $4x$

答案：C.

4. 若函数 $f(x)=-x^2+x$ 的图象上的一点（-1，-2）及邻近一点（$-1+\Delta x$，$-2+\Delta y$），则 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=$________，当 $\Delta x\to 0$ 时，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\to$________.

解　$\Delta y=f(-1+\Delta x)-f(-1)$

$=-(-1+\Delta x)^2+(-1+\Delta x)-(-2)=-(\Delta x)^2+3\Delta x$，

$\therefore\ \dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{-(\Delta x)^2+3\Delta x}{\Delta x}=-\Delta x+3.$

当 $\Delta x\to 0$ 时，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\to 3.$

5. 已知曲线 $y=2x^3$ 上一点 $A(1, 2)$，则点 A 处的切线的斜率为（　　）

(A) 6　　　(B) 4　　　(C) $6+\Delta x+2(\Delta x)^2$　　　(D) 2

答案：A.

6. 如果质点 M 按规律 $s=3+t^2$ 运动，则在一小段时间 [2，2.1] 中相应的平均速度是（　　）

(A) 4　　　(B) 4.1　　　(C) 0.41　　　(D) 3

分析　由 $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ 即可求出平均速度.

解　$\Delta s=(3+2.1^2)-(3+2^2)=0.41$，　$\bar{v}=\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dfrac{0.41}{0.1}=4.1$，故选 B.

(二)提高练习

1. 质点 M 做直线运动，位移 s 满足 $s(t)=2t^2+3$，求从 $t=2$ 到 $t=2+\Delta t$ 之间的平均速度，并计算当 $\Delta t=1$，$\Delta t=0.1$，$\Delta t=0.01$ 时的平均速度，最后求 $t=2$ 时的瞬时速度.

分析　先由 $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ 求出平均速度，再根据 $\Delta t\to 0$ 时，$\dfrac{\Delta s}{\Delta t}\to$ 瞬时速度，求出 $t=2$ 时的瞬时速度.

解　$\because \Delta s=2(2+\Delta t)^2+3-(2\times 2^2+3)=2(\Delta t)^2+8\Delta t$，

$\therefore$ 质点 M 从 $t=2$ 到 $t=2+\Delta t$ 之间的平均速度为 $\bar{v}=\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=2\Delta t+8.$

当 $\Delta t=1$ 时，$\bar{v}=10$；当 $\Delta t=0.1$ 时，$\bar{v}=8.2$；当 $\Delta t=0.01$ 时，$\bar{v}=8.02$.

又 $\Delta t\to 0$ 时，$\dfrac{\Delta s}{\Delta t}\to 8$，

∴质点 M 在 $t=2$ 时的瞬时速度为 $v=8$.

2. 已知函数 $y=f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x}}$，求 y' 及 $y'|_{x=1}$.

分析 函数的导数与函数在点 x_0 处的导数不是同一个概念，在点 x_0 处的导数是函数的导数在 $x=x_0$ 处的函数值.

解 $\because \Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x+\Delta x}}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}=\dfrac{2(\sqrt{x}-\sqrt{x+\Delta x})}{\sqrt{x+\Delta x}\cdot\sqrt{x}}$,

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2(x-x-\Delta x)}{\Delta x\sqrt{x+\Delta x}\cdot\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{x+\Delta x})}$$

$$=\frac{-2}{\sqrt{x+\Delta x}\cdot\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{x+\Delta x})}.$$

令 $\Delta x\to 0$, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\to -x^{-\frac{3}{2}}$, 即 $y'=-x^{-\frac{3}{2}}$, $y'|_{x=1}=-1$.

3. 若曲线 $y=2x^3$ 上某点切线的斜率等于 6，求此点的坐标.

解 设所求切点 (x_0, y_0), $\because \dfrac{2(x_0+\Delta x)^3-2x_0^3}{\Delta x}=2[3x_0^2+3x_0\Delta x+(\Delta x)^2]$, 当 $\Delta x\to 0$ 时, 上式趋于 $6x_0^2$, 依题意, $6x_0^2=6$, $\therefore x_0=\pm 1$, 故所求切点坐标为 $(1,2)$ 或 $(-1,-2)$.

4. 已知函数 $f(x)$ 及 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$, 求 $[f(x)+3]^2$ 的导数.

解 $\because \dfrac{[f(x+\Delta x)+3]^2-[f(x)+3]^2}{\Delta x}$

$$=\frac{[f(x+\Delta x)+3+f(x)+3][f(x+\Delta x)+3-f(x)-3]}{\Delta x}$$

$$=[f(x+\Delta x)+f(x)+6]\cdot\frac{[f(x+\Delta x)-f(x)]}{\Delta x},$$

令 $\Delta x\to 0$, $\dfrac{[f(x+\Delta x)-f(x)]}{\Delta x}\to f'(x)$, $[f(x+\Delta x)+f(x)+6]\to 2f(x)+6$,

$\therefore \{[f(x)+3]^2\}'=2[f(x)+3]\cdot f'(x)$.

（三）补充作业

1. 设一物体在 t s 内所经过的路程为 s m，并且 $s=4t^2+2t-3$，试求物体分别在运动开始及第 5 s 末时的速度.

答案：(1) 物体在运动开始时的速度为 2 m/s.

(2) 物体在运动第 5 s 末时的速度为 42 m/s.

2. 已知抛物线 $y=x^2+4$ 与直线 $y=x+10$，求：(1) 两曲线的交点；(2) 抛物线在交点处的切线方程.

答案：(1) 由 $\begin{cases}y=x^2+4,\\ y=x+10\end{cases}$ 得交点 A $(-2, 8)$ 及 B $(3, 13)$.

(2) 抛物线在点 A 处切线方程为 $4x+y=0$，在点 B 处切线方程为 $6x-y-5=0$.

4.2 导数的运算

4.2.1 几个幂函数的导数

教材线索

本节首先从科学研究和工程技术的需要出发，通过一系列具体事例说明函数导数计算的作用，从而引发学生对学习导数的计算方法和有关运算公式的兴趣. 继而根据函数导数的定义推导出几个简单函数的导数.

教学目标

（一）知识与技能

1. 了解函数导数运算的作用.

2. 理解并熟记课内推导出的几个幂函数导数公式并能运用公式求导.

（二）过程与方法

1. 学习过程中逐步掌握“由特殊到一般，再由一般到特殊”的研究数学的思想方法.

2. 通过学习，能够鉴赏公式所蕴涵的数学美.

（三）情感、态度与价值观

构建和谐平等的教学情境，尽可能让学生动脑、动手、动口，去发现、去猜想、去推导，激发不同层面学生的学习积极性.

教材分析

1. 重点

牢固、准确地记住几种常见幂函数的导数，为求导数打下坚实的基础.

2. 难点

灵活运用公式求导.

3. 关于几个幂函数的导数公式

（1）$y=c$（c 为常数）的导数

常数函数的导数为零的几何意义是曲线 $f(x)=c$（c 为常数）在任意点处的切线平行于

x 轴.

(2) $y=x^2$ 的导数公式的推导

证明 $y=f(x)=x^2$， $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+\Delta x^2$，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x+\Delta x,$$

$$\Delta x\to 0,\frac{\Delta y}{\Delta x}\to 2x,\quad \therefore y'=2x.$$

4.“曲线上点 P 处的切线”与“过点 P 的曲线的切线”的区别

在点 P 处的切线，点 P 必为切点；

过点 P 的切线，点 P 未必为切点.

教学建议

1. 函数 $y=c$，$y=x$，$y=x^2$，$y=x^3$，$y=\frac{1}{x}$的导数可放手让学生导出.计算函数 $y=\sqrt{x}$ 的导数需要一定的技巧，可以在对学生进行一定的启发后，再由学生自行导出结果.

2. 本节难度的把握

对教材中所涉及的几个幂函数的导数公式的推导，都是从导数的定义入手，按照定义求导数的基本方法得到，教学时，要求学生在理解公式推导思想的基础上，熟练掌握这些公式的结构变化规律.在难度把握上，本节只要求学生掌握 x，x^2，x^3，$\frac{1}{x}$，$\sqrt{x}$这几个幂函数的导数，不要盲目推广，造成不必要的混乱.

例题解析

例 1 立方体的棱长 x 变化时，其体积关于 x 的变化率是立方体表面积的多少倍？

分析 立方体的体积是关于棱长 x 的函数 $V=x^3$，其关于 x 的变化率即 V 关于 x 的导数.

例 2 写出过点 $A(-4,2)$并且和曲线 $xy-1=0$ 相切的两条直线的方程.

分析 解决本题的关键一步是审题：“过点 A 的曲线的切线”意味着点 A 有可能是曲线的切点也有可能不是.因此解题时第一步是判断点 A 与曲线的位置关系(而题目如果是“写出在点 $A(-4,2)$处曲线 $xy-1=0$ 的切线方程”，那么点 A 即曲线 $xy-1=0$ 的切点).经过判断，发现点 A 不在已知曲线上，设切点为 $Q(u,v)$，为求出曲线在点 Q 处的切线的斜率，先将曲线方程改写成 y 关于 x 的函数的形式，最后利用曲线在点 Q 处的切线即过 A，Q 两点的直线以及点Q 为曲线上的点，联立方程组获解.

相关链接

1. 求曲线 $y=\frac{1}{x}$的斜率等于-4 的切线的方程.

分析 解决本题的关键在于求出切点坐标，可利用待定系数法，由求导公式所得的过切点的切线斜率截方程求得切点坐标.

解 设(x_0,y_0)是所求切线的切点，

$\because y'=-\dfrac{1}{x^2}$，$\therefore y'|_{x=x_0}=-4$，$x_0=\pm\dfrac{1}{2}$.

当$x_0=\dfrac{1}{2}$时，$y_0=2$，所求切线方程为$y-2=-4\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$，即$4x+y-4=0$.

当$x_0=-\dfrac{1}{2}$时，$y_0=-2$，所求切线方程为$y+2=-4\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$，即$4x+y+4=0$.

2. 某汽车启动时的位移函数为$s(t)=2t^3-5t^2$，求$t=2$时，汽车的加速度.

分析 先求位移函数的导数得速度函数，再求速度函数在$t=2$时的导数，即为该时刻的加速度的值.

解 $s'(t)=6t^2-10t$，$s''(t)=12t-10$，$a=s''(2)=14$.

3. 求曲线$y=\dfrac{1}{x}$与$y=\sqrt{x}$在交点处的切线的夹角.

分析 要求两切线的夹角，需应用导数的几何意义求出两切线的斜率.

解 由$y=\dfrac{1}{x}$，得$y'=-\dfrac{1}{x^2}$.由$y=\sqrt{x}$得$y'=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$.

由$\begin{cases}y=\dfrac{1}{x},\\ y=\sqrt{x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1,\\ y=1,\end{cases}$ 即交点为$(1,1)$.

$\therefore$曲线$y=\dfrac{1}{x}$在$(1,1)$处，切线的斜率为$k_1=-1$，

曲线$y=\sqrt{x}$在$(1,1)$处，切线的斜率为$k_2=\dfrac{1}{2}$.

设两切线的夹角为θ，由夹角公式得：$\tan\theta=\left|\dfrac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right|=3$.

$\therefore$两切线的夹角为$\arctan 3$.

4.2.2 一些初等函数的导数表

教材线索

本小节首先给出了一些基本的初等函数导数公式表以解决一些常见的函数的求导问题.

对于公式的证明，教材并不作要求，而是着重于运用公式解决相关问题，因此结合公式表给出了两个例题.

教学目标

（一）知识与技能

掌握基本初等函数的导数公式的特征，并能熟记基本初等函数的导数公式表.

（二）过程与方法

能灵活运用常见的导数公式，求简单初等函数的导数.

（三）情感、态度与价值观

在解题训练中，一方面培养了学生观察应变的逻辑思维能力，另一方面培养了学生实事求是的科学态度，进一步加强对学生辩证唯物主义观念的培养.

教材分析

1．重点

熟练掌握基本初等函数的导数公式的结构变化规律，并能运用公式求简单初等函数的导数.

2．难点

创设条件，灵活运用基本导数公式，掌握运算、化简的基本方法，提高变换能力.

3．关于公式$(x^a)'=ax^{a-1}(a\neq 0)$.

这个公式的证明比较复杂，这里只对$a\in\mathbf{N}_+$的情况加以证明，实际上这个公式对于$a\in\mathbf{R}$都成立.

证明　$y=f(x)=x^a$，

$$\begin{aligned}\Delta y&=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^a-x^a\\&=[x^a+C_a^1x^{a-1}\Delta x+C_a^2x^{a-2}(\Delta x)^2+\cdots+C_a^a(\Delta x)^a]-x^a\\&=C_a^1x^{a-1}\Delta x+C_a^2x^{a-2}(\Delta x)^2+\cdots+C_a^a(\Delta x)^a,\end{aligned}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=C_a^1x^{a-1}+C_a^2x^{a-2}(\Delta x)+\cdots+C_a^a(\Delta x)^{a-1},$$

$\Delta x\to 0$时，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\to C_a^1x^{a-1}$，

$\therefore y'=f'(x)=(x^a)'=ax^{a-1}$.

4．关于公式$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}(x>0)$的证明，证明中用到“$x\to 0$时，$(1+x)^{\frac{1}{x}}\to \mathrm{e}$”.

证明　$y=f(x)=\ln x$，$\Delta y=\ln(x+\Delta x)-\ln x=\ln\dfrac{x+\Delta x}{x}=\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)$，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\Delta x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}},$$

当 $\Delta x \to 0$ 时， $\dfrac{\Delta x}{x} \to 0$， $\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} \to \mathrm{e}$， $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to \dfrac{1}{x}$， $\therefore (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

5. 用$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}(x>0)$可以证明公式$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}(a>0, a\neq 1, x>0)$.

证明 $(\log_a x)' = \left(\dfrac{\ln x}{\ln a}\right)' = \dfrac{1}{\ln a} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{\log_a \mathrm{e}}{x}$.

6. 对于公式$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$ 与$(a^x)' = a^x \ln a$，证明时需要用到反函数的求导法则，超出目前学习的要求.

7. 对于$(\sin x)' = \cos x$ 的证明，证明中要用到“$x \to 0$ 时，$\dfrac{\sin x}{x} \to 1$”.

证明 $y = \sin x$，

$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\sin\dfrac{\Delta x}{2}$，

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\dfrac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}$， $\because \Delta x \to 0$ 时， $\dfrac{\Delta x}{2} \to 0$， $\dfrac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}} \to 1$，

$\therefore \Delta x \to 0$ 时， $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to \cos x$， 即$(\sin x)' = \cos x$.

8. 公式$(\cos x)' = -\sin x$ 的证明.

证明 $y = \cos x$，

$\Delta y = \cos(x+\Delta x) - \cos x = -2\sin\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\sin\dfrac{\Delta x}{2}$，

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -\sin\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\dfrac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}$， $\because \Delta x \to 0$ 时， $\dfrac{\Delta x}{2} \to 0$， $\dfrac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}} \to 1$，

$\therefore \Delta x \to 0$ 时， $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to -\sin x$， 即$(\cos x)' = -\sin x$.

9. $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$， $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$的证明.

在下一节学了导数的运算法则后，这两个函数的导数很容易求得，这里就先不作介绍了.

教学建议

1. 本小节主要是介绍一些初等函数的导数表，对于这些公式的证明，课内不作要求，也没有必要向学生介绍.我们只要求学生能在熟练掌握这些公式的结构变化规律的基础上，运用公式对简单的初等函数进行求导即可.

2. 对于简单函数的求导，关键是合理转化函数关系式为可直接应用公式的基本函数的模式，在求导过程中要避免出现指数或系数的运算失误.要求学生从思想上认识到运算的准确是

数学能力提高的标志，养成思维严谨，步骤完整的解题习惯.

3. 在学生能够准确运用初等函数的导数表对简单函数进行求导的基础上，重视导数的实际应用问题，利用导数的物理意义及几何意义解题.

例题解析

例 1 用导数公式表计算：

(1)$(\sqrt[3]{x^2})'$；　(2)$(\log_2 x)'$；　(3)$(2^x)'$.

分析 本题主要是要求学生能够在熟悉一些基本初等函数导数公式的基础上，灵活运用公式求导，解题的关键是将题中给出的函数合理转化为能够直接使用公式的形式.如将$(\sqrt[3]{x^2})'$转化为$(x^{\frac{2}{3}})'$，然后套用公式得出结果.

例 2 设函数 $y=\sin x$ 的图象为曲线 l.

(1)在哪些点的切线斜率为 1？在哪些点的切线平行于 x 轴？

(2)试分别求此曲线在点 $A(0,0)$，$B\left(\frac{\pi}{2},1\right)$，$C\left(\frac{3\pi}{2},-1\right)$处的切线方程.

分析 根据函数导数的几何意义知道，解决第(1)题的关键是先求出曲线在点$(x,\sin x)$处的切线的斜率，即先求出函数 $y=\sin x$ 的导数；而要找出这些切线中与 x 轴平行的，实际上就是要寻求那些斜率为 0 的切线.解决第(2)题的关键是根据导数的几何意义求出直线的斜率.本题一方面要求学生对导数公式的熟练记忆，另一方面则要求他们对导数几何意义有较深的理解.

相关链接

1. 如果质点按规律 $s=t^3$ 运动，则在 $t=2$ s 的瞬时速度为(　　).

(A)4　(B)8　(C)12　(D)6

分析 根据瞬时速度和导数的定义可知，质点在某时刻的瞬时速度就是运动方程在此时刻的导数，从而可用导数解决此题.

解 $\because s'=3t^2$，$\therefore$质点在 $t=2$ s 时的瞬时速度 $v=s'|_{t=2}=12$.

故选 C.

2. 求与曲线 $y=x^3$ 相切且平行于直线 $y=12x-5$ 的直线方程.

解 设所求直线与曲线 $y=x^3$ 相切于点 $A(u,v)$，

$\because y'=3x^2$，依题意，可得

$\begin{cases}3u^2=12,\\ v=u^3,\end{cases}$解得$\begin{cases}u=2,\\ v=8\end{cases}$或$\begin{cases}u=-2,\\ v=-8.\end{cases}$

故所求直线方程为 $y=12x-16$ 或 $y=12x+16$.

3. 求过点 $A(3,5)$且与抛物线 $y=x^2$ 相切的直线方程.

分析 本题的关键是求切线斜率 k，又 k 是由切点坐标决定的，将导数的几何意义与直线

的斜率公式相结合，可求出切点坐标，从而获解.

解 设切点为 $P(x_0, y_0)$，则 $y_0=x_0^2$. ①

又 $y'=2x$， $\therefore y'|_{x=x_0}=2x_0$ 为过点 P 的切线的斜率.

又切线的斜率 $k=\dfrac{y_0-5}{x_0-3}$， $\therefore \dfrac{y_0-5}{x_0-3}=2x_0$. ②

联立①②得$\begin{cases}x_0=1,\\ y_0=1\end{cases}$或$\begin{cases}x_0=5,\\ y_0=25.\end{cases}$

当 $P(1,1)$时，$k=2$，切线方程为 $y-1=2(x-1)$，即 $2x-y-1=0$.

当 $P(5,25)$时，$k=10$，切线方程为 $y-25=10(x-5)$，即 $10x-y-25=0$.

点评 本题还可以用解析几何的方法，设切线方程为 $y-5=k(x-3)$，与曲线组成方程组，根据$\begin{cases}k\neq 0,\\ \Delta=0\end{cases}$可求得 k 的值，进而求得切线方程.但这种方法不具有普遍性，如把 $y=x^2$ 改成$y=\sqrt{x}$或 $y=x^3$，该法将不适用.而本例提供的解法具有一般意义.

4. $f(x)=0$ 的导数是( )

(A)0 (B)1 (C)不存在 (D)不确定

答案：A.

5. 曲线 $y=x^n$ 在 $x=2$ 处的导数为 12，则 n 等于( )

(A)1 (B)2 (C)3 (D)4

答案：C.

6. 求下列函数的导数：

(1)$y=x^6$； (2)$y=\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$； (3)$y=\dfrac{1}{x^2}$； (4)$y=2^x$； (5)$y=\log_3 x$.

答案：(1)$y'=6x^5$. (2)$y'=(x^{-\frac{3}{4}})'=-\dfrac{3}{4}x^{-\frac{7}{4}}$.

(3)$y'=(x^{-2})'=-2x^{-3}$. (4)$y'=2^x\ln 2$.

(5)$y'=\dfrac{1}{x\ln 3}$.

4.2.3 导数的运算法则

教材线索

本节从已知导数公式的函数出发，依次推导出和函数、差函数、积函数的求导法则以及

函数的除法的求导法则，最后，举例运用法则求导.

教学目标

（一）知识与技能

1. 掌握基本初等函数的和、差、积导数运算法则.

2. 能应用函数的和、差、积的导数求较复杂函数的导数.

（二）过程与方法

1. 在推导公式的过程中，重点强调“先化简变形，然后实施求导”的基本思想方法.

2. 通过变式训练，加深学生对商求导法则，以及简单复合函数求导法则的理解，能灵活运用常见的导数公式，求简单初等函数的导数.

（三）情感、态度与价值观

在解题训练中，一方面训练了学生观察应变的逻辑思维能力，另一方面培养了学生实事求是的科学态度，进一步加强对学生辩证唯物主义观念的培养.

教材分析

1. 重点

应用函数的和、差、积、商的导数求复杂函数的导数.

2. 难点

积求导法则以及商求导法则的理解与应用，特别是由于商求导法则与积求导法则形式上的相近所造成的混淆.

3. 关于公式$(cf(x))'=cf'(x)$

这个公式告诉我们，在求导时，可以把函数的常数因子直接提出来，在很多时候可简化运算.

4. 关于函数的积的求导公式

在推导函数的积的求导公式时，将式子$\frac{f(x+d)g(x+d)-f(x)g(x)}{d}$先做了如下的变形$f(x+d)\left(\frac{g(x+d)-g(x)}{d}\right)+g(x)\left(\frac{f(x+d)-f(x)}{d}\right)$，再利用$d$趋于0时，$f(x+d)$趋于$f(x)$，$\frac{g(x+d)-g(x)}{d}$趋于$g'(x)$，$\frac{f(x+d)-f(x)}{d}$趋于$f'(x)$，从而求得$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$.

5. 关于函数的商的求导法则

在推导函数商的求导法则前，首先利用导数定义推导了$F(x)=\frac{1}{f(x)}(f(x)\neq 0)$的导数，继而将它与函数积的导数法则结合，得到两函数商的求导法则，这样做，降低了难度，有利于学生的理解.

6. 关于 $y_x' = y_u' \cdot u_x'$

注意引导学生理解用导数定义推导 $y_x' = y_u' \cdot u_x'$ 这个简单复合函数的导数公式的过程，在实际运用中，要求学生按照法则 6，设 $y=f(u)$，$u=g(x)$，则 $y_x' = f_u' \cdot u_x'$ 来求导.

7. 在学习了函数的和、差、积、商的导数法则以及简单复合函数的求导法则后，对于常见初等函数的求导，我们大都可以直接利用求导法则结合上节课学习的导数公式直接求导，而无须从导数的定义出发进行求导.

教学建议

本小节建议使用尝试探究、类比联想、变式练习等方法进行教学.为避免学生由于商求导法则与积求导法则形式上的相近所造成的混淆，建议本小节分两个教学课时来完成：第一课时重点是应用函数的和、差、积的导数求导，为了加深对积的求导法则的理解，除讲清推导过程外，重点强调“先化简变形，然后实施求导”的基本思想方法；而第二课时则通过变式训练，加深学生对商求导法则，以及简单复合函数求导法则的理解.

例题解析

例 1 求曲线 $y=f(x)=2x^3-x^2-3x+1$ 和直线 $x=1$ 交点处切线的斜率 k.

分析 解决本题的关键是要求出函数 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的导数，在学习了和函数的导数法则后，很容易求得结果.

例 2 求函数 $f(x)=x^3\sin x$ 的导数.

分析 函数 $f(x)$ 可以看作 $f_1(x)=x^3$，$f_2(x)=\sin x$ 的积函数，运用积函数导数运算法则即可求解.

例 3 求函数 $\dfrac{1}{\cos x}$ 的导数.

分析 本题可直接利用 $F(x)=\dfrac{1}{f(x)}(f(x)\neq 0)$ 的导数法则求解.

例 4 用两函数之商的求导法则求 $\dfrac{\sin x}{\cos x}$ 的导数.

分析 本题要求我们用两函数之商的求导法则计算 $\dfrac{\sin x}{\cos x}$ 的导数，通过计算，我们会发现，结果与前面公式表中的 $\tan x$ 的导数一样.同样也可验证 $\cot x$ 的导数公式.

例 5 求下列函数的导数：

(1) $y=(2x+3)^2$；　　　　(2) $y=\mathrm{e}^{-0.05x+1}$.

分析 本题直接利用法则 6，若 $y=f(u)$，$u=g(x)$，则 $y_x' = f_u' \cdot u_x'$ 进行求导.对于第(1)题也可以将 $(2x+3)^2$ 展开后利用和函数的导数法则求解.做完后，比较两种做法，会发现前一种解法更为简洁.

相关链接

1. 求曲线 $y=2x^3-3x^2+6x-1$ 在 $x=1$ 及 $x=-1$ 处两切线所夹的角.

解 $\because y'=6x^2-6x+6$，$\therefore y'|_{x=1}=6$，$y'|_{x=-1}=18$.

设已知曲线在 $x=1$ 及 $x=-1$ 处两切线所夹的角为 α，则 $\tan\alpha=\left|\dfrac{18-6}{1+18\times6}\right|=\dfrac{12}{109}$，

$\therefore \alpha=\arctan\dfrac{12}{109}$.

2. 在受到制动后的 t s 内，飞轮转过的角度（单位是 rad）由函数 $y(t)=4t-0.3t^2$ 给出，求：（1）$t=2$ s 时飞轮转过的角度；（2）$t=2$ s 时飞轮转过的角速度；（3）飞轮停止旋转的时刻.

解 （1）$y(2)=4\times2-0.3\times2^2=6.8(\text{rad})$.

（2）$y'|_{t=2}=(4-0.6t)|_{t=2}=4-1.2=2.8(\text{rad/s})$.

（3）因为 $y'=4-0.6t$，停止转动是指运动速度为 0，故令 $4-0.6t=0$，解得 $t=\dfrac{20}{3}$（s）.

即飞轮在 $t=\dfrac{20}{3}$ s 时停止转动.

3. 设函数 $f(x)=ax^3+3x^2+2$，若 $f'(-1)=4$，则 a 的值为________________.

解 因为 $f'(-1)=f'(x)|_{x=-1}=(3ax^2+6x)|_{x=-1}=3a-6=4$，

$\therefore a=\dfrac{10}{3}$.

4. 曲线 $y=x^2(x^2-1)^2+1$ 在点 $(-1,1)$ 的切线方程为________________.

解 $\because y=x^2(x^4-2x^2+1)+1=x^6-2x^4+x^2+1$，

$\therefore y'=6x^5-8x^3+2x$.

$\therefore y'|_{x=-1}=0$.

故所求切线方程为 $y=1$.

4.3 导数在研究函数中的应用

4.3.1 利用导数研究函数的单调性

教材线索

本小节首先引导学生观察教材图 4－14 函数 $y=f(x)$和它的导函数 $y=f'(x)$的图象，探索函数的增减和它的导函数的正负之间的联系，再通过观察更多的图象，从直观上归纳出用导数的正负判断函数增减性的法则，并与必修中所学的判断一个函数增减性的方法进行对比．通过例 1 和例 2，学习利用导数研究函数的增减性，学习从导数的角度解释函数增减快慢的情况．

教学目标

（一）知识与技能

1. 理解利用导数判断函数的单调性的原理．

2. 掌握用导数的符号判断函数单调性的方法．

3. 能利用导数研究函数的单调性，会求不超过三次的多项式函数的单调区间．

（二）过程与方法

1. 结合实例，借助几何直观探索并了解函数的单调性与导数的关系．

2. 通过初等方法与导数方法在研究函数性质过程中的比较，体会导数方法在研究函数性质中的一般性和有效性．

（三）情感、态度与价值观

能用普遍联系的观点看待事物，抓住引起事务变化的主要因素，同时感受和体会数学自身发展的一般规律．

教材分析

1. 重点

利用导数判断函数单调性．

2. 难点

利用导数判断函数单调性.

3. 教学要点

(1) 本节从函数图象出发给出了用导数的符号判别函数增减性的方法. 教材的图 4－14 中画出了一个函数 $y=f(x)$ 和它的导函数 $y=f'(x)$ 的图象，导函数 $y=f'(x)$ 是二次函数，设它与 x 轴的交点为 $M(x_1, 0)$，$N(x_2, 0)$. 观察图象，当 $x\in(-\infty, x_1)$ 或 $x\in(x_2, +\infty)$ 时，$f'(x)>0$，函数 $y=f(x)$ 单调递增；当 $x\in(x_1, x_2)$ 时，$f'(x)<0$，函数 $y=f(x)$ 单调递减. 再让学生观察更多的图象，总结归纳出利用导数判断函数单调性的法则.

(2) 学生在高一学习函数时，已经知道了增函数、减函数和单调函数的意义，并且会用增函数、减函数的定义判断或证明函数在给定区间的单调性. 在教学时可结合判断或证明函数增减性的实例引导学生对新旧方法进行比较，从中感悟用导数的符号判别函数增减性要比高一时所学的方法简洁得多，从而提高学生对导数学习意义的认识.

(3) 函数增减性判别法的证明要用到中值定理，中值定理不属于高中数学的学习范围，故教材略去了函数增减性判别法理论推导内容，虽然暂时不能证明，但我们还是可以从直观上理解这个规律.

教学建议

1. 利用导数的符号判断函数的单调性，是导数几何意义在研究曲线变化规律时的一个重要应用，它充分体现了数形结合的基本思想. 因此必须重视对数学思想、方法进行归纳提炼，提高应用数学思想、方法解决问题的熟练程度，达到优化解题思路、简化解题过程的目的.

2. 在利用导数讨论函数的单调区间时，首先要确定函数的定义域，在解决问题的过程中，只能在函数的定义域内，通过讨论导数的符号，来判断函数的单调区间. 当给定函数含有字母参数时，应注意分类讨论的准确性. 分类讨论必须给予足够的重视，真正发挥数学解题思想作为联系知识与能力中的作用，从而提高简化计算的能力.

3. 在对函数划分单调区间时，除了必须确定使导数等于零的点外，还要注意在定义区间内的不连续点和不可导点.

4. 注意在某一区间内 $f'(x)>0$(或 $f'(x)<0$) 是函数 $f(x)$ 在该区间上为增（或减）函数的充分条件.

5. 正确运用求导公式，对函数进行求导，准确、熟练地计算是求函数单调区间必备的基本功.

例题解析

例 1 用导数研究二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$(a, b, c 为常数, $a\neq 0$) 的单调性.

分析 二次函数的导数是一次函数，导函数 $f'(x)$ 的符号由它的一次项系数的符号决

定. 判断函数的单调性可以用定义法或导数法，比较这两种方法，容易看出，导数法判断函数的单调性，其使用范围更广，解答过程更简洁.

例 2 求函数 $f(x)=x^3-2x^2+x-1$ 的单调区间.

分析 本题是根据导数在某一区间内的符号来确定函数的单调区间，解决这类问题，如果仅利用函数单调性的定义来确定函数的单调区间，可能运算复杂，甚至难以运算. 另外，单调区间不能写成并集的形式.

例 3 已知函数 $f(x)=x^2-bx+3$在$(1,+\infty)$上单调递增，求 b 的取值范围.

说明 本题是已知单调区间，利用导数法求参数的取值范围的应用举例. 与前面的例题已知函数，利用导数法求单调区间正好相反，培养学生的逆向思维能力.

例 4 如图 4－9，圆 C 和直角 AOB 的两边相切，直线 OP 从 OA 处开始，绕点 O 匀速旋转（到 OB 处为止）时，所扫过的圆内阴影部分的面积 S 是时间 t 的函数，它的图象大致是（　　）

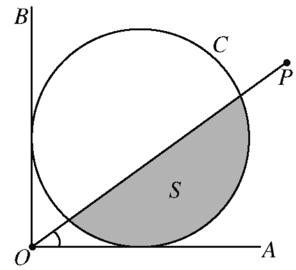
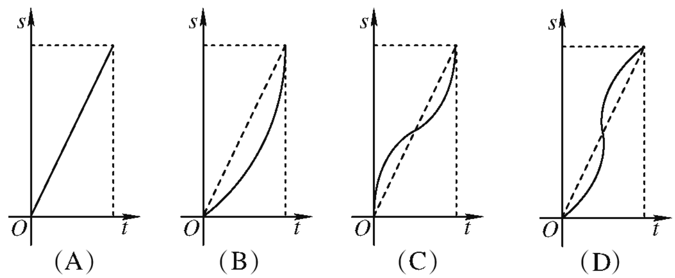


图 4－9



分析 当直线转动时，若某时刻直线被圆所截得的弦较长，S 的瞬时变化率就较大，此处的导数就较大，图象中这里的切线就较陡，曲线就较陡. 由于是匀速旋转，阴影部分面积 S 在开始和最后时段是缓慢增加，中间时段增速快. 图(A)表示 S 的增速是常数，与实际不符，(A)应否定；图(B)表示 S 在最后时段的增速快，也与实际不符，(B)也应否定；图(C)表示 S 在开始时段的增速和最后时段的增速比中间时段快，也应否定；图(D)表示 S 在开始和结束时段增速慢，中间时段增速快，应选（D).

相关链接

牛顿（Isaac Newton，1642—1727）

牛顿是英国伟大的物理学家、数学家、天文学家. 恩格斯说：“牛顿由于发现了万有引力定律而创立了天文学，由于进行光的分解而创立了科学的光学，由于创立了二项式定理和无限理论而创立了科学的数学，由于认识了力学的本性而创立了科学的力学.”的确，牛顿在自然科学领域里作了奠基的贡献，堪称科学巨匠.

在牛顿的全部科学贡献中，数学成就占有突出的地位. 笛卡儿的解析几何把描述运动的函数关系和几何曲线相对应. 牛顿在老师巴罗的指导下，在钻研笛卡儿的解析几何的基础

上，找到了新的出路. 可以把任意时刻的速度看成是在微小的时间范围里的速度的平均值，这就是一个微小的路程和时间间隔的比值，当这个微小的时间间隔缩小到无穷小的时候，就是这一点的准确值. 这就是微分的概念.

求微分相当于求时间和路程关系的曲线在某点的切线斜率. 一个变速的运动物体在一定时间范围里走过的路程，可以看作是在微小时间间隔里所走路程的和，这就是积分的概念. 求积分相当于求时间和速度关系的曲线下面的面积. 牛顿从这些基本概念出发，建立了微积分.

微积分的创立是牛顿最卓越的数学成就. 牛顿为解决运动问题，才创立这种和物理概念直接联系的数学理论，牛顿称之为“流数术”. 它所处理的一些具体问题，如切线问题、求积问题、瞬时速度问题以及函数的极大、极小值问题等，在牛顿研究之前已经得到人们的研究了. 但牛顿超越了前人，他站在了更高的角度，对以往分散的努力加以综合，将自古希腊以来求解无限小问题的各种技巧统一为两类普通的算法——微分和积分，并确立了这两类运算的互逆关系，从而完成了微积分发明中最关键的一步，为近代科学发展提供了最有效的工具，开辟了数学上的一个新纪元.

4.3.2 函数的极大值和极小值

教材线索

教材首先谈到最值问题，然后给出极大值、极小值、极值、极值点等概念，在此基础上引导学生观察教材图 4－14 到 4－17 的函数图象，发现图象中的极值点原来都是导数的零点. 在函数在极值点有导数的前提下，开展探究活动，将一条平行于 x 轴的直线从上方渐渐向下平移，直到碰上曲线（在这个区间上的一段）就停下来，这时这条直线就是曲线在这个局部最高点处的切线. 通过总结归纳，得出“函数在极值点的导数为零”的结论. 最后总结出求可导函数极值的方法，并通过例 1 和例 2 的学习掌握这一方法.

教学目标

（一）知识与技能

1. 结合函数的图象，了解函数在某点取得极值的必要条件和充分条件.

2. 掌握利用导数判别可导函数极值的方法.

（二）过程与方法

体验导数知识和数学方法的作用，会用导数求不超过三次的多项式函数的极大值、极小

值，以及在给定区间上不超过三次的多项式函数的最大值、最小值.

（三）情感、态度与价值观

逐步形成科学地分析问题和解决问题的能力.

教材分析

1. 重点

利用导数判别可导函数极值的方法.

2. 难点

对可导函数的极值点的必要条件和充分条件的理解.

3. 教学要点

（1）教材先谈最值问题，再谈极值概念. 应注意，极值与最值不同，极值只是对一点附近而言，是局部最值，而最值是对整个区间或是对所考察问题的整体而言.

（2）观察教材图 4－14 到 4－17 的函数图象，可以发现可导函数的极值点是导数的零点. 按照教材图 4－23 所示进行探究活动，可以看到函数在取得极值处，如果曲线有切线的话，则切线是水平的，从而有 $f'(x)=0$. 但反过来不一定. 如函数 $y=x^3$，在 $x=0$ 处，曲线的切线是水平的，但这点的函数值既不比它附近的点的函数值大，也不比它附近的点的函数值小，可见导数的零点可能不是函数的极值点. 也就是说，若 $f'(x_0)$存在，$f'(x_0)=0$ 是 $f(x)$在 $x=x_0$ 处取到极值的必要不充分条件.假设 x_0 使 $f'(x_0)=0$，那么 x_0 在什么情况下是 $f(x)$的极值点呢？

如图 4－10 所示，若 x_0 是 $f(x)$的极大值点，则 x_0 两侧附近点的函数值必须小于 $f(x_0)$，因此，x_0 的左侧附近 $f(x)$只能是增函数，即 $f'(x)>0$，x_0 的右侧附近 $f(x)$只能是减函数，即 $f'(x)<0$. 同理，如图 4－11 所示，若 x_0 是极小值点，则在 x_0 的左侧附近 $f(x)$只能是减函数，即 $f'(x_0)<0$，在 x_0 的右侧附近 $f(x)$只能是增函数，即 $f'(x)>0$.

从而我们得出结论：若 x_0 满足 $f'(x_0)=0$，且在 x_0 的两侧$f(x)$的导数异号，则 x_0 是 $f(x)$的极值点，$f(x_0)$是极值；并且如果 $f'(x)$在 x_0 两侧满足“左正右负”，则 x_0 是$f(x)$的极大值点，$f(x_0)$是极大值；如果 $f'(x)$在 x_0 两侧满足“左负右正”，则 x_0 是 $f(x)$的极小值点，$f(x_0)$是极小值. 可见，可导函数 $f(x)$ 在点 x_0 取得极值的充分必要条件是 $f'(x_0)=0$，且在 x_0 左侧与右侧，$f'(x)$的符号不同.

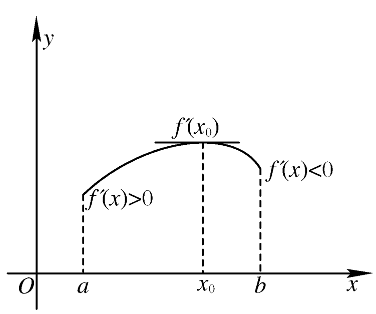


图 4－10

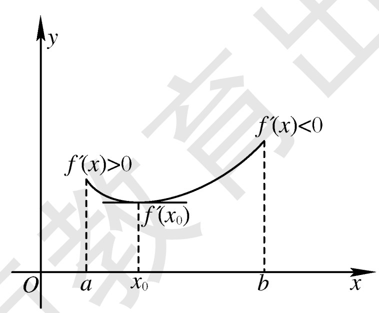


图 4－11

(3) 求函数 $y=f(x)$在区间 $[a, b]$ 的最大（小）值步骤如下：

①求 $f(x)$在开区间 (a, b) 内所有使 $f'(x)=0$ 的点；

②计算函数 $f(x)$在区间内使 $f'(x)=0$ 的所有点和端点的函数值，其中最大的一个为最大值，最小的一个为最小值.

教学建议

1. 可联系函数的单调性引入极值的相关内容，强调极值是函数的局部性质，是函数在某点处的值与其附近“左、右”函数值比较的结果. 通过几何图形直观得到极大（小）值与导数的关系.

2. 教学中应结合函数图象，了解函数在某点处取极值的必要条件与充分条件.

3. 在教学时要注意以下几点：

(1) 极值是一个局部概念. 由定义知，极值只是某个点的函数值与它附近点的函数值比较，它是最大或最小，并不意味着它在函数的整个定义域内最大或最小.

(2) 函数的极值不是唯一的. 即一个函数在某区间上或定义域内的极大值或极小值可以不止一个.

(3) 函数的极值点一定出现在区间的内部，区间的端点不能成为极值点. 而使函数取得最大值、最小值的点可能在区间的内部，也可能是区间的端点.

(4) 闭区间上的函数如果它的图象是一条连续不断的曲线，则一定有最值，开区间内的可导函数不一定有最值.

4. 求函数极值常按如下步骤进行：

(1) 确定函数的定义域；

(2) 求导数；

(3) 求方程 $y'=0$ 的根，这些根称为函数 $f(x)$的驻点；

(4) 检查这些根的左右两侧的符号，确定极值点.（最好通过列表法）

例题解析

例 1 试求下列函数的驻点，判断函数在驻点左右两侧附近的导数的符号，并回答驻点是否为极值点.

(1) $f(x)=x^4$；　　　　(2) $f(x)=x^5$.

说明 本题应让学生熟练掌握求驻点的方法，并让学生理解函数的驻点不一定就是极值点.

例 2 求函数 $g(x)=x^2(3-x)$的极大值和极小值.

说明 教学时要结合教材图 4－26，通过观察图形，体会在相应的区间上导数的正、负与函数的增、减的关系. $g'(x)=6x-3x^2$.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$g'(x)$	$-$		$+$		$-$
$g(x)$	↘	0	↗	4	↘

故函数 $g(x)$ 的极小值为 $g(0)=0$，极大值为 $g(2)=4$.

本例是研究可导函数极值的问题，按照求函数极值的方法，首先从方程 $g'(x)=0$ 中求出函数 $g(x)$ 定义域内所有可能的极值点，然后按照函数极值的定义判断在这些点处是否取得极值. 为判断方程 $g'(x)=0$ 的根左右值的符号，可用列表的方法，用方程的根将函数的定义域分成若干个小开区间，并列成表格. 例题同时给出了求函数极值的书写格式，本例要重点讲解.

相关链接

利用二阶导数判断函数的凸性，利用函数的凸性证明有关不等式.

教材 P. 40 的“多知道一点”栏目中介绍了“用二阶导数判断极值”，实际上用二阶导数还可以判断函数的凸性.

定义：设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，若对 $[a, b]$ 中任意两点 x_1，x_2 恒有 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)\geqslant\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，则称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是向上凸的，简称上凸；若恒有 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，则称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是向下凸的，简称下凸. 可以证明函数的凸性与二阶导数有如下关系.

定理：设 $f(x)$ 在 (a, b) 内存在二阶导数 $f''(x)$，那么（1）若在 (a, b) 内 $f''(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 为上凸；（2）若在 (a, b) 内 $f''(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 为下凸.

定理的证明要利用拉格朗日中值公式，在此省去证明过程. 利用函数的凸性可证明有关不等式，现举例如下：

例 设 $x>0$，$y>0$，证明不等式 $x\ln x+y\ln y\geqslant(x+y)\ln\dfrac{x+y}{2}$，且等号仅在 $x=y$ 时成立.

分析 将不等式两边同时除以 2，变形为 $\dfrac{x\ln x+y\ln y}{2}\geqslant\dfrac{(x+y)}{2}\ln\dfrac{x+y}{2}$.

便可看出，左边是函数 $f(t)=t\ln t$ 在两点 x，y 处的值的平均值，而右边是它在中点 $\dfrac{x+y}{2}$ 处的函数值，这时只需证明 $f''(t)\geqslant0$ 即可.

证明 设 $f(t)=t\ln t$，即 $f'(t)=1+\ln t$，$f''(t)=\dfrac{1}{t}>0$，

由 $\dfrac{1}{2}[f(x)+f(y)]\geqslant f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$，

得 $\dfrac{x\ln x+y\ln y}{2}\geqslant\dfrac{(x+y)}{2}\ln\dfrac{x+y}{2}$.

即 $x\ln x+y\ln y\geqslant(x+y)\ln\dfrac{x+y}{2}$.

等号仅在 $x=y$ 时成立.

4.3.3　三次函数的性质:单调区间和极值

教材线索

在研究二次函数性质时，用导数方法最为简便快捷. 一般三次函数问题，往往可通过求导，转化为二次函数或二次方程问题，然后结合导数的基本知识及二次函数的性质来解决. 对于三次函数 $F(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq0)$，教材根据函数 $F'(x)$零点的个数分三种情形来讨论三次函数的单调性与极值，并通过两个例题来巩固和掌握.

教学目标

(一)知识与技能

1. 了解三次函数的图象和简单性质,三次函数与二次函数的联系.

2. 运用导数研究三次函数的单调区间和极值.

(二)方法与过程

使学生体会导数是解决三次函数问题的有力工具,在应用导数解决各种问题的过程中凸现导数的思想方法,强调“如何用”导数.

(三)情感、态度与价值观

引导学生进行自主探究,让学生经历观察、猜想、推理等过程.

教材分析

1.重点

三次函数的单调区间和极值.

2.难点

三次函数的单调区间和极值.

3.教学要点

(1)三次函数的导数是二次函数,用导数方法可以彻底了解三次函数的增减变化和极大极小情况.

(2)对于三次函数 $F(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq0)$，则 $F'(x)=3ax^2+2bx+c$，方程 $3ax^2+2bx+c=0$ 的判别式 $\Delta=4(b^2-3ac)$.

情形 1　当 $\Delta<0$ 时,方程 $3ax^2+2bx+c=0$ 无实根，所以函数 $F'(x)$没有零点.

若 $a>0$，则 $F'(x)>0$ 恒成立，所以 $F(x)$在$(-\infty,+\infty)$上递增；$F(x)$不存在极大值

和极小值.$F(x)$的图象如图 4－12 所示.

若 $a<0$，则 $F'(x)<0$ 恒成立，所以 $F(x)$在$(-\infty,+\infty)$上递减；$F(x)$不存在极大值和极小值.$F(x)$的图象如图 4－13 所示.

情形 2　当 $\Delta=0$ 时，方程 $3ax^2+2bx+c=0$ 有两相等实根，所以函数 $F'(x)$有一个零点 $x=x_0$.

若 $a>0$，则 $F'(x)\geqslant 0$ 恒成立$(F'(x_0)=0)$,所以 $F(x)$在$(-\infty,+\infty)$上递增；$F(x)$不存在极大值和极小值.$F(x)$的图象如图 4－12 所示.

若 $a<0$，则 $F'(x)\leqslant 0$ 恒成立$(F'(x_0)=0)$，所以 $F(x)$在$(-\infty,+\infty)$上递减；$F(x)$不存在极大值和极小值.$F(x)$的图象如图 4－13 所示.

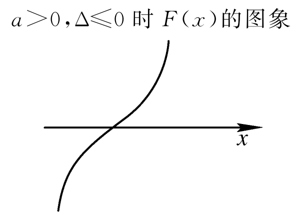


图 4－12

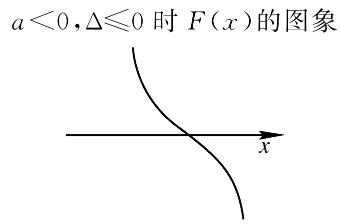


图 4－13

情形 3　当 $\Delta>0$ 时，方程 $3ax^2+2bx+c=0$ 有两相异实根 x_1，x_2，且设 $x_1<x_2$，函数$F'(x)$有两个零点 x_1，x_2.

若 $a>0$，则当 $x\in(-\infty,x_1)\cup(x_2,+\infty)$时，$F'(x)>0$,当 $x\in(x_1,x_2)$时 $F'(x)<0$.所以函数 $F(x)$的单调递增区间是$(-\infty,\ x_1)$，$(x_2,\ +\infty)$，单调递减区间是$[x_1,\ x_2]$；函数 $F(x)$有极大值 $F(x_1)$，极小值 $F(x_2)$.$F(x)$的图象如图 4－14 所示.

若 $a<0$，则当 $x\in(x_1,\ x_2)$时，$F'(x)>0$，当 $x\in(-\infty,\ x_1)\cup(x_2,+\infty)$时，$F'(x)<0$. 所以函数 $F(x)$单调递减区间是$(-\infty,\ x_1)$，$(x_2,\ +\infty)$，单调递增区间是$[x_1,\ x_2]$.函数 $F(x)$有极大值 $F(x_2)$,极小值 $F(x_1)$.$F(x)$的图象如图 4－15 所示.

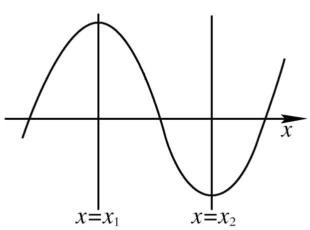


图 4－14

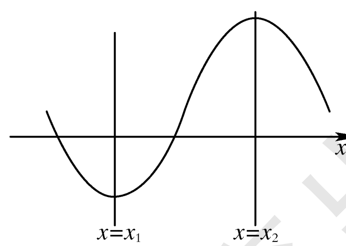


图 4－15

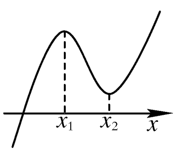
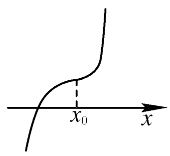
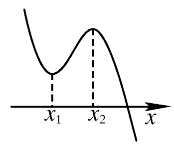
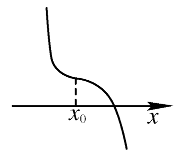
由此可见：三次函数 $F(x)$有极值$\Leftrightarrow$导函数 $F'(x)$的判别式 $\Delta>0$.

教学建议

1. 可通过对一次函数、二次函数的图象和性质的回顾，引导学生对三次函数的图象和性质开展探究活动，利用几何画板为工具，开展合作学习、小组交流等活动，探讨三次函数

$F(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq 0)$图象的形状，单调区间以及是否存在极值等问题，利用几何画板输入几个不同的三次函数进行验证，在实践的基础上归纳总结三次函数的图象形状及性质.

2.如何求三次函数的单调区间和极值是本节课的一个重点和难点，可回忆在探讨二次函数性质时，我们曾用过配方法、差分法和导数法，其中导数法最为简便快捷. 通过求导可以研究三次函数的单调性和极值，其操作的步骤易掌握，判别的方法也不难. 导函数 $F'(x)=3ax^2+2bx+c$，方程 $3ax^2+2bx+c=0$ 的判别式 $\Delta=4(b^2-3ac)$，三次函数的图象可归纳如下：

$a>0$		$a<0$	
$\Delta>0$	$\Delta\leqslant 0$	$\Delta>0$	$\Delta\leqslant 0$
			

对三次函数的单调性、有没有极值可由 a 及 Δ 的符号进行判断.

3. 可结合三次函数的图象引导学生探讨方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 解的个数.

例题解析

例 1 指出下列函数的单调区间和极值点.

(1) $f(x)=x^3-2x^2+2x-7$；

(2) $g(x)=-3x^3+6x^2-4x+5$；

(3) $u(x)=x^3-12x+8$；

(4) $h(x)=-37+36x-3x^2-2x^3$.

分析 本例是求三次函数的单调区间和极值点的问题，运用本节课总结出来的方法和结论求解.

例 2 求函数 $F(x)=2x^3+3x^2-12x+5$ 在$[-3,2]$上的最大值和最小值.

分析 本题是求三次函数在闭区间上的最值问题，必须比较极大(小)值与端点处的函数值的大小,其较大(小)者即为闭区间$[-3,2]$上的最大(小)值.学生易把极值误认为最值.

本题中 $F'(x)$有两个零点:$x_1=-2$，$x_2=1$，结合图象可以看出 $F(x)$在 x_1 处取到极大值 $F(x_1)=25$，在 x_2 处取到极小值 $F(x_2)=-2$. 又 $F(-3)=14$，$F(2)=9$. 比较可知 $F(x)$在$[-3,2]$上的最大值是 $F(-2)=25$，最小值是$F(1)=-2$.

相关链接

(2005 年全国卷Ⅱ) 设 a 为实数，函数 $f(x)=x^3-x^2-x+a$.

(1) 求 $f(x)$的极值；

(2) 当 a 在什么范围内取值时，曲线 $y=f(x)$与 x 轴仅有一个交点.

解　(1) $f'(x)=3x^2-2x-1$.

若 $f'(x)=0$，则 $x=-\dfrac{1}{3}$，1.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$的变化情况如下表.

x	$\left(-\infty,\ -\dfrac{1}{3}\right)$	$-\dfrac{1}{3}$	$\left(-\dfrac{1}{3},\ 1\right)$	1	$(1,\ +\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以 $f(x)$的极大值是 $f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{5}{27}+a$，极小值是 $f(1)=a-1$.

(2) 函数 $f(x)=x^3-x^2-x+a=(x-1)^2(x+1)+a-1$.

由此可知 x 取足够大的正数时，有 $f(x)>0$；x 取足够小的负数时，有 $f(x)<0$.

所以曲线 $y=f(x)$与 x 轴至少有一个交点.

结合 $f(x)$的单调性可知：

当 $f(x)$的极大值$\dfrac{5}{27}+a<0$，即 $a\in\left(-\infty,\ -\dfrac{5}{27}\right)$时，它的极小值也小于 0，

因此曲线$y=f(x)$与 x 轴仅有一个交点，它在$(1,+\infty)$上；

当 $f(x)$的极小值 $a-1>0$，即 $a\in(1,+\infty)$时，它的极大值也大于 0，

因此曲线 $y=f(x)$与 x 轴仅有一个交点，它在$\left(-\infty,-\dfrac{1}{3}\right)$上.

所以当 $a\in\left(-\infty,\ -\dfrac{5}{27}\right)\cup(1,\ +\infty)$时，曲线 $y=f(x)$与 x 轴仅有一个交点.

点评　本小题主要考查导数的概念和计算，应用导数研究函数性质的方法及推理和运算能力.

4.4　生活中的优化问题举例

教材线索

本节选择了许多与实际生活密切相关的、现实世界中比较常见的素材（例如，教材P. 46～P. 50的例1至例5），通过这些素材来引发学生应用数学知识和方法解决实际问题的兴趣，体会导数在解决生活中的问题（例如，使利润最大、用料最省、效率最高等优化问题）中的作用.

教学目标

（一）知识与技能

了解导数在解决实际问题中的作用，能利用导数及数学建模的方法解决简单问题.

（二）过程与方法

通过实际问题的研究，促进学生分析问题、解决问题以及数学建模能力的提高.

（三）情感、态度与价值观

通过对有关利润最大、用料最省、效率最高等优化问题的探究，促进学生全面认识数学的科学价值、应用价值和文化价值.

教材分析

1. 重点

数学建模，利用导数求函数最值的方法解决有关生活中的优化问题.

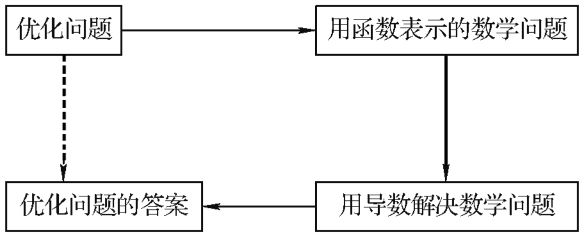
2. 难点

数学建模的步骤与方法.

3. 在经济生活中，人们经常遇到最优化问题. 例如，为使经营利润最大、生产效率最高，或为使用力最省、用料最少、消耗最省等，需要寻求相应的最佳方案或最佳策略，这些都是最优化问题. 导数是解决这类问题的基本方法之一.

4. 导数在解决实际生活中的有关最大（小）值问题，一般应先建立目标函数，建立好目标函数后，则问题转化为“导数在函数中的应用”的内容，解题时应注意实际意义.

5. 解决优化问题的基本思路是：



教学建议

1. 解决实际应用问题关键在于建立数学模型和目标函数. 把"问题情景"译为数学语言，找出问题的主要关系，并把问题的主要关系近似化、形式化，抽象成数学问题，再化归为常规问题，选择合适的数学方法求解.

2. 优化问题解决的途径之一是通过收集大量的统计数据，将这些数据以散点的形式在坐标中表示出来，从散点图上直观发现变量之间具有一定的相关关系，进而用函数模型近似刻画这些散点的相关关系，用确定的函数关系近似反映两个变量间的相关关系，用样本估计总体，对总体的变化趋势进行判断和预测，这是科学研究常用的方法之一，在教学中应引起重视.

3. 本节"生活中的优化问题举例"实际上是求实际问题中的最大（小）值，结合教材中的五个例子，其主要步骤如下：(1) 列出实际问题的数学模型，写出实际问题中变量之间的函数关系 $y=f(x)$；(2) 求函数的导数 $f'(x)$，解方程 $f'(x)=0$；(3) 比较函数在区间端点和使 $f'(x)=0$ 的点的取值大小，最大（小）者为最大（小）值.

例题解析

例 1 有一边长为 a 的正方形铁片，铁片的四角截去四个边长为 x 的小正方形，然后做成一个无盖方盒（图 4－16）.

(1) 试把方盒的容积 V 表示成 x 的函数；

(2) 求 x 多大时，做成方盒的容积 V 最大.

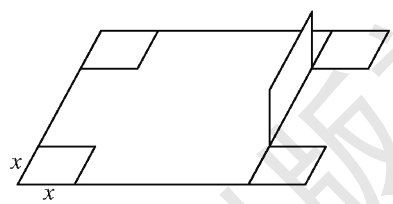


图 4－16

分析 题中方盒的高就是截去的小正方形的边长，方盒底面是边长为 $a-2x$ 的正方形，方盒的容积 V 就是底面积乘以高. 要做成一个无盖方盒，方盒的高 x 必须满足 $0<x<\frac{a}{2}$，函数 $V'(x)$ 在区间 $\left(0,\ \frac{a}{2}\right)$ 只有一个零点. 在实际问题中，有时会遇到函数在区间内只有一个点使 $f'(x)=0$ 的情形，如果函数在这点有极大（小）值，那么不与端点值比较，也可以知道这就是最大（小）值.

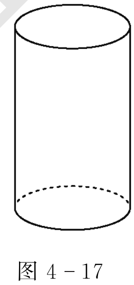


图 4－17

例 2 如图 4－17，某种罐装饮料设计每罐容积为 $324\ \text{cm}^3$，罐的形状为圆柱体，圆柱侧面的厚度为 0.05 cm，上下底厚度为 0.1 cm，如何设计罐体才能

使原材料用量最少？做一个罐至少要用多少立方厘米的原材料？（π 取 3）

说明　本题可作如下引申：

引申 1　某种圆柱形饮料罐的容积一定，且上、下两底的厚度是侧壁部分厚度的 2 倍，当圆柱的高与底面半径之比为何值时，用料最省？

引申 2　圆柱形金属饮料罐的容积一定时，它的高与底半径应怎样选取，才能使所用材料最省？

例 3　如图 4－18，让一个木块从光滑斜面的上端自由滑落到下端. 给定斜面两端的水平距离为 d，如何选择斜面和水平面之间的角度 x，才能使从上端到下端滑落所用的时间最短？

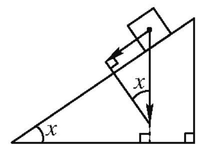


图 4－18

分析　本题用到了物理学的有关知识以及力的合成与分解、解直角三角形、应用导数求最值等知识，综合应用的知识较多，还可以应用三角函数公式，将时间 t 化简为 $t=\sqrt{\dfrac{2d}{g\sin 2x}}$，$x\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，所以当 $x=\dfrac{\pi}{4}$时所用时间最短.

例 4　在经济学中，生产 x 个单位产品的成本称为成本函数，记为 $C(x)$，出售 x 个单位产品的收益称为收益函数，记为 $R(x)$，$R(x)-C(x)$称为利润函数，记为 $L(x)$.

（1）如果 $C(x)=250\ 000+200x+\dfrac{1}{4}x^2$（元），那么生产多少单位产品时，平均成本 $\dfrac{C(x)}{x}$最小？

（2）如果 $C(x)=50x+10\ 000$（元），产品的出售价格 $P(x)=100-0.01x$（元），那么出售价格为多少时可使利润最大？

分析　（1）平均成本为$\dfrac{C(x)}{x}=\dfrac{250\ 000+200x+\dfrac{1}{4}x^2}{x}=\dfrac{250\ 000}{x}+200+\dfrac{1}{4}x$，

所以，令 $y=\dfrac{C(x)}{x}$，则 $y'=-\dfrac{250\ 000}{x^2}+\dfrac{1}{4}$. 令 $y'=0$，得 $x=1\ 000$.

容易得到，当 $0<x<1\ 000$ 时，$y'<0$；当 $x>1\ 000$，$y'>0$.

所以要使平均成本$\dfrac{C(x)}{x}$最小，则应生产 1 000 个单位产品.

（2）由 $P(x)=100-0.01x$ 得到当出售 x 个单位产品时，收益函数为 $R(x)=x(100-0.01x)$，

则利润函数 $L(x)=R(x)-C(x)=x(100-0.01x)-(50x+10\ 000)$
$=-0.01x^2+50x-10\ 000$.

由 $L'(x)=-0.02x+50=0$，解得 $x=2\ 500$. 结合 $L(x)$的图象可知，当 $x=2\ 500$ 时，利润 $L(x)$最大，此时出售价格 $P(x)=100-0.01\times 2\ 500=75$（元）.

因此，出售价格为 75 元时，可使用利润最大.

例 5　江轮逆水上行 300 km，水速为 v km/h，船在静水中的速度为 x km/h. 已知行船

时每小时的耗油量为 cx^2，即与船相对于水的速度的平方成正比．问 x 多大时，全程的耗油量 $H(x)$最小？

分析 本题是有关耗油量最小的问题，现在我们国家资源紧张，能源短缺，减少能源的消耗是我们必须考虑的一个现实问题，本题素材有现实意义．本题除了用导数求最小值外，还可以运用均值不等式求解：

$$\begin{aligned}H(x)&=\frac{300cx^2}{x-v}\\&=300c\,\frac{x^2-v^2+v^2}{x-v}\\&=300c\left[(x-v)+\frac{v^2}{x-v}+2v\right]\geqslant 1\,200cv,\end{aligned}$$

当且仅当 $x-v=\dfrac{v^2}{x-v}$，即 $x=2v$ 时，等号成立．

故当 $x=2v$ 时，全程的耗油量最少．

相关链接

（2006 年福建卷理科）统计表明，某种型号的汽车在匀速行驶中每小时的耗油量 y（L）关于行驶速度 x（km/h）的函数解析式可以表示为：$y=\dfrac{1}{128\,000}x^3-\dfrac{3}{80}x+8$（$0<x\leqslant 120$）．已知甲、乙两地相距 100 km．

（1）当汽车以 40 km/h 的速度匀速行驶时，从甲地到乙地要耗油多少升？

（2）当汽车以多大的速度匀速行驶时，从甲地到乙地耗油最少？最少为多少升？

解 （1）当 $x=40$ 时，汽车从甲地到乙地行驶了 $\dfrac{100}{40}=2.5$ h，

要耗油 $\left(\dfrac{1}{128\,000}\times 40^3-\dfrac{3}{80}\times 40+8\right)\times 2.5=17.5$（L）．

答：当汽车以 40 km/h 的速度匀速行驶时，从甲地到乙地耗油 17.5 L．

（2）当速度为 x km/h 时，汽车从甲地到乙地行驶了 $\dfrac{100}{x}$ h，设耗油量为 $h(x)$ L，

依题意得 $h(x)=\left(\dfrac{1}{128\,000}x^3-\dfrac{3}{80}x+8\right)\cdot\dfrac{100}{x}=\dfrac{1}{1\,280}x^2+\dfrac{800}{x}-\dfrac{15}{4}$（$0<x\leqslant 120$），

$h'(x)=\dfrac{x}{640}-\dfrac{800}{x^2}=\dfrac{x^3-80^3}{640x^2}$（$0<x\leqslant 120$）．

令 $h'(x)=0$，得 $x=80$．

当 $x\in(0,80)$时，$h'(x)<0$，$h(x)$是减函数；

当 $x\in(80,120)$时，$h'(x)>0$，$h(x)$是增函数．

∴当 $x=80$ 时，$h(x)$取得极小值 $h(80)=11.25$．

因为 $h(x)$在 $(0,120]$ 上只有一个极值，所以它是最小值．

答：当汽车以 80 km/h 的速度匀速行驶时，从甲地到乙地耗油最少，最少为11.25 L．

4.5 定积分与微积分基本定理

4.5.1 曲边梯形的面积

教材线索

本小节首先从一个数学实验入手，从计算一个抛物线弓形面积问题出发，转化为求一个曲边梯形面积的问题，构建问题情境，然后根据从具体到抽象、从特殊到一般的原则，先研究一个特殊的曲边梯形面积问题，通过类比圆的面积的求法得到解决它的思想方法，并具体化为三个步骤——化整为零、以直代曲、积零成整（求和逼近），从而猜想并证明它的面积，最后得到抛物线弓形面积.

求曲边梯形面积的过程蕴涵着定积分的基本思想方法，因此，在本小节的教学中，应突出解决问题的思想方法，从而为引入定积分的概念、体会定积分的基本思想、初步了解定积分的概念奠定基础.

教学目标

（一）知识与技能

通过探求曲边梯形的面积，了解化整为零、以直代曲、积零成整的思想方法，建立定积分概念的认知基础，为理解定积分概念及几何意义奠定基础.

（二）过程与方法

经历探求曲边梯形的面积，体验化整为零、以直代曲、积零成整的方法，逐步培养学生分析问题、解决问题的能力和思维能力.

（三）情感、态度与价值观

1. 通过探求曲边梯形的面积，培养学生在探索过程中善于变通的思想，敢于挑战陈规的精神.

2. 通过问题的引入，让学生了解中国在数学发展史上所取得的辉煌成就，培养学生的爱国主义精神，激发学生学习数学的兴趣.

教材分析

1. 重点

了解定积分的基本思想方法——化整为零、以直代曲、积零成整的思想，初步掌握求曲边梯形面积的三个步骤：化整为零（分割）、以直代曲（近似代替）、积零成整（求和逼近）.

2. 难点

化整为零、以直代曲、积零成整思想的形成过程.

3. 教材从计算抛物线弓形面积出发，提出如何求曲边梯形面积的问题，为了得到解决问题的方法，教材用“旁注”引导学生类比求圆的面积的方法，从而得出求曲边梯形面积的基本思想方法就是化整为零、以直代曲.

4. 教材以“问题的由来和历史”指出计算抛物线弓形面积不仅是有趣的数学问题，也具有实际意义，从而激发学生的求知欲望，提高学习数学的兴趣，又渗透了数学文化，符合新课标精神.

5. 在此基础上，教材详细介绍了曲边梯形面积的计算过程，采用了从有限到无限、从特殊到一般、误差估计并结合数学实验的方法，猜想并证明了曲边梯形面积的结果，从而解决了求抛物线弓形面积的问题.

6. 关于教材几处“旁白”的说明：

（1）关于“等分”问题．当然，在定积分理论中，这种分割应该是任意的，只要分得细即保证每一个小区间的长度都趋于0就可以了，这样误差就会很小，且对于连续函数来说，“等分”与“任意分割”是等价的，因此，为了方便，教材采用等分的方式来研究问题，这样既不失严谨性，又照顾了学生的认知基础.

（2）关于以直代曲，教材是以较小的矩形来代替对应的曲边梯形，当然也可以用较大的矩形来代替相应的曲边梯形，只要分得细，无论是较小的矩形，还是较大的矩形都会无限逼近曲边梯形，教材中从图形的直观上来解释，事实上亦解决了以直代曲所产生的误差估计.实际上，更一般地可以取小区间上的任意一点 z，用 $F(z)$ 作为矩形的长来计算.

7. 积零成整的思想是本节课的难点之一. 教材采用计算器计算和计算机编程计算，引导学生观察近似值的变化趋势，向学生展示逼近过程，以增强学生的直观感知，然后再给予证明. 而证明中如何求和，教材中以“旁注”的形式介绍了求和的思想方法.

8. 关于信息技术应用. 由于数学实验中通常有大量的计算、画图、作表格，有条件的学校，应充分使用信息技术，从几何直观上引导学生感知化整为零、以直代曲、积零成整的思想方法，体会分割、近似代替、求和逼近（取极限）是求曲边梯形面积的基本步骤.

教学建议

1. 着重揭示解决问题的思想方法.

教学中应从实际问题出发提出解决求曲边梯形面积的必要性和重要性，进而引导学生回

忆、类比求圆面积的方法，概括出求曲边梯形面积的基本思想：把一个曲边梯形分成多个小曲边梯形、用矩形代替小曲边梯形即化整为零、以直代曲的思想. 事实上，这就是定积分概念中蕴涵的最本质思想，也是应用定积分解决实际问题的思想方法.

2. 重点强调解决问题的三个步骤.

教材将化整为零、以直代曲、积零成整的思想具体化为三个步骤：

第一步，化整为零、以直代曲. 教学中应引导学生体会：用以直代曲的方法求曲边梯形的面积时，关键是减小误差. 如果将曲边梯形分成若干个小曲边梯形，在每个局部小范围内实施以直代曲，那么就能有效地减小误差，而且分割得越细，误差就会越小. 由于所给曲边梯形的曲边是连续曲线，并且为了方便计算，教材采用了“等分”的办法来研究问题.

第二步：求和. 对每个小曲边梯形实施以直代曲后，用小矩形面积近似代替相应的小曲边梯形面积，进而求出所有小矩形面积之和，得到原曲边梯形的近似值.

第三步：积零成整. 显然，分割越细，近似程度越好. 教学中应采用从有限到无限、从特殊到一般，采用几何直观和实验计算相结合的方法，引导学生观察近似值的变化趋势，估计以直代曲所产生的误差，引导学生想象近似值随分割的不断细化而趋向于曲边梯形面积的过程，有条件的要利用信息技术向学生展示逼近过程，以增强学生的直观感知，然后再给予证明.

由于教材对曲边梯形的面积 $S=\dfrac{4}{3}$ 的证明较为抽象，教学时可将教材的证明改为证明曲线 $y=x^2$（$0\leqslant x\leqslant 1$）和 x 轴之间的曲边形的面积 $Q=\dfrac{1}{3}$.

例题解析

例 曲线 $y=x^2(0\leqslant x\leqslant 1)$和 x 轴之间的曲边形的面积 $Q=\dfrac{1}{3}$.

解 根据求曲边梯形面积的基本思想,分为三个步骤来实施.

首先把区间$[0,1]$$n$ 等分,整个曲边梯形被分成 n 个小曲边梯形,用较小的矩形近似代替相应的小曲边梯形,每个小矩形的宽度都是$\dfrac{1}{n}$,记 $x_0=0,x_1=\dfrac{1}{n},x_2=\dfrac{2}{n},x_3=\dfrac{3}{n},\cdots,x_{n-1}=\dfrac{n-1}{n},x_n=1$,则每个小矩形的长度依次为 $x_1^2,x_2^2,\cdots,x_{n-1}^2$.

其次求出所有小矩形面积之和记作 $Q(n)$，

则
$$\begin{aligned}Q(n)&=(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n-1}^2)d\\&=\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right]\cdot\frac{1}{n}\\&=[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2]\cdot\frac{1}{n^3}.\end{aligned}$$

现在关键是如何求 $1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2$ 的和.

可利用$(k+1)^3=k^3+3k^2+3k+1$，变形成 $3k^2=(k+1)^3-k^3-3k-1$，

所以 $3\cdot1^2=2^3-1^3-3\cdot1-1$,

$3\cdot2^2=3^3-2^3-3\cdot2-1$,

$3\cdot3^2=4^3-3^3-3\cdot3-1$,

……

$3(n-1)^2=n^3-(n-1)^3-3(n-1)-1$.

将以上各式相加,得

$$3[1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2]=n^3-n-3[1+2+3+\cdots+(n-1)].$$

注意到

$$\begin{aligned}&1+2+3+\cdots+(n-1)\\=&\frac{1}{2}\cdot[1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)+(n-1)+(n-2)+\cdots+3+2+1]\\=&\frac{1}{2}n(n-1),\end{aligned}$$

所以 $3[1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2]=n^3-n-\frac{3}{2}n(n-1)=\frac{1}{2}(2n^3-3n^2+n)$,

$$Q(n)=\frac{1}{6}\cdot\frac{2n^3-3n^2+n}{n^3}=\frac{1}{3}-\frac{3n-1}{6n^2},$$

$$\left|Q(n)-\frac{1}{3}\right|=\frac{3n-1}{6n^2}<\frac{1}{n}.$$

又因为 $|Q-Q(n)|<\frac{1}{n}$,所以 $\left|Q-\frac{1}{3}\right|<\frac{2}{n}$.

当 n 充分大时,$\frac{2}{n}$可以小于任何给定的正数,这表明$\left|Q-\frac{1}{3}\right|$比任何一个正数都小,因此 $Q=\frac{1}{3}$,从而 $S=Q+1=\frac{4}{3}$.

相关链接

中国古典数学理论的奠基人——刘徽

“割圆术是刘徽创造的运用极限思想证明圆面积公式及计算圆周率的方法”.

——摘自《中国大百科全书》数学卷

刘徽是中国魏晋时期杰出的数学家，中国古典数学理论的奠基者之一. 因史书无传，故其籍贯和生卒年月不详.

刘徽从小对中国传统数学名著《九章算术》极感兴趣，长大后对它进行了反复的研究，于魏陈留王景元四年（公元 263 年）写成《九章算术注》一书，对《九章算术》作了详细而系统的注释、整理和阐发. 注文不仅运用“析理以辞”的逻辑方法，对《九章算术》中的大

量概念和算法进行了定义和证明，从而为中国古典数学奠定了理论基础；而且还提出了许多《九章算术》原来所没有的数学思想和方法，为中国数学思想的发展作出了新的贡献．其中最值得称道并在数学史上影响深远的，是他运用极限思想所创立的“割圆术”．

刘徽创立的“割圆术”，即用圆内接正多边形的周长去无限逼近圆周并以此求取圆周率的方法．关于圆的周长与其直径之间的比率（即圆周率）问题，是古今中外数学家们共同感兴趣并一直孜孜以求的重要问题．中国古代从先秦时期开始，一直取“周三径一”（即 $\pi=3$）的数值来进行有关圆的计算，但是用这个数值进行的计算结果误差很大．按照刘徽的分析，用“周三径一”算出来的圆周长，实际上不是圆的周长而是圆内接正六边形的周长（如图 4－19）．东汉的张衡不满足这个结果，他从研究圆与它的外切正方形的关系（如图 4－20）着手，得到圆周率 $\pi=\sqrt{10}\approx3.142\,2$．这个数值比“周三径一”有所进步，但刘徽认为

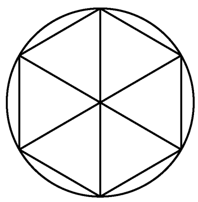


图 4－19

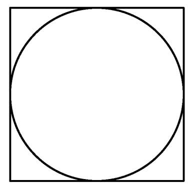


图 4－20

其计算出来的圆周长要超过实际的圆周长，也不精确．刘徽以极限思想为指导，首创用“割圆术”来求圆周率，既大胆创新，又严密论证，从而为圆周率的计算指出了一条科学的道路．

在刘徽看来，既然用“周三径一”计算出来的圆周长实际上是圆内接正六边形的周长，与圆周长相差很多，那么我们可以在圆内接正六边形把圆周等分为六条弧的基础上，再继续等分，把每段弧再分割为二，做出一个圆内接正十二边形，这个正十二边形的周长不就比正六边形的周长更接近圆周了吗？如果把圆周再继续分割，做出一个圆内接正二十四边形，那么这个正二十四边形的周长又比正十二边形的周长更接近圆周（如图 4－21）．刘徽认为“割之弥细，所失弥少”，即越是分割得细，其内接正多边形的周长就越是接近圆周．如此不断地分割下去，“割之又割，以至于不可割，则与圆合体而无所失矣”，即到了圆内接正多边形的边数无限多的时候，它的周长就与圆周“合体”而完全一致了．

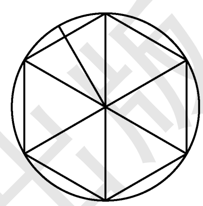


图 4－21

按照上述的思想方法，刘徽循序渐进，锲而不舍，从圆内接正六边形算起，边数逐渐加倍，相继算出正十二边形，正二十四边形……以至于正九十六边形每边的长，并且求出正一百九十二边形的面积 S_{192}，这相当于求得 $\pi=3.141\,024$．他在实际计算中，采用了 $\pi=3.14=\frac{157}{50}$．不仅这样，刘徽还继续求到圆内接正三千零七十二边形的面积，验证了前面的结果，并且得出更精确的圆周率值 $\pi=\frac{3\,927}{1\,250}=3.141\,6$．这个结果，是当时世

界上的最佳数据.

刘徽的割圆术，为圆周率研究工作奠定了坚实可靠的理论基础，在数学史上占有十分重要的地位. 他所得到的结果在当时世界上也是很先进的. 刘徽的计算方法只用圆内接多边形面积，而无须外切正多边形面积，这比古希腊数学家阿基米德用圆内接和外切正多边形计算，在程序上要简便得多，可以收到事半功倍的效果. 同时，为解决圆周率问题，刘徽所运用的初步的极限概念和直曲转化思想，这在1 500年前的古代，也是非常难能可贵的. 因而，刘徽成为我国古典数学理论的奠基者之一. 吴文俊先生说："从对数学贡献的角度来衡量，刘徽应该与欧几里得、阿基米德等相提并论."

为了纪念刘徽对数学作出的巨大贡献，并推动中国尽快成为世界数学强国，在当代数学大师陈省身教授的倡议下，由南开大学与天津大学合作创立了刘徽应用数学中心，其宗旨是聚集数学人才，开展数学与应用数学的研究.

4.5.2 计算变力所做的功

教材线索

本小节以求能达到要求高度的上抛物体的初速问题引入，教材中，结合物理知识，指出要求该物体的初速只要求出在这一过程中重力对物体所做的总功即可，因此该问题归结为求重力对物体所做的总功，而在这一过程中物体所受的重力会随着高度的增加而减小，则求重力对物体所做的功相当于计算变力所做的功.

求变力所做的功也是定积分概念的一个重要背景，与求曲边梯形的面积实例相比，它们只是背景不同，解决问题的思想方法和求解步骤都是相同的，它们的求解过程都蕴涵着定积分的基本思想.

教学目标

（一）知识与技能

1. 通过探求计算变力所做的功的问题，让学生理解变力所做的功的计算和曲边梯形面积的计算在数学上是一样的.

2. 让学生深刻体会"化整为零、以直代曲、积零成整"这种求曲边梯形面积的思想方法.

（二）过程与方法

让学生经历应用数学工具解决物理问题，并通过问题的解决，培养学生探索问题、解决

问题的能力，培养学生“用数学”的意识.

（三）情感、态度与价值观

让学生体会数学在物理中的应用，培养学生从数学的角度思考生活中实际问题的习惯，体会数学的应用价值.

教材分析

1. 重点

化整为零、以直代曲、积零成整的思想方法计算变力所做的功.

2. 难点

发现变力所做的功的计算和曲边梯形面积的计算在数学上是一样的，以及变力所做的功的计算过程.

3. 教材中关于两物体之间的引力计算公式和重力对物体所做的总功计算公式，目的是为在数学上计算变力所做的功作铺垫，教学中只要求学生结合物理知识知道即可.

教材中关于计算变力所做的功的问题，重在探索发现变力计算所做的功和计算曲边梯形面积在数学上是一样的，对具体的计算结果不作要求.

教学建议

1. 在本小节的教学中，应注意引导学生类比求曲边梯形面积的过程，让学生自己独立解决问题，以进一步体会定积分的背景、思想和方法，为引入定积分的概念奠定基础.

2. 对于本节课的问题引入，教学时，在学生阅读教材内容的基础上，指出解决该问题只要计算在这一过程中重力对物体所做的总功即可，从而提出本节课的主题——如何计算变力所做的功.

3. 对变力所做的功的求解过程，教学时应重在分析解决该问题的基本思想，即类比求曲边梯形的面积，发现变力计算所做的功和计算曲边梯形面积在数学上是一样的，通过化整为零、以直代曲、积零成整三个步骤来解决，对具体的计算过程和计算结果不做重点分析.

4. 教材关于变力做功的问题较为抽象，教学时可变式为“设质点 m 受力 $F(x)$的作用，沿直线由 A 点运动到 B 点，求变力 $F(x)$做的功”的问题.

5. 关于习题的处理. 本节课课后习题 11 有三个问题，其中第一个问题可以作为课堂练习，其他问题作为课后习题.

6. 本节课后还可补充其他问题，如计算变速直线运动的路程问题，让学生进一步体会数学在物理中的应用，培养学生“用数学”的意识.

例题解析

例 1 设质点 m 受力 $F(x)$的作用，沿直线由 A 点运动到 B 点，如图 4－22，求变力 $F(x)$做的功.

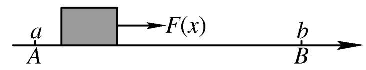


图 4－22

解 类似计算曲边梯形面积的方法.

（1）对$[a, b]$作分割：$a=x_0<x_1<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b$，每个区间长度为$d=\dfrac{b-a}{n}$.

（2）F 虽然是变力，但在很短一段间隔内，F 的变化不大，可近似看作是常力做功问题，按照求曲边梯形面积的思想来解决. 因此当每个小区间的长度都很小时，小区间上的力 $F\approx F(x_i)$，那么在小区间上力 $F(x_i)$做的功 $W_i\approx F(x_i)\cdot d$.

（3）求和：力 F 在$[a,b]$上做的功 $W\approx[F(x_0)+F(x_1)+F(x_2)+\cdots+F(x_{n-1})]\cdot d$ 或 $W\approx[F(x_1)+F(x_2)+F(x_3)+\cdots+F(x_n)]\cdot d$

分割越细，近似程度越接近，积零成整就是力 F 在 $[a, b]$ 上做的功.

例 2 弹簧在拉伸过程中，力与伸长量成正比，即 $F(x)=kx$（k 是常数，x 是伸长量)，求弹簧从平衡位置拉长 b 所做的功.

分析 若物体在常力 F 作用下沿着力的方向移动距离 x，则所做的功 $W=Fx$. 本题 F 是克服弹簧拉力的变力，即变力做功问题，采用求曲边梯形面积的方法来解决.

解 分成三个步骤：

将$[0,b]$$n$ 等分，每一小段的长度 $d=\dfrac{b}{n}$，记 $x_0=0$，$x_1=\dfrac{b}{n}$，$x_2=\dfrac{2b}{n}$，$x_3=\dfrac{3b}{n}$，$\cdots$，$x_{n-1}=\dfrac{(n-1)b}{n}$，$x_n=b$. 当 n 很大时，在每一小段上的力变化是很小的，可以近似认为是常力做功，则从 0 到 b 所做的总功 W 近似地等于：

$$\begin{aligned}W(n)&=(kx_1+kx_2+kx_3\cdots+kx_{n-1})\cdot\frac{b}{n}\\&=(k\cdot\frac{b}{n}+k\cdot\frac{2b}{n}+k\cdot\frac{3b}{n}+\cdots+k\cdot\frac{(n-1)b}{n})\cdot\frac{b}{n}\\&=\frac{kb^2}{n^2}[1+2+3+\cdots+(n-1)]\\&=\frac{kb^2}{n^2}\ \frac{n(n-1)}{2}\\&=\frac{kb^2}{2}(1-\frac{1}{n}).\end{aligned}$$

当 n 充分大时，求得弹簧从平衡位置拉长 b 所做的功为 $W=\dfrac{kb^2}{2}$.

相关链接

求物体做直线运动经过的路程

若已知物体做直线运动，在时刻 t 速度为 $v(t)$，求在时间段 $t=a$ 至 $t=b$ 物体所经过的

路程.

类似求曲边梯形面积的方法，首先将时间区间$[a,b]n$ 等分，分点为：

$$a=t_0<t_1<\cdots<t_{i-1}<t_i<\cdots<t_{n-1}<t_n=b,$$

每隔一个时间间隔测量一次问题的速度，即由 $v(t)$求出 $v(t_0)$，$v(t_1)$，…，$v(t_{n-1})$，$v(t_n)$，两次测量所间隔的时间就是时间的改变量 $\Delta t=t_i-t_{i-1}=\dfrac{b-a}{n}(i=1,2,\cdots,n)$.

在每个时间间隔上，由于 $v(t)$的变化很小，可以认为物体近似于做匀速直线运动，因此在时间段$[a,b]$内物体所走过的距离 s 的近似值为：$v(x_0)\Delta t+v(x_1)\Delta t+\cdots+v(x_{n-1})\Delta t$，也可以取 s 的近似值为：$v(x_1)\Delta t+v(x_2)\Delta t+\cdots+v(x_n)\Delta t$.随着分割加密即 n 增大，如果以上两近似值都趋于一个定值，则这个值就是物体在时间段$[a,b]$内所走过的路程.

例如，若速度 $v=v(t)=\dfrac{1}{t+1}(t\geqslant 0)$，求物体在时间段 $t=0$ 至 $t=1$ 内所经过的路程.

解　取 $n=10,\Delta t=\dfrac{1-0}{10}=0.1,t_0=0,t_{10}=1$,则

$$s\approx v(0)\Delta t+v(0.1)\Delta t+v(0.2)\Delta t+\cdots+v(0.9)\Delta t$$

$$=\left(1+\frac{1}{1.1}+\frac{1}{1.2}+\cdots+\frac{1}{1.9}\right)\cdot\frac{1}{10}\approx 0.7188,$$

或 $s\approx v(0.1)\Delta t+v(0.2)\Delta t+\cdots+v(0.9)\Delta t+v(1)\Delta t$

$$=\left(\frac{1}{1.1}+\frac{1}{1.2}+\cdots+\frac{1}{1.9}+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{10}\approx 0.6688.$$

由于 $v(t)$单调下降，所以 $0.6688<s<0.7188$.

4.5.3　定积分的概念

教材线索

本小节在前面研究曲边梯形面积和变力做功的基础上，通过概括它们的共同特征而引入定积分概念，给出定积分的符号和几何意义. 为了进一步体会定积分的概念，教材又给出了两个具体问题，在此基础上，提炼出定积分的数学定义.

教学目标

（一）知识与技能

1. 让学生初步了解定积分的概念和定积分的几何意义，并通过实际问题进一步体会定

积分的含义.

2. 让学生经历提炼、归纳定积分的数学定义过程，了解定积分的数学定义.

（二）过程与方法

1. 通过求曲边梯形面积、变力所做的功、汽车行驶路程等问题，培养学生从实际出发，从具体到抽象的观察、归纳、抽象、概括的能力.

2. 通过提炼、归纳定积分数学定义的过程，让学生体会从具体到抽象、从有限到无限以及化整为零、以直代曲、数形结合等数学思想方法.

（三）情感、态度与价值观

1. 通过求曲边梯形面积、变力所做的功、汽车行驶路程等问题来了解定积分的含义，体会从具体到抽象以及化整为零、以直代曲、数形结合等数学思想方法.

2. 通过提炼、归纳定积分数学定义的过程，培养学生探索问题的积极性、主动性，培养学生思考问题的周到严密性，培养学生观察、联想、猜测、归纳等数学能力.

教材分析

1. 重点

定积分概念的引入，定积分的数学定义.

2. 难点

定积分的几何意义，提炼定积分数学定义的过程.

3. 教材首先通过归纳曲边梯形面积的计算、变力所做的功的计算以及圆锥体积的计算的共同特征都相当于计算一个曲边梯形的面积引入定积分. 教学时，要注意引导学生在发现它们的异同点的基础上概括出共同的本质特征：尽管它们的背景不同，但解决它们的思想方法是相同的，即都采用了化整为零、以直代曲、积零成整的思想. 而且这种思想方法具有普遍意义，类似的问题都可以通过化整为零、以直代曲、积零成整加以解决，即其数学模型都是一样的，都相当于求一个函数 $f(x)$ 在区间 $[a,\ b]$ 上曲边梯形的面积. 从而引出定积分的概念，并给出定积分的符号表示. 然后通过两个实际问题来进一步体会定积分的概念，在此基础上，归纳、提炼出定积分的数学定义.

在定积分的数学定义中关于点 z_k 的取法. 在定积分的数学定义中，规定点 z_k 是第 k 个小区间上任意取定的点，这主要是考虑到定义的一般性，但在解决实际问题或计算定积分时，可以把点 z_k 都取为每个小区间的左端点（或都取为右端点），以便于得出结果. 教学中只需作直观说明，不必深究.

4. 由于有了求曲边梯形面积的经验，学生自己得出定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的几何意义并不困难，难的是曲边梯形面积的“代数和”. 注意到前面问题中被积函数是正的，定积分的值也为正，教学中可以通过图形，或通过具体问题让学生直观上了解定积分的值可以是正值，也可以是负值，还可以等于零，从而得到定积分的几何意义就是曲边梯形面积的代数和.

5. 教材中安排两个例题的目的是让学生从更多的实际问题中体会定积分的概念.

教学建议

1．定积分概念的引入是本节课的重点，因此教学时应在前面学习的基础上，着重分析、归纳求曲边梯形的面积、变力所做的功以及圆锥体积的共同特征：第一，都相当于计算一个曲边梯形的面积，都可以通过化整为零、以直代曲、积零成整来解决；第二，最终都可以归结为求同一种类型的和式的值，最终结果均为当 n 足够大时的逼近值．有了上述过程，引入定积分的概念就水到渠成了．

在给出定积分的概念后，教学中还可以引导学生利用定积分把求曲边梯形的面积、变力所做的功、圆锥体积等几个背景和实际意义截然不同的问题的结果表示成同样的形式，让学生体会定积分的强大威力，体会定积分的价值．

2．提炼定积分概念的数学定义是本节课的难点，利用教材中例 1 的问题，在教学时可设计一个具体求汽车走过的路程问题，例如汽车做变速直线运动，在时刻 t 的速度为 $v(t)=-t^2+2$，求它在 $0\leqslant t\leqslant 1$ 这段时间内行驶的路程 s 是多少．通过师生互动，探讨求解过程，类比前面解决过的问题，归纳总结这些问题的共同特征，同时指出在应用定积分处理实际问题时，常常要说明该问题相当于求一个曲边梯形的面积，要绕弯子．在此基础上提炼出定积分的数学定义，使定积分的概念具有独立性和抽象性，以便更好地用来解决问题，而不依赖问题的具体背景．

3．在给出定积分的概念和数学定义后，建议在教学中作如下几点说明：

（1）定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 中符号的含义：$\int$ 叫作积分号，它是将“Sum”的第一个字母 S 拉长得到的，带有求和的意思．a 和 b 分别叫作定积分的下限和上限，区间 $[a,\ b]$ 叫作积分区间，x 叫作积分变量，且变量 x 可以换成任意字母，意义不变，$f(x)$ 叫作被积函数，$f(x)\mathrm{d}x$ 叫作被积式．定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的计算结果是一个数，它可以是正值，也可以是负值，还可以等于零．

（2）定积分的数学定义：

定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是一种特定形式的和式 $\sum\limits_{k=1}^{n} f(z_k)\Delta x_k$，$\Delta x_k$ 中最大的记作 d，当 d 趋于 0 时的极限，即 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示当 n 趋于无穷大时，$\sum\limits_{k=1}^{n} f(z_k)\Delta x_k$ 所趋向的定值．

关于定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 中的被积函数，由于我们目前遇到的函数基本上都是初等函数，而初等函数都是连续的，连续函数总是可积的，所以不用考虑被积函数是否可积，对此，教学中只需作说明，不必深究．

（3）关于求和符号 $\sum$：利用求和符号 $\sum$ 可以简洁地表示出若干个数（或单项式）连加的式子，尤其是在表示和项不是具体数值的连加式时，求和符号被广泛使用．例如，

$$S=\Delta S_1+\Delta S_2+\cdots+\Delta S_i+\cdots+\Delta S_n=\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i,$$

$$A=f(x_1)\Delta x_1+f(x_2)\Delta x_2+\cdots+f(x_k)\Delta x_k+\cdots+f(x_n)\Delta x_n=\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x_k$$

4. 关于例题的教学

例 1 的教学应从图形上直观了解：教材图 4－40 上曲边梯形的面积就是汽车走过的路程，根据定积分的概念，也就是速度函数在时间区间上的定积分.

例 2 的教学，由于闸板所受的压力较为抽象，教学时可类比上节课计算变力所做的功的问题，进行类比教学，也可让学生自学，关键在于指出计算闸板所受的压力即求压强函数 $f(h)$在区间［0，4］的定积分.

教学中可补充例题来帮助学生进一步体会定积分的数学定义，利用定积分来解决实际问题. 例如设计这样的问题：利用定积分的定义，计算$\int_0^2(-x^2+5)\mathrm{d}x$ 的值，并从几何上解释这些值表示什么，等等.

例题解析

例 1　汽车走过的路程

汽车以速度 v 做匀速直线运动时，经过时间 t 所行驶的路程为 $s=vt$. 如果汽车做变速直线运动，在时刻 t 的速度为 $v(t)=-t^2+2$（单位：km/h），那么它在 $0\leqslant t\leqslant 1$（单位：h）这段时间内行驶的路程 s（单位：km）是多少？

分析　与求曲边梯形面积和变力所做的功类似，采取化整为零、以直代曲、积零成整的方法来解决.

解　(1) 把区间［0，1］n 等分，记 $x_0=0$，$x_1=\frac{1}{n}$，$x_2=\frac{2}{n}$，$x_3=\frac{3}{n}$，…，$x_{n-1}=\frac{n-1}{n}$，$x_n=1$.

(2) 当 n 很大时，在区间$\left[0,\frac{1}{n}\right]$，$\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right]$，…，$\left[\frac{n-1}{n},1\right]$上，函数 $v(t)=-t^2+2$ 的值变化很小，近似地等于一个常数，从物理意义上看，就是汽车在时间段$\left[0,\frac{1}{n}\right]$，$\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right]$，…，$\left[\frac{n-1}{n},1\right]$上速度的变化很小，可认为汽车做匀速行驶，即在局部小范围内"以匀速代变速"，即用较小的矩形来近似地代替对应的小曲边梯形. 则有 $s\approx s_1+s_2+s_3+\cdots+s_n$.

(3) $s\approx s_1+s_2+s_3+\cdots+s_n$

$$=(-x_0^2+2-x_1^2+2-x_2^2+2+\cdots-x_{n-1}^2+2)\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\left\{2n-\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right]\right\}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=2-[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2]\cdot\frac{1}{n^3}$$

$$=2-\frac{1}{6}\cdot\frac{2n^3-3n^2+n}{n^3}$$

$$=2-\frac{1}{3}+\frac{3n-1}{6n^2}$$

$$=\frac{5}{3}+\frac{3n-1}{6n^2}.$$

从而 $s\approx\frac{5}{3}+\frac{3n-1}{6n^2}$，当 n 充分大时，$\frac{3n-1}{6n^2}$可以小于任何给定的正数，因此 $s=\frac{5}{3}$，即 $\int_0^1 v(t)\mathrm{d}t=\frac{5}{3}$.

例 2 利用定积分的定义，计算 $\int_0^2(-x^2+5)\mathrm{d}x$ 的值，并从几何上解释这些值表示什么.

解 令 $f(x)=-x^2+5$.

（1）在区间 $[0,\ 2]$ 中插入 $n-1$ 个等分点，把区间 $[0,\ 2]$ 等分成 n 个小区间 $\left[\frac{2(k-1)}{n},\ \frac{2k}{n}\right](k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，每个区间的长度为 $\Delta x=\frac{2}{n}$.

（2）取 $z_k=\frac{2k}{n}(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，则

$$S(n)=\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{2k}{n}\right)\cdot\Delta x=\sum_{k=1}^{n}\left[-\left(\frac{2k}{n}\right)^2+5\right]\cdot\frac{2}{n}$$

$$=-\frac{8}{n^3}(1^2+2^2+\cdots+n^2)+10=-\frac{8}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+10$$

$$=-\frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2}+10=-\frac{4}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)+10.$$

（3）当 Δx 趋于 0 时即 n 趋于无穷大时，上述和式以 $S=\frac{22}{3}$ 为极限，则有：

$$\int_0^2(-x^2+5)\mathrm{d}x=\frac{22}{3}.$$

如图 4－23 所示：当 $0\leqslant x\leqslant 2$ 时，$f(x)\geqslant 0$，故 $\int_0^2(-x^2+5)\mathrm{d}x$ 的值表示由直线 $x=0$，$x=2$ 和曲线 $y=-x^2+5$ 所围成的曲边梯形的面积.

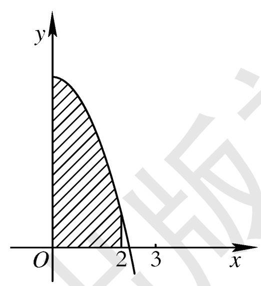


图 4－23

相关链接

（一）积分思想的产生与发展

为了解决物体变速运动的路程、变力做功以及由曲线围成的面积和由曲面围成的体积等问题，导致了积分的产生.

积分思想源远流长．古希腊德谟克里特的“数学原子论”、阿基米德的“穷竭法”、刘徽的“割圆术”都是积分思想的雏形，并且用这些方法求出了不少几何体的面积和体积；然而这些古代方法都建立在特殊的技巧上，不具有一般性，也不是以严密的理论为基础的．

随着数学科学的发展，借助于生产力空前发展的强大推动，出现了开普勒的“同维无穷小方法”、卡瓦列利的“不可分割法”、费马的“分割求和法”，到 17 世纪终于发生了由量变到质变的飞跃．牛顿与莱布尼茨揭示了微分与积分的内在联系——微积分基本定理，从而产生了威力无比的微积分，使数学从常量数学跨入变量数学，开创了数学发展的新纪元．

（二）平面图形的面积

设平面图形由连续曲线 $y=f_1(x)$，$y=f_2(x)$ 及直线 $x=a$，$x=b$ 所围成，并且在 $[a，b]$ 上 $f_1(x)\geqslant f_2(x)$（如图 4－24 所示），那么这块图形的面积为

$$A=\int_a^b[f_1(x)-f_2(x)]\mathrm{d}x\ .$$

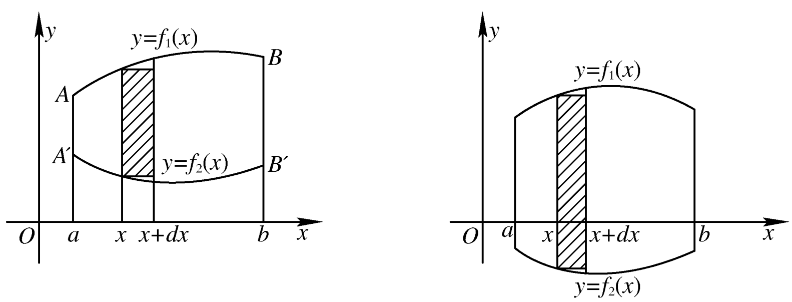


图 4－24

（三）旋转体的体积

设有一曲边梯形，由连续曲线 $y=f(x)$，x 轴及直线 $x=a$，$x=b$ 所围成，求此曲边梯形绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体（如图 4－25 所示）的体积．

在 $[a，b]$ 上任取一个区间 $[x，x+dx]$，如图4－25 所示．

在点 x 处垂直于 x 轴的截面是半径等于 $y=f(x)$ 的圆，因此截面面积 $A(x)=\pi y^2=\pi\ [f(x)]^2$．

那么该旋转体体积

$$V=\pi\int_a^b y^2\,\mathrm{d}x=\pi\int_a^b[f(x)]^2\,\mathrm{d}x\ .$$

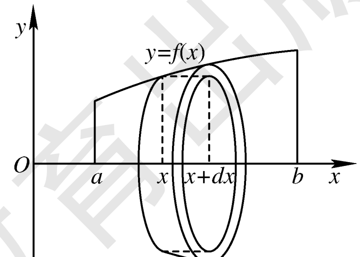


图 4－25

4.5.4 微积分基本定理

教材线索

本小节教材采用从局部到整体、从具体到一般的思想，在前面学习的基础上，归纳总结计算函数 $f(x)$在区间 $[a, b]$ 上的定积分的思想方法，通过寻求导数和定积分之间的内在联系，得到微积分基本定理的雏形，然后一般化进而得出微积分基本定理. 在这个过程中，学生既经历了微积分基本定理的发现过程，又直观了解微积分基本定理的含义.

微积分基本定理不仅揭示了导数和定积分之间的内在联系，而且还提供了计算定积分的一种有效方法.

教学目标

（一）知识与技能

1. 让学生体会计算定积分新方法的必要性.

2. 让学生经历定理的发现过程，初步了解微积分基本定理，初步了解导数与定积分的互逆关系；并从图形上直观了解微积分基本定理的含义.

3. 能用微积分基本定理计算简单的定积分，让学生体会定积分在几何和物理中的应用，使学生体会微积分基本定理的优越性.

（二）过程与方法

1. 让学生能够体会微积分运动变化的思维方式和初等数学中静态的思维方式的区别，并且培养学生在探索过程中善于变通的思想，以及敢于挑战陈规的精神！

2. 让学生了解应用定积分解决实际问题的基本数学思想——化归思想，同时在解决问题的过程中，通过数形结合的思想方法，加深对定积分几何意义的理解，体会微积分基本定理的威力.

（三）情感、态度与价值观

1. 揭示寻求计算定积分新方法的必要性，激发学生的求知欲.

2. 通过应用定积分解决实际问题的学习，激发学生学习数学的兴趣，拓展学生的数学活动空间，发展学生“做数学”、“用数学”的意识.

3. 通过对微积分发展史的介绍，让学生体会微积分在人类思想、文化发展史上的价值.

教材分析

1. 重点

直观了解微积分基本定理的含义，并能用定理计算简单的定积分.

2. 难点

了解微积分基本定理的含义.

3. 教材首先总结、分析计算函数 $f(x)$在区间 $[a, b]$ 上的定积分的思想方法，得到微积分基本定理的原始形式，从而为得出微积分基本定理奠定基础. 其次教材详细分析探究了微积分基本定理的原始形式中的两个条件，目的是寻求、揭示导数和定积分之间的内在联系，从而得到微积分基本定理.

对于怎样寻找简便、有效的方法求定积分的问题，教材在“旁白”中指出：“数学家先是找到了求定积分的方法，随后又发现了计算导数以求切线的法则，可是就是这个看似自然而平凡的事实，在半个世纪当中未被发现.”以明确本节的主要目标，指出寻找计算定积分新方法的方向，这样做主要是考虑到由学生想到导数与定积分具有内在联系比较困难.

4. 教材在得到微积分基本定理后，强调从图上直观理解微积分基本定理，这种处理方式，尽管不是严格的证明，但体现了定积分的基本思想，突出了导数的几何意义，进一步揭示了导数和定积分之间的内在联系，体现了数形结合这一数学中的基本思想方法.

5. 教材中一共安排了四个例题的教学，意图是运用微积分基本定理求定积分，说明利用微积分基本定理计算定积分关键在于将问题转化为求函数 $f(x)$在闭区间上的定积分，从而可以大大简化定积分求解过程，并且给出标准的书写格式. 其中例 1、例 3 的问题，与前面 4.5.1 和 4.5.2 两节中讨论过的问题相呼应，表明微积分基本定理的威力；安排例 2、例 4 的目的有两个，一是使学生进一步熟悉运用微积分基本定理求定积分的过程，二是说明微积分基本定理在几何、物理上具有广泛的应用价值.

教学建议

1. 从理论上看，可以用定积分的定义计算定积分，但这种方法需要计算一个和式的极限，而求和与求极限一般都要经过复杂的计算，技巧性强，有时甚至不可能计算出结果，因此需要寻找一种简便、有效的方法来求定积分. 教学中可通过设置情境：如计算定积分 $\int_0^1 x^3 \mathrm{d}x$ 的过程可以发现，虽然被积函数 $f(x)=x^3$ 比较简单，但利用定义计算定积分时，需要用 $\sum\limits_{i=1}^{n} i^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ 这一结果，技巧性较强；或者让学生用定义求一求 $\int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ ，它的计算过程需要求$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n-1}$的和，而这个“和”是“求不出”的，因而用定义就算不出 $\int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 的结果，以增强感受，揭示寻求计算定积分新方法的必要性，激发学生的

求知欲.

2. 教学中应突出微积分基本定理的探究过程，重点揭示微积分基本定理中导数和定积分之间的内在联系，从图形直观上理解微积分基本定理. 教材通过总结计算函数 $f(x)$在区间 $[a, b]$ 上的定积分的思想方法，得到微积分基本定理的原始形式，然后一般化而得出微积分基本定理. 考虑到由学生想到导数与定积分具有内在联系比较困难，教学中可设置具体的问题情境，来揭示导数和定积分之间的内在联系，帮助学生理解导数和定积分之间的内在联系.

例如，设一物体沿直线做变速运动，在时刻 t 时物体所在位置为 $s(t)$，速度为$v(t)$($v(t) \geqslant 0$)，则物体在时间间隔 $[T_1, T_2]$ 内经过的路程可用速度函数 $s=\int_{T_1}^{T_2} v(t)\mathrm{d}t$ 表示.

另一方面，这段路程还可以通过位置函数 $s(t)$在$[T_1, T_2]$上的增量 $s(T_2)-s(T_1)$来表示，即 $s=s(T_2)-s(T_1)$. 由导数的概念可知，它在任意时刻 t 的速度是$v(t)=s'(t)$. 从而 $s=\int_{T_1}^{T_2} v(t)\mathrm{d}t=s(T_2)-s(T_1)$，这就是微积分基本定理的雏形，把所得的结论一般化，就可得出微积分基本定理.

3. 教学中可以结合数学史、数学文化的学习向学生介绍微积分基本定理的重要意义，同时在教学中也可以让学生对“定义法”和运用微积分基本定理求定积分进行对比，使学生体会利用微积分基本定理求定积分的优越性，体会微积分基本定理的重要意义.

例如，对于定积分 $\int_0^1 x^3\mathrm{d}x$，取 $F(x)=\frac{1}{4}x^4$，则 $F'(x)=f(x)$，由微积分基本定理可得：$\int_0^1 x^3\mathrm{d}x=F(1)-F(0)=\frac{1}{4}$，这显然比用定义计算定积分简单. 又如，对于定积分 $\int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$，有了微积分基本定理，就能很顺利地求出它的值：因为 $(\ln x)'=\frac{1}{x}$，故取 $F(x)=\ln x$，则 $F'(x)=f(x)$，$\int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x=F(2)-F(1)=\ln 2$.

4. 关于例题的教学建议：教学中一方面强调利用微积分基本定理计算定积分关键在于将问题转化为求函数 $f(x)$在闭区间上的定积分，另一方面，强调计算定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的关键是找出满足 $F'(x)=f(x)$的函数 $F(x)$，从而把问题转化为计算函数 $F(x)$在区间的两个端点处的函数值之差. 通常，我们可以运用基本初等函数求导公式和导数的四则运算法则从反方向上求出 $F(x)$. 总之微积分基本定理提供了计算定积分的一种有效方法，与前面使用定积分概念计算定积分相比，大大简化了计算过程.

例题解析

例 1 求函数 $f(x)=1+x^2$ 在 $[0, 1]$ 上的曲边梯形的面积 Q.

分析 根据定积分概念，本题即求函数 $f(x)=1+x^2$ 在 $[0, 1]$ 上的定积分，由微积

分基本定理，取 $F(x)=\frac{1}{3}x^3+x$，则 $F'(x)=f(x)$. 可得

$$Q=\int_0^1(1+x^2)\mathrm{d}x=F(1)-F(0)=\frac{4}{3}.$$

例 2 已知圆锥高为 H，底半径为 R，利用定积分求它的体积 $V(R,H)$.

解 这相当于计算函数 $f(x)=\pi\left(\frac{Rx}{H}\right)^2$ 在区间 $[0,H]$ 上的定积分.

取 $F(x)=\pi\left(\frac{R}{H}\right)^2\frac{x^3}{3}$，则 $F'(x)=f(x)$，由微积分基本定理可得：

$$V(R,H)=\int_0^H\pi\left(\frac{Rx}{H}\right)^2\mathrm{d}x=F(H)-F(0)=\frac{\pi HR^2}{3}.$$

点评 关于旋转体体积公式的推导，其实在必修关于球体积公式的推导过程中已经渗透了定积分的思想方法. 旋转体体积公式的推导和曲边梯形面积公式的推导类似，利用定积分，根据微积分基本定理来计算旋转体的体积，就显得简单、简洁.

利用定积分计算旋转体体积的具体解题步骤为：根据题意画出草图；找出曲线范围，定出积分区间；确定被积函数；写出求体积的定积分表达式；计算定积分，求出体积.

例 3 质量为 m 的物体由地面上升到高度为 H 之处，求在此运动过程中地心引力对物体所做的功 $W(H)$.（参看 4.5.2 节的问题探索）

解 设地球半径为 R，质量为 M，万有引力常数为 c，则此问题相当于计算函数 $f(x)=\frac{cmM}{x^2}$ 在区间 $[R,R+H]$ 上的定积分.

取 $F(x)=-\frac{cmM}{x}$，则 $F'(x)=f(x)$，由微积分基本定理可得：

$$W(H)=\int_R^{R+H}\frac{cmM}{x^2}\mathrm{d}x=F(R+H)-F(R)=cmM\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+H}\right)=\frac{cmMH}{R(R+H)}.$$

点评 例 3 的问题与 4.5.2 节中讨论过的问题相呼应，与前面利用定积分概念比较，利用微积分基本定理就显得简单、简洁，表明了微积分基本定理的威力.

例 4 已知变速运动物体的速度 v(m/s)与时间 t(s)的关系为 $v(t)=a+bt$，问它出发后 30 s 走了多远？

解 这相当于计算函数 $v(t)=a+bt$ 在 $[0,30]$ 上的定积分.

取 $F(t)=at+\frac{bt^2}{2}$，则 $F'(t)=v(t)$，由微积分基本定理可得：

$$\int_0^{30}(a+bt)\mathrm{d}t=F(30)-F(0)=30a+450b.$$

故它出发后 30 s 走了$(30a+450b)$m.

点评 定积分可以解决物理中的许多问题，如本题的求变速直线运动路程，以及前面的求变力做功，说明定积分在物理中有着广泛的应用.

相关链接

（一）微积分基本定理的证明

在微积分基本定理的证明过程中，需要用到微分中值定理.

证明 用分点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

把区间 $[a, b]$ 等分成 n 个小区间，每个小区间的长度 $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$. 相应的函数 $F(x)$ 的总改变量 $F(b)-F(a)$ 可写为 n 个部分改变量的和，即：

$$\begin{aligned}&F(b)-F(a)\\&=F(x_n)-F(x_0)\\&=[F(x_n)-F(x_{n-1})]+[F(x_{n-1})-F(x_{n-2})]+\cdots+[F(x_i)-F(x_{i-1})]+\cdots+[F(x_1)-F(x_0)]\\&=\sum_{i=1}^{n}[F(x_i)-F(x_{i-1})].\end{aligned}$$

根据微分中值定理，在每个小区间 (x_{i-1}, x_i) 内一定存在一点 ξ_i，使得

$$F(x_i)-F(x_{i-1})=F'(\xi_i)\Delta x=f(\xi_i)\Delta x,$$

从而 $F(b)-F(a)=\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x$.

当 n 趋向于无穷大时，根据定积分的定义，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a).$$

（二）微积分基本定理的背景与意义

定积分起源于求平面图形的面积和其他一些实际问题. 定积分的思想在古代数学家的工作中就已经有了萌芽. 比如魏晋时期的刘徽的“割圆求周”、战国庄周的“一尺之棰，日取其半，万世不竭”、祖冲之和祖暅的“圆周率、球体积、球表面积的研究”、欧几里得应用穷竭法对不可约量及面积与体积的研究、阿基米德用求和的方法计算过抛物弓形及其其他图形的面积，这些都隐含着近代积分学的思想.

定积分的概念，在很早以前就已经在许多人的工作中逐渐形成. 但是，直到牛顿和莱布尼茨之前，有关定积分的种种结果还是孤立零散的，比较完整的定积分理论始终未能形成. 定积分的形成与发展为什么经过这样漫长的岁月呢？这与定积分的一般计算方法的解决有很大的关系. 在牛顿和莱布尼茨之前，计算定积分一直没有一般可行的方法. 当时所用的方法各式各样，有的用代数方法，有的用几何方法，其共同特点是都躲避不了繁难且技巧性很高

的计算. 比如教材 4.5.1 节求曲边梯形的面积，就必须算出

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6},$$

这在那时是相当困难的. 对于更复杂的问题，那就更不好计算了. 这使得定积分不能广泛地应用到实际，因而制约了它的发展. 牛顿—莱布尼茨公式的建立，揭示了定积分与导数之间的内在联系，给出了计算定积分一般的简便而适用的方法，使定积分真正成为解决许多实际问题的有力工具，促进了积分学的发展. 因此可以说，牛顿—莱布尼茨公式的出现是积分学建立和发展的转折点，是积分学有如此广泛应用的关键. 正是由于这个公式本身的特点和历史上的作用，所以又称它为微积分基本公式，或牛顿—莱布尼茨公式.

然而，微积分基本定理不是万能的. 大家知道，应用这个公式求定积分，需要首先求出被积函数的原函数，但是求原函数并不都是容易的，有时甚至原函数根本无法用初等函数来表达；况且从工程技术与科学实验提出大量的被积函数，常常是用曲线或表格给出的，这时写不出被积函数的表达式，当然也就无法用式子表示出它的原函数. 这时计算定积分常用的方法就是近似计算法，在计算机广泛应用的今天，这种方法显得更加可行与重要.

（三）阿基米德与牛顿、莱布尼茨的微积分

有人问，微积分不是由牛顿和莱布尼茨创立的吗，怎么会与相隔两千多年的阿基米德有联系呢？但实际情况确实如此. 在 16 世纪后半叶，牛顿和莱布尼茨在许多数学家所做的大量准备工作的基础上，各自独立地创立了微积分. 但微积分的原理，就可以追溯到古希腊人阿基米德所建立的确定面积和体积的方法.

远在阿基米德那个时代（公元前二百多年），没有解析几何，甚至连发达的字母符号也没有，可是几何学在古希腊已经达到了惊人的繁荣，直到今天，在初等的几何学中我们还很难再添加多少新的东西. 正是在这种历史条件下，阿基米德率先推导出了球、圆锥的体积，以及抛物线的弓形面积，他所采用的无穷小量求和的方法已经接近于积分演算. 后人在介绍阿基米德这种方法的时候，又用现代的符号和术语进行了加工.

下面以阿基米德推导抛物线的弓形面积为例，介绍他采用的无穷小量求和的方法.

设有一抛物线 $y=ax^2$（不妨令 $a>0$），求其与横轴 x 及直线 $x=p$（$p>0$）所围的面积，即如图 4－26 所示曲边三角形 OMP 的面积 S.

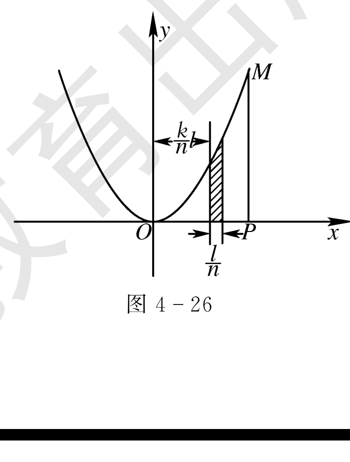


图 4－26

阿基米德是这样想的：设 $OP=1$，将 OP 分成 n 等份. 曲边三角形 OMP 被分割成 n 个带状面积元，这些面积元可近似地看成矩形，各条“带子”的宽度是 $\frac{l}{n}$，第 k 条带子的高是当 $x=\frac{k}{n}l$ 处抛物线的纵坐标，即 $a\left(\frac{k}{n}l\right)^2$.

所以第 k 条带子的面积是 $\Delta S_k=\frac{l}{n}\cdot a\left(\frac{k}{n}l\right)^2=\frac{al^3}{n^3}k^2$.

各条矩形带子的面积和为

$$\begin{aligned}S'&=\sum_{k=1}^{n}\Delta S_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{al^3}{n^3}k^2=\frac{al^3}{n^3}\cdot\sum_{k=1}^{n}k^2\\&=\frac{al^3}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

这里，S'是曲边三角形 OPM 的近似面积，当 $x\to\infty$时就得到曲边三角形 OPM 的精确面积 S：

$$S=\lim_{n\to\infty}S'=\lim_{n\to\infty}\frac{al^3}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}al^3.$$

曲边三角形 OPM 的面积求出后，再求抛物线弓形面积就十分容易了，即

$$2\cdot\left(l\cdot al^2-\frac{1}{3}al^3\right)=\frac{4}{3}al^3.$$

我们最感兴趣的还不是上面这个结论本身，而是阿基米德的思想方法，正是这种分解为无穷多个无穷小量之和的方法，在两千年后发展成为积分学. 阿基米德当时也曾预言：“我认为在现时或未来的研究者中，总会有人利用这里所提出的方法获得我还不曾得到的其他定理.”果然如此，他的方法在另一种历史条件下获得了新的发展和新的形式，17 世纪下半叶，在前人工作的基础上，英国大科学家牛顿和德国数学家莱布尼茨分别独自研究和完成了微积分的创立工作，虽然这只是十分初步的工作. 他们的最大功绩是把两个貌似毫不相关的问题联系在一起，一个是切线问题（微分学的中心问题），一个是求积问题（积分学的中心问题）. 牛顿和莱布尼茨建立微积分的出发点是直观的无穷小量，因此这门学科早期也称为无穷小分析，这正是现在数学中分析学这一大分支名称的来源，牛顿研究微积分侧重于从运动学来考虑，莱布尼茨却是侧重于从几何学来考虑的.

牛顿，英国数学家、物理学家、天文学家和自然哲学家. 牛顿在数学上最卓越的贡献是创建了微积分. 17 世纪早期，数学家们已经建立起一系列求解无限小问题（诸如曲线的切线、曲率、极值，求运动的瞬时速度以及面积、体积、曲线长度以及物体重心的计算）的特殊方法. 牛顿超越前人的功绩在于将这些特殊的技巧归结为一般的算法，特别是确立了微分与积分的逆运算关系（微积分基本定理）. 牛顿的微积分中有一个重要的基本概念“流数”，流数被定义为可借运动描述的连续量——流量（用$\acute{x}$，$\acute{y}$，$\acute{z}$，…表示）的变化率（速度），并用在字母上加点来表示，如 $\dot{x}$，$\dot{y}$，$\dot{z}$，…. 牛顿表述流数术的基本问题为：已知流量间的关系，求它们的流数间的关系，以及逆运算. 牛顿创立微积分有深刻的力学背景，他更多地是从运动变化的观点考虑问题，把力学问题归结为数学问题.

莱布尼茨，德国数学家、哲学家，和牛顿同为微积分学的创始人. 莱布尼茨终生奋斗的主要目标是寻求一种可以获得知识和创造发明的普遍方法. 这种努力导致许多数学的发现，最突出的是微积分学. 莱布尼茨创立微积分主要是从几何学的角度考虑，他从 1684 年起发表了一系列微积分著作，他力图找到普遍的方法来解决数学分析中的问题. 其最大功绩是创

造了反映事物本质的数学符号，数学分析中的基本概念的记号，例如微分 $\mathrm{d}x$、二阶微分 d^2x、积分 $\int y\mathrm{d}x$、导数 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 等都是莱布尼茨提出来的，这些记号沿用至今，非常适用、便利，对以后微积分的发展有极大的影响.

令人遗憾的是，两人在各自创立了微积分后，历史上发生过优先权的争论，从而使数学家分裂成两派.

欧洲大陆的数学家，尤其是瑞士数学家雅科布·贝努利和约翰·贝努利兄弟支持莱布尼茨，而英国数学家捍卫牛顿，两派激烈争吵，甚至尖锐地互相敌对、嘲笑. 牛顿和莱布尼茨去世很久以后，经调查证实：事实上，他们各自独立地创立了微积分，只不过牛顿（1665年—1666年期间）先于莱布尼茨（1673年—1676年期间）制定了微积分，而莱布尼茨（1684年—1686年期间）早于牛顿（1704年—1736年期间）公开发表微积分.

这件事的结果，英国和欧洲大陆的数学家停止了思想交换，使英国人在数学上落后了100年. 因为牛顿的《自然哲学的数学原理》一书使用的是几何方法，英国人差不多100年中照旧以几何作为主要工具，而欧洲大陆的数学家继续用莱布尼茨的分析法，并且使微积分更加完善，在这100年中，英国人甚至连欧洲大陆通用的微积分符号都不认识，对这一不幸的事件，是当初的阿基米德，甚至后来做了大量准备工作的大小数学家们无论如何也预料不到的.

微积分的产生和发展与力学、物理学和几何学的发展紧密相联，微积分的许多基本概念都有实际背景，并受实际需要的推动. 17世纪牛顿和莱布尼茨分别独立地完成了微积分的创建工作，与此同时，力学和物理学也得到了发展. 牛顿和莱布尼茨的工作使得导数和积分的互逆关系成为相当广泛的一类函数的普遍规律. 他们有效地创立了微积分的基本定理和运算法则，从而使微积分能普遍应用于科学实践.

教材习题参考解答

4.1.1　练习（教材 P.5）

1. $H(t)=-4.9t^2+6.5t+10$，则 $[t,\ t+d]$ 上的平均速度为 $\frac{H(t+d)-H(t)}{d}=\frac{-4.9(2dt+d^2)+6.5d}{d}=-9.8t-4.9d+6.5$，令 d 趋于 0，则得到运动员在任意时刻 t 的瞬时速度为 $-9.8t+6.5$（m/s）.

2. (1) 由题 1 得运动员在任意时刻 t 的瞬时速度为 $-9.8t+6.5$（m/s），令 $t=0$ 得运动员在起跳时刻的瞬时速度为 6.5 m/s.

   (2) $\because H(t)=-4.9t^2+6.5t+10$，当 $t=\frac{6.5}{9.8}$ 时，$H(t)$ 取到最大值，$\therefore$ 运动员到达最高点处的瞬时速度为 0 m/s.

   (3) 令 $H(t)=0$，得到 $t=2.238$ s，此时运动员的瞬时速度为 -15.43 m/s.

习题 1（教材 P.5）

1. 物体在 $[t,\ t+d]$ 上的平均速度 $\frac{s(t+d)-s(t)}{d}=\frac{v_0d}{d}=v_0$，即物体在时刻 t 的瞬时速度为 v_0.

2. 此球在 $[4,\ 4+d]$ 上的平均速度为 $\frac{(4+d)^2-16}{d}=\frac{8d+d^2}{d}=8+d$，令 d 趋于 0，则得此球在垂直方向上的瞬时速度为 8 m/s.

3. 该物体在 $[t,\ t+d]$ 上的平均速度为 $\frac{h+v(t+d)-\frac{g(t+d)^2}{2}-\left(h+vt-\frac{gt^2}{2}\right)}{d}=v-gt-\frac{gd}{2}$，令 d 趋于 0，得该物体在时刻 t 的瞬时速度为 $v-gt$.

   设该物体的质量为 m，在时刻 $t=0$ 时，物体的势能为 mgh_0，动能为 $\frac{mv_0^2}{2}$；在时刻 t，物体势能为 mgh_t，动能为 $\frac{mv_t^2}{2}$. 由能量守恒原理，$mgh_0+\frac{mv_0^2}{2}=mgh_t+\frac{mv_t^2}{2}$，从中可解出瞬时速度 $v_t=v-gt$，与导数方法求出的结果一致.

4. $\because f(x)$ 是增函数，

   当 $d>0$ 时，$x_0+d>x_0$，$\therefore f(x_0+d)>f(x_0)$，即 $\frac{f(x_0+d)-f(x_0)}{d}$ 的符号为正.

   当 $d<0$ 时，$x_0+d<x_0$，$\therefore f(x_0+d)<f(x_0)$，即 $\frac{f(x_0+d)-f(x_0)}{d}$ 的符号也为正.

4.1.2 练习（教材 P.9）

1. 取 $Q(1+d, 2(1+d)^2)$，则 $k_{PQ}=\dfrac{2(1+d)^2-2}{d}=2d+4$，令 d 趋于 0，则得到点 P 处切线的斜率为 4，所以过点 P 的切线方程为 $y=4(x-1)+2$，即 $y=4x-2$.

2. 取 $Q(x_0+d, 3-(x_0+d)^2)$，则 $k_{PQ}=\dfrac{3-(x_0+d)^2-3+x_0^2}{d}=-2x_0-d$，令 d 趋于 0，则得到点 P 处切线的斜率为 $-2x_0$，所以曲线在点 P 处的切线的方程为 $y=-2x_0(x-x_0)+y_0$.

习题 2（教材 P.9）

1. 取 $Q(1+d, (1+d)^2+1)$，则 $k_{PQ}=\dfrac{(1+d)^2+1-2}{d}=d+2$，令 d 趋于 0，则得到点 P 处的切线的斜率为 2.

2. 取 $Q(u+d, (u+d)^2-3(u+d)+2)$，则 $k_{PQ}=\dfrac{u^2+d^2+2ud-3u-3d+2-u^2+3u-2}{d}=d+2u-3$，令 d 趋于 0，则得到抛物线 $y=x^2-3x+2$ 在点 P 处的切线的斜率为 $2u-3$. 又因为 $y=x^2-3x+2$ 的顶点 $V\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{4}\right)$，所以在顶点 V 处的切线的斜率为 0，故抛物线 $y=x^2-3x+2$ 在顶点处的切线的方程为 $y=-\dfrac{1}{4}$.

3. 取 $Q(x_0+d, 2(x_0+d)^2+1)$，则 $k_{PQ}=\dfrac{2(x_0+d)^2+1-(2x_0^2+1)}{d}=4x_0+2d$，令 d 趋于 0，则得点 P 处切线的斜率为 $4x_0$，又点 P 处的切线平行于直线 $y=6x+1$，所以 $4x_0=6$，则 $x_0=1.5$，代入曲线方程，得 $y_0=5.5$.

4.1.3 练习（教材 P.13）

1. 函数 $y=x^2-3x$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的平均变化率为 $\dfrac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=-3$.

2. $[2, 2+d]$ 上的平均速度 $\dfrac{3(2+d)^2+2(2+d)+1-3\times 2^2-2\times 2-1}{d}=14+3d$，当 $d=1$ 时，平均速度为 17；当 $d=0.1$ 时，平均速度为 14.3；当 $d=0.01$ 时，平均速度为 14.03. 令 d 趋于 0，得到在 $t=2$ 时的瞬时速度为 14.

习题 3（教材 P.13）

1. $y=kx+b$ 的瞬时变化率就是函数 $y=kx+b$ 的导数 y'，按定义计算有 $\dfrac{k(x+d)+b-kx-b}{d}=k$，当 d 趋于 0，此式趋于 k，即 $y=kx+b$ 的瞬时变化率为 k.

2. （1）L 关于 x 的瞬时变化率为 $v+ax$，从物理学角度上看，L 关于 x 的瞬时变化率即运动物体的瞬时速度；（2）运动物体的瞬时速度关于 x 的瞬时变化率为 a，其物理意义是运动物体的加速度.

3. 当圆的半径 r 变化时，圆面积 S 关于 r 的瞬时变化率为 $2\pi r$，即圆的周长；当圆的直径 D 变化时，圆周长 C 关于 D 的瞬时变化率为 π，即圆周率.

4.2.1　练习（教材 P.17）

1. 正方形面积 $S=x^2$，其面积关于 x 的变化率为 $S'=2x$，是正方形周长的$\frac{1}{2}$倍.

2. $\because y=x^3$，$y'=3x^2$，$\therefore$ 曲线 $y=x^3$ 在点（2，8）处切线的斜率 $k=12$，故曲线在点（2，8）处的切线方程为 $y-8=12(x-2)$，即 $12x-y-16=0$.

习题 4（教材 P.17）

1. $S'=3t^2$，当 $t=3$ 时，速度为 27 m/s.

2. 因为点 P 不在曲线 $y=x^2$ 上，设所求切线与曲线切于点 $Q(u, v)$，又 $y'=2x$，由 $\begin{cases} v=u^2, \\ 2u=\dfrac{v-5}{u-3}, \end{cases}$ 得 $u^2-6u+5=0$，$u=1$ 或 $u=5$，所以满足条件的切线有两条，对应的切点坐标为（1，1），（5，25），两条切线的斜率分别为 2 和 10，对应的切线方程为 $2x-y-1=0$ 或 $10x-y-25=0$.

3. 设点 $P(u, v)$，则 $\begin{cases} v=u^3, \\ 3u^2=3, \end{cases}$ 解得点 P 的坐标分别为（1，1）或（-1，-1），切线方程分别为 $3x-y-2=0$，$3x-y+2=0$.

4. 经验算，点 A 不在已知曲线上，设所求的切线和已知曲线切于点 $Q(u, v)$，则 $\begin{cases} uv=1, \\ -\dfrac{1}{u^2}=\dfrac{v-3}{u+5}, \end{cases}$ 解得 $u=\frac{5}{3}$ 或 $u=-1$，即点 Q 的坐标为 $\left(\frac{5}{3}, \frac{3}{5}\right)$ 或（-1，-1），过点 A 与曲线 $xy=1$ 相切的两条直线的方程为 $9x+25y-30=0$ 或 $x+y+2=0$.

5. $y=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$，$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$，$k=y'|_{x=4}=\frac{1}{4}$；

$x=y^2$，$x'=2y$，$k=x'|_{y=2}=4$，两次计算的结果互为倒数.

6. 令 $f(x)=x^4$. 则 $\dfrac{f(x+d)-f(x)}{d}=\dfrac{(x+d)^4-x^4}{d}$

$=\dfrac{(x+d)^2(x+d)^2-x^4}{d}=4x^3+6dx^2+4d^2x+d^3$.

当 d 趋于 0 时，上式趋于 $4x^3$，所以 $(x^4)'=4x^3$.

令 $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$，则 $\dfrac{f(x+d)-f(x)}{d}=\dfrac{\sqrt[3]{(x+d)^2}-\sqrt[3]{x^2}}{d}$

$$=\frac{(x+d)^2-x^2}{d\left[\sqrt[3]{(x+d)^4}+\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2(x+d)^2}\right]}=\frac{2dx+d^2}{d\left[\sqrt[3]{(x+d)^4}+\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2(x+d)^2}\right]}$$

$$=\frac{2x+d}{\sqrt[3]{(x+d)^4}+\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2(x+d)^2}}.$$

当 d 趋于 0 时，上式趋于 $\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}=\dfrac{2}{3}\cdot x^{-\frac{1}{3}}$.

4.2.2 练习（教材 P.19）

1. (1) π.　(2) -1.
2. 因为 $y'=-\sin x$，故该曲线在点 $(x,\cos x)$ 处的切线的斜率为 $-\sin x$. 方程 $-\sin x=1$ 的解集为 $\{x \mid x=2k\pi-\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}\}$，即在点 $\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},\ 0\right)$ $(k\in\mathbf{Z})$ 处的切线的斜率为 1. 方程 $-\sin x=0$ 的解集为 $\{x \mid x=k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$，即在点 $(k\pi,1)$（k 为偶数）或点 $(k\pi,-1)$（k 为奇数）处的切线平行于 x 轴.

习题 5（教材 P.20）

1. (1) $y'=4x^3$.　(2) $y'=0$.　(3) $y'=5^x(\ln 5)$.　(4) $y'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$.
2. (1) $f'(x)=2^x\ln 2$，$f'(0)=\ln 2$.　(2) $f'(x)=\dfrac{1}{\ln 10}\cdot\dfrac{1}{x}$，$f'(1)=\dfrac{1}{\ln 10}$.
3. $y'=nx^{n-1}$，$y'|_{x=2}=n\cdot 2^{n-1}=12$，解得 $n=3$.
4. (1) ∵ $y=\sqrt{x}$，$y'=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$，∴曲线在 $x=4$ 处切线的斜率 $k=\dfrac{1}{4}$，故曲线在 $x=4$ 处的切线方程为 $y-2=\dfrac{1}{4}(x-4)$，即 $x-4y+4=0$.

   (2) ∵ $y=\sin x$，$y'=\cos x$，∴曲线在 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 处切线的斜率 $k=\dfrac{1}{2}$，故曲线在 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 处的切线方程为 $y-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$，即 $x-2y+\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{3}=0$.

4.2.3 练习（教材 P.26）

1. (1) $f'(x)=3-2^x\ln 2$.　(2) $S'(t)=3\cos t-6$.

   (3) $g'(x)=-\dfrac{7}{4x^2}-x^2$.　(4) $W'(u)=-\dfrac{1}{u^2}-\dfrac{1}{2\sqrt{u}}$.
2. (1) $(x\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x$.

(2) $(3x^4\mathrm{e}^x+2x^2\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+7)'=3x^4\mathrm{e}^x+12x^3\mathrm{e}^x+2x^2\mathrm{e}^x+4x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x$.

(3) $\left(\dfrac{x}{\tan x}\right)'=\dfrac{1}{\tan x}-\dfrac{x}{\sin^2 x}$.　　(4) $[2\sin(3+x)]'=2\cos(3+x)$.

(5) $[(5x-\mathrm{e})^6]'=30(5x-\mathrm{e})^5$.

(6) $\left[\dfrac{\sin(1+2x)}{x}\right]'=\dfrac{2x\cos(1+2x)-\sin(1+2x)}{x^2}$.

(7) $\left(\dfrac{1}{\cos x}-\sin x\tan x\right)'=-\sin x$.

(8) $\left[\ln(2x+1)+\dfrac{1}{2x+1}\right]'=\dfrac{2}{2x+1}-\dfrac{2}{(2x+1)^2}=\dfrac{4x}{(2x+1)^2}$.

3. (1) 不正确. $[(3+x^2)(2-x^3)]'=2x(2-x^3)-3x^2(3+x^2)$.

(2) 不正确. $\left(\dfrac{1+\cos x}{x^2}\right)'=\dfrac{-x^2\sin x-2x(1+\cos x)}{x^4}$.

习题 6（教材 P. 27）

1. (1) $f'(x)=-2$.　　(2) $H'(t)=-4t+6$.

(3) $g'(x)=6x+\dfrac{1}{4x^2}$.　　(4) $F'(u)=1-\dfrac{1}{2\sqrt{u}}$.

(5) $p'(x)=5x^4-6x^2+6x+6$.　　(6) $T'(x)=\cos x+\sin x$.

(7) $u'(x)=3\mathrm{e}^x+\dfrac{2}{\cos^2 x}$.　　(8) $f'(x)=\dfrac{1}{x\ln 2}+\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

2. (1) $(x^3\ln x)'=3x^2\ln x+x^2$.　　(2) $(\mathrm{e}^x\sin x)'=\mathrm{e}^x\sin x+\mathrm{e}^x\cos x$.

(3) $(2^x\tan x)'=2^x\ln 2\tan x+\dfrac{2^x}{\cos^2 x}$.　　(4) $\left(\dfrac{\cos x}{\mathrm{e}^x}\right)'=-\dfrac{\sin x+\cos x}{\mathrm{e}^x}$.

(5) $[A\sin(\omega t+\varphi)]_t'=A\omega\cos(\omega t+\varphi)$.

(6) $[(u+3)\ln(u+3)-u]'=\ln(u+3)$.

(7) $[(ax+\tan x)^7]_x'=7(ax+\tan x)^6\left(a+\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)$.

(8) $(x^6\mathrm{e}^{3x-2})'=6x^5\mathrm{e}^{3x-2}+3x^6\mathrm{e}^{3x-2}$.

3. 物体在 $t=3$ 时的速度为 7.5.

4. (1) 切点 (1, 2)；

(2) 切线 l 的方程为 $y=2x$.

5. 曲线在点 $P(u, v)$ 处的切线的方程为 $y=\dfrac{1-u^2}{(1+u^2)^2}(x-u)+v$；

切线斜率为 1 时，点 P 的坐标为 (0, 0)；切线平行于 x 轴时，点 P 的坐标为 $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$ 或 $\left(-1, -\dfrac{1}{2}\right)$.

6. 该物体的瞬时速度为 $3a\mathrm{e}^{at}\sin(kt+b)+3k\mathrm{e}^{at}\cos(kt+b)$；

瞬时加速度为 $3a^2\mathrm{e}^{at}\sin(kt+b)+6ak\mathrm{e}^{at}\cos(kt+b)-3k^2\mathrm{e}^{at}\sin(kt+b)$.

4.3.1 练习（教材 P.35）

（1）$f'(x)=-2$，函数 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上递减；

（2）$f'(x)=1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$，函数 $f(x)$在$(1,+\infty)$上递增，在$(0,1)$上递减.

（3）$f'(x)=\dfrac{2}{x^2}$，函数 $f(x)$在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上递增；

（4）$f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}$，函数 $f(x)$在$(-\infty,-1)$ 和 $(1,+\infty)$上递增，在$(-1,0)$ 和 $(0,1)$上递减；

习题 7（教材 P.36）

1.（1）$f'(x)=2x-4$.

令 $f'(x)=2x-4>0$，得 $x>2$.

令 $f'(x)=2x-4<0$，得 $x<2$.

所以，原函数在区间$(2,+\infty)$上单调递增，$(-\infty,2)$上单调递减.

（2）$f'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x+1}{x^2}$，又 $x>0$，所以 $f'(x)>0$.

所以，原函数在区间$(0,+\infty)$上单调递增.

2. $f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$，

当 $x\in(-2,1)$时，$f'(x)<0$，$\therefore f(x)$在$(-2,1)$上是减函数.

3. $y'=ax^2-ax-2a=a(x+1)(x-2)$，

当 $x\in[-1,2]$时，$y'>0$，且 $a\neq0$，

$\therefore a(x+1)(x-2)>0$，$\therefore a<0$.

4. 若把例 4 中的圆改为教材图 4－20 的半圆，应选 B；若改为图 4－21 的三角形，应选 C.

5. 由图知，当 $x\in(-\infty,1)$时，$f'(x)>0$，

当 $x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)<0$.

$\therefore$原函数在$(-\infty,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减.

又导函数 $f'(x)$的图象是一条直线 l，

$\therefore$原函数是二次项系数小于 0 的二次函数，其图象的对称轴是 $x=1$.

$\therefore f(x)=f(2-x)$，$\therefore f(0)=f(2)$.

又函数在$(1,+\infty)$上单调递减，

$\therefore f(2)>f(3)$，即 $f(0)>f(3)$.

4.3.2 练习（教材 P.40）

1.（1）函数的驻点是 $x=\frac{3}{2}$，极小值点是 $x=\frac{3}{2}$，极小值为 $-\frac{7}{2}$.

（2）函数的驻点集合是 $\left\{x \,\middle|\, x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6},\ n\in\mathbf{Z}\right\}$，

函数的极大值点是 $x=2k\pi+\frac{\pi}{6}$，极大值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}+k\pi+\frac{\pi}{12}$，$k\in\mathbf{Z}$，

函数的极小值点是 $x=2k\pi+\frac{5\pi}{6}$，极小值为 $-\frac{\sqrt{3}}{2}+k\pi+\frac{5\pi}{12}$，$k\in\mathbf{Z}$.

（3）函数无驻点，无极值点.

（4）函数的驻点是 $x=-2$，$x=0$，函数的极大值点是 $x=-2$，极大值为 $4e^{-2}$，函数的极小值点为 $x=0$，极小值为 0.

2. $f'(x)=3x^2+6mx+n$，依题意得 $f'(-1)=3-6m+n=0$，$f(-1)=-1+3m-n+m^2=0$. 解得 $m=1$，$n=3$ 或 $m=2$，$n=9$. 但当 $m=1$，$n=3$ 时，$f'(x)=3x^2+6x+3=3(x+1)^2\geqslant 0$ 恒成立，此时 $x=-1$ 不是 $f(x)$的极值点，应舍去. 从而 $m=2$，$n=9$，即有$mn=18$.

4.3.3 练习（教材 P.44）

1.（1）函数在（$-\infty$，$+\infty$）上单调递增，无极值点.

（2）函数在（$-\infty$，$+\infty$）上单调递减，无极值点.

（3）函数的单调递增区间是（-3，3），递减区间是（$-\infty$，-3）和（3，$+\infty$），函数的极小值点是 $x=-3$，极大值点是 $x=3$.

（4）函数的单调递增区间是（$-\infty$，-3）和（5，$+\infty$），递减区间是（-3，5），函数的极小值点是 $x=5$，极大值点是 $x=-3$.

2. $F'(x)=x^2-4$，则 $F(x)$在$[-3,-2)$上单调递增，在$(-2,2]$上单调递减，所以 $x=-2$ 为极大值点，$F(x)_{\max}=F(-2)=\frac{28}{3}$. 又 $F(-3)=7$，$F(2)=-\frac{4}{3}$，所以 $F(x)_{\min}=-\frac{4}{3}$. 所以 $F(x)$的最大值为$\frac{28}{3}$，最小值为$-\frac{4}{3}$.

习题 8（教材 P.45）

1.（1）$f'(x)=5>0$，函数在$(-\infty,+\infty)$上单调递增，无极值.

（2）$f'(x)=\frac{1}{(1+x)^2}>0$，函数在$(-\infty,-1)$ 和 $(-1,+\infty)$上单调递增，无极值.

（3）$f'(x)=1+\frac{1}{x^2}>0$，函数的单调递增区间是（$-\infty$，0）和（0，$+\infty$），无极值.

(4) $g'(x)=2x-2$，函数的单调递减区间是 $(-\infty,\ 1)$，单调递增区间是 $(1,\ +\infty)$，极小值为 $g(1)=-4$.

(5) $f'(x)=36x^{35}$，函数的单调递减区间是 $(-\infty,\ 0)$，单调递增区间是 $(0,\ +\infty)$，极小值为 $f(0)=0$.

(6) $f'(x)=\dfrac{1}{x}+1$，$\because x>0$，$\therefore y'>0$，$f(x)$在$(0,\ +\infty)$上单调递增，无极值.

(7) $g'(x)=\dfrac{2-x^2}{(2+x^2)^2}$，函数的单调递减区间是 $(-\infty,\ -\sqrt{2})$ 和 $(\sqrt{2},\ +\infty)$，单调递增区间是$(-\sqrt{2},\ \sqrt{2})$，函数极小值为 $g(-\sqrt{2})=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，极大值为 $g(\sqrt{2})=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

(8) $g'(x)=3x^2-4x+1$，函数的单调递减区间是 $\left(\dfrac{1}{3},\ 1\right)$，单调递增区间是 $\left(-\infty,\ \dfrac{1}{3}\right)$和$(1,\ +\infty)$，函数的极大值是 $g\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{31}{27}$，函数的极小值是 $g(1)=1$.

2. (1) $F'(x)=6x^2+2x-4$，函数的单调递减区间是$\left(-1,\ \dfrac{2}{3}\right)$，单调递增区间是$(-2,\ -1)$和$\left(\dfrac{2}{3},\ 1\right)$，函数的极大值是$F(-1)=4$，极小值是$F\left(\dfrac{2}{3}\right)=-\dfrac{17}{27}$,又 $F(1)=0$，$F(-2)=-3$，故函数的最大值是 $F(-1)=4$，最小值是 $F(-2)=-3$.

(2) $G'(x)=3x^2-3x=3x(x-1)$，函数在$(-1,\ 0)$和$(1,\ 2)$上单调递增，在$(0,\ 1)$上单调递减.函数的极大值是$G(0)=0$，极小值$G(1)=-\dfrac{1}{2}$，又$G(-1)=-\dfrac{5}{2}$，$G(2)=2$，故函数的最大值是$G(2)=2$，最小值是$G(-1)=-\dfrac{5}{2}$.

3. $f'(x)=3ax^2-6ax=3ax(x-2)$.

令 $f'(x)=0$，得 $x_1=0$，$x_2=2$.

只有 x_2 在区间$[1,\ 4]$内，列表如下：

x	1	$(1,\ 2)$	2	$(2,\ 4)$	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-2a+b$	↘	$-4a+b$	↗	$16a+b$

$\because a>0$，$f(x)$在区间 $[1,\ 4]$ 内有最大值 23，最小值 3，

$\therefore \begin{cases}16a+b=23,\\-4a+b=3,\end{cases}$ 解得 $a=1$，$b=7$.

4. (1) 图略.

(2) P，Q 之间的这段曲线是夹在切线和直线 PQ 之间.

可求得 $P(-5,\ 6)$，$Q\ (0,\ -4)$，直线 PQ 方程为：$y=-2x-4$，与直线 PQ 平行的切线的切点是$M\left(-\dfrac{5}{2},\ -\dfrac{21}{4}\right)$，该切线方程是 $y=-2x-\dfrac{41}{4}$.

当 $-5 \leqslant x \leqslant 0$ 时，

$-2x-4-(x^2+3x-4)=-x^2-5x=-x(x+5) \geqslant 0$，

$x^2+3x-4-\left(-2x-\dfrac{41}{4}\right)=x^2+5x+\dfrac{25}{4}=\left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2 \geqslant 0$，

所以 P，Q 之间的这段曲线夹在切线和直线 PQ 之间.

5\. 设 $f(x)=x^3-3x^2+4$.

则 $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$.

令 $f'(x)=0$，得 $x_1=0$，$x_2=2$.

由于 x_1，x_2 都在区间$[0, +\infty)$内，所以列表如下：

x	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	4	↘	0	↗

∴当 $x=2$ 时，$f(x)$有最小值 0，

∴$x^3-3x^2+4 \geqslant 0$，即 $x^3+4 \geqslant 3x^2$.

4.4　练习（教材 P. 50）

1\. 设截去的正方形边长为 x cm，则底面矩形的长为（$8-2x$）cm，宽为（$5-2x$）cm，

$V=x(8-2x)(5-2x)=4x^3-26x^2+40x \quad \left(0<x<\dfrac{5}{2}\right)$.

$V'=12x^2-52x+40$，令 $V'=0$ 得 $x=1$ 或 $x=\dfrac{10}{3}$（舍去）.

因为 $V(x)$在 $0<x<\dfrac{5}{2}$时只有一个极值点 $x=1$，故当 $x=1$ 时 $V_{\max}=18$.

所以截去的正方形边长为 1 cm 时，纸匣的容积最大.

2\. 设参加旅游的人数为 x，旅游团收费为 $f(x)$，则依题意有

$f(x)=1\,000x-5(x-100)x(100 \leqslant x \leqslant 180)$.

令 $f'(x)=1\,500-10x=0$，得 $x=150$.

又 $f(100)=100\,000$，$f(150)=112\,500$，$f(180)=108\,000$.

所以当参加人数为 150 人时，旅游团的收费最高，可达 112 500 元.

习题 9（教材 P. 50）

1\. 设腰长为 x，则下底为 $2l-2x$，高 $h=\sqrt{x^2-(l-x)^2}=\sqrt{-l^2+2lx}$，

$S=\dfrac{1}{2}(2l-2x)\sqrt{2lx-l^2}=(-x+l)\sqrt{2lx-l^2} \quad \left(\dfrac{1}{2}l<x<l\right)$，

$S'=-\sqrt{2lx-l^2}+\dfrac{l^2-lx}{\sqrt{2lx-l^2}}$，

当 $x=\frac{2}{3}l$ 时，S 有最大值$\frac{\sqrt{3}}{9}l^2$.

2. 如图 4－27，设等腰三角形底边 BC 上的高为 AD，$\angle OBD=\theta$（$0°\leqslant\theta<90°$），则 $BD=R\cos\theta$，$AD=R+R\sin\theta$，

$S=R\cos\theta(R+R\sin\theta)$，$S'=R^2(1-2\sin^2\theta-\sin\theta)$，

令 $S'=0$，得 $\sin\theta=\frac{1}{2}$，所以当 $\theta=\frac{\pi}{6}$时，$S_{\max}=\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$，

此时$\angle BOD=2\angle ABO=\frac{\pi}{3}$，

故$\angle ABC=\frac{\pi}{3}$，$\triangle ABC$ 为等边三角形. 所以同一个圆的内接等腰三角形中，等边三角形面积最大.

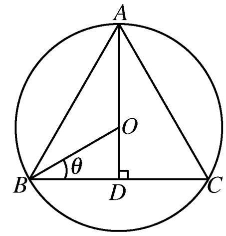


图 4－27

3. 设圆柱的高为 x，圆柱底面半径为 r，则 $r=\sqrt{R^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}$，

$V=\pi r^2x=\pi x\left(R^2-\frac{x^2}{4}\right)=\pi\left(-\frac{x^3}{4}+R^2x\right)$　（$0<x<2R$），

令 $V'=\pi\left(-\frac{3}{4}x^2+R^2\right)=0$，得$x=\frac{2\sqrt{3}}{3}R$，

所以当圆柱的高为$\frac{2\sqrt{3}}{3}R$ 时，体积最大，车下来的金属屑最少.

4. 设高为 h，底面半径为 R，则 $V=\pi R^2h$，$h=\frac{V}{\pi R^2}$，

所以 $S=2\pi R^2+2\pi Rh=2\pi R^2+\frac{2V}{R}$，令 $S'=4\pi R-\frac{2V}{R^2}=0$，得 $R=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$，

此时 $h=\frac{V}{\pi R^2}=\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$，所以当 $R=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$，$h=\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$时罐头盒的表面积最小.

5. $Q'(t)=-3t^2+6t+9=-3(t-1)^2+12$，即求导函数取最大值的点，$Q'(t)$在 $t=1$ 时取最大，故当 $t=1$ 即 9：00 时工作效率最高.

6. 设下底面单位面积造价为 a 元，则侧面单位面积造价为$\frac{1}{2}a$ 元，上底面单位面积造价为$\frac{1}{4}a$ 元，油桶的高为 l，$\pi r^2l=20\pi$，所以 $l=\frac{20}{r^2}$.

总造价 $y=a\cdot\pi r^2+2\pi rl\cdot\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}a\pi r^2$，

$y'=\pi a\left(\frac{5}{2}r-\frac{20}{r^2}\right)$，函数仅有一个极值点 $r=2$，

所以当 $r=2$ 时总造价最低.

7. 如图 4－28，在线段 AB 上取一点 D，设 $BD=x$，则 $0\leqslant x\leqslant10$，$|CD|=\sqrt{x^2+9}$，

修路费用 $y=4\,000(10-x)+5\,000\sqrt{x^2+9}$，

$y'=-4\,000+\dfrac{5\,000x}{\sqrt{x^2+9}}$，由 $y'=0$ 得 $x=4$，

所以应在线段 AB 上取一点 D，点 D 距离点 B 为 4 km，按 $A\to D\to C$ 设计线路最省.

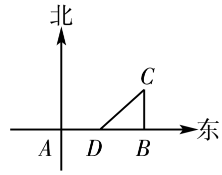


图 4－28

8. $S=\dfrac{b+(b+2b\cos\theta)}{2}\cdot b\sin\theta=b^2(\sin\theta+\sin\theta\cos\theta)$，$S'=b^2(2\cos\theta-1)(\cos\theta+1)$，

∵θ 是锐角，∴$\cos\theta+1\neq0$，

当 $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$时，$S'=0$，面积有最大值，此时坡度为 $\tan\theta=\sqrt{3}$，$\theta=60°$.

9. 设剪去的圆心角为 θ 弧度，$V=\dfrac{1}{3}\pi r^2\sqrt{R^2-r^2}$，$V'=\dfrac{2}{3}\pi r\sqrt{R^2-r^2}-\dfrac{\pi r^3}{3\sqrt{R^2-r^2}}$.

当 $r=\dfrac{\sqrt{6}}{3}R$ 时 $V'=0$，容积有最大值，

此时 $2\pi r=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\pi R=(2\pi-\theta)R$，$\theta=\left(2-\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)\pi$.

习题 10（教材 P. 59）

依照曲边梯形的面积求法，分成三个步骤：

（1）用若干张平行于圆锥底面的平面把它切成 n 块厚度相等的薄片；

（2）用一系列圆柱的体积近似地代替对应的薄片，每个圆柱的高均为$\dfrac{h}{n}$，底半径依次为：

$\dfrac{r}{n}$，$\dfrac{2r}{n}$，$\dfrac{3r}{n}$，…，$\dfrac{(n-1)r}{n}$，r；

（3）
$$\begin{aligned}V(n)&=\pi\left[\frac{r^2}{n^2}+\frac{2^2r^2}{n^2}+\frac{3^2r^2}{n^2}+\cdots+\frac{(n-1)^2r^2}{n^2}+\frac{n^2r^2}{n^2}\right]\cdot\frac{h}{n}\\&=\frac{\pi r^2h}{n^3}\cdot[1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2+n^2]\\&=\frac{\pi r^2h}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\\&=\frac{\pi r^2h}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right),\end{aligned}$$

当 n 趋于无穷大时，$V(n)$趋于$\dfrac{1}{3}\pi r^2h$，则所求圆锥的体积为 $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h$.

习题 11（教材 P. 62）

（1）计算函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $[a，b]$ 上的曲边梯形面积.

把区间 $[a，b]$ n 等分，整个曲边梯形就被分为 n 个小曲边梯形. 用一系列小矩形近似地代替对应的小曲边梯形，那么每个矩形的宽度均为 $d=\dfrac{b-a}{n}$，长度依次为 a^2，$(a+$

$d)^2$，$(a+2d)^2$，…，$[a+(n-1)d]^2$.

则这 n 个矩形的面积之和为：

$$S(n)=\{a^2+(a+d)^2+(a+2d)^2+\cdots+[a+(n-1)d]^2\}\cdot d$$
$$=\{na^2+2ad[1+2+3+\cdots+(n-1)]+d^2[1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2]\}\cdot d$$
$$=nda^2+2ad^2\cdot\frac{n(n-1)}{2}+d^3\cdot\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$$
$$=a^2(b-a)+a(b-a)^2(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{6}(b-a)^3\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right).$$

当 n 趋向无穷大时，$S(n)$趋向 $S=a^2(b-a)+a(b-a)^2+\frac{1}{3}(b-a)^3=\frac{1}{3}(b^3-a^3)$.

所以函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $[a，b]$ 上的曲边梯形面积为$\frac{1}{3}(b^3-a^3)$.

(2) 计算一般二次函数 $f(x)=Ax^2+Bx+C$ 在区间 $[a，b]$ 上的曲边梯形面积.

记 $f_1(x)=x^2$，$f_2(x)=x$，$f_3(x)=C$，则

$f_1(x)=x^2$ 在区间 $[a，b]$ 上的曲边梯形面积为$\frac{1}{3}(b^3-a^3)$；

$f_2(x)=x$ 在区间 $[a，b]$ 上的曲边梯形面积为$\frac{1}{2}(b^2-a^2)$；

$f_3(x)=C$ 在区间 $[a，b]$ 上的曲边梯形面积为 $C(b-a)$.

所以 $f(x)=Ax^2+Bx+C$ 在区间 $[a，b]$ 上的曲边梯形面积为：

$$S=\frac{A}{3}(b^3-a^3)+\frac{B}{2}(b^2-a^2)+C(b-a)$$
$$=\left[\frac{A}{3}(a^2+b^2+ab)+\frac{B}{2}(b+a)+C\right]\cdot(b-a).$$

又 $$\frac{f(a)+f(b)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{6}\cdot(b-a)$$
$$=\frac{Aa^2+Ba+C+Ab^2+Bb+C+4\left[A\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+B\,\frac{a+b}{2}+C\right]}{6}\cdot(b-a)$$
$$=\left[\frac{A}{3}(a^2+b^2+ab)+\frac{B}{2}(b+a)+C\right]\cdot(b-a),$$

所以一般二次函数 $f(x)=Ax^2+Bx+C$ 在区间 $[a，b]$ 上的曲边梯形面积为：

$$S=\frac{f(a)+f(b)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{6}\cdot(b-a).$$

(3) 计算球、球台、球缺、圆锥、棱锥、圆台等一系列几何体体积.

对于球、球台、球缺、圆锥、棱锥、圆台等一系列几何体，设它们的高为 H，平行于底面且与底面距离为 $x(0\leqslant x\leqslant H)$ 的截面的面积为 $f(x)$，则 $f(x)$为 x 的二次函数，并且几何体体积 V 等于二次函数 $y=f(x)$在区间 $[0，H]$ 上的曲边梯形面积，因此有计算这

一系列几何体体积的“万能公式”：$V=\dfrac{f(0)+f(H)+4f\left(\dfrac{H}{2}\right)}{6}\cdot H$.

例如，棱锥底面积为 S，高为 H，如图 4－29.

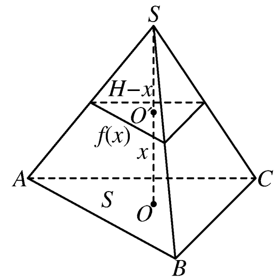


图 4－29

$\because \dfrac{f(x)}{S}=\dfrac{(H-x)^2}{H^2}$，$\therefore f(x)=\dfrac{(H-x)^2}{H^2}\cdot S$.

则 $f(0)=S$，$f(H)=0$，$f\left(\dfrac{H}{2}\right)=\dfrac{S}{4}$，

所以 $V_{棱锥}=\dfrac{f(0)+f(H)+4f\left(\dfrac{H}{2}\right)}{6}\cdot H$

$=\dfrac{S+0+4\cdot\dfrac{S}{4}}{6}\cdot H$

$=\dfrac{1}{3}SH$.

又如，球的半径为 R，则 $H=2R$，如图 4－30，

又 $f(x)=\pi[R^2-(R-x)^2]=\pi(2Rx-x^2)$，

则 $f(0)=0$，$f(H)=0$，$f\left(\dfrac{H}{2}\right)=f(R)=\pi R^2$，

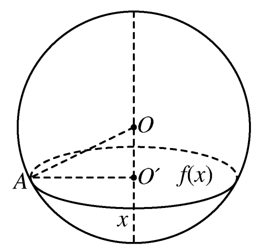


图 4－30

所以 $V_{球}=\dfrac{f(0)+f(H)+4f\left(\dfrac{H}{2}\right)}{6}\cdot H$

$=\dfrac{0+0+4\pi R^2}{6}\cdot 2R$

$=\dfrac{4}{3}\pi R^3$.

习题 12（教材 P. 71）

1. 法 1　把区间 $[0,1]$ n 等分，记 $y_0=0$，$y_1=\dfrac{1}{n}$，$y_2=\dfrac{2}{n}$，$y_3=\dfrac{3}{n}$，…，$y_{n-1}=\dfrac{n-1}{n}$，$y_n=1$，

则 $S(n)=(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_{n-1}^2)\cdot\dfrac{1}{n}$

$=\left[\left(\dfrac{1}{n}\right)^2+\left(\dfrac{2}{n}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^2\right]\cdot\dfrac{1}{n}$

$=\dfrac{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2}{n^3}$

$=\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{2n^3-3n^2+n}{n^3}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{3n-1}{6n^2}$.

当 n 充分大时，$\dfrac{3n-1}{6n^2}$可以小于任何给定的正数，因此 $S=\dfrac{1}{3}$.

法 2　取 $F(x)=\frac{1}{3}x^3$，则 $F'(x)=f(x)$. 由微积分基本定理可得：

$$S=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=F(1)-F(0)=\frac{1}{3}.$$

2. 取 $F(x)=-\cos x$，则 $F'(x)=f(x)$. 由微积分基本定理可得：

$$S=\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x=F(\pi)-F(0)=1-(-1)=2.$$

3. 物体下落的距离 s 即函数 $v=gx$ 在时间区间 $[0, t]$ 上的定积分.

取 $F(x)=\frac{1}{2}gx^2$，则 $F'(x)=gx$，$\therefore s=\int_0^t gx\,\mathrm{d}x=F(t)-F(0)=\frac{1}{2}gt^2$.

4. 力 $F(x)$所做的功 W 即函数 $F(x)=3x+4$ 在区间 $[0, 4]$ 上的定积分.

取 $G(x)=\frac{3}{2}x^2+4x$，$G'(x)=F(x)$，

$\therefore W=\int_0^4 F(x)\mathrm{d}x=\int_0^4(3x+4)\mathrm{d}x=G(4)-G(0)=40(\mathrm{J})$.

5.设 $C(x,t)$是线段 AB 上任意一点，由 $\frac{t}{r}=\frac{h-x}{h}$ 得 $t=\frac{r}{h}\cdot(h-x)$，则所求旋转体的体积 V 相当于计算 $f(x)=\frac{\pi r^2}{h^2}\cdot(h-x)^2$ 在区间$[0,h]$上的定积分.

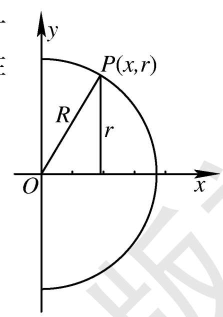
取 $F(x)=\frac{\pi r^2}{h^2}\cdot\frac{1}{3}(x-h)^3$，则 $F'(x)=f(x)$，

$\therefore V=\int_0^h\frac{\pi r^2}{h^2}\cdot(h-x)^2\mathrm{d}x=F(h)-F(0)=\frac{1}{3}\pi r^2h$.

6. 如图 4-31，设 $P(x, r)(r>0)$ 为半圆 $x^2+y^2=R^2(x\geqslant0)$ 上任意一点，则 $r^2=R^2-x^2$. 所求球的体积即函数 $f(x)=\pi r^2=\pi(R^2-x^2)$在区间 $[0, R]$ 的定积分的 2 倍.

取 $F(x)=\pi(R^2x-\frac{1}{3}x^3)$，则 $F'(x)=f(x)$，

$\therefore V=2\int_0^R\pi(R^2-x^2)\mathrm{d}x=2[F(R)-F(0)]=\frac{4}{3}\pi R^3$.



4-31

复习题四（教材 P. 78）

1. (1) $\frac{s(u+d)-s(u)}{d}=v$，$\frac{s(u)-s(u-d)}{d}=v$，$v(u)=v$.

(2) $\frac{\frac{1}{2}g(u+d)^2-\frac{1}{2}gu^2}{d}=gu+\frac{1}{2}gd$，$\frac{\frac{1}{2}gu^2-\frac{1}{2}g(u-d)^2}{d}=gu-\frac{1}{2}gd$，$v(u)=gu$.

(3) $\frac{s(u+d)-s(u)}{d}=3-gu-\frac{gd}{2}$，$\frac{s(u)-s(u-d)}{d}=3-gu+\frac{gd}{2}$，$v(u)=3-gu$.

(4) $\frac{s(u+d)-s(u)}{d}=4u+2d-5$，$\frac{s(u)-s(u-d)}{d}=4u-2d-5$，$v(u)=4u-5$.

2. (1) $k_{PQ}=0$，$k_{(2,3)}=0$.　　(2) $k_{PQ}=\frac{1}{2}$，$k_{(2u,u+1)}=\frac{1}{2}$.

(3) $k_{PQ}=-h-3$，$k_{(2,-2)}=-3$.　　(4) $k_{PQ}=10+6d+d^2$，$k_{(2,4)}=10$.

(5) $k_{PQ}=-\frac{1}{2+h}$，$k_{(1,1)}=-\frac{1}{2}$.

3. (1) $c=4x$，$\frac{\Delta c}{\Delta x}=4$，$c'(u)=4$，$c'(v)=4$.

(2) $S=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$，$\frac{\Delta S}{\Delta x}=\frac{\sqrt{3}}{4}c$，$S'(u)=0$，$S'(v)=\frac{\sqrt{3}}{2}c$.

(3) $S=\pi x^2$，$\frac{\Delta S}{\Delta x}=\pi(R+1)$，$S'(1)=2\pi$，$S'(R)=2\pi R$.

(4) $S=\pi x^2$，$\frac{\Delta S}{\Delta x}=\pi(D+1)$，$S'(1)=2\pi$，$S'(D)=2\pi D$.

(5) $V=\frac{4}{3}\pi x^3$，$\frac{\Delta V}{\Delta x}=\frac{4}{3}\pi(R^2+Rr+r^2)$，$V'(r)=4\pi r^2$，$V'(R)=4\pi R^2$.

4. (1) $y'=3\cos x-2\sin x$.

(2) $y'=3x^2$.

(3) $y'=4x^3-2x$.

(4) $y'=mx^{m-1}(x^n+a^n)+nx^{n-1}(x^m+a^m)$.

(5) $f'(x)=\cos(x+3t)$.

(6) $f'(x)=\ln(3x+2)+\frac{3x}{3x+2}$.

(7) $f'(x)=\frac{8x-4tx^2}{\mathrm{e}^{tx}}$.

(8) $f'(x)=-\frac{s}{x^2}-7s+\mathrm{e}^x\cos \mathrm{e}^x$.

5. (1) $y'=-3x^2-4x-4$，函数在$(-\infty,+\infty)$上单调递减.

(2) $y'=12x^3-12x^2-24x$，函数在$(-1,0)$和$(2,+\infty)$上单调递增，在$(-\infty,-1)$和$(0,2)$上单调递减.

(3) $y'=3x^2+2x-1$，函数在$(-\infty,-1)$和$\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$上单调递增，在$\left(-1,\frac{1}{3}\right)$上单调递减.

6. (1) 函数的极大值为$f(-1)=10$，极小值为$f(3)=-22$.

(2) 函数的极大值为$f(1)=11$，极小值为$f(7)=-97$.

(3) 函数的极大值为$f(-1)=f(1)=2$，极小值为$f(0)=1$.

(4) 函数的极大值为$f(-a)=-2a$，极小值为$f(a)=2a$.

7. (1) 函数的最小值为$f(1)=-1$，最大值为$f(4)=8$.

(2) 函数的最小值为$f(1)=3$，最大值为$f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{105}{8}$.

8. (1) 当$t=0$或$t=8$时$s=0$.

(2) 当$t=0$或$t=4$或$t=8$时$v=0$.

9.（1）设圆柱底面半径为 r，圆柱的高为 h，则 $h=2\sqrt{R^2-r^2}$，

$V=\pi r^2\cdot 2\sqrt{R^2-r^2}$，$V'=2\pi\left(2r\sqrt{R^2-r^2}-\dfrac{r^3}{\sqrt{R^2-r^2}}\right)$.

令 $V'=0$，得 $r^2=\dfrac{2}{3}R^2$，此时 $h=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}R$，

所以当 $h=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}R$ 时，所求的圆柱的体积最大.

（2）设圆锥底面半径为 r，球心到圆锥底面圆心的距离为 x，圆锥的高为 h，则 $h=R+x$，$V=\dfrac{1}{3}\pi(R^2-x^2)(R+x)$，$V'=\dfrac{\pi}{3}(-3x^2-2Rx+R^2)$ （$0<x<R$）.

当 $0<x<\dfrac{R}{3}$ 时，函数单调递增，当 $\dfrac{R}{3}<x<R$ 时，函数单调递减.

所以当 $x=\dfrac{R}{3}$ 时函数取得最大值，此时 $h=R+\dfrac{R}{3}=\dfrac{4}{3}R$.

10. 设圆半径为 r，矩形高为 h，$S=\dfrac{1}{2}\pi r^2+2rh$，

$c=\pi r+2r+2h=\dfrac{1}{2}\pi r+2r+\dfrac{S}{r}=\left(\dfrac{1}{2}\pi+2\right)r+\dfrac{S}{r}\geqslant 2\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\pi+2\right)S}$.

当且仅当 $\left(\dfrac{1}{2}\pi+2\right)r=\dfrac{S}{r}$，即 $S=\left(\dfrac{1}{2}\pi+2\right)r^2$ 时周长有最小值.

又 $S=\dfrac{1}{2}\pi r^2+2rh$，所以 $\left(\dfrac{1}{2}\pi+2\right)r^2=\dfrac{1}{2}\pi r^2+2rh$，故 $\dfrac{r}{h}=1$.

即当 $\dfrac{r}{h}=1$ 时周长最小.

11. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x$ 表示由 $x=-\dfrac{\pi}{2}$，$x=\dfrac{\pi}{2}$，$y=0$，$y=\cos x$ 所围成的曲边梯形的面积，$\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x$ 表示由直线 $x=0$，$x=\pi$，$y=0$ 和 $y=\sin x$ 所围成的曲边梯形的面积，由图形可知它们的面积相等.

12.（1）$\dfrac{1}{2}(b^2-a^2)$.　　（2）2π.

13. 以拱宽所在直线为 x 轴，拱高所在直线为 y 轴，建立直角坐标系，设桥拱抛物线为 $y=ax^2+h$，将 $\left(\dfrac{1}{2}b，0\right)$ 代入得 $a=-\dfrac{4h}{b^2}$，所以 $y=-\dfrac{4h}{b^2}x^2+h$.

$S=2\int_0^{\frac{b}{2}}\left(-\dfrac{4h}{b^2}x^2+h\right)\mathrm{d}x=2\left(-\dfrac{4h}{3b^2}x^3+hx\right)\Big|_0^{\frac{b}{2}}=2\left(-\dfrac{4h}{3b^2}\times\dfrac{b^3}{8}+\dfrac{b}{2}h\right)=\dfrac{2}{3}bh$.

14.（1）$y'=12\sin^3 3x\cos^3 4x\cos 3x-12\sin^4 3x\sin 4x\cos^2 4x$.

（2）$y'=\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}+2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}-x\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$.

（3）$y'=(2+2x)a^{2x+x^2}\ln a$.

（4）$y'=\dfrac{\ln x}{(x+1)^2}$.

15. $p^2-4q=0$.

16. $16x-8y+25=0$.

17. $a=2$，$b=1$.

18. $a=2$，函数在 $x=\dfrac{\pi}{3}$处有极大值为$\sqrt{3}$.

19. 由已知，$a\neq 0$（否则 $b^2-3ac=b^2\geqslant 0$），$f'(x)=3ax^2+2bx+c$，$\Delta=4(b^2-3ac)<0$.
$\therefore f(x)$在（$-\infty$，$+\infty$）上是单调函数，$f(x)$无极值.

20. 设容器底面的一边长为 x m，则另一边长为$\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$m，容器高 $h=\dfrac{16}{5}-2x$(m)，

$V=x\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{16}{5}-2x\right)=-2x^3+\dfrac{11}{5}x^2+\dfrac{8}{5}x \quad (0<x<1.6)$，

$V'=-6x^2+\dfrac{22}{5}x+\dfrac{8}{5}$.

当 $0<x<1$ 时，函数 $V(x)$单调递增，当 $1<x<1.6$ 时，函数 $V(x)$单调递减.

所以函数有最大值是 $V(1)=\dfrac{9}{5}$(m^3)，此时 $h=\dfrac{16}{5}-2=\dfrac{6}{5}$(m).

所以当高为$\dfrac{6}{5}$ m 时，容器容积最大，最大容积为$\dfrac{9}{5}$ m^3.

21. 利润 $y=P(x)x-C(x)=24\,200x-\dfrac{1}{5}x^3-50\,000-200x=-\dfrac{1}{5}x^3+24\,000x-50\,000$（元），

$\therefore y'=-\dfrac{3}{5}x^2+24\,000$. 令 $y'=0$，得 $x=200$(t). 当 $x=200$(t) 时，$y=3.15\times 10^6$(元).

所以当每月生产 200 t 时，利润最大，最大值为 3.15×10^6 元.

22. (1) $\dfrac{1}{2}\pi a^2$.

(2) 原式$=\int_0^1\sqrt{1-(x-1)^2}\,\mathrm{d}x-\int_0^1 x\,\mathrm{d}x$，此式表示以（1，0）为圆心，1 为半径的$\dfrac{1}{4}$圆面积减去以直线 $y=x$，$y=0$，$x=1$ 所围成的三角形面积，其值为$\dfrac{1}{4}\pi-\dfrac{1}{2}$.

23. $\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x$ 表示由直线 $x=-a$，$x=a$，$y=0$ 和曲线 $y=f(x)$所围成的曲边梯形的面积. 由于 $f(x)$是偶函数，故该面积是由直线 $x=0$，$x=a$，$y=0$ 和曲线 $y=f(x)$所围成的曲边梯形的面积的 2 倍，即 $2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$，所以 $\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

24. $f(a)(b-a)$ 表示 S_{ABEF}，$f(b)(b-a)$ 表示 S_{ABCD}，

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示 S_{ABCF}，

所以 $f(a)(b-a)<\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<f(b)(b-a)$，如图 4－32 所示.

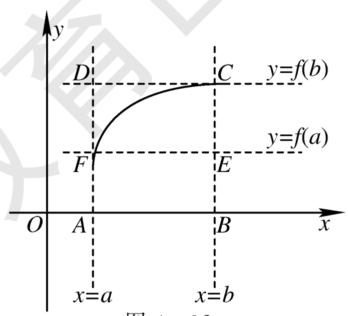


图 4－32

25. (1) 当 $k=1$ 时，$f(x)=(x-1)e^x-x^2$.

$f'(x)=e^x+(x-1)e^x-2x=x(e^x-2)$.

令 $f'(x)=0$，解得 $x_1=0$，$x_2=\ln 2>0$.

所以 $f'(x)$，$f(x)$随 x 的变化情况如下表：

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \ln 2)$	$\ln 2$	$(\ln 2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以函数 $f(x)$的单调递增区间为$(-\infty, 0)$和$(\ln 2, +\infty)$，单调递减区间为$(0, \ln 2)$.

(2) $f(x)=(x-1)e^x-kx^2$，$x\in[0, k]$，$k\in\left(\frac{1}{2}, 1\right]$.

$f'(x)=xe^x-2kx=x(e^x-2k)$，

令 $f'(x)=0$，解得 $x_1=0$，$x_2=\ln(2k)$.

为比较 k 与 $\ln(2k)$的大小，令 $\varphi(x)=k-\ln(2k)$，$k\in\left(\frac{1}{2}, 1\right]$，

则 $\varphi'(x)=1-\frac{1}{k}=\frac{k-1}{k}\leqslant 0$，所以 $\varphi(x)$在$\left(\frac{1}{2}, 1\right]$上是减函数，

$\therefore \varphi(1)\leqslant\varphi(k)<\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$，

$\therefore 1-\ln 2\leqslant\varphi(k)<\frac{1}{2}<k$，即 $0<\ln(2k)<k$.

所以 $f'(x)$，$f(x)$随 x 的变化情况如下表：

x	$(0, \ln(2k))$	$\ln(2k)$	$(\ln(2k), k)$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	极小值	↗

$f(0)=-1$，

$f(k)-f(0)=(k-1)e^k-k^3+1=(k-1)e^k-(k^3-1)=(k-1)[e^k-(k^2+k+1)]$.

$\because k\in\left(\frac{1}{2}, 1\right]$，$\therefore k-1\leqslant 0$，

对任意的 $k\in\left(\frac{1}{2}, 1\right]$，$y=e^k$ 的图象恒在 $y=k^2+k+1$ 下方，

$\therefore e^k-(k^2+k+1)\leqslant 0$，

$\therefore f(k)-f(0)\geqslant 0$，即 $f(k)\geqslant f(0)$.

$\therefore$函数 $f(x)$在$[0, k]$上的最大值 $M=f(k)=(k-1)e^k-k^3$.

26. (1) $\because f(0)=1$，$a>0$，$\therefore f(0)=a^2=1$，$\therefore a=1$.

$\therefore f'(x)=3x^2+2bx+c$.

又 $f'(x)=3x^2+2bx+c=0$ 的两个根分别是 1 和 2，

$\therefore -\frac{2b}{3}=3$，得 $b=-\frac{9}{2}$. $\frac{c}{3}=2$，得 $c=6$.

$\therefore f(x)=x^3-\frac{9}{2}x^2+6x+1$.

（2）由(1)得，$f'(x)=3x^2-9x+6=3(x-1)(x-2)$，

当 $x\in[2,+\infty)$时，$f'(x)\geqslant 0$，所以 $f(x)$在$[2,+\infty)$上是增函数，

对 $x\in[2,+\infty)$，当 $x=2$ 时，$f(x)_{\min}=f(2)=3$，

要使 $f(x)<\frac{1}{2}m^3-m\ln m-mt+3$ 在 $x\in[2,+\infty)$上有解，

只需 $f(x)_{\min}<\frac{1}{2}m^3-m\ln m-mt+3$，即 $3<\frac{1}{2}m^3-m\ln m-mt+3$ 对任意 $m\in(0,2]$ 恒成立，

即 $t<\frac{1}{2}m^2-\ln m$ 对任意 $m\in(0,2]$恒成立.

设 $h(m)=\frac{1}{2}m^2-\ln m$，$m\in(0,2]$，则 $t<h(m)_{\min}$，

$h'(m)=m-\frac{1}{m}=\frac{m^2-1}{m}=\frac{(m+1)(m-1)}{m}$，令 $h'(m)=0$，得 $m=1$ 或 $m=-1$(舍)，

当 $m\in(0,2]$时，$h'(m)$与 $h(m)$的变化情况如下表：

m	$(0,1)$	1	$(1,2)$	2
$h'(m)$	$-$	0	$+$	
$h(m)$	$\searrow$	极小值$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$2-\ln 2$

$\therefore m=1$ 时，$h(m)_{\min}=h(1)=\frac{1}{2}$，

所以 $t<\frac{1}{2}$，即实数 t 的取值范围为 $t<\frac{1}{2}$.

第5章　数系的扩充与复数

一、教学目标

1. 理解复数的基本概念、代数表示形式以及复数相等的充要条件.

2. 理解并掌握复数代数形式的加（减）运算法则.

3. 理解并掌握复数代数形式的乘除运算法则.

4. 了解复数的几何表示及加（减）运算的几何意义.

5. 体验复数问题实数化的思想方法，能运用数形结合、待定系数法等数学思想方法解决复数问题.

6. 在问题情境中了解数系的扩充过程，体会实际需求与数学内部的矛盾（数的运算规则、方程理论）在数系扩充过程中的作用，感受人类理性思维的作用以及数与现实世界的联系.

二、教材说明

数系的扩充和复数概念，《课标》与以前《大纲》教学内容相同，但在处理方式和目标定位上存在差异.

《课标》将复数作为数系扩充的结果引入，原《大纲》教材先安排复数的概念，再研究复数的运算，最后介绍数系的扩充. 本教材在介绍数系扩充的思想方法的基础上引入复数的概念，力求还原复数的发现与建构过程.

《课标》强调在问题情境中了解数系的扩充过程，体会实际需求与数学内部的矛盾在数系扩充过程中的作用，感受人类理性思维的作用以及数与现实世界的联系. 从这点上看，《课标》的要求提高了.

在复数的代数表示法及其几何意义上，《课标》的教学定位是“了解”，而原《大纲》要求“掌握”. 从这点上看，《课标》的要求降低了.

复数代数形式的四则运算，《课标》与原《大纲》教学内容与要求基本相同，都要求能进行代数形式的四则运算. 但《课标》要求了解复数代数形式的加、减运算的几何意义，从这一点上看，《课标》对复数的向量表示提出了要求，强化了数形结合思想方法. 在复数代数形式的四则运算上，《课标》明确强调“淡化繁琐的计算和技巧性训练”.

三、课时安排建议

本章教学时间约需 **5** 课时，具体分配如下（仅供参考）：

5.1　解方程与数系的扩充	1 课时
5.2　复数的概念	1 课时
5.3　复数的四则运算	1 课时
5.4　复数的几何表示	1 课时
小结与复习	1 课时

四、教学建议

1. 数学的发展既有内在的动力，也有外在的动力. 在高中数学的教学中，要注重数学的不同分支和不同内容之间的联系，数学与日常生活的联系，数学与其他学科的联系，沟通数学学科内各部分内容之间的联系. 通过类比、联想、知识的迁移和应用等方式，使学生体会知识之间的有机联系，感受数学的整体性，进一步理解数学的本质，提高解决问题的能力. 在教学中要注重复数相等条件应用中等价转化的思想，加法、乘法运算法则与多项式加法、乘法法则的类比思想，复数几何表示与平面向量结合的数形结合思想等在有关内容中的渗透，在不同内容中的应用.

2. 在教学中，应鼓励学生积极参与教学活动，包括思维的参与和行为的参与. 既要有教师的讲授和指导，也要有学生的自主探究与合作交流. 教师要创设适当的问题情景，鼓励学生发现数学的规律和问题解决的途径，使他们经历知识形成的过程. 例如数系扩充的教学，教师可回顾数系几次扩充的历史，让学生体会到数集的扩充是生产实践的需要，也是数学学科自身发展的需要，从而让学生积极主动地建构虚数的概念、复数的概念、复数的分类.

3. 数学是人类文化的重要组成部分，是人类社会进步的产物，也是推动社会发展的动力. 教学中应引导学生初步了解数学科学与人类社会发展之间的相互作用，体会数学的科学价值、应用价值、人文价值，开阔视野，探寻数学发展的历史轨迹，提高文化素养，养成求实、说理、批判、质疑等理性思维的习惯和锲而不舍的追求真理精神. 可以根据数的发展历史，收集一些古今中外的历史事件和人物的有关资料或现实生活的实例，采取小组合作的方式写一篇有关数的概念形成、发展和应用的文章，在班级中交流，反映数学在人类社会进步、人类文明建设中的作用，同时也反映社会发展对数学发展的促进作用.

五、评价建议

数系的扩充与复数引入是高中数学课程中的基础知识，教学评价既要关注基础知识和基本技能的掌握，又要关注学生在学习过程中的体验. 将教学过程、教学目标和学生发展有机

地结合起来，可通过课堂提问、学生作业、学习交流、成绩测定、数学探究性课题学习撰写小论文等方法进行评价.

本章涉及的基础知识有：复数概念、加减乘除运算、复数的几何表示等.

本章涉及的基本技能有：运算的技能、分析问题和解决问题的能力等.

本章涉及的基本数学思想方法有：数形结合的思想、类比的思想、等价转化和分类讨论的思想等.

在进行本章教学评价时，应尽可能覆盖本章的基础知识、基本技能和基本数学思想方法，对重点知识、能力要求加大评价的力度.

5.1　解方程与数系的扩充

教材线索

本小节首先从方程 $x^2+1=0$ 在实数集内无解，提出在研究代数方程的过程中，如果限于实数，有些问题就无法解决，然后回顾整数、有理数扩充的历史. 一个自然的想法是，能否像引进分数、无理数一样，通过引进新的数而使实数系得到进一步扩充，从而使问题得以解决. 使学生对数的形成、发展历史和规律，各种数集之间的关系有着比较清晰、完整的认识. 具体做法是：引入新数 i，规定 $i^2=-1$ 且实数可以与它进行四则运算，还有加乘运算律仍然成立.

教学目标

（一）知识与技能

理解并掌握虚数单位 i 及虚数单位 i 与实数进行四则运算的规律.

（二）过程与方法

通过解方程等具体问题，体会实际需求与数学内部的矛盾（数的运算规则、方程理论）在数系扩充过程中的作用，感受引入复数的概念的必要性，感受人类理性思维在数系扩充中的作用.

（三）情感、态度与价值观

培养学生正确的人生观、价值观，使之深刻认识到人在事物发展变化中所应体现的价值和作用.

教材分析

1. 重点

数系的扩充过程，数系扩充的原因和特征，虚数单位 i 的引进.

2. 难点

数系扩充的原因和特征的认识.

3.《课标》分析

数系的扩充，《课标》与原《大纲》教学内容相同，但在处理方式和目标定位上存在差异.

(1)《课标》将复数作为数系扩充结果引入，原《大纲》教材先安排复数的概念，再研究复数的运算，最后介绍数系的扩充. 本教材在介绍数系扩充的思想方法的基础上引入复数的概念，力求还原复数的发现与建构过程.

(2)《课标》强调在问题情境中了解数系的扩充过程，体会实际需求与数学内部的矛盾在数系扩充过程中的作用，感受人类理性思维的作用以及数与现实世界的联系. 从这点上看，《课标》的要求提高了.

教学建议

1. 建构主义学习理论认为，学习不应该被看成是对于教师所授予的知识的被动接受，而是学习者从自身已有的知识和经验为基础的主动的建构活动. 因此，教师必须为学生提供必要的背景知识，并与学生一起探索新知识. 教学时，我们采用体验已学过的数集的扩充的历史，让学生体会到数集的扩充是生产实践的需要，也是数学学科自身的需要. 介绍数的概念发展过程，使学生对数的形式、发展历史、各种数集之间的关系有着比较清晰、完整的认识，从而激发学生积极主动地建构新的数系.

2. 教学时，可从方程在给定范围内是否有解提出问题：

(1) 在自然数集 **N** 中，方程 $x+1=0$ 有解吗？

(2) 在整数集 **Z** 中，方程 $2x=1$ 有解吗？

(3) 在有理数集 **Q** 中，方程 $x^2=2$ 有解吗？

(4) 在实数集 **R** 中，方程 $x^2+1=0$ 有解吗？

3. 回顾从自然数集 **N** 扩充到实数集 **R** 的过程，帮助学生认识数系扩充的主要原因和共同特征. 可让学生思考如下问题：

(1) 从自然数集 **N** 扩充到实数集 **R** 经历了几次扩充？

(2) 每次扩充的主要原因是什么？

(3) 每次扩充的共同特征是什么？

然后师生共同归纳总结.

扩充原因：

(1) 满足解决实际问题的需要；

(2) 满足数学自身完善和发展的需要.

扩充特征：

（1）引入新数；

（2）原数集中的运算规则在新数集中得到保留和扩展.

提出新的问题：

如何对实数集进行扩充，使方程 $x^2+1=0$ 在新的数集中有解？

引入虚数单位 i.

相关链接

数集扩充的基本原则

由自然数集 **N** 逐步扩充到复数集 **C**，我们经过了四个主要历程：**N→Z**，**Z→Q**，**Q→R**，**R→C**. 在这四个扩充过程中，必须遵循下列基本原则：

1. 为了解决原有数集中运算遇到的矛盾，在原有数集的基础上，增加一种新的数，把原有数集扩充为一个更大的，并以原有数集作为子集的新数集.

2. 引进新数后，规定新数与原数，新数与新数之间的运算法则.

3. 在新的数集中，原数与原数、新数与原数之间仍满足原有的运算律.

4. 新的数集解决了原有数集所不能解决的一部分运算上的矛盾.

依据上述原则，从自然数集 **N** 逐步扩充到复数集 **C**，随着各种扩展的不断进行，数集本身的内部结构就逐渐完善，数集内部结构的变化，使得数集中总可以实施的运算逐渐增多. 自然数集扩展到整数集，使加法运算的逆运算——减法运算可以进行；整数集扩展到有理数集，使乘法运算的逆运算——除法运算可以进行；实数集扩展到复数集，使乘方运算的逆运算——开方运算可以进行，从而加、减、乘、除、乘方、开方这六种运算在复数集中都能顺利实施.

5.2 复数的概念

教材线索

本节内容是在引入虚数单位 i，并同时规定了它的两条性质后，自然得出复数的概念；然后给出实部、虚部、虚数、纯虚数等概念，告诉学生实数集是复数集的真子集；最后规定了两个复数相等的充要条件.

教学目标

（一）知识与技能

1. 理解并掌握复数的有关概念（复数、虚数、纯虚数、实部、虚部等）.

2. 理解并掌握复数相等的充要条件.

（二）过程与方法

1. 能利用复数的有关概念对复数进行分类，并求出有关参数的取值范围.

2. 会用复数相等的定义求有关参数（未知数）的值.

3. 培养学生分类讨论、等价转化等数学思想和方法.

（三）情感、态度与价值观

让学生体会矛盾转化、分与合、实与虚等辩证唯物主义观点.

教材分析

1. 重点

复数的概念、虚数单位 i、复数的分类和复数相等的定义是本节课的重点.

2. 难点

虚数单位 i 的引进及复数的概念、复数的分类是本节课的难点.

3. 复数及复数集

在复数的定义之后，教材给出了复数的代数形式 $z=a+b\mathrm{i}$，这既是与 5.4 节复数的几何表示相对应，也说明任何一个复数均可以由一个有序实数对（a，b）唯一确定，是复数能由复平面内的点来表示的理论基础.

必须弄清复数中的实部和虚部的含义，同时要分清实数、虚数、纯虚数所具备的条件. 如设 $m\in\mathbf{R}$，复数 $z=(2+\mathrm{i})m^2-3(1+\mathrm{i})m-2(1-\mathrm{i})$.

（1）若 z 为实数，则 $m=$______；（2）若 z 为纯虚数，则 $m=$______.

对于本题复数用非标准形式给出，应先化成标准形式 $a+b\mathrm{i}$（a，$b\in\mathbf{R}$）.

复数集用 $\mathbf{C}$ 表示，至此我们所学过的有关数集的关系如下：

$$\text{复数 } a+b\mathrm{i}\ (a,\ b\in\mathbf{R})\begin{cases}\text{实数}\ (b=0),\\ \text{虚数}\ (b\neq 0)\begin{cases}\text{纯虚数}\ (a=0),\\ \text{非纯虚数}\ (a\neq 0).\end{cases}\end{cases}$$

由此可知，实数集、虚数集都是复数集的真子集.

给出复数相等的定义后，由这个定义即得推论 $a+b\mathrm{i}=0\Leftrightarrow a=0$，$b=0$，讲完这些后，应明确：复数相等的意义是求复数值在复数集中解方程的重要依据，提供了将复数问题化归为实数问题的解决途径.

教学建议

虚数单位 i 的引入及复数的概念是本节教学的难点和关键. 教学时可从前几次数的扩充、指数概念推广进行类比，让学生明确在数的概念扩充中，始终保持加法、乘法的交换律、结合律及乘法对加法的分配律成立.

数学中很多概念本身就是解题手段和方法，认真理解复数的基本概念并运用它去解题也是本节的重要方法，教材中已有一些实例，教学中可多举些例子让学生学习，以加深学生的理解.

告诉学生“两个复数只能说相等或不相等，不能比较大小”，明确复数问题实数化是解决复数问题的最基本的思想方法.

例题解析

例 1 实数 m 取什么值时，复数 $z=(m^2-3m)+(2m^2-5m-3)\mathrm{i}$ 是：(1) 实数？(2) 虚数？(3) 纯虚数？

解 (1) 当 $2m^2-5m-3=0$，即 $m=3$ 或 $m=-\dfrac{1}{2}$ 时，复数 z 是实数.

(2) 当 $2m^2-5m-3\neq 0$，即 $m\neq 3$ 且 $m\neq -\dfrac{1}{2}$ 时，复数 z 是虚数.

(3) 当 $\begin{cases}m^2-3m=0,\\ 2m^2-5m-3\neq 0,\end{cases}$ 即 $m=0$ 时，复数 z 是纯虚数.

点评 复数分类的标准是复数的实部和虚部是否为零.

(1) 复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 为实数的充要条件是 $b=0$；

(2) 复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 为虚数的充要条件是 $b\neq 0$；

(3) 复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 为纯虚数的充要条件是 $a=0$ 且 $b\neq 0$.

例 2 设 $m\in\mathbf{R}$，复数 $z=(2+\mathrm{i})m^2-3(1+\mathrm{i})m-2(1-\mathrm{i})$.

(1) 若 z 为实数，则 $m=$______；(2) 若 z 为纯虚数，则 $m=$______.

解 $z=(2m^2-3m-2)+(m^2-3m+2)\mathrm{i}$.

(1) 依题意：$m^2-3m+2=0$，即 $m=1$ 或 $m=2$ 时，复数 z 是实数.

(2) 依题意：$\begin{cases}2m^2-3m-2=0,\\ m^2-3m+2\neq 0,\end{cases}$ 即 $m=-\dfrac{1}{2}$ 时，复数 z 是纯虚数.

点评 本题复数用非标准形式给出，应先化成标准形式 $a+b\mathrm{i}$ (a，$b\in\mathbf{R}$).

例 3 若不等式 $m^2-(m^2-3m)\mathrm{i}<(m^2-4m+3)\mathrm{i}+10$ 成立，求实数 m 的值.

解 分析此题主要考查复数能比较大小的条件及方程、不等式的解法.

$\because$ $m^2-(m^2-3m)\mathrm{i}<(m^2-4m+3)\mathrm{i}+10$，

$\therefore$ $\begin{cases}m^2<10,\\ m^2-3m=0,\\ m^2-4m+3=0.\end{cases}$

解得：$\begin{cases}|m|<\sqrt{10},\\ m=0 \text{ 或 } m=3,\\ m=3 \text{ 或 } m=1.\end{cases}$

∴当 $m=3$ 时，原不等式成立.

点评 本题应抓住复数能比较大小时，必须都是实数这一条件.

相关链接

两个复数“不能比较大小”

实数集 **R** 中的大小关系具有以下性质：

(1) 对于任意两个实数 a，b 来说，$a<b$，$a=b$，$a>b$ 这三种情况有且仅有一种成立；

(2) 如果 $a<b$，$b<c$，那么 $a<c$；

(3) 如果 $a<b$，那么 $a+c<b+c$；

(4) 如果 $a<b$，$c>0$，那么 $ac<bc$.

然而在复数集 **C** 中，不论我们如何规定大小关系，都无法同时满足上面四个性质. 我们用反证法证明这一结论.

假设在复数集 **C** 中能规定一种大小关系，使它同时满足上述四个性质. 我们比较两个复数 0 与 i. 由性质（1）及 $i\neq 0$，可知 $i<0$ 或 $i>0$ 有且只有一种成立.

若 $i>0$，这时由性质（4），可得 $0\cdot i<i\cdot i\Rightarrow 0<-1$，

再次由性质（4）可得 $0\times(-1)<(-1)^2\Rightarrow 0<1$.

另一方面，由 $0<-1$，根据性质（3）可得 $0+1<-1+1\Rightarrow 1<0$.

这样 $0<1$ 与 $1<0$ 同时成立，这与性质（1）矛盾.

再看 $i<0$ 的情况. 这时由性质(3)可得 $i+(-i)<0+(-i)\Rightarrow 0<-i$，可由性质(4)得 $0\times(-i)<(-i)^2\Rightarrow 0<-1$.

综上所述可得 $0<1$ 与 $1<0$ 同时成立，与性质（1）矛盾，可知，在复数集 **C** 中，对任何两个数都适用的大小关系是不存在的.

5.3 复数的四则运算

教材线索

本节内容首先规定了复数代数形式的加法、减法运算和乘法、除法运算等内容；然后，通过在复数范围内求负数的平方根入手，进而尝试讨论在复数范围内开平方问题，实系数一元二次方程 $\Delta<0$ 时，方程的求根公式.

教学目标

（一）知识与技能

1. 掌握复数代数形式的加减法运算，乘除法运算.

2. 能进行复数开方运算，在复数集中求解实系数一元二次方程.

（二）过程与方法

体验复数问题实数化的思想方法.

（三）情感、态度与价值观

培养学生从特殊到一般、具体到抽象的概括能力.

教材分析

1. 重点

（1）复数代数形式的加法、减法运算；

（2）复数代数形式的乘法、除法运算；

（3）复数开平方，求平方根问题；

（4）实系数一元二次方程求根公式；

（5）复数问题实数化的思想方法的理解与运用.

2. 难点

（1）复数代数形式的除法法则；

（2）复数求平方根问题.

3. 关于复数代数形式的加法运算

复数代数形式的加法法则是一种规定，帮助学生理解这个规定的合理性，是教学的关键所在. 可从两个方面理解复数代数形式的加法法则的合理性.

（1）复数问题实数化是处理复数问题的基本策略（这一策略源于复数的定义），因此复数的运算应转化为它们的实部与虚部之间的运算. 又由于复数集以实数集为真子集，因此我们规定的加法运算，要保证在复数均为实数的情况下，与原有的实数加法法则一致.

（2）我们规定的加法运算要保证实数加法运算的交换律、结合律在复数集 **C** 中仍然成立.

4. 关于复数代数形式的乘法运算

（1）总结复数的加减法则，向学生明确：两个复数相加减就是把实部与实部、虚部与虚部分别相加减，即若将复数 $a+b\mathrm{i}$ 与 $c+d\mathrm{i}$ 中的虚数单位 i 看作多项式中的 x，则复数的加减运算可按照多项式的加减运算的合并同类项法则进行. 由此类比，向学生指明：复数的乘法可按与两个多项式相乘类似的办法进行，并注意把 i^2 换成 -1.

（2）复数代数形式的乘法法则，也是一种规定. 通过操作演算，让学生掌握复数乘法的

方法，而不必专门记忆公式.

（3）可向学生指明，复数的乘法运算满足乘法交换律、结合律及乘法对加法的分配律.

5. 关于复数代数形式的除法运算

（1）引导学生类比初中分母有理化过程：将含根号的分母 $c+d\sqrt{D}$ 乘以 $c-d\sqrt{D}$ 化为有理式 c^2-d^2D，自主探索在两复数作商情况下，如何将分母实数化，适时引入共轭复数概念，明确公式 $(a+b\mathrm{i})(a-b\mathrm{i})=a^2+b^2$.

（2）通过操作演算让学生掌握复数除法的“分母实数化”方法，而不必专门记忆复数除法法则.

（3）类比实数的除法是乘法的逆运算，可规定复数的除法也是乘法的逆运算，即把满足 $(c+d\mathrm{i})(x+y\mathrm{i})=a+b\mathrm{i}(c+d\mathrm{i}\neq 0)$ 的复数 $x+y\mathrm{i}$ 叫作 $a+b\mathrm{i}$ 除以复数 $c+d\mathrm{i}$ 的商，用待定系数法求出实数 x，y，为后面复数开方的教学埋下伏笔.

6. 求负数 a 的平方根及实系数一元二次方程求根公式

求负数 a 的平方根关键在于利用 i 的性质及合理的推理验证 $(\pm\sqrt{-a}\,\mathrm{i})^2=a$，由此在复数范围内顺利解决实系数一元二次方程求根问题，尤其是 $\Delta<0$ 时，有了求根公式 $\dfrac{-b\pm\sqrt{-\Delta}\,\mathrm{i}}{2a}$.

7. 复数 $a+b\mathrm{i}$ 开平方问题

应将复数 $a+b\mathrm{i}$ 开平方问题归结为用待定系数法.

设 $x+y\mathrm{i}$ 满足 $(x+y\mathrm{i})^2=a+b\mathrm{i}$，

通过列方程组求解待定实数 x，y.

教学建议

1. 由复数的定义，复数的运算类似于多项式的运算法则，故在解决复数问题时可仿照多项式的运算进行运算，在教学中应注意复数运算与实数运算之间的联系，运用化归思想，待定系数法思想解决问题. 并向学生指明实系数一元二次方程解的问题在复数范围内得到彻底、完善的解决.

2. 在复数代数形式的四则运算的教学中，要“淡化繁琐的计算和技巧训练”，将教学重点放在帮助学生理解理论，体验复数问题实数化的过程与方法上.

例题解析

例 1 已知复数 $z_1=1+2\mathrm{i}$ 与 $z=4-3\mathrm{i}$. 试求它们的和 z_1+z_2，差 z_1-z_2，积 z_1z_2.

分析 总结复数的加减法则，向学生明确：两个复数相加减就是把实部与实部、虚部与虚部分别相加减，即若将复数 $a+b\mathrm{i}$ 与 $c+d\mathrm{i}$ 中的虚数单位 i 看作多项式中的 x，则复数的加减运算可按照多项式的加减运算的合并同类项法则进行. 由此类比，向学生指明：复数的

乘法可按与两个多项式相乘类似的办法进行，并注意把 i^2 换成-1.

例 2 已知复数 $z_1=1+2i$，$z_2=4-3i$. 求 z_2^{-1} 及$\frac{z_1}{z_2}$.

分析 通过操作演算让学生掌握复数除法的“分母实数化”方法，而不必专门记忆复数除法法则.

例 3 在复数范围内解下列方程：

(1) $x^2=-3$； (2) $x^2=i$.

分析 (1) 求负数 a 的平方根可直接用公式$\pm\sqrt{-a}\,i$.

(2) 求其他复数的平方根可通过设 $x=a+bi$，通过复数相等的充要条件，利用待定系数法求解.

例 4 在复数范围内解一元二次方程 $x^2+x+1=0$.

点评 求实系数一元二次方程根的问题，关键先验证系数是否都为实数，再确定 $\Delta=b^2-4ac$的符号，代入相关公式求根.

相关链接

代数基本定理及其应用

任何 n ($n>0$，$n\in\mathbf{N}$) 次复系数多项式 $f(x)$至少有一个复数根.

推论 1：任何 n ($n>0$，$n\in\mathbf{N}$) 次复系数多项式 $f(x)$在复数集中可以分解为 n 个一次因式的乘积，即 n 次多项式 $f(x)$有 n 个复数根.

推论 2：如果虚数 $a+bi$ 是实系数一元 n 次方程 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ 的根，那么它的共轭虚数 $a-bi$ 也是方程的根，即实系数一元 n 次方程“虚根成对”出现.

5.4 复数的几何表示

教材线索

本节首先回顾了实数的几何表示法，由此得到启发，联想到用平面上的点和向量来表示复数，即复数 $a+bi$ 可以用平面上的点 $P(a,b)$ 表示，也可以用向量$\overrightarrow{OP}=(a,b)$表示，其次通过向量模的定义给出了复数 z 的模 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$及共轭复数与复数模之间的关系：

$z\bar{z}=|z|^2=a^2+b^2$，最后利用向量加法（减法）的几何意义引入复数的加（减）法几何意义.

教学目标

（一）知识与技能

1. 了解复平面的概念，复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 两种几何表示：点 $P(a,b)$ 及向量 $\overrightarrow{OP}$.

2. 了解复数的加、减运算的几何意义.

3. 了解共轭复数及复数模的定义，并会简单运用.

（二）过程与方法

通过对复数几何表示加法、减法运算的几何意义的学习认识过程，让学生感受形与数之间的和谐与统一，体会思考问题的方式和方法，提高实践动手操作能力.

（三）情感、态度与价值观

通过对复数的代数语言与几何语言相互转换的情景学习，体会解决复数问题的手段，培养学生勇于创新的精神.

教材分析

1. 重点

复数的几何表示点 $P(a,b)$，向量 $\overrightarrow{OP}$；复数加（减）法运算的几何意义，它们是复数与几何衔接的桥梁.

2. 难点

复平面概念的建立，加（减）法运算的几何意义是本节的难点.

3. 明确“复平面”的概念.

4. 在本节教学过程中应注重向学生渗透类比、联想的思想方法，启发学生从向量知识、向量角度出发，研究复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 与复平面内所有点，所有以点 O 为始点，点 P 为终点的向量 $\overrightarrow{OP}$ 之间的对应关系（由此获得复数的几何表示、向量表示，如图 5－1）：

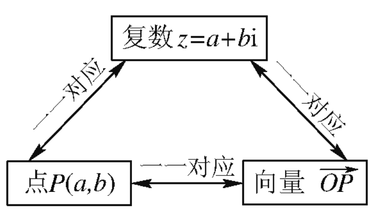


图 5－1

这些知识都为数形结合解决有关复数问题提供了良好的条件.

5. 用数形结合的思想方法，强化对复数几何意义的认识

在复平面内，实数与实轴上的点一一对应，纯虚数与虚轴上的点（原点除外）一一对

应，非纯虚数的虚数与象限内的点一一对应，可通过一组练习题来强化这一认识.

教学建议

1. 在本节教学过程中，要向学生呈现本套教材的最大特色之一是以向量为主线，把代数、几何联系起来，把向量引进复数体系，通过引入复数的向量表示，再由向量加减法的几何意义顺理成章地获得复数加减法的运算的几何意义. 一节有一定难度的新课通过类比等思想方法入手，有效降低了难度，使得教材内容简单易学，减轻了学生的学习负担，优化了课程的知识结构. 这种数形结合的思想丰富了我们研究问题和解决问题的范围和手段. 复数作为一种新的数学语言，也为我们今后用代数方法解决几何问题提供了可能.

2. 在向量和几何变换的基础上继续研究复数的运算和应用，不仅更为直观易懂，更有利于体验数学的思维特色，提高数学素养.

例题解析

例 1　(1) 在复平面画出分别表示以下复数 z_1，…，z_4 的点 P_1，…，P_4.

$$z_1=1，z_2=\mathrm{i}，z_3=4+3\mathrm{i}，z_4=4-3\mathrm{i}.$$

(2) 求出表示以上复数的向量$\overrightarrow{OP_1}$，…，$\overrightarrow{OP_4}$的模. 试推广你的结论.

(3) 表示以上复数的点中是否有两个点关于实轴对称？它们所代表的复数有什么关系？

说明　通过本例应让学生熟练掌握复数的两种几何表示，并由此得出模的概念.

例 2　求复数 $z_1=2+3\mathrm{i}$ 和 $z_2=2-3\mathrm{i}$ 的模，并比较模的大小.

说明　通过本例应让学生熟练掌握求复数的模的基本方法，并为得出共轭复数的模相等这一结论做铺垫.

例 3　如图 5-2，已知 $OACB$ 是复平面上的平行四边形，O 是原点，A，B 分别表示复数 $3+\mathrm{i}$，$2+4\mathrm{i}$，M 是 OC，AB 的交点. 求 C，M 表示的复数.

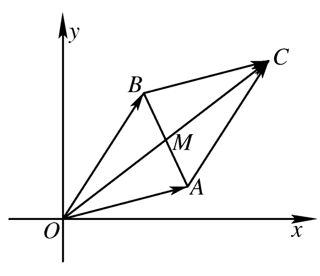


图 5-2

分析　求点 C，M 表示的复数应转化为求向量$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OM}$对应的复数，且$\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OC}$，由加法几何意义$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.

$\therefore\overrightarrow{OC}$对应的复数 $5+5\mathrm{i}$，$\overrightarrow{OM}$对应的复数$\dfrac{5}{2}+\dfrac{5}{2}\mathrm{i}$.

相关链接

复数与三角函数

1. 如图 5－3，点 Z 可由有序实数对（a，b）唯一确定，除此之外，点 Z 还可由什么有序实数对唯一确定呢？

设点 Z 的坐标是（a，b），$r=|\overrightarrow{OZ}|$，θ 是以 x 轴的非负半轴为始边，以 $|\overrightarrow{OZ}|$ 所在射线为终边的角，则复数 z 还可以用 r，θ 表示：$z=a+b\mathrm{i}=r\cos\theta+\mathrm{i}r\sin\theta$. $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 叫作复数 z 的三角形式，其中 r 叫作复数 z 的模；当 $r\neq0$ 时，θ 叫作复数 z 的辐角，复数 z 的辐角是任意的.

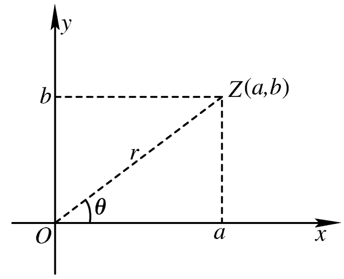


图 5－3

2. 设 $z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$，

则 $z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)]$.

3. 设 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，$n\in\mathbf{N}^*$，则 $z^n=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta)$.

应用：求 $z^4=1$ 的解.

解法 1　$\because z^4-1=0$，$\therefore (z^2-1)(z^2+1)=0$. $\therefore z=\pm1$ 或 $z=\pm\mathrm{i}$.

解法 2　$\because |z|=1$，$\therefore z=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$. $\therefore z^4=\cos4\theta+\mathrm{i}\sin4\theta=1$.

$\therefore 4\theta=2k\pi$，$\theta=\dfrac{k\pi}{2}$. $\therefore z=\cos\dfrac{k\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\dfrac{k\pi}{2}$（$k=0$，1，2，3）.

由此得到 $z=\pm1$ 或 $z=\pm\mathrm{i}$.

这就是 $z^4=1$ 的四个根，它们在复平面上对应的点都在以原点为圆心的单位圆上，且将单位圆四等分.

教材习题参考解答

5.2 练习（教材 P.85）

1. 实部分别是-1，$\frac{\sqrt{2}}{2}$，2，0；虚部分别是1，$\frac{\sqrt{2}}{2}$，$-\sqrt{2}$，$-\frac{1}{2}$.

2. （1）$\begin{cases}x=-\frac{2}{3},\\ y=-\frac{4}{3}.\end{cases}$ （2）$\begin{cases}x=-8,\\ y=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=3,\\ y=-8.\end{cases}$

3. 略

习题 1（教材 P.86）

1. D. 2. A. 3. A.

4. （1）$\begin{cases}a=2,\\ b=-1.\end{cases}$ （2）$\begin{cases}a=1,\\ b=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-1,\\ b=-3.\end{cases}$

5. （1）$m=5$. （2）$m=3$ 或 $m=-2$. （3）$m\neq 5$ 且 $m\neq -3$，$m\in\mathbf{R}$.

5.3 练习（教材 P.91）

1. （1）$3+4\mathrm{i}$. （2）-4. （3）10. （4）i. 2. $m=\pm\sqrt{2}$.

3. （1）$x=-1+\sqrt{2}\,\mathrm{i}$ 或 $x=-1-\sqrt{2}\,\mathrm{i}$.（2）$x=2+\mathrm{i}$ 或 $x=2-\mathrm{i}$.

习题 2（教材 P.91）

1. $z^2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，$z^3=1$，$z^2+z+1=0$. 2. $a^4=-4$.

3. $x=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{7}}{4}\mathrm{i}$ 或 $x=\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{7}}{4}\mathrm{i}$.

4. （1）-1，$-\mathrm{i}$，1，i.（2）$\mathrm{i}^{4k}=1$，$\mathrm{i}^{4k+1}=\mathrm{i}$，$\mathrm{i}^{4k+2}=-1$，$\mathrm{i}^{4k+3}=-\mathrm{i}$，$\mathrm{i}^{100}=1$.
（3）$2015\div 4=503\cdots\cdots 3$，原式$=503\times(1+\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3)+1+\mathrm{i}+\mathrm{i}^2=\mathrm{i}$.

5. （1）$z=1-\mathrm{i}$.（2）$z=\frac{1}{2}+\frac{7}{2}\mathrm{i}$.

5.4 练习（教材 P.101）

1. 图略，$\sqrt{10}$，$2\sqrt{5}$，5，6，$\frac{\sqrt{61}}{2}$

2. $a=0$.　　3. $-\sqrt{3}<k<-\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{2}<k<\sqrt{3}$.

习题 3（教材 P. 101）

1. 四.
2. 图形是以原点为圆心，分别以 2，5 为半径的圆围成的圆环（含边界）.
3. （1）k 值不存在.　　（2）$k=5$.
4. 设 $z=x+y\mathrm{i}$（x，$y\in\mathbf{R}$）.（1）$z+\bar{z}=x+y\mathrm{i}+(x-y\mathrm{i})=2x\in\mathbf{R}$.

   （2）若 z 是实数，则 $y=0$，$\bar{z}=x=z$；又若 $\bar{z}=z$，则 $x+y\mathrm{i}=x-y\mathrm{i}$，所以 $y=0$，故 $z=x\in\mathbf{R}$. 所以 z 是实数 $\Leftrightarrow \bar{z}=z$.
5. 根据向量的三角形法则及三角形三边长的性质证明.

复习题五（教材 P. 104）

1. D.　　2. $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 或 $\alpha=\frac{3\pi}{2}$.　　3. 1.　　4. $2\mathrm{i}$.

5. （1）$z=1-\mathrm{i}$.　　（2）$z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}\mathrm{i}$ 或 $x=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}\mathrm{i}$.

   （3）$z=3+4\mathrm{i}$.　　（4）$z=4+3\mathrm{i}$ 或 $z=-4-3\mathrm{i}$.
6. $|z_1-z_2|=\sqrt{2}$.
7. $|z-\mathrm{i}|$ 的最大值是 3.
8. $\triangle ABC$ 是等腰三角形或直角三角形.
9. 在直角坐标系中作一个单位圆，以 O 为顶点，Ox 轴正半轴为始边作 $\angle xOP=\alpha$，终边 OP 与单位圆的交点 P 即为所求.
10. 点 P 表示的复数是 $\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha$.
11. （1）$\alpha=\frac{2k\pi}{3}$（$k\in\mathbf{Z}$）.　　（2）$\alpha=\frac{2k\pi}{n}$（$n\in\mathbf{N}^*$，$k\in\mathbf{Z}$）.
12. $z=\cos\frac{2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}$（$k=0$，1，2，…，$n-1$），这些点组成正 n 边形.
13. 设方程的实根为 t，则 $t^2-(2\mathrm{i}-1)t+3m-\mathrm{i}=0$，即 $(t^2+t+3m)-(2t+1)\mathrm{i}=0$.

    根据复数相等的定义，得 $\begin{cases}t^2+t+3m=0,\\2t+1=0.\end{cases}$

    解得 $m=\frac{1}{12}$，$t=-\frac{1}{2}$.

    所以 $m=\frac{1}{12}$.

第 6 章　推理与证明

一、教学目标

1. 结合已学过的数学实例和生活中的实例，了解合情推理的含义，能利用归纳和类比等进行简单的推理，体会并认识合情合理在数学发现中的作用.

2. 结合已学过的数学实例和生活中的实例，体会演绎推理的重要性，掌握演绎推理的基本方法，并能运用它们进行一些简单推理.

3. 通过具体实例，了解合情推理和演绎推理之间的联系和差异.

4. 结合已经学过的数学实例，了解直接证明的两种基本方法：分析法和综合法；了解分析法和综合法的思考过程、特点.

5. 结合已经学过的数学实例，了解间接证明的一种基本方法——反证法；了解反证法的思考过程、特点.

6. 了解数学归纳法的原理，能用数学归纳法证明一些简单的数学命题.

7. 通过对实例的介绍（如欧几里得《几何原本》、马克思《资本论》、杰弗逊《独立宣言》、牛顿三定律等），体会公理化思想.

8. 介绍计算机在自动推理领域和数学证明中的作用.

二、教材说明

本章教材安排学生学习关于推理与证明的初步知识. 结合已学过的数学知识和实际生活中的相关问题，让学生明确合情推理与演绎推理的概念、知识及其关系，理解数学证明中的分析法、综合法与反证法，最后还介绍了数学归纳法的应用.

推理与证明是数学的基本思维过程，也是人们学习和生活中经常使用的思维方式. 推理是从一个或几个判断得出一个新判断的思维过程. 一个推理由前提和结论两部分所组成，推理时所依据的判断称为前提，从前提通过推理得到的新判断称为结论.

推理一般包括合情推理和演绎推理.

合情推理是根据已有的事实和正确的结论、实验和实践的结果以及个人的经验和直觉等获得新论断的过程，归纳、类比是合情推理常用的思维方法. 在解决问题的过程中，合情推理具有猜测和发现结论、探索和提供思路的作用，有利于创新意识的培养.

演绎推理是根据已有的事实和正确的结论（包括定义、公理、定理等），按照严格的逻

辑法则得到新论断的过程，培养和提高学生的演绎推理或逻辑证明的能力是高中数学课程的重要目标.

合情推理和演绎推理之间联系紧密、相辅相成. 依据一个或一些真实的判断，进而断定另一个判断真实的推理，就叫作论证. 由推理的意义可知，论证由一个或一系列推理组成. 论证的论据必须是真实的，而推理的依据——前提却不必一定真实，所以推理不一定是论证. 只有当前提被断定为真实时，推理才是一个论证. 数学中的论证即数学证明. 也就是说，数学证明是根据已确定其真实性的公理、定理、定义、公式、性质等数学命题来论证某一数学命题的真实性的推理过程，其往往表现为一系列数学中的推理. 证明通常包括逻辑证明和实验、实践证明，但是数学结论的正确性必须通过演绎推理或逻辑证明来保证，即在前提正确的基础上，通过正确使用推理规则得出结论.

教材通过对已学知识的回顾，让学生体会合情推理、演绎推理以及二者之间的联系与差异；体会数学证明的特点，了解数学证明的基本方法，包括直接证明的方法（如分析法、综合法）和间接证明的方法（如反证法），感受逻辑证明在数学以及日常生活中的作用，养成言之有理、论证有据的习惯.

教材通过实例，引导学生运用合情推理去探索、猜测一些数学结论，并用演绎推理确认所得结论的正确性，或者用反例推翻错误的猜想. 教学的重点在于通过具体实例理解合情推理与演绎推理，而不追求对概念的抽象表述.

教材中设置的证明内容是对学生已学过的基本证明方法的总结. 在教学中，应通过实例，引导学生认识各种证明方法的特点，体会证明的必要性. 对证明的技巧性不宜作过高的要求.

教材的编写比较注重创设一些趣味性的情境引入相关知识，从浅显的问题出发，引导学生思考、探索、理解有关推理、证明中的抽象问题.

教材内容的安排为引导学生自主探索留下了充分的时间与空间，更有利于教师个性化教学的开展，数学课堂上师生的“创作激情”与“创作冲动”有可能得到很好的发挥.

三、课时安排建议

本章教学时间约需 **9** 课时，具体分配如下（仅供参考）：

6.1　合情推理和演绎推理

6.1.1　合情推理（一）——归纳	1 课时
6.1.2　合情推理（二）——类比	1 课时
6.1.3　演绎推理	1 课时
6.1.4　合情推理与演绎推理的关系	1 课时

6.2　直接证明与间接证明

6.2.1　直接证明：分析法与综合法	1 课时
6.2.2　间接证明：反证法	1 课时

四、教学建议

1. 新一轮数学课程改革从理念、内容到实施，都有较大变化，推理与证明这一章节中的许多内容都是以前教材所没有的. 教师应充分认识本章内容对学生理解数学内容进行数学再创造性学习方面所起的引导作用. 在教学设计中充分考虑高中学生的心理特点，运用多样化的课堂教学模式，引导学生积极主动地学习，掌握推理与证明的基本技能，发展创新意识，使学生对数学的推理与证明问题有较为全面的认识，从而提高学生的数学素养，为未来发展和进一步学习打好基础.

2. 教学中应通过实例，引导学生运用合情推理去探索、猜测一些数学结论，并用演绎推理确认所得结论的正确性，或者用反例推翻错误的猜想. 教学的重点在于通过具体实例理解合情推理与演绎推理，而不追求对概念的抽象表述.

推理与证明中的许多基本概念和基本思想贯穿于高中数学教学的始终，在日常的数学教学过程中可以适时指点，帮助学生逐步加深理解，同时应通过具体的问题加强推理与证明的基本技能训练.

3. 在本章节的教学中，要从不同分支的数学知识中寻找它们在推理与证明时存在的共同方法，应注意沟通已学过的数学内容之间的联系，通过类比、联想、知识的迁移和应用等方式，使学生体会数学知识在推理与证明时的有机联系，感受数学的统一性，进一步理解数学的本质，提高解决问题的能力. 教学中还要注重教学内容与日常生活以及其他学科的联系，引导学生应用合情推理与演绎推理进行简单的数学发现，让学生经历探索、解决问题的过程，品味引人入胜的数学思维. 数学课要讲逻辑推理，更要讲道理，通过典型例子的分析和学生自主探索活动，使学生理解数学概念逐步形成的过程，体会蕴涵在其中的思想方法，追寻数学发展的历史足迹，把数学的学术形态转化为学生易于接受的教育形态.

4. 在推理与证明这一章中有很好的例子可以说明数学是人类文化的重要组成部分，是人类社会进步的产物，也是推动社会发展的动力. 教学中应引导学生了解数学科学与人类社会发展之间的相互作用，体会数学的科学价值、应用价值、人文价值，开阔视野，探寻数学发展的历史轨迹，提高文化素养，养成求实、说理、批判、质疑等理性思维的习惯和锲而不舍的追求真理精神. 在教学中，应尽可能结合教学内容，介绍一些对数学发展起重大作用的历史事件和人物，反映数学在人类社会进步、人类文明建设中的作用，同时也反映社会发展对数学发展的促进作用. 例如，教师在教学中可以向学生介绍欧几里得建立公理体系的思想方法对人类理性思维、数学发展、科学发展、社会进步的重大影响，让学生感受数学内部动力、外部动力以及人类理性思维对数学产生和发展的作用.

5. 丰富学生的学习方式、改进学生的学习方法是高中数学课程追求的基本理念. 学生的数学学习活动不应只限于对概念、结论和技能的记忆、模仿和接受，独立思考、自主探

索、动手实践、合作交流、阅读自学等都是学习数学的重要方式. 在高中数学教学中，教师的讲授仍然是重要的教学方式之一，但要注意的是必须关注学生的主体参与以及师生间的互动. 高中数学课程在教育理念、学科内容、课程资源的开发利用等方面都对教师提出了挑战. 在教学中，教师应根据高中数学课程的理念和目标、学生的认知特征和数学的特点，积极探索适合高中学生数学学习的教学方式. 本章节许多内容是高中数学课程新增加的，对于这些内容，教师要把握《课标》的定位进行教学. 教学中既要有教师的讲授和指导，也要有学生的自主探索与合作交流. 教师要创设适当的问题情境，鼓励学生在发现数学的规律和解决问题的途径的过程中，掌握本章的基本概念与基本技能.

6. 在学生学习和解决问题的过程中，合情推理对激发学生学习的兴趣，增强创新意识方面有很好的作用，教学过程中，教师应不断反思自己的教学，在数学教学中经常应用合情推理，改进教学方式，提高教学水平，形成个性化的教学风格. 在数学归纳法的教学中，证明过程格式化的表述是一项基本要求，但不能只限于格式化的表述，而应注意揭示数学归纳法在推理与证明上的本质作用.

7. 在教学中，应重视利用信息技术来呈现以往课堂教学中难以呈现的课程内容. 恰当使用信息技术，引导学生借助信息技术进行数学探索、数学发现，研究一些有意义、有价值的数学问题.

五、评价建议

1. 本章教学中，学生对推理与证明的基本知识与基本技能的理解与掌握是教学的基本要求，也是评价学生学习的基本内容. 评价中要注重评价学生对数学思维本质的理解与对推理与证明思想方法的把握.

2. 本章节的教学评价要较为重视学习内容对学生数学学习情感、态度和价值观方面的促进性影响. 在课堂上要对学生适时激励，营造良好的课堂育人环境，处理数学教与学活动过程的调控，做到学生和教师的共同成长. 要在课堂合作与交流过程中观察每个学生的发展变化，关注学生是否积极主动地参与数学学习活动，是否愿意和能够与同伴交流数学学习的体会、与他人合作探究数学问题，关注他们在数学学习上的信心、独立思考的习惯、合作交流的意识、数学认知的发展水平等.

3. 本章节的教学评价应特别重视考查学生能否从问题解决中领悟数学推理与证明的思想方法，重视考查学生能否理解并有条理地表达数学推理与证明的过程，关注学生能否不断反思自己的推理与证明的过程，并不断优化这个过程. 本章节的学习中，数学学习活动应倡导自主探索、合作交流、阅读自学等学习数学的方式. 这些方式有助于发挥学生学习的主动性，使学生的学习过程成为在教师引导下的“再创造”过程.

4. 评价对推理与证明基本概念的理解，可以看学生能否举出有关归纳、类比、三段论式推理、反证法的例子，能否用分析法和综合法进行数学证明，能否用数学归纳法的正确格式证明一些简单的数学问题.

5. 推理与证明能力的获得与提高是高中学生进行有效的数学学习的关键，能力是通过推理与证明方法的运用水平体现出来的，对这个能力的评价应贯穿于高中学生数学知识建构与问题解决的全过程. 比如，看学生是否能利用合情推理进行数学探索，主要是要看在日常的数学学习中，是否具有问题意识，是否善于发现和提出问题，而看学生是否能利用演绎推理进行数学证明，就要看学生是否能对解决问题的方案进行质疑、调整和完善，是否能将解决问题的方案与结果，用书面或口头等形式有条理地表达并进行交流，根据问题的实际要求进行分析、讨论或应用.

6. 适度关注学生能否对自己提出问题和解决问题的过程进行自评与互评. 在评价中，要注意肯定学生在数学学习中的发展和进步，特点和优点.

6.1 合情推理和演绎推理

6.1.1 合情推理(一)——归纳

教材线索

本小节从日常生活中涉及的归纳实例入手，引出归纳的概念，在例 1 中，通过对等式的简单观察归纳出一个浅显的结论，在例 2 中，利用欧拉公式的发现过程进一步阐释了运用归纳推理的一般步骤，最后在例 3 中指出归纳推理所得的结论未必是可靠的，它只是一种合情推理，通过观察归纳可以提出猜想，获得科学发现，这是本节主要线索.

教学目标

（一）知识与技能

结合已学过的数学实例和生活中的实例，了解合情推理中的归纳推理的含义，能利用归纳方法进行简单的推理.

（二）过程与方法

让学生亲身经历对已学过的数学实例和生活中的实例进行探究的过程，提高归纳探究的能力. 通过问题的解决让学生具有较强的归纳意识，敢于质疑，勤于思索，逐步形成独立思考的能力.

（三）情感、态度与价值观

1. 通过例习题的讲解让学生初步认识到合情推理在数学发现中的重要作用，养成认真观察、善于归纳、敢于猜想和勇于创新的精神，塑造学生良好的个性品质.

2. 通过小组合作、自主探究的学习方式，让学生体验到成功，感受到乐趣，激发起强烈的学习意愿.

教材分析

1. 重点

(1) 合情推理与归纳推理的概念；

(2) 运用归纳推理的一般步骤；

(3) 归纳推理在数学发现中的应用.

2. 难点

归纳推理在数学发现中的应用.

3. 简单多面体的顶点数 V、棱数 E 及面数 F 之间满足 $V+F-E=2$，这个定理叫作欧拉定理（其关系式叫作欧拉公式）.

欧拉公式描述了简单多面体顶点数、棱数、面数之间特有的规律，它只适用于简单多面体. 在欧拉公式中，令 $f(p)=V+F-E$，$f(p)$ 叫作欧拉示性数，简单多面体的欧拉示性数 $f(p)=2$.

在教材的归纳猜想的基础上，我们可以用四面体 $ABCD$ 来验证欧拉定理，如图 6－1.

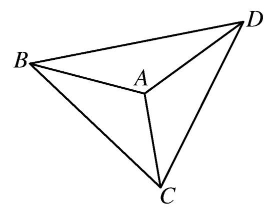


图 6－1

步骤 1：对于四面体 $ABCD$，去掉一个面 BCD，再使它变为平面图形，数一数，四面体 $ABCD$ 的顶点数 V、棱数 E 与剩下的面数 F_1 分别是多少？

顶点数 $V=4$，棱数 $E=6$，面数 $F_1=3$. 我们发现，变形后以上数值都没有变. 因此，要研究 V，E 和 F 的关系，只要去掉一个面，将立体图形变为平面图形即可.

步骤 2：对平面图形，我们发现，去掉一条棱，就减少一个面，例如去掉 BC，就减少一个面 ABC. 同理，去掉棱 CD，BD，也就各减少一个面 ACD，ABD. 现在数数，V，E，F_1 分别是多少？

$V=4$，$E=3$，$F_1=0$，那么 $V+F_1-E=1$.

步骤 3：对剩下的树枝形中，去掉一条棱，就会减少一个顶点. 例如去掉 CA，就减少一个顶点 C. 同理，去掉 DA 就减少一个顶点 D，最后剩下 AB. 现在再数数，V，E，F_1 分别是多少？

$V=2$，$E=1$，$F_1=0$，那么 $V+F_1-E=1$.

别忘了我们在前面去掉的一个面，于是得到 $V+F-E=2$，如果对任意的简单多面体运用这样的方法，最后都是只剩一条线段，所以都可得到上面的结果，从而欧拉公式对任意简

单多面体都是正确的.

4. 认识合情推理

合情推理，是美籍数学家波利亚在20世纪30年代提出的概念，它是指“观察、归纳、类比、实验、联想、猜测、矫正和调控等方法”. 波利亚在致力改变美国数学落后状态的工作中，大力倡导合情推理的方法，获得极大成功. 所谓合情推理，就是一种合乎情理的推理. 物理学家的归纳推理，律师的案情推理，历史学家的史料论证和经济学家的统计论证都属于合情推理之列. 波利亚说：“数学家的创造性工作成果是论证推理，即证明，但是这个证明是通过合情推理，通过猜想而发现的”；“为了取得真正的成就他还必须学习合情推理，这是他的创造性工作赖以进行的那种推理”. 数学中的合情推理是多种多样的，其中归纳推理和类比推理是两种用途最广泛的特殊的合情推理，法国数学家拉普拉斯说：“甚至在数学里发现真理的工具也是归纳和类比.” 其他合情推理都是由这两种推理衍生出来的.

合情推理是数学发展的动力，科学发现的先导. 数学史上一些著名的发现，如欧拉公式的发现就得益于合情推理. 合情推理促进了数学的发展，也促进了数学方法论的研究，它对数学的研究和发展，起了积极的推动作用.

合情推理是进行数学发现时的创新思维的重要组成部分，也是数学知识再创造性学习时必不可少的思维方法，同时它还是解决数学问题时的一种重要思维方法. 建构主义认为，知识并非是主体对客体的被动的镜面式反映，而是一个主动的建构过程. 数学建构主义学习的内部过程是学习者通过不断对各种信息进行加工、转换并形成假设和检验的一个过程，所以合情推理是数学建构中主体思维的关键步骤，它可以促进知识的同化，加速知识的迁移.

让合情推理走进数学课堂，在数学课堂教学中以合情推理方式揭示知识的发生过程，以合情推理的教学过程去促进学生的合情推理能力的形成，让学生学习数学知识的过程变成数学家当时探索的过程，真正成为学习的主体，这也是本章节教学的一个重要目标.

5. 推理与归纳推理

推理是从一个或几个判断得出一个新判断的思维过程. 一个推理由前提和结论两部分组成，推理时所依据的判断称为前提，从前提通过推理得到的新判断称为结论.

判断有内容和形式两方面的问题，推理也有内容和形式两方面的问题. 内容方面即前提和结论的真假问题，这个问题要靠各门具体科学，靠实践解决；形式方面即推理的结构问题，形式逻辑学是从形式方面来研究什么样的推理形式是正确的，提供关于前提和结论之间的逻辑规则. 正确的推理首先要求前提必须真实，其次必须遵守推理规则，合乎逻辑，这样才能反映客观事物间的逻辑关系. 推理的种类很多，数学中常用的推理有归纳推理、类比推理和演绎推理三种.

由特殊到一般的推理叫作归纳推理. 即在研究事物的特殊情况所得到的结论的基础上，得出有关事物的一般结论的推理方法. 归纳推理也简称为归纳法.

在归纳推理中，根据所研究的是否是事物的一切特殊情况，归纳推理一般又可分为完全归纳推理和不完全归纳推理，也称为完全归纳法和不完全归纳法.

（1）完全归纳法．在研究事物的一切特殊情况所得的结论的基础上，得出有关事物的一般性结论的推理方法叫作完全归纳法．

因为完全归纳法是在考察事物的各种情形之后得出有关事物的结论的，所以只要考察各种情形得出的结论是真实的，则最后所得结论也必定是真实的．因此，完全归纳法可以作为数学的严格推理方法．用完全归纳法进行推理时，要注意对考察事物的各种特殊情形进行讨论，不要重复也不要遗漏．例如：德国数学家高斯，在 10 岁时曾迅速而准确地得出老师出的一道算术题的答案．这道题是这样的：$1+2+3+\cdots+98+99+100=$？高斯在观察之后发现，从 1 到 100 这些数，两头对称的两个数相加得数都是 101，而两头对称的数，在 1 到 100 中共有 50 对．于是他得到了 $101\times50=5\,050$ 这一答案．在这里，高斯就是用完全归纳推理的方法得出“两头相加为 101”这一结论的．完全归纳推理有很大的局限性，因为它要求对一类事物的全部分子都进行考察，才能推出结论．

（2）不完全归纳法．在研究事物的某些特殊情况所得的结论的基础上，得出有关事物的一般性结论的推理方法叫作不完全归纳法．不完全归纳推理又可分为简单枚举归纳推理、科学归纳推理、概率预测推理和统计推理．

用不完全归纳法作为逻辑推理是不严密的，因而在数学证明中并不采用．但不完全归纳法在探索的过程中能帮助我们比较迅速地去发现事物的规律，给我们提供研究方向和线索的作用是不容忽视的．科学上的很多发现，往往就是通过观察、分析、归纳、猜想得出，然后再加以证明验证得到的．

6．合情推理是根据已有的事实和正确的结论、实验和实践的结果以及个人的经验和直觉等推测某些结果的推理过程．归纳、类比是合情推理常用的思维方法．在解决问题的过程中，合情推理具有猜测和发现结论、探索和提供思路的作用，有利于创新意识的培养．运用归纳推理的一般步骤是：

从具体问题 ⟶ 实验观察 ⟶ 归纳推理 ⟶ 形成结论、猜想

教学建议

归纳推理是一种最常见的合情推理，教学中应通过丰富的实例，引导学生观察数与形，积极思考，归纳出存在其中的一般规律，并合乎情理地提出数学猜想．课堂要创设学生语言交流和自由发表见解的情境和机会，让学生充分体验全身心投入到数学中进行数学发现时的那一种激情，那一份追求，以及获得成功时的那一股在瞬间爆发出的永恒的喜悦．

在日常生活中，归纳推理也因其合情而成为自然的思维，常是在不经意之间进行的．教学中举出一些实例能引发学生学习兴趣，例如：（1）第一只天鹅是白的，第二只天鹅是白的，…，第 n 只天鹅也是白的，所以所有的天鹅都是白天鹅；（2）一个小孩在跳楼梯层，大人看见后就告诫他这样会摔倒的，小孩反驳说，他跳第一次时没摔倒，跳第二次时也没摔倒，就一直跳下去，也一直没摔倒，所以，这样跳是不会摔倒的．

在教材 P. 111 例 3 的讲解中，可使用多媒体展示若干几何体，让学生对着多面体的直观图去计算面数、顶点数与棱数，书本中给出的塔顶体是六面体四棱锥顶形，而截角立方体是六面体截三棱角形.

例题解析

例 1 定义 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$，并设 $f(x)=\dfrac{a^x}{a^x+\sqrt{a}}$（其中 $a>0$，且 $a\neq 1$），试求 $\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{1\,000}\right)$的值.

解 通过计算，$\left[f\left(\dfrac{1}{1\,000}\right)+f\left(\dfrac{999}{1\,000}\right)\right]=\dfrac{a^{\frac{1}{1\,000}}}{a^{\frac{1}{1\,000}}+\sqrt{a}}+\dfrac{a^{\frac{999}{1\,000}}}{a^{\frac{999}{1\,000}}+\sqrt{a}}=\dfrac{a^{\frac{1}{1\,000}}}{a^{\frac{1}{1\,000}}+\sqrt{a}}+\dfrac{a^{1-\frac{1}{1\,000}}}{a^{1-\frac{1}{1\,000}}+\sqrt{a}}=\dfrac{a^{\frac{1}{1\,000}}}{a^{\frac{1}{1\,000}}+\sqrt{a}}+\dfrac{a}{a+\sqrt{a}\cdot a^{\frac{1}{1\,000}}}=\dfrac{a^{\frac{1}{1\,000}}}{a^{\frac{1}{1\,000}}+\sqrt{a}}+\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+a^{\frac{1}{1\,000}}}=1.$

类比推得$\left[f\left(\dfrac{2}{1\,000}\right)+f\left(\dfrac{998}{1\,000}\right)\right]=1.$

至此可以归纳出这样的结论 $f\left(\dfrac{n}{1\,000}\right)+f\left(\dfrac{1\,000-n}{1\,000}\right)=1$（其中 $n\in\mathbf{N}, 1\leqslant n<1\,000$），

而 $f\left(\dfrac{500}{1\,000}\right)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{a}}=\dfrac{1}{2}.$

所以
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{1\,000}\right)&=\left[f\left(\frac{1}{1\,000}\right)+f\left(\frac{999}{1\,000}\right)\right]+\left[f\left(\frac{2}{1\,000}\right)+f\left(\frac{998}{1\,000}\right)\right]+\cdots+\\&\quad\left[f\left(\frac{499}{1\,000}\right)+f\left(\frac{501}{1\,000}\right)\right]+f\left(\frac{500}{1\,000}\right)\\&=499+\frac{1}{2}=\frac{999}{2}.\end{aligned}$$

例 2 计算下面数列的前 4 项，并归纳出该数列的一个通项公式：

（1）$a_1=1$，$a_{n+1}=1+\dfrac{a_n}{2}$（$n\geqslant 1$）；

（2）$a_1=1$，$a_2=2$，$a_n=3a_{n-1}-2a_{n-2}$（$n\geqslant 3$）.

解 （1）$\because a_1=1$，$a_{n+1}=1+\dfrac{a_n}{2}$（$n\geqslant 1$），

$\therefore a_2=1+\dfrac{a_1}{2}=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$，

$a_3=1+\dfrac{a_2}{2}=1+\dfrac{3}{4}=\dfrac{7}{4}$，$a_4=1+\dfrac{a_3}{2}=1+\dfrac{7}{8}=\dfrac{15}{8}$.

据此归纳可猜想 $a_n=\dfrac{2^n-1}{2^{n-1}}$.

（2）$\because a_1=1$，$a_2=2$，$a_n=3a_{n-1}-2a_{n-2}$（$n\geqslant 3$），

$\therefore a_3=3a_2-2a_1=3\times2-2=4$，$a_4=3a_3-2a_2=3\times4-2\times2=8$.

据此归纳可猜想 $a_n=2^{n-1}$.

相关链接

简单枚举归纳推理与科学归纳推理

简单枚举归纳推理与科学归纳推理都属于不完全归纳法.

简单枚举归纳推理，又称简单枚举法. 它是通过考察某一类事物的部分对象（子类），发现某种情况不断重复出现，而又没有发现相反情况，从而推出关于该类事物一般性结论的不完全归纳推理.

例如，在19世纪，人们注意到铜、铁、锡、铅等一些金属能导电，而在实践中又未发现不导电的金属，于是，人们便做出了结论：所有金属都能导电. 这一结论就是用简单枚举法推出的.

简单枚举归纳推理得出的结论是或然性的. 因此，在应用简单枚举法时，要注意寻找反面事例. 如果发现有与所得结论相矛盾的事例，结论就要被推翻. 例如，在很长一段时间里，人们看到的天鹅是白色的，鱼是用鳃呼吸的，金属是沉于水的，于是通过简单枚举归纳推理得出结论："所有天鹅都是白色的"，"鱼都是用鳃呼吸的"，"金属都沉于水". 后来，人们在澳洲发现了黑色的天鹅，在南美发现了不用鳃呼吸的肺鱼，在科学实验中发现了不沉于水的金属（钠、锂），因而，上述结论就被否定了.

科学归纳推理，又叫科学归纳法. 它是通过考察某类事物中的部分对象，并掌握对象和某种属性的必然联系，特别是事物之间的因果联系，从而概括出关于该类事物一般性结论的不完全归纳推理.

例如，金鸡纳霜的发明就是科学归纳推理的结果. 当年在厄瓜多尔居住的印地安人中流行一种叫疟疾的急性传染病. 患者感觉一阵冷，一阵热，热后大量出汗. 头痛，口渴，全身无力. 当时无药可用. 有一天，一位患者在路上发病，因为口渴难受，便爬到一个死水坑边喝了那里的水，结果病奇迹般地好了. 于是他把经历告诉别人，其他患者也都去那里喝水，病也纷纷好了. 后来科学家经考察发现，那水坑的水中含有奎宁. 原来在那水坑边上长有金鸡纳树，有的树倾覆在水坑里，树皮里含的奎宁就溶解在水中了，正是这奎宁杀死了患者体内的疟原虫，治好了他们的病. 明白了这一科学道理之后，科学家们便发明了治疗疟疾的特效药奎宁，将其命名为金鸡纳霜.

科学归纳推理是在简单枚举归纳推理的基础上发展起来的. 简单枚举归纳推理是知其然不知其所以然，而科学归纳推理是既知其然又知其所以然. 因而科学归纳推理比简单枚举归纳推理的可靠性大一些.

6.1.2 合情推理(二)——类比

教材线索

本小节从鲁班发明锯子这个耳熟能详的故事及仿生学原理出发引入类比的概念，接着又通俗地说明了类比推理的原理，然后再以一些数学、物理与医药试验中的类比思维对类比推理的过程进行进一步阐释.

教学目标

（一）知识与技能

了解合情推理的含义，能利用类比进行简单的推理，体会并认识合情推理在数学发现中的作用.

（二）过程与方法

1. 通过实例让学生理解类比推理的基本方法，提高类比探究的能力.

2. 教学过程中努力培养学生的类比意识，通过各类问题的讲解让学生学会运用观察、联想等方法提出问题并解决问题.

3. 创设民主、宽松的学习氛围和生动有趣的教学情景，通过小组合作，主动探究的学习方式，努力使课堂教学过程成为学生的一种体验数学发现的过程.

（三）情感、态度与价值观

从现实生活出发，选取富有生活气息以及与日常生活有密切联系的让学生感兴趣的学习材料，让学生养成认真观察、善于类比的良好思维品质.

教材分析

1. 重点

（1）类比推理的概念；

（2）类比推理的思维过程；

（3）类比推理在解题中的应用.

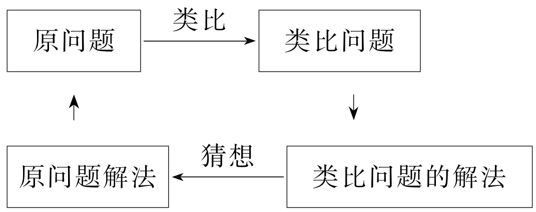
2. 难点

类比推理在数学发现中的应用.

3. 推理是思维的基本形式，类比是一种重要的推理方式. 所谓类比，就是由两个对象的某些相同或相似的性质，推断它们在其他性质上也有可能相同或相似的一种推理形式. 演

绎推理是由一般到特殊的推理，归纳推理是由特殊到一般的推理，类比推理是由特殊到特殊的推理．依照演绎推理、归纳推理和类比推理的顺序，它们分别所获得的结论其创造程度逐渐增强而准确程度逐渐减弱．类比推理不限于在同类事物间进行，不受一般原理的限制，亦不必像归纳推理那样，需要考虑归纳材料的个数．类比推理可以推出事物的本质特征，也可以推出事物的非本质特征，因而，它具有较强的探索和预测作用，是数学发现中最常使用的一种思维方法．“类比是一个伟大的引路人”（波利亚）．“每当理智缺乏可靠论证的思路时，类比这个方法往往能指引我们前进”（康德）．但同时，类比是一种主观的不充分的似真推理，因此，要确认其猜想的正确性，还须经过严格的逻辑论证，教材 P. 138 例 2 中有关费马大定理的叙述都说明了这一点．

运用类比法解决问题，其基本过程可用框图表示如下：



4．数学解题与数学发现一样，通常都是在通过类比、归纳等探测性方法进行探测的基础上，获得对有关问题的结论或解决方法的猜想，然后再设法证明或否定猜想，进而达到解决问题的目的．所以，类比、归纳不仅是数学发现中获得猜想的重要方法，同时也是解决数学问题时获取解题途径的重要方法．

运用类比解决数学问题的关键是寻找一个合适的类比对象．在解决立体几何和有关次数等问题时，大多应用降维类比，将三维空间的对象降到二维甚至是一维的空间中的对象加以考察，教材 P. 116 例 1 研究长方体性质时，教材 P. 118 习题 2 的第 1 题研究几何体球的有关概念时，就分别将长方体降维成长方形，球降维成圆，通过类比，得到了长方体中与长方形相类似的诸多性质，以及球中与圆相类似的诸多概念，这种类比归根结底是属于简化类比，简化类比就是将原命题类比到比原命题简单的类比命题，通过类比命题解决思路和方法的启发，寻求原命题的解决思路与方法．与简化类比相应的有结构类比，结构类比是凭借命题在结构上的相似性等去寻找类比命题，然后可通过适当的代换，将原问题转化为类比问题来解决，例如数形结合思想就是基于代数与几何问题在结构上的相似性而产生的，是形与数之间的类比，再比如教材 P. 118 习题 2 的第 2 题，研究双曲线的性质时，将双曲线与椭圆进行类比也是属于这种结构类比．

5．类比是与联想交织在一起的．事实上不论用什么方法解决问题都少不了运用“联想”，由此及彼地进行联想是人固有的一种思维习惯．联想也是研究数学和解决数学问题时的一种基本思考方法，任何一个数学问题，总存在有另一个与之结构类似的问题引发我们的类似联想，根据问题之间的相似性、接近性、对比性进行由此及彼的联想，从而将某个已知的结论和方法的全部或部分移植给所研究的新问题是解决问题的一种基本思想方法．指导联想的三个基本法则是：类似联想、相反联想和接近联想．在解决数学问题时，由类比引发的

类似联想是常见的.

在实际的数学发现中，往往是先从想象开始，对一个已解决的数学问题进行类比拓广，获得新的数学问题或数学猜想，再通过新旧问题之间的类比，参考旧问题的解决方法，获得解决新问题与证明猜想的方法. 总之，数学中问题的发现与问题的解决，都离不开类比推理，须重视类比，它是我们最可信赖的老师.

教学建议

类比推理与归纳推理一样，也是一种最常见的合情推理，教学中应通过丰富的数学与生活实例，启发学生在思考问题时能善于在类比中联想，在联想中类比. 课堂同样要创设学生语言交流和自由发表见解的情境和机会，让学生能在问题思考中以丰富的想象力展开联想的翅膀，在经验基础上进一步熟悉类比推理的心理机制，在发展学生的合情推理能力的同时培养学生主动探索、敢于实践、勇于发现、合作交流的个性品质.

另一方面，教学中还必须注意到，不完全归纳推理所得的结论不一定可靠，是或然的. 如“凡鸟皆会飞”这个结论，多少年来被认为是金科玉律、天经地义. 然而，后来在非洲发现了一个“怪物”——鸵鸟. 它属鸟类，但偏偏不会飞. 所谓“凡鸟皆会飞”这个结论也就不成立了. 同样地，由于后来在澳洲发现了一种黑天鹅，“凡天鹅皆白”的结论也不成立. 不完全归纳之所以不一定可靠，就在于其归纳的不完全. 由于它没有穷举全部对象，因而就不能担保没有例外. 而类比推理与不完全归纳推理一样，也不一定是可靠的，例如：在实数运算时，若 $a\cdot b=0\Leftrightarrow a=0$ 或 $b=0$，但若类比得到向量运算时有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$ 就会发生错误.

例题解析

例 1 在探讨等比数列的性质时，很容易联想到等差数列，因为二者在定义上是非常类似的. 通过类比，可以得到与等差数列的性质相类似的一系列关于等比数列的性质，把它们的定义、通项、性质列表类比如下：

	等差数列	等比数列
定义	$a_n-a_{n-1}=d$（d 为常数，$n\geqslant 2$，$n\in\mathbf{N}$）	$a_n\div a_{n-1}=q$（q 为常数，$n\geqslant 2$，$n\in\mathbf{N}$）
通项	$a_n=a_1+(n-1)d$	$a_n=a_1q^{n-1}$
性质	$m+n=p+q\Leftrightarrow a_m+a_n=a_p+a_q$ （$m,n,p,q\in\mathbf{N}^*$）	$m+n=p+q\Leftrightarrow a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q$ （$m,n,p,q\in\mathbf{N}^*$）

例 2 已知 $0<a<1$，$0<b<1$.求证：

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(1-a)^2+b^2}+\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{(1-a)^2+(1-b)^2}\geqslant 2\sqrt{2}.$$

解 观察待证式左端，它的每个根式都使我们类比联想到Rt△ABC中的等式 $a^2+b^2=c^2$，激起我们构造平面图形利用几何方法证明这个不等式的想法.

如图 6-2，做边长为 1 的正方形 $ABCD$，分别在 AB，AD 上取 $AE=a$，$AG=b$，过

E，G 分别作 AD，AB 的平行线，交 CD，BC 于 F，H，EF，GH 交于点 O. 由题设条件及作图可知，$\triangle AOG$，$\triangle BOE$，$\triangle COF$，$\triangle DOG$ 皆为直角三角形.

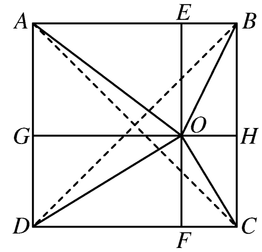


图 6－2

$\therefore OA=\sqrt{a^2+b^2}$，$OB=\sqrt{(1-a)^2+b^2}$，

$OC=\sqrt{(1-a)^2+(1-b)^2}$，$OD=\sqrt{a^2+(1-b)^2}$.

连接对角线 AC，BD，易知 $AC=BD=\sqrt{2}$，$OA+OC\geqslant AC$，$OB+OD\geqslant BD$，

$\therefore \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(1-a)^2+b^2}+\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{(1-a)^2+(1-b)^2}\geqslant 2\sqrt{2}$.

点评 合理的类比联想是以正确的观察为基础的. 观察所研究问题的特征和规律，联想似曾相识的问题，类比已知的公式、定理，便可以迅速地找到一个解决新问题的模式.

例 3 证明柯西不等式：

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)\cdot(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\geqslant(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$$

（当且仅当 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$ 时取等号）.

解 设 $a=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$，$c=b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2$，$b=2(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)$，柯西不等式变为 $b^2-4ac\leqslant 0$，类比联想到一元二次方程的判别式，构造一元二次函数

$$f(x)=(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)x^2-2(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)x+(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2),$$

显然，$f(x)=(a_1x-b_1)^2+(a_2x-b_2)^2+\cdots+(a_nx-b_n)^2\geqslant 0$.

所以，方程 $f(x)=0$ 的判别式不大于 0，即 $b^2-4ac\leqslant 0$.

当且仅当方程 $f(x)=0$ 有唯一解 $x=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$ 时，判别式 $b^2-4ac=0$.

$$\therefore (a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)\cdot(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\geqslant(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$$

（当且仅当 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$ 时取等号）.

例 4 求函数 $y=\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x^2-4x+13}$ 的最小值.

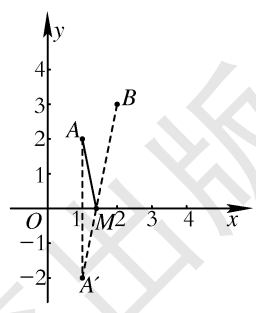


图 6－3

解 将原函数变形为 $y=\sqrt{(x-1)^2+(0-2)^2}+\sqrt{(x-2)^2+(0-3)^2}$，其几何意义是点 $M(x,0)$ 到点 $A(1,2)$ 与点 $B(2,3)$ 距离之和，如图 6－3. $|MA|+|MB|$ 的最小值为点 A 关于 x 轴对称点 $A'(1,-2)$ 与点 B 的距离，所以函数 $y=\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x^2-4x+13}$ 的最小值 $y_{\min}=\sqrt{(1-2)^2+(-2-3)^2}=\sqrt{26}$.

相关链接

类比思维是创造性思维中的核心方法

类比是一种重要的解题策略，同时类比也是科学发现的主要方法，它是创造性思维中的核心方法．牛顿曾经说过："没有大胆的猜想就没有伟大的发现．"而科学猜想的主要方法是归纳与类比．

卢瑟福及其学生盖革和马斯登为了探索原子结构的奥秘，曾经做了有名的 α 粒子散射实验．结果他们发现，原子是由一个原子核和核外电子组成的，原子核所占体积甚小（约十万分之一），但却具有原子总质量的 99.97％．这同太阳系的情况十分相似．太阳作为太阳系的核心，它具有太阳系总质量的 99.87％，但所占空间也极小．并且，已经知道，原子核与电子之间的电吸引力（库仑定律）和太阳与行星之间的吸引力（万有引力定律）的数学形式也是相似的，均与距离的平方成反比．于是，卢瑟福等作出类比，既然太阳系是由处于核心的太阳和环绕它运行的一系列行星所构成，那么，原子不是宛如太阳系吗？它也可能是由带正电荷的原子核和环绕它运行的带负电荷的电子构成的．这就是他们于 1911 年正式提出来的原子结构的"行星模型"假说．

由上例可以看出，类比是一种从特殊到特殊的推理，是根据两个（或两类）对象之间在某些方面的相同或相似而推出它们在其他方面也可能相同或相似的一种逻辑方法．其推理过程首先是比较两个（或两类）不同的对象，找出它们的相同点或相似点，然后，以此为根据，把其中某一对象的已知的知识推移到另一对象中去．其公式为：A 对象具有 a，b，c，d 属性，B 对象具有 a_1，b_1，c_1 属性，所以，B 对象可能也具有 d_1 属性．

在这里，a，b，c，d 之间可以有下列几种情形：

第一，它们是并列的、各自孤立的．例如，人们看到地球是一颗行星，绕日公转，绕轴自转，运行轨道为椭圆形，其上有高等动物；又看到火星也是一颗行星，绕日公转，绕轴自转，运行轨道为椭圆形，因而推出"火星上也可能有高等动物"的结论．这是初等逻辑所研究的类比．这种类比，可称之为简单共存类比，它与猜测差不多，可靠性甚差．

第二，它们之间存在着因果关系的类比．例如，1678 年荷兰科学家惠更斯提出的波动说．他把光与声进行类比，认为声之所以能够直线传播、反射、折射，原因在于声是机械波，具有波动性；而光既然也能直线传播、反射、折射，也可能是由于波动性造成的，故光同声一样，也是一种机械波．

第三，它们之间有对称关系．客观世界中许多事物有对称性，因此人们往往依据这种性质而进行类比，即知道 A 对象有 a 和 b 属性，a 和 b 是对称的，现又知 B 对象有 a_1 属性，由此推论出 B 对象也可能有与 a_1 相对称的 b_1 属性．1931 年，英国物理学家狄拉克就是根据物质的对称关系而提出存在着正电子的著名预言的．他把电荷和电子加以类比，已知电荷

有正负的对称关系，并且已发现了负电子，由此推论出可能有与负电子相对称的正电子存在，这个预言后来为实践所证实了.

此外，可能还有别的情形和更为复杂多样的联系与关系，这在应用类比方法时必须充分估计并善于利用. 在科学高度发达的今天，仅仅懂得初等逻辑的简单共存类比，满足于把对象的各属性简单地列举出来和毫无联系地排列起来，是难以获得重大的科学发现的.

辩证唯物主义告诉我们，世界万物存在着普遍联系，发现事物间的联系，探索其中的规律是科学研究的重要任务，也正是事物间的普遍联系促使人们在科学研究中频繁地使用类比的思想方法. 辩证法大师黑格尔明确指出："类比的方法在经验科学里占很高的地位，而且科学家也曾依这种推论方式获得很重要的结果."

类比思维是创造性思维中的核心方法. 当面对一个问题时，如果一个人没有直接相关的知识，那他可能会通过类比的方法把不直接相关的知识经验运用到当前的问题中. 类比思维涉及两种观念之间的对应映射，其中一个观念是"源领域"，另一个观念是"靶领域"（比如上面的"太阳系"与"原子"），类比思维就是把源领域中的观念框架映射到靶领域中，从而形成对该领域的新理解、新洞察. 在类比映射过程中，我们所迁移、推论的是那些融会贯通的、整合性的知识，而不是那些只言片语式的"小零碎".

诸如生物学中细胞学说、达尔文"自然选择"理论、遗传密码的提出，哈维关于血液循环理论的建立，地球上氮元素的发现，以及现代物理中威尔逊云室、格尔塞的液态氢气泡室的发明等等，都有类比方法的汗马功劳. 类比思维是生成新假设、进行科学发现的一种方式，除此之外，科学发现还需要其他活动，尤其是假设检验活动，即在完成科学发现任务后要设计实验去"检验"自己的假设.

6.1.3 演绎推理

教材线索

本小节首先指出，演绎推理与归纳推理的过程相反，是从一般到特殊的推理，然后指出三段论式推理是演绎推理的主要形式，并给出三段论式推理的公式. 接着提出大前提、小前提、结论等三个概念，举例加以说明，最后指出三段论式推理的省略形式.

教学目标

（一）知识与技能

结合已学过的数学实例和生活中的实例，体会演绎推理的重要性，掌握演绎推理的基本

方法，并能运用它们进行一些简单推理.

（二）过程与方法

1. 加强关于演绎推理基础知识的教学和基本技能的训练，让学生能很好地应用三段论法则进行推理.

2. 结合生活中的实例，创设民主的学习氛围和生动的学习情景，鼓励、引导学生通过思考、质疑等丰富多彩的认知过程来获取数学知识.

（三）情感、态度与价值观

1. 通过演绎推理与三段论法则的学习，严谨的逻辑思维训练，缜密的思考与推算过程，可促使学生的道德准则合乎理性，形成诚实、顽强、谨慎和勇敢等个性品质.

2. 发展学习数学的兴趣，让学生乐于探究数与形变化的奥秘，体验数学探究的艰辛和喜悦，感受数学世界的奇妙与和谐.

教材分析

1. 重点

（1）演绎推理的概念；

（2）三段论式推理的格式.

2. 难点

三段论式推理的格式.

3. 演绎推理与归纳推理的过程相反，是从一般到特殊的推理. 一般中概括了特殊，凡是一类事物所共有的属性，其中每一特殊事物必然具有. 演绎推理中推理的前提是一般性的，即普遍性的知识、原理、定律、公式等，推出的结论是特殊的知识，所以，演绎推理是必然性推理，其结论是可靠的.

演绎推理可分为简单判断推理和复合判断推理两种，由大前提、小前提推出结论的三段论式推理是一种简单判断推理. 简单判断推理虽也广泛地应用于科学研究中，但在研究的对象较为复杂时，我们经常使用的是其他更为复杂的复合判断推理.

4. 三段论的定义及结构

定义：三段论是由两个包含着一个共同项的性质判断作前提，推出另一个性质判断为结论的间接推理.

在这个定义中，有三个地方必须注意：一是三段论全由性质判断组成；二是两个前提必须有一个共同项（相同的概念）；三是三段论是间接推理，因为它的前提是由两个判断组成.

结构：

从它们包含的不同概念来看，三段论有大、中、小三个项.

（1）大项：结论中的谓项，用“P”表示；

（2）小项：结论中的主项，用“S”表示；

（3）中项：前提中的共同项，用大写字母“M”表示.

从它所包含的不同判断来看，三段论有大小前提和结论三部分.

（1）大前提：包含大项的前提；

（2）小前提：包含小项的前提；

（3）结论：推出的新判断.

举例如下：

三角形内角和等于 180°，（大前提）

图形 ABC 是三角形，（小前提）

所以，图形 ABC 内角和等于 180°.（结论）

在这个例子中，三段论由三个简单判断所组成，其中前两个判断叫前提，后一个判断叫结论. 就主项和谓项说，它包含而且只包含三个不同的概念，每个概念在两个判断中各出现一次. 三段论的公式是：

所有 M 是 P，（M—P）

所有 S 是 M，（S—M）

所以，所有 S 是 P.（S—P）

其中，S 叫小项，在结论中做主项，如上例中的“图形 ABC”；P 叫大项，结论中做谓项，如上例中的“内角和等于 180°”；M 叫中项，在大小前提中出现两次，而在结论中没有出现，如上例中的“三角形”. 中项 M 是媒介，宛如一座桥梁，通过它把小项和大项联结起来，使它们在结论中发生了联系，从而形成一个三段论推理.

5. 三段论的省略式

在表达思想时，没有明确表达出三段论的某一部分，而只明确表达出其中两部分或一部分的三段论，就是三段论的省略式或简称省略推理. 三段论的省略式中有一个或两个部分被省略，是指语言形式上的省略，这个被省略的部分只是在语言形式上没有明白地表达出来，而绝不能理解为直言三段论在结构上有了省略.

例如，三段论的完整式：

一切直角都相等，（大前提）

这两个角是直角，（小前提）

所以，这两个角相等.（结论）

其省略式可以有两种形式：

（1）省略大前提，而只有小前提和结论.

因为这两个角是直角，（小前提）

所以这两个角相等.（结论）

（2）省略大前提和小前提，而只有结论.

两个直角相等.（结论）

在实际语言表述时，经常出现以下类型的三段论省略式：

总得给我饭吃吧，我也是人啦！（省大前提）

对干部都得审查，你当然不能例外！（省小前提）

我们的事业是正义的事业，而正义的事业是不可战胜的.（省结论）

教学建议

1. 在教学中，可以适当地补充形式逻辑学的知识，也可以讲解一些逻辑发展史知识. 关于三段论的最早论述可见于亚里士多德的“前分析篇”.“演绎”一词即源于希腊语. 在逻辑上三段论是从大前提和小前提得出来的，大前提是一般性的原则，小前提是一个特殊陈述，结论是大前提应用在小前提上得到的.

2. 在教学中，还可以补充一些具体实例. 下面的两个例子是亚里士多德给出的经典的三段论：

（1）如果所有人都是必死的，（大前提）

并且所有希腊人都是人，（小前提）

那么所有希腊人都是必死的.（结论）

（2）所有人都是必死的.（普遍原理）

苏格拉底是人.（特殊陈述）

苏格拉底是必死的.（把特殊放入一般）

3. 在区分三段论的大小前提和结论时，学生往往会认为大前提一定是第一句，小前提一定是第二句，结论一定在最后，教学时必须对这个问题予以澄清. 一般地说，在关联词“所以”、“因此”等后面的是结论. 比如在三段论“四边形 $ABCD$ 是平行四边形，平行四边形的对角线互相平分，所以，四边形 $ABCD$ 的对角线互相平分”中，小前提是“四边形 $ABCD$ 是平行四边形”，大前提是“平行四边形的对角线互相平分”，结论是“四边形 $ABCD$ 的对角线互相平分”.

例题解析

例 1 设 B_k 是 $(a+1)^n$ 的展开式中 a^k 的系数（$k=0$，1，…，n），求证：$B_0+B_1+\cdots+B_n=2^n$.

分析 从这个例题可以看出，三段论是一种从一般到特殊的推理，它是一个由大前提、小前提推出结论的演绎过程，这种过程在数学的思考中极其常见. 例题中的大前提是指等式对所有的实数 a 均成立，小前提说的是 1 是一个实数，结论说的是等式对实数 1 也成立.

例 2 将三段论省略式“$\angle A$ 一定等于 30°，因为 $\angle A$ 的正弦值等于 $\frac{1}{2}$”恢复成完整的三段论.

解 “因为”前面是结论，结论的主项“$\angle A$”是小项，谓项“一定等于 30°”是大项. “$\angle A$ 的正弦值等于 $\frac{1}{2}$”中有小项“$\angle A$”，所以是小前提，显然省去了大前提. 要恢复大前

提，知道了大项和中项，就好办了. 大项已知是“一定等于 30°”，中项呢？由小前提得知为“正弦值等于$\frac{1}{2}$”. 这样，大前提可恢复为：正弦值等于$\frac{1}{2}$的角一定等于 30°.

相关链接

三段论的一般规则

三段论的一般规则和导出规则一共有六条：

1. 有且只有三个不同的概念. 否则，一般情况下会犯“四概念”错误.

例如，几何是一门很古老的科学；分形几何是几何，所以，分形几何是一门很古老的科学. 前提真而结论假，推理无效. 由于前提中的两个“几何”不是同一个概念（前一个是指欧几里得几何，后一个是指包括欧几里得几何和现代分形几何在内的所有的几何学），所以，这个三段论犯了“四概念”错误.

2. 中项至少周延一次. 否则，犯“中项不周延”错误.

如果中项在前提中一次也没有被断定过它的全部外延（即周延），那就意味着在前提中大项与小项都分别只与中项的一部分外延发生联系，这样，就不能通过中项的媒介作用，使大项与小项发生必然的确定的联系，因而也就无法在推理时得出确定的结论. 例如，有这样的一个三段论：二次曲线都是轴对称图形，正方形是轴对称图形，所以，正方形是二次曲线. 在这个三段论中，中项的“轴对称图形”在两个前提中一次也没有周延（在两个前提中，都只断定了“二次曲线”、“正方形”是“轴对称图形”的一部分对象），因而“二次曲线”与“正方形”究竟处于何种关系就无法确定，也就无法得出必然的确定结论，所以这个推理是错误的. 违反这条规则，就要犯“中项不周延”的错误，这样的推理就是不合逻辑的.

3. 前提中不周延的项，结论中不得周延. 否则，或者犯“小项不当周延”错误，或者犯“大项不当周延”错误.

例如，运动员需要努力锻炼身体；我不是运动员；所以，我不需要努力锻炼身体. 这个推理的结论显然是错误的. 这个推理从逻辑上说错在哪里呢？主要错在“需要努力锻炼身体”这个大项在大前提中是不周延的（即“运动员”只是“需要努力锻炼身体”中的一部分人，而不是其全部），而在结论中却周延了（成了否定命题的谓项）. 这就是说，它的结论所断定的对象范围超出了前提所断定的对象范围，因而在这一推理中，结论就不是由其前提所能推出的. 其前提的真也就不能保证结论的真. 这种错误在逻辑上称为“大项不当扩大”的错误（如果小项扩大则称“小项不当扩大”的错误）.

4. 从两个否定的前提不能得到必然的结论. 否则，犯“两否定推结论”的错误.

例如，无理数不能表示成循环小数；2 不是无理数，所以 2 可以表示成循环小数. 这里

的前提真而结论亦真，但推理却是无效的. 原因在于两个前提都是否定的，中项不能起到联结大小项以确定它们之间的关系的作用.

5. 如有一否定前提，结论必否定；如结论否定，必有一否定前提. 否则，犯“由否定推肯定”的错误.

例如，五边形内角和都等于 540°，某多边形内角和不等于 540°，所以，某多边形是五边形.

6. 两个特称前提不能得出结论；前提之一是特称的，结论必然是特称的.

两个特称前提是无法得出必然结论的. 前提之一是特称的，结论必然是特称. 例如，所有的实系数一元三次方程都有实数解；有的高次方程是实系数一元三次方程；所以，有的高次方程有实数解. 这个例子说明，当前提中有一个判断是特称命题时，其结论必然是特称命题；否则，如果结论是全称命题就必然会违反三段论的规则.

6.1.4 合情推理与演绎推理的关系

教材线索

本小节通过一个经典的几何最短路径问题的解决总结出探索自然规律的原理与方法：使用合情推理发现问题提出猜想，再用合情推理总结出解决方案或猜想，最后利用演绎推理加以论证.

教学目标

（一）知识与技能

1. 通过具体实例，了解合情推理和演绎推理之间的联系和差异. 初步了解探索自然规律的原理与方法：使用合情推理发现问题提出猜想，再使用合情推理总结出解决方案或猜想，最后利用演绎推理加以论证.

2. 进一步提高学生归纳、类比与演绎推理的能力，并能在实际问题中综合应用合情推理与演绎推理.

（二）过程与方法

1. 结合教学内容，通过具体实例，帮助学生通过丰富多彩的理解活动去发现和学习新的数学知识，让学生在数学知识的形成过程中发现数学规律，感悟数与形的美与理.

2. 合情推理与演绎推理是探索思维的基本原理与方法，鼓励学生努力学会使用合情推理去发现问题并提出猜想，使用合情推理提出解决问题的方案.

（三）情感、态度与价值观

通过学习让学生体会探索自然规律和证明定理过程中激动人心的一幕，促使学生爱数学、学数学、应用数学并发现数学，养成勤于观察、思考，善于提出问题、解决问题的优良品质.

教材分析

1. 重点

合情推理和演绎推理之间的联系和差异.

2. 难点

合情推理和演绎推理之间的联系和差异.

3. 归纳是把个别事物的特征上升为一类事物的特征；演绎则是从一般原理到特殊事例的推理. 对归纳有三种理解：(1) 它是一种推理方法，用它可以由两个或几个单称判断或特称判断得出一个新的全称判断；(2) 它是一种研究方法，当需要研究某一组对象（或某一种现象）时，用它可以研究各个对象（或具体情况），从中找出所有对象都具有的性质（或出现那个现象的各种情况）；(3) 它是一种叙述内容的形式，在文学作品、谈话和教学过程中，如果要从不太一样的情况过渡到一般情况（结论），就使用这种形式. 归纳推理分不完全归纳和完全归纳. 不完全归纳的结果，只具有猜想的性质，归纳猜想是科学研究中最常用的方法，它具有很大的创造性. 作为教学和学习的方法，不完全归纳合乎学生的学习心理，是自然且合情的.

对演绎有三种理解：(1) 它是一种推理方法，利用它可以从一个全称判断和一个特称判断得出一个新的、较少的全称判断和一个特称判断；(2) 它是一种研究方法，为了得到关于某一对象（概念、性质）的新知识，先找出同这一对象最近的一组对象（最近的类概念），再将这组对象的重要性质（类的属性）应用于那个对象（概念、性质）；(3) 演绎可以作为叙述内容的一种形式，也可以作为一种教学方法. 演绎推理的前提中的判断范围包含结论中的判断范围，简单的演绎推理一般是通过三段论来实现的.

归纳和演绎不是孤立地出现的，它们紧密地交织在一起. 一方面，归纳推理的可靠性不仅要用许多事例来验证，而且也要用较一般的原理、较一般的规律来验证（即用演绎法来验证）；另一方面，演绎的前提是过去通过归纳得出的.

教学建议

合情推理是根据已有的事实和正确的结论以及个人的经验和直觉等推测某些结果的推理过程，归纳、类比是合情推理常用的思维方法. 在解决问题的过程中，合情推理具有猜测和发现结论、探索和提供思路的作用，有利于创新思维的培养. 传统教学比较注重培养学生的演绎思维，而不重视培养学生合情推理中的归纳和类比的思维，这已经使我国数学教育在学生思维素质培养方面受到无法挽回的损失.

任何一门科学的发展都有一个通过观察、实验而积累材料的阶段. 当材料积累到一定程度，就要整理材料，从中概括出带普遍性的结论，即提出假说、定理、定律或公式. 科学研究的根本任务，就是要发现普遍性的规律. 在这个过程中，归纳法大有用武之地. 科学史表明，科学中的许多定律、公式是用归纳法总结出来的，诸如关于气体压强、体积和温度三者关系的波义耳定律、盖-吕萨克定律和查理定律；关于电磁相互作用的奥斯特定律、法拉第定律；关于生物进化的生存竞争规律，以及能量守恒与转化定律等. 如果不用归纳法，就会使认识永远停留在感性经验上，就不会有科学.

在本小节的教学中，可以寻找更多类似于教材中经典的几何最短路径问题的例子，在问题的解决过程中让学生逐步体会探索自然规律的原理与方法：使用合情推理发现问题提出猜想，再使用合情推理总结出解决方案或猜想，最后利用演绎推理加以论证.

例题解析

例 设三棱锥 $A-BCD$ 的三个侧面 ABC，ACD，ADB 两两相互垂直，且三个侧面面积分别等于 S_1，S_2，S_3，如图 6－4，试求$\triangle BCD$ 的面积 S.

分析 类比平面几何的勾股定理："$\triangle ABC$ 两边 AB，AC 互相垂直，则 $AB^2+AC^2=BC^2$"，将勾股定理拓展到空间可以猜想所得的结果应是：$S^2=S_1^2+S_2^2+S_3^2$. 通过特殊化或极端化情形进行验证，如把上述三棱锥特殊化成侧面两两垂直的正三棱锥. 演绎法证明过程也可以与勾股定理的证明进行类比.

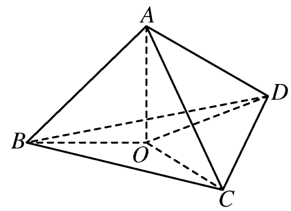


图 6－4

解 勾股定理的证明：在$\triangle ABC$ 中，过点 A 作斜边 BC 的垂线，垂足为 D，如图 6－5，由$\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{BD}{AB}$得 $AB^2=BD\cdot BC$，同理，$AC^2=CD\cdot CB$，两式相加得 $AB^2+AC^2=BC^2$.

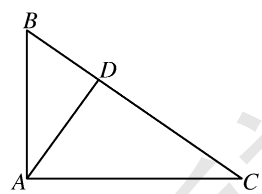


图 6－5

类比勾股定理的证明，在三棱锥中，设二面角 $A-CD-B$ 的平面角大小为α，如图 6－4，由立体几何知识有 $\cos\alpha=\dfrac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle BCD}}=\dfrac{S_{\triangle COD}}{S_{\triangle ACD}}$，故有 $S_{\triangle ACD}^2=S_{\triangle COD}\cdot S_{\triangle BCD}$，同理有 $S_{\triangle ABC}^2=S_{\triangle BOC}\cdot S_{\triangle BCD}$，$S_{\triangle ABD}^2=S_{\triangle BOD}\cdot S_{\triangle BCD}$，三式相加得 $S^2=S_1^2+S_2^2+S_3^2$.

点评 在平面几何与立体几何中存在着许多类比发现的过程，比如：

（1）正三角形的中心位于高线的三等分点处，类比发现正四面体的中心位于高线的四等分点处；

（2）三角形的内切圆半径为 r，各边长为 a，b，c，其面积 $S=\dfrac{1}{2}r(a+b+c)$，类比发现四面体内切球半径为 R，各表面三角形面积为 S_1，S_2，S_3，S_4，其体积 $V=\dfrac{1}{3}R\ (S_1+S_2+S_3+S_4)$.

相关链接

合情推理与数学猜想

合情推理是根据已有的事实和正确的结论（包括实验和实践的结果）以及个人的经验和直觉等推测某些结果的推理过程，归纳、类比是合情推理常用的思维方法. 在解决问题的过程中，合情推理具有猜测和发现结论、探索和提供思路的作用，而在数学史中，有许多世界著名的数学问题也主要是数学家依靠合情推理得以发现或解决的.

1. 哥德巴赫猜想的发现

哥德巴赫猜想是世界近代三大数学难题之一. 1742 年，德国中学教师哥德巴赫写信给著名的数学家欧拉，提出了两个猜想. 第一个是：任何一个大于 2 的偶数，都是两个素数之和，简单地用"1＋1"来表示. 第二个是：每个大于 5 的奇数，都是 3 个素数之和. 欧拉当时表示相信哥德巴赫提出的猜想是对的，但他证明不出来.

两百多年来这个猜想像磁石一样吸引着世界上为数众多的数学家. 经过英国数学家哈代、李特伍德和苏联数学家维诺格拉多夫的努力，证明了哥德巴赫提出的第二个猜想. 剩下的就是第一个猜想了.

1919 年，挪威数学家布朗改进了已有两千多年历史的埃氏筛法，证明了每一个充分大的偶数是两个素因子个数都不超过 9 的整数的和，简称为"9＋9". 1924 年德国数学家拉代马哈证明了每一个充分大的偶数是两个素因子个数都不超过 7 的整数的和，简称为"7＋7". 1932 年英国的埃斯特曼证明了"6＋6". 后来苏联的布赫夕塔布又证明了"5＋5"和"4＋4". 1956 年我国数学家王元证明了"3＋4". 同年苏联的维诺格拉多夫证明了"3＋3". 1957 年王元又证明了"2＋3". 后来又有人证明了"1＋5"、"1＋4"、"1＋3". 我国数学家陈景润进一步改进了筛法，终于证明了"1＋2"，取得了目前为止世界上研究哥德巴赫猜想的最好成果. 至于能否证明"1＋1"，我们只有拭目以待了.

在这里，我们感兴趣的是，哥德巴赫怎么能够提出这个令人消磨时光、绞尽脑汁的猜想的？这从逻辑思维方面讲，就是依靠不完全归纳推理. 就第一个猜想来说，其推理形式可以表述如下：

$4=1+3$（两素数之和）；$6=3+3$（两素数之和）；$8=3+5$（两素数之和）；$10=5+5$（两素数之和）；$12=5+7$（两素数之和）；…. 所以，任何大于 2 的偶数都是两素数之和.

这是一个不完全归纳的推理过程，从中我们看到，著名的哥德巴赫猜想的发现正是合情推理中的归纳法的应用.

2. "四色定理"的证明

为了在地图上把不同的地域，如国家、省、区、县等区别开来，而不至于混淆，究竟需要使用多少种颜色呢？三种不足，五种有余，只要四种颜色就足够了. 这是 1852 年首先由

一个英国青年大学生古德里提出. 古德里将这一发现告诉了他的老师，著名数学家德摩根，希望帮助找到证明. 但德摩根也不能证明. 1879 年，一位叫肯泊的英国律师宣布证明了四色猜想，但 11 年以后，一位叫希伍德的青年人指出了肯泊的证明中有严重错误，希伍德一生坚持研究四色问题，但始终未能证明这条定理. 因为要使这条定理得到证明，必须穷尽一切可能的图形组合，也就是需要研究两千多个组合构形，进行近 200 亿次判断. 这在科学技术不够发达的过去，谈何容易！靠扳手指头算，靠算盘打，或只有计算尺、计算器都是办不到的. 直到 1976 年，美国数学家阿佩尔和哈肯用高速电子计算机运算了 1 200 个小时，这个定理的正确性才得到最终的证明. 其推理形式可表示如下：

构图 1 用的是四色；构图 2 用的是四色；构图 3 用的是四色；…；构图 2 000 用的是四色. 所以，凡地图用四色就够了.

这个证明是完全归纳法的成功运用，完全归纳推理就是根据这类事物中的每一个事物都具有的共同属性，推出这类事物具有这种共同属性的推理. 作为证明的方法，完全归纳法与数学归纳法一样，其结论是正确的.

3. 费马大定理的提出

费马大定理亦称“费马猜想”，最先是由费马在阅读巴歇校订的丢番图《算术》时作为卷 2 命题 8 的一条页边批注而提出的. 1670 年费马之子萨缪尔连同其父的批注一起出版了巴歇校订的书的第二版，此后三个多世纪，费马大定理成为世界上最著名的数学问题. 寻求费马大定理的证明方法，吸引了历史上许多最有才智的数学家的目光，有力地推动了数论乃至整个数学的进步. 1994 年，这一旷世难题被英国数学家维尔斯解决. 数学家高斯曾经说过：“数学中的一些美丽定理具有这样的特性，它们极易从事实中归纳出来，但证明却隐藏得极深.”在数论领域费马大定理也是一个最为美丽的定理，只不过这个定理在提出猜想时并非通过归纳，而是通过类比而得到的.

我们知道，不定方程 $x^2+y^2=z^2$ 有无数多组正整数解，类比之下，得到与之相反的结论即费马猜想：不定方程 $x^n+y^n=z^n$（$n\geqslant 3$，$n\in\mathbf{N}$）不存在正整数解. 这只是简单的升维类比，但是，费马猜想却是一个非常好的数学问题，著名的数学家希尔伯特曾喻之为“一只会下金蛋的鹅”.

6.2 直接证明与间接证明

6.2.1 直接证明：分析法与综合法

教材线索

本小节以“走迷宫”的游戏作比喻，引出了综合法与分析法的概念，接着，通过举例，两种方法并用，详细阐释了综合法与分析法在数学证明中的具体使用过程，最后得出结论：先用分析法探索证明的途径，然后用综合法的形式写出证明的过程.

教学目标

（一）知识与技能

1. 结合已经学过的数学实例，了解直接证明的两种基本方法：分析法和综合法. 了解分析法和综合法的思考过程、特点.

2. 使学生能更熟练地利用分析法探索证明的途径，然后用综合法的形式写出证明过程，通过例习题的讲解着重培养学生的分析、综合能力.

（二）过程与方法

1. 结合已经学过的数学实例，通过分析法与综合法的一题双解方式，让学生进一步提高数学证明的能力.

2. 在学习过程中，让学生能对自己的数学证明过程进行计划、反思、评价和调整，提高分析问题与解决问题的能力.

3. 通过自由发言，小组合作等方式让数学课堂更加生动活泼，促使学生进行有效的数学学习.

（三）情感、态度与价值观

分析法与综合法是数学直接证明的主要方式，通过例习题的讲解让学生认识到分析法与综合法在数学证明中的重要作用，养成善于分析、善于综合、严谨思考的良好数学品质.

教材分析

1. 重点

直接证明的两种基本方法：分析法和综合法.

2. 难点

分析法和综合法的思考过程、特点.

3. 证明是通过一连串的推理，由一些真实的命题来确定另一命题真实性的过程. 任何证明都由三部分组成：论题、论据、论证方式.

论题就是需要确定其真实性的命题. 在几何中，论题一般具有假言命题“若 A 则 B”的形式，其中 A 是条件（或题设），B 是结论（未知事项）.

论据是被用来作为证明论题真实性的依据的命题. 在几何证明中，充当论据的命题主要是公理、定义、定理以及论题中的条件等.

论证方式是指论据与论题之间的逻辑联系方式，也就是从论据推出论题的过程中的推理形式. 例如，三段论、联言推理、选言推理、假言推理、关系推理等，它们统称为演绎推理，演绎推理保证了由正确的前提得到正确的结论. 我们通过以下的问题来说明.

例如，求证：如图 6－6，在四边形 $ABCD$ 中，若 $AC\perp BD$，则 $AB^2+CD^2=AD^2+BC^2$.

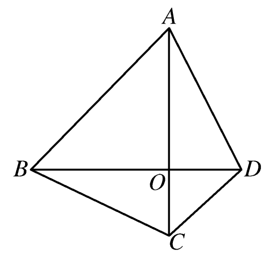


图 6－6

分析　首先可以确定论题的条件是：$ABCD$ 是四边形，且 $AC\perp BD$. 而论题的结论则是：$AB^2+CD^2=AD^2+BC^2$.

证明　设 AC 与 BD 交于 O，因 $AC\perp BD$（论据 1），所以由垂线的性质（论据 2）知，$\triangle ABO$，$\triangle ADO$ 为直角三角形. 根据勾股定理（论据 3），有

$$AO^2+BO^2=AB^2，AO^2+OD^2=AD^2.$$

因为等量减等量，其差相等（论据 4），所以，$AB^2-AD^2=BO^2-OD^2$.

同理有 $BC^2-CD^2=BO^2-OD^2$.

因为同等于第三个量的两个量相等（论据 5），所以，$AB^2-AD^2=BC^2-CD^2$，

即 $AB^2+CD^2=BC^2+AD^2$.

在上述证明过程中，论据 1 是条件，论据 2，3 是已知定理，论据 4，5 是公理. 由于采用的演绎推理形式是正确的. 所以，论题是这些论据的逻辑推论. 只要这些论据是真实的，那么，经过证明后的论题的真实性也确定了.

4. 分析与综合是思维活动中彼此相反但又密切联系的基本过程. 分析源自希腊文 analysis——分解、划分、分开，综合是 synthesis——联合、组合、统一. 它们在人类学习和研究过程中起着主导作用. 一般意义下，分析被理解为在思想上把对象的整体分解成各个部分或各个要素，或把整体的某些部分或某个要素分出来. 例如，把中学课程分解为数学、语文、外语等学科，分别加以研究. 这个过程的特点是，撇开各个部分或要素之间的相互关系，而逐一地研究每个部分或各个要素的状态. 综合是在思想上把对象的各个部分或各个要素联系起来，把整体的某些部分或个别要素组合起来. 综合的特点是寻求整体内部各个部分或要素间的相互联系.

在思维方法上，分析是从结果追溯到产生这一结果的原因的一种思维方法；综合是从原因推导到由原因产生的结果的一种思维方法. 在数学证明中，这种方向的差异是显而易见的，分析法是执果索因，而综合法则是由因导果，即分析法是由待证结论走向已知条件，而综合法则是从已知条件走向待证结论.

5. 数学证明方法按证明是否直接证得论题，可以分成直接证法和间接证法. 由论题的已知条件以及已知公理、定理、定义等作为依据从正面证明论题结论的真实性的证明方法叫作直接证法. 它是数学证明中普遍使用的方法，但是，有些数学命题往往不易甚至不能用直接证法证明，这时，可不直接证明论题的真实性，而是通过证明所证论题的否定论题不真实，或证它的逆否命题成立从而达到证明所证论题真实，这种证法叫作间接证法. 直接证法中常见的主要是分析法与综合法.

一般认为，在数学证明中，关键是找到证明的途径. 根据思考时推理序列的方向不同，思考方法分为分析法和综合法. 如果推理的方向是从已知到求证，这种思考方法叫作综合法；如果推理方向是从求证追溯到已知，这种思考方法叫作分析法；如果既从已知条件出发，又从欲证结论出发，经过推理找到证题的途径，这种思考方法叫作分析综合法. 值得注意的是，按上述划分，判断一个证明是用什么方法，主要是从证明过程所体现的思考方向来判断所使用的方法是分析法，还是综合法，或者是分析综合法. 分析和综合，既是科学研究的方法，又是学习数学的重要方法之一. 掌握了上述思考方法，分析问题和解决问题的能力会得到很大提高.

由上述三种证法知，综合法是由因导果，顺理成章，表达简明，缺点是一因多果，越导越广，有时不易得出结论；而分析法是执果索因，较为集中，易有成效，缺点是叙述不易得当；分析综合法从两个方向思考寻找证题桥梁，比较容易找到证题途径. 所以，在寻求证题思路时，更多地使用的是分析综合法；而在书写证明过程时，一般用综合法思路书写表达.

教学建议

教学中要给学生指出，证明不等式时，有时可以从求证的不等式出发，分析使这个不等式成立的充分条件，把证明不等式转化为判定这些充分条件是否具备的问题，如果能够肯定这些充分条件都已具备，那么就可以断定原不等式成立，这种方法通常叫作分析法. 分析法是“执果索因”，步步寻求上一步成立的充分条件，它与综合法是对立统一的两种方法. 在不等式与几何问题的证明中，分析法是最为常用的，我们常用分析法探索证明的途径，然后用综合法的形式写出证明过程，但有时，在证题过程中我们也将综合法、分析法结合起来使用.

例题解析

例 1　如图 6-7，平行四边形 $ABCD$ 中，$AE\perp BD$ 于 E，$CF\perp BD$ 于 F.

求证：$AE=CF$.

分析 在这个例题中，综合法是由因导果的过程. 在分析法中，可采用与综合法证明逆向的过程去执果索因. 反过来，在用综合法的时候，可采用与分析法证明逆向的过程去由因导果. 在实际证明中，我们通常以分析法去探寻解题方法，而用综合法书写解题过程.

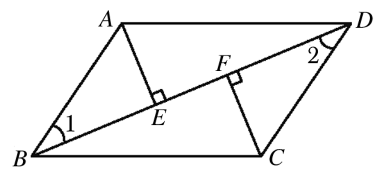


图 6－7

例 2 求证：$\sqrt{2}+\sqrt{7}<\sqrt{3}+\sqrt{6}$

分析 在这个例题的分析法证明中，两边同时平方时要注意不等式两边必须都是正数，如果不都是正数，在不等式两边同时平方后，不等式可能就不成立了. 变形中，是通过同时平方去根号以达到化简证明的目的. 通过在不等式两边同时平方，将原本无法一眼看穿的不等式化为一个显然成立的不等式，将一个复杂的问题化为一个简单的问题，这是使用分析法时变形的方向.

例 3 设 x，$y\in\mathbf{R}_+$ 且 $x+y=1$，求证：$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\geqslant 9$.

证明 （综合法）左边$=\left(1+\dfrac{x+y}{x}\right)\left(1+\dfrac{x+y}{y}\right)=\left(2+\dfrac{y}{x}\right)\left(2+\dfrac{x}{y}\right)$

$$=4+2\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+1\geqslant 5+4=9.$$

（分析法）要证$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\geqslant 9$ 成立，

$\because x$，$y\in\mathbf{R}_+$ 且 $x+y=1$，$\therefore y=1-x$.

只需证明$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{1-x}\right)\geqslant 9$，即证$(1+x)(2-x)\geqslant 9x(1-x)$，

即证 $2+x-x^2\geqslant 9x-9x^2$，即证 $4x^2-4x+1\geqslant 0$.

即证 $(2x-1)^2\geqslant 0$，此式显然成立，所以原不等式成立.

例 4 若 a，b，c 是不全相等的正数，求证：$\lg\dfrac{a+b}{2}+\lg\dfrac{b+c}{2}+\lg\dfrac{c+a}{2}>\lg a+\lg b+\lg c$.

证明 欲证 $\lg\dfrac{a+b}{2}+\lg\dfrac{b+c}{2}+\lg\dfrac{c+a}{2}>\lg a+\lg b+\lg c$，

只需证 $\lg\dfrac{a+b}{2}\cdot\dfrac{b+c}{2}\cdot\dfrac{c+a}{2}>\lg(a\cdot b\cdot c)$，

只需证$\dfrac{a+b}{2}\cdot\dfrac{b+c}{2}\cdot\dfrac{c+a}{2}>abc$，

但是$\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}>0$，$\dfrac{b+c}{2}\geqslant\sqrt{bc}>0$，$\dfrac{c+a}{2}\geqslant\sqrt{ca}>0$.

且上述三式中的等号不全成立，所以$\dfrac{a+b}{2}\cdot\dfrac{b+c}{2}\cdot\dfrac{c+a}{2}>abc$.

因此 $\lg\dfrac{a+b}{2}+\lg\dfrac{b+c}{2}+\lg\dfrac{c+a}{2}>\lg a+\lg b+\lg c$ 成立.

点评 这个证明中的前半部分用的是分析法，后半部分用的是综合法.

相关链接

分析法在数学与科学中所扮演的角色

如果我们相信任何复杂的事物或事理都是由一些基本的要素组成的，则自然就衍生出分析的研究方法. 先利用分析方法找出基本要素，然后再用综合方法由基本要素去组合成复杂的事物. 从而达到对事物或事理的结构之澄清与了解，并且引申出“以简驭繁”的要领. 那么，分析法在数学与科学中所扮演的是什么角色呢?

作为一个重要的科学方法，分析法与综合法在数学的发展史上，扮演着主导的角色. 几乎每一个数学分支都有它的踪迹，有的甚至还以它来命名，例如综合几何、解析几何、分析学、调和分析等等.

在字典中，分析就是将事物“分解成简单要素”，综合就是“组合、结合、凑合在一起”. 换言之，将事物分解成组成部分、要素，研究清楚了再凑合起来，事物以新的认知形貌来展现. 这就是采用了分析与综合的方法. 下面我们举几个例子来说明.

古人面对大自然的森罗万象、生成变化，想要探求其原因. 于是去追究物质的结构，提出了“原子论”学说，物质经过逐步的分割，在很大的有穷步骤之内，就会到达不可分割的境地，不可分割就叫作原子，这是本义的分析；反过来，原子的不同排列与组合就形成了各种物质，这是综合. 原子论大师德谟克利特说：“万物都是原子组成的. 只有原子与虚空才是最终的真实.”

再比如，白色的光经过三棱镜，可分解成红橙黄绿蓝靛紫七色光，反过来，七色光又可以合成为白色光. 这就是光谱的分析与综合，由此可解释彩虹的成因.

分析一篇英文文章的结构，先是得到句子、单词，最后得到 26 个字母，反过来，综合是由字母组成单词、句子，再由句子组成文章，这些是文法所要研究的内容.

笛卡儿在他的《方法论》中说：“将每一个问题尽可能地且恰如所需地分成许多部分，使得每一部分都可以轻易地解决.”这说的其实正是分析法.

在数学中，所谓证明就是要找出从已知条件连接到待证结论的一条逻辑通路，这有时可真不容易. 古希腊人想出一种“倒行逆施”的办法：由结论切入，即假设结论成立，投石问路一番，看看能够引出什么结果，这就是所谓的分析法，等找到显然成立的理由后，再回过头来作演绎式的综合，完成证明.

在分析过程中，由结论出发，如果推导出逻辑结果与已知条件、已知的公理、定义、定理及明显的事实是矛盾的，那么结论就要被否定掉，这叫作归谬法，也就是反证的思维. 归谬法是分析法的副产物. 古希腊人非常看重它，因为它可以节省综合的步骤，分析法本身就已完成了命题的证明. 英国数学家哈第称归谬法为“弃盘战术”，是数学家的“精致武器”.

由结论出发，推导出一连串的逻辑结论，终于抵达一个已知会显然成立的结论或前提，并且其中的每一个步骤皆可逆，那么我们就找到了解决问题的一个途径，这就是分析法.

6.2.2 间接证明：反证法

教材线索

本小节首先说明间接证明的概念，接着以一个浅显的例子引入反证法，指出使用反证法的一般步骤，最后用反证法证明$\sqrt{2}$是无理数.

教学目标

（一）知识与技能

1. 结合已经学过的数学实例，了解间接证明的一种基本方法——反证法；了解反证法的思考过程、特点.

2. 反证法是一种间接证法，培养反证的思维有助于激发创新意识，增强思维的批判能力，同时可促进思维的灵活性与对问题进行辩证思考的能力.

（二）过程与方法

1. 反证法是一种重要的证明方法，教学中可以通过生活实例、简单的数学例子以及生动有趣的故事创设具有启发性的问题情境，使学生体会反证法的思想.

2. 注重对学生学习过程的评价与调控，应该考察学生是否积极主动地参与数学学习活动，是否乐意与同伴进行交流和合作，是否具有较强的学习兴趣.

（三）情感、态度与价值观

在引入课题时讲解故事可以激发学生对反证法的学习兴趣，反证法思维的培养有助于辩证思维的形成，可增强思维的批判性.

教材分析

1. 重点

反证法在证明有关问题时的思考过程、特点.

2. 难点

应用反证法证明数学问题.

3. 直接证法与间接证法. 按证明是否直接证得论题，数学证明又可以分成直接证法和间接证法. 由论题的已知条件以及已知公理、定理、定义等作为论据从正面证明论题结论的

真实性的证明方法叫作直接证法. 它是数学证明中普遍使用的方法，但是，有些数学命题往往不易甚至不能用直接证法证明，这时，可不直接证明论题的真实性，而是通过证明所证论题的否定论题不真实，或证它的逆否命题成立从而达到证明所证论题真实，这种证法叫作间接证法. 下面仅介绍间接证法，常用间接证法有反证法和同一法.

（1）反证法. 由否定论题结论的正确性出发，根据假设、定义、公理、定理，进行一系列正确的推理，最后得出一个矛盾的结果，以表明结论的反面不成立，从而肯定结论的正确性. 这种驳倒反面的证法，叫作反证法. 当论题结论的反面只有一种情况时，否定了这一反面结论，根据排中律，即可证得原论题的结论是正确的. 这种单纯的反证法叫作归谬法. 当论题结论的反面不止一种情况，就得一一驳倒，最后肯定论题结论的正确性. 这种结论的反面不唯一的反证法叫作穷举法.

（2）同一法. 一般情况下，原命题与逆命题不具有等效关系. 但是，当命题的条件与结论所确定的对象都是唯一存在，即它们所指的是同一概念时，这个命题与它的逆命题等效. 这一原理称为同一原理.

对符合同一原理的命题，通过证明它的逆命题成立，从而肯定原命题成立的证明方法称为同一法. 应用同一法证题时，往往先作出一个满足命题结论的图形，然后证明图形符合命题已知条件，确定所作图形与题设条件所指的图形相同，从而证得命题成立.

同一法与反证法都是用间接的方法证明结论. 但同一法只适用于证符合同一原理的命题，反证法则普遍适用于能用间接方法证明的命题. 能用同一法证明的命题，一般也可以用反证法证明，只需在证明时先将结论否定，在最后不指出图形重合，仅指出“根据唯一性，出现两个性质相同的不同图形是矛盾的”即可.

4. 反证法的证明步骤是：（1）从命题的结论的否定面出发；（2）根据正确的逻辑推理，推出矛盾（与已知矛盾；与已知定义、公理、定理等矛盾；出现与临时假设矛盾；在证明过程中出现自相矛盾等），则否定假设；（3）肯定原命题的结论是正确的.

如果一个命题的结论难以直接证明时，可考虑用反证法，此即数学解题的“正难则反”原则. 宜用反证法证明的题型有：（1）以否定性判断作为结论的命题；（2）某些定理的逆命题；（3）以“至多”、“至少”或“不多于”等形式陈述的命题；（4）关于“唯一性”结论的命题；（5）解决整除性问题；（6）一些不等量命题的证明；（7）有些基本定理或某一知识体系的初始阶段；（8）涉及各种“无限”结论的命题等.

5. 反证法的理论依据是形式逻辑中的两个基本规律——矛盾律和排中律. 所谓“矛盾律”是说：在同一论证过程中，两个互相反对或互相否定的判断，其中至少有一个是假的. 而所谓“排中律”则是说：任何一个判断或者为真或者为假，二者必居其一. 也就是说结论“P 真”与“非 P 真”中有且只有一个是正确的.

关于反证法，法国数学家 J. 阿达玛曾说过：“这种方法在于表明：若肯定定理的假设而否定其结论，就会导致矛盾.”这段话可以理解为假设命题的结论不正确，并运用此判断，在正确的逻辑推理下导致逻辑矛盾，根据矛盾律可知该相反判断的错误性，再根据排中律可

知判断本身的正确性. 这就是反证法的逻辑依据. 由此可见，证明原命题的逆否命题只是反证法的一种具体形式.

教学建议

1. 用反证法证题时，应提醒学生注意：(1) 周密考察原命题结论的否定事项，防止否定不当或有所遗漏；(2) 推理过程必须完整，否则不能说明命题的真伪性；(3) 在推理过程中，要充分使用已知条件，否则推不出矛盾，或者不能断定推出的结果是错误的.

2. 用反证法证明问题存在逻辑上的困难，课堂上的例题宜简不宜难，应重在让学生先掌握反证法使用的逻辑过程，比如可以让学生试着用反证法证明下列各题：

(1) 求证：过同一直线上三点不能作一个圆.

(2) 求证：在一个三角形中不可能有两个直角.

(3) 已知：直线 $a /\!/ b$，$b /\!/ c$，求证 $a /\!/ c$.

(4) 求证：一条直线与两条平行线中的一条相交，必定与另一条相交.

(5) 求证：圆的两条非直径的相交弦不能互相平分.

3. 在教材 P.127 例 2 的教学时，可以讲述关于无理数$\sqrt{2}$的发现者希帕苏斯的故事.

例题解析

例 1 已知 $a+b+c>0$，$ab+bc+ca>0$，$abc>0$. 求证 $a>0$，$b>0$，$c>0$.

证明 法 1（反证法）假设 a，b，c 不全是正数，即至少有一个小于或等于 0. 又 $abc>0$，不妨假设 $a<0$，则 $bc<0$. $\because b+c>-a>0$，$\therefore -a(b+c)>0$. $\therefore a(b+c)<0$. 又 $bc<0$，$\therefore bc+a(b+c)<0$. 即 $ab+bc+ca<0$.这与 $ab+bc+ca>0$ 矛盾，所以假设不成立，故 $a>0$，$b>0$，$c>0$ 成立.

法 2（构造函数法）设 $f(x)=(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$，$\because a+b+c>0$，$ab+bc+ca>0$，$abc>0$，$\therefore$ 当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)>0$ 恒成立，则 $f(x)=0$ 的三个根均为负根，即 $-a<0$，$-b<0$，$-c<0$，$\therefore a>0$，$b>0$，$c>0$.

例 2 已知 $f(x)=x^2+px+q$.

(1)求证：$f(1)+f(3)-2f(2)=2$；

(2)求证：$|f(1)|$，$|f(2)|$，$|f(3)|$中至少有一个不小于$\frac{1}{2}$.

证明 (1) $f(1)+f(3)-2f(2)=(1+p+q)+(9+3p+q)-2(4+2p+q)=2$.

(2)（反证法）假设$|f(1)|$，$|f(2)|$，$|f(3)|$都小于$\frac{1}{2}$，则$|f(1)|+|f(3)|+2|f(2)|<2$，而$|f(1)|+|f(3)|+2|f(2)|\geqslant f(1)+f(3)-2f(2)=2$，出现矛盾，$\therefore |f(1)|$，$|f(2)|$，$|f(3)|$中至少有一个不小于$\frac{1}{2}$.

例 3 证明 lg 2 是无理数.

证明 假设 $\lg 2$ 是有理数，则存在两个正整数 p，q，使得 $\lg 2=\dfrac{p}{q}$，由对数定义可得 $10^p=2^q$，则有 $2^p\cdot 5^p=2^q$，则一个等式左边含因子 5，右边不含因子 5，与算术基本定理矛盾. $\therefore \lg 2$ 为无理数.

相关链接

与反证法有关的故事

很早以前，中国的成语中就有一个“自相矛盾”的故事，这个故事说的是有一个人同时贩卖矛与盾，他向买家吹嘘他的矛是无坚不摧的，盾呢，是刀枪不入的. 于是，有人马上提议他“以子之矛，攻子之盾”来验证一下他的宣传是否可靠，弄得这人当场哑口无言.

在数学上人们也常用这种“以子之矛攻子之盾”的方法来证明一些问题，这种证法就是反证法. 反证法的思维在日常生活中并不少见，以下例举的是与反证法有关的故事.

1. 南方某风水先生到北方看风水，恰逢天降大雪. 乃作一歪诗：“天公下雪不下雨，雪到地上变成雨；早知雪要变成雨，何不当初就下雨.”他的歪诗又恰被一牧童听到，亦作一打油诗讽刺风水先生：“先生吃饭不吃屎，饭到肚里变成屎；早知饭要变成屎，何不当初就吃屎.”

2. 王戎小时候，爱和小朋友在路上玩耍. 一天，他们发现路边的一棵树上结满了李子，小朋友一哄而上，去摘李子，独有王戎没动. 等到小朋友们摘了李子一尝，原来是苦的！他们都问王戎：“你怎么知道李子是苦的呢？”王戎说：“假如李子不苦的话，早被路人摘光了，而这树上却结满了李子，所以李子一定是苦的.”

3. 一个心脏病患者梦见刮台风，自己从楼上跌下来，接着整个住房倒塌下来压在他身上，他害怕极了，于是心脏病发作，死在床上. 分析：事实上，这个故事是不真实的，可以用反证法来证明. 假设这个故事是真实的，由于故事是在梦中发生的，除了做梦的人谁也不知道. 因此故事情节只能由做梦者说出来，而做梦者又死在梦中，由死者说出梦中的情节与常理不符.

4. 从前有个国王总认为自己是个“至高无上的权威”，又是个“大慈大悲”的救世主. 在处决犯人前，他总要叫犯人抽签决定自己的命运，即在两张小纸片上，一张写“活”字，一张写“死”字，抽到“活”字可幸免一死. 一个囚犯一天将要被处决，他的死对头买通了狱吏，把两张纸片都写上了“死”字让他去抽，心想，这下犯人必死无疑. 谁知那个狱吏把这个消息透露给了犯人.

犯人一听，乐得眉开眼笑，高兴地说：“这下我可死里逃生了.”他用了什么妙法呢？

原来国王宣布抽签开始后，那犯人胸有成竹、不慌不忙地抽出一纸片，看也不看便放进嘴里，吞下肚子，这倒使在场的人慌了手脚，因为谁都搞不清犯人抽到的是“死”还是

“活”，此时，国王查看剩下的纸片上写的是“死”字，由此反证，可知被犯人吞下的是“活”字了. 于是国王下令，将犯人痛打一顿，以责罚他不该善自吞吃纸片，随后又不得不将犯人释放了.

5. 三国时期，蜀国丞相诸葛亮屯兵阳平时，派大将魏延领兵去攻打魏国，只留下少数老弱军士守城，不料魏国大都督司马懿率大队兵马杀来，靠几个老弱军士出城应战，无异于以卵击石，怎么办？诸葛亮冷静思考之后，决定打开城门，让老弱军士在城门口洒扫道路，自己则登上城楼，摆好香案，端坐弹琴，态度从容，琴声幽雅，司马懿见此情景，心中疑虑：“诸葛亮一生精明过人，谨慎有余，从不冒险，今天如此这般，城内恐怕必有伏兵，故意诱我入城，绝不能中计也.”

6.3 数学归纳法

教材线索

本节以“多米诺现象”作类比引入课题，通过分析“多米诺现象”获得启发，得到数学归纳法证明问题的两个步骤，然后用两个具体的数列问题阐释数学归纳法证明问题的详细过程. 本节教学建议安排 2 个课时.

教学目标

（一）知识与技能

1. 了解数学归纳法的原理，能用数学归纳法证明一些简单的数学命题.

2. 培养“大胆猜想，小心求证”的科学思维品质，使学生初步掌握由归纳到猜想再到证明的数学思想方法.

（二）过程与方法

1. 以“多米诺现象”作类比创设问题情境，引导学生亲身经历数学发现与数学证明的全过程，感悟并掌握从观察到归纳猜想再到证明的数学思维方法.

2. 通过例题的讲解与习题的训练让学生较熟练地使用数学归纳法证明一些简单的数学命题，形成严谨的数学归纳思维.

（三）情感态度与价值观

数学是关于无穷的科学，数学归纳法是数学中处理无穷问题的重要方法，在数学归纳法的学习过程中，进一步培养学生严谨的科学思维品质，让学生初步认识有限与无限的辩证关系.

教材分析

1. 重点

掌握数学归纳法证明题目的步骤，掌握数学归纳法的一些应用.

2. 难点

应用数学归纳法第二个步骤中从 k 到 $k+1$ 的变化情况分析.

3. 在数学中采用数学归纳法证明与自然数有关的命题时，有以下两个步骤.

（1）证明 $n=1$（或 n 的第一个可取值不是 1，而是其他自然数）时，命题是正确的.

（2）假设 $n=k$ 时，命题是正确的，从而能推得 $n=k+1$ 时，命题也是正确的.

那么就可以断定，对于可取的自然数 n，命题都是正确的. 这种证明的方法，叫作数学归纳法.

数学归纳法的理论根据是下面两点：

（1）最小数原理：在一批自然数组成的集合里，一定有一个最小的自然数.

（2）完全归纳原理：如果自然数的一个集合包含最小自然数 c，并且对于任何一个属于它的数 k，必定有数 $k+1$ 也属于它，那么这个集合必定包含所有大于 c 的自然数.

根据数学归纳法的定义，利用数学归纳法证题时，上述两步缺一不可. 如果只有第一步的验证而没有第二步的证明，则它属于不完全归纳法，作出的结论就不一定真实可靠，而有了第二步的证明，在数学归纳原理的保证下，才使得结论是完全可靠的. 但要注意，仅有第二步而无第一步的证明，结论也不一定是真实的. 显然，数学归纳法有别于上节课提到的完全归纳法和不完全归纳法，它是根据归纳原理综合运用归纳、演绎推理的一种特殊的数学证明方法.

4. 由于正整数有无限多个，因而不可能对所有正整数一一验证. 如果只对部分正整数加以验证就得出结论，所得结论又不一定正确，但要是能找到把所得结论递推下去的根据，就可以把结论推广到所有正整数. 这就是数学归纳法的基本思想. 用数学归纳法证明一个与正整数有关的命题时，要分两个步骤，且两个步骤缺一不可. 第一步是递推的基础，缺少第一步，递推就缺乏正确的基础，缺少第二步，递推就缺乏依据. 一方面，第一步再简单，也不能省略；另一方面，第一步只要考察使结论成立的最小正整数就足够了，一般没有必要再多考察几个正整数.

教学建议

1. 数学归纳法可以证明某些与自然数有关且具有递推性的数学命题，它是通过“有限”来解决“无限”问题的一种严谨而又十分重要的方法. 在教学中可以用“多米诺现象”与“放鞭炮”的场景引入课题，并让学生思考两个问题：推倒多米诺骨牌为什么不需要一块一块地用手去推倒？燃放鞭炮为什么不需要一个一个去点着？教师应引导学生总结出推倒骨牌要具备的条件，首先必须推倒第一块，接着是假如前面一块倒下，要保证它倒下时会撞倒下

一块. 这两个条件满足了，全部的骨牌都将倒下. 燃放鞭炮时有着类似的过程.

2. 若不理解数学归纳法的实质，证明时机械模仿，盲目套用证题格式，有可能造成证明的失误. 数学归纳法证明问题有三个步骤，第一步验证是推理的基础，第二步则是传递的依据，是证明的关键步骤，第三步是结论，需要对证明加以总结. 规范学生对以上三个步骤的书写，并要求学生在理解的基础上加以记忆.

3. 数学归纳法的基本形式是：

设命题 $P(n)$，其中 $n\in\mathbf{N}$ 且 $n\geqslant n_0$.

(1) 当 $n=n_0$（如 $n_0=1$ 或 2 等）时，证明命题 $P(n_0)$ 成立；

(2) 假设当 $n=k$（$k\in\mathbf{N}$ 且 $n\geqslant n_0$）时命题 $P(k)$ 成立，证明当 $n=k+1$ 时命题 $P(k+1)$也成立.

根据 (1)、(2)，命题 $P(n)$ 对一切自然数 $n(n\geqslant n_0)$ 都成立.

正确使用数学归纳法证明一个数学问题，关键是在第二个步骤，只有应用了假设条件去推理，证明过程才是有效的，没有应用假设条件的证明过程并不是在使用数学归纳法.

4. 利用数学归纳法来证明某些与自然数 n 有关的数学命题，核心问题是用“$n=k$ 时命题成立”的假设条件证明“$n=k+1$ 时命题成立”，证明时要通过比较找出二者之间的差异，才能实现中间的过渡. 数学归纳法较多地使用在关于恒等式、不等式、数列、几何以及整除类等问题中.

5. 数学归纳法只能在有了问题结论时才能使用，获取问题的结论需借助合情推理，所以“观察—分析—归纳—猜想—证明”才是从发现问题到解决问题的完整过程. 教学时，要引导学生通过观察、分析、归纳等方法猜想问题的结论. 如果问题与自然数有关，一般可以用数学归纳法去证明，这是培养创造性思维的良好途径.

例题解析

例 1 用数学归纳法证明：如果 $\{a_n\}$ 是一个等差数列，那么

$$a_n=a_1+(n-1)d$$

对一切 $n\in\mathbf{N}_+$ 都成立.

分析 这是一个应用数学归纳法进行数学证明的最为简单的例题，必须注意证明问题的书写格式和语言的规范化，弄清数学归纳法证题的原理.

例 2 用数学归纳法证明：$1+2+3+\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$.

分析 用数学归纳法证明命题有两个步骤，缺一不可. 证明的关键在于第二个步骤中的关于递推关系的证明，证明时要做到目标明确，因此，最好先弄清 $n=k+1$ 时的命题内容.

例 3 求证对于任何非负整数 n，都有 $2^n\geqslant n+1$.

证明 (1) 当 $n=0$ 时，$2^0=1\geqslant 0+1$，不等式成立.

(2) 设当 $n=k$ 时，$2^k\geqslant k+1$.

则当 $n=k+1$ 时，$2^{k+1}=2\times 2^k\geqslant 2(k+1)\geqslant (k+1)+1$.

综上所述，对于任何非负整数 n，都有 $2^n\geqslant n+1$.

例 4 求数列 $\{n^3\}$ 的前 n 项和 $S_n=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$.

证明 通过计算可得 $1^3=1$，$1^3+2^3=1+8=3^2$，$1^3+2^3+3^3=1+8+27=36=6^2$，$1^3+2^3+3^3+4^3=1+8+27+64=100=10^2$，

归纳猜想：$S_n=(1+2+3+\cdots+n)^2=\dfrac{1}{4}n^2(n+1)^2$.

下用数学归纳法证明等式 $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\dfrac{1}{4}n^2(n+1)^2$ 成立.

(1) 当 $n=1$ 时，左边 $=1$，右边 $=\dfrac{1}{4}\times 1^2(1+1)^2=1$，等式成立.

(2) 假设当 $n=k$ 时，等式成立，即 $1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=\dfrac{1}{4}k^2(k+1)^2$.

则当 $n=k+1$ 时，$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3=\dfrac{1}{4}k^2(k+1)^2+(k+1)^3=\dfrac{1}{4}(k+1)^2\cdot(k^2+4k+4)=\dfrac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2$.

综上所述，对于任何非负整数 n，都有 $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\dfrac{1}{4}n^2(n+1)^2$ 成立.

例 5 证明 $(n+1)(n+2)\cdot\cdots\cdot(n+n)=2^n\cdot 1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)$，其中 $n\in\mathbf{N}^*$.

分析 用数学归纳法证明一个与正整数有关的命题，关键是第二步，要注意当 $n=k+1$ 时等式两边的式子与 $n=k$ 时等式两边的式子的联系，是增加了哪些项，还是减少了哪些项，问题就容易解决.

证明 (1) 当 $n=1$ 时，左边 $=1+1=2$，右边 $=2^1\cdot 1=2$，等式成立.

(2) 假设当 $n=k$ 时，等式成立，即

$$(k+1)(k+2)\cdot\cdots\cdot(k+k)=2^k\cdot 1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2k-1).$$

则当 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}&(k+1+1)(k+1+2)\cdot\cdots\cdot(k+1+k-1)(k+1+k)(k+1+k+1)\\=&(k+2)(k+3)\cdot\cdots\cdot(k+k)(2k+1)(2k+2)\\=&(k+1)(k+2)\cdot\cdots\cdot(k+k)\cdot 2(2k+1)\\=&2^k\cdot 1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2k-1)\cdot 2(2k+1)\\=&2^{k+1}\cdot 1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2k-1)(2k+1).\end{aligned}$$

即当 $n=k+1$ 时，等式也成立.

由 (1)、(2) 可知，对一切 $n\in\mathbf{N}^*$，等式成立.

例 6 平面内有 n 个圆，其中每两个圆都相交于两点，且每三个圆都不相交于同一点. 求证：这 n 个圆把平面分成 n^2-n+2 个部分.

分析 用数学归纳法证明几何问题，主要是要弄清当 $n=k+1$ 时比 $n=k$ 时，分点增加

了多少，区域增加了几块. 本题中第 $k+1$ 个圆被原来的 k 个圆分成 $2k$ 条弧，而每一条弧把它所在的部分分成了两部分，此时共增加了 $2k$ 个部分.

证明　(1) 当 $n=1$ 时，一个圆把平面分成两部分，$1^2-1+2=2$，命题成立.

(2) 假设当 $n=k$ 时命题成立（$n\in\mathbf{N}^*$），k 个圆把平面分成 k^2-k+2 个部分.

当 $n=k+1$ 时，这 $k+1$ 个圆中的 k 个圆把平面分成 k^2-k+2 个部分，第 $k+1$ 个圆被前 k 个圆分成 $2k$ 条弧，每条弧把它所在部分分成了两个部分，这时共增加了 $2k$ 个部分，即 $k+1$ 个圆把平面分成 $(k^2-k+2)+2k=(k+1)^2-(k+1)+2$ 个部分，即命题也成立.

由 (1)、(2) 可知，对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 命题都成立.

相关链接

数学归纳法的形式

数学归纳法在实际的应用中，有各种各样的变通方式.

1. 第一数学归纳法

设 $P(n)$ 是一个与正整数有关的命题，如果

(1) 当 $n=n_0$（$n_0\in\mathbf{N}$）时，$P(n)$ 成立；

(2) 假设 $n=k$（$k\geqslant n_0$，$k\in\mathbf{N}$）成立，由此推得 $n=k+1$ 时，命题 $P(n)$ 也成立，

那么，根据 (1)、(2) 对一切正整数 $n\geqslant n_0$ 时，命题 $P(n)$ 成立.

2. 第二数学归纳法

设 $P(n)$ 是一个与正整数有关的命题，如果

(1) 当 $n=n_0$（$n_0\in\mathbf{N}$）时，$P(n)$ 成立；

(2) 假设 $n\leqslant k$（$k\geqslant n_0$，$k\in\mathbf{N}$）成立，由此推得 $n=k+1$ 时，命题 $P(n)$ 也成立，

那么，根据 (1)、(2) 对一切正整数 $n\geqslant n_0$ 时，命题 $P(n)$ 成立.

3. 跳跃数学归纳法

设 $P(n)$ 是一个与正整数有关的命题，如果

(1) 当 $n=1, 2, 3, \cdots, l$ 时，$P(1)$，$P(2)$，$P(3)$，$\cdots$，$P(l)$ 成立；

(2) 假设 $n=k$ 时 $P(k)$ 成立，由此推得 $n=k+l$ 时，命题 $P(n)$ 也成立，

那么，根据 (1)、(2) 对一切正整数 $n\geqslant 1$ 时，命题 $P(n)$ 成立.

4. 反向数学归纳法

设 $P(n)$ 是一个与正整数有关的命题，如果

(1) $P(n)$ 对无限多个正整数 n 成立；

(2) 假设 $n=k$ 时，命题 $P(k)$ 成立，由此推得 $n=k-1$ 时命题 $P(k-1)$ 也成立，

那么根据 (1)、(2) 对一切正整数 $n\geqslant 1$ 时，命题 $P(n)$ 成立.

5. 双重数学归纳法

设 $P(m, n)$ 是一个含有两个独立自然数 m，n 的命题.

（1）$P(1，n)$ 与 $P(m，1)$ 对任意自然数 m，n 成立；

（2）若由 $P(m+1，n)$ 和 $P(m，n+1)$ 成立，能推出 $P(m+1，n+1)$ 成立；

根据（1）、（2）可断定，命题 $P(m，n)$ 对一切自然数 m，n 均成立.

从以上 5 种形式可以知道应用数学归纳法的变通技巧：

（1）起点前移：有些命题对一切大于等于 1 的正整数 n 都成立，但命题本身对 $n=0$ 也成立，而且验证起来比验证 $n=1$ 时容易，因此用验证 $n=0$ 成立代替验证 $n=1$，同理，其他起点也可以前移，只要前移的起点成立且容易验证就可以.

（2）起点增多：有些命题在由 $n=k$ 向 $n=k+1$ 跨进时，需要经其他特殊情形作为基础，此时往往需要补充验证某些特殊情形，因此需要适当增多起点.

（3）加大跨度：有些命题为了减少归纳中的困难，可以适当改变跨度，但注意起点也应相应增多.

（4）选择合适的假设方式：归纳假设不一定要拘泥于“假设 $n=k$ 时命题成立”的形式，可以根据题意采取第一、第二、跳跃、反向数学归纳法中的某一形式，灵活选择使用.

（5）变换命题：有些命题在用数学归纳法证明时，需要引进一个辅助命题帮助证明，或者需要改变命题，即将命题一般化或加强命题才能满足归纳的需要，才能顺利进行证明.

教材习题参考解答

6.1.1 练习（教材 P.113）

1. 6.
2. 等式左边各项幂的底数之和与右边幂的底数相等，由归纳可猜想规律：

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2.$$

习题 1（教材 P.114）

1. (1) 21.

   (2) $\dfrac{22}{12}=\dfrac{11}{6}$.

2. $\sqrt{11-2}=\sqrt{9}=3$；$\sqrt{1111-22}=\sqrt{1089}=33$；$\sqrt{111111-222}=\sqrt{110889}=333$；…；

   $\sqrt{\underbrace{111\cdots1}_{2n个}-\underbrace{222\cdots2}_{n个}}=\underbrace{333\cdots3}_{n个}$.

3. (1) 10　55.（提示：由 $1+2+3+\cdots+10=55$ 可得）

   (2) $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

4. $f(1)=43$，$f(2)=47$，$f(3)=53$，$f(4)=61$，$f(5)=71$，$f(6)=83$，$f(7)=97$，$f(8)=113$，$f(9)=131$，$f(10)=151$ 均为素数，$n=40$ 时，$f(40)=41^2$ 不是素数，故猜想不正确.

5. 3　$\dfrac{5}{2}n$　$\dfrac{5}{2}n-\dfrac{1}{2}$

6. 凸 n 边形有 n 个点，一个点与剩余的 $n-3$ 个点构成一条对角线，因为重复了一次，所以对角线的条数为$\dfrac{n(n-3)}{2}$.

7. (1)

	顶点数	边数	区域数
(a)	4	6	3
(b)	8	12	5
(c)	6	9	4
(d)	10	15	6

   (2) 顶点数＋区域数＝边数＋1.

   (3) 边数＝顶点数＋区域数－1＝999＋999－1＝1 997.

6.1.2 练习（教材 P.117）

1. 另外四个面不平行；四个侧面伸展后交于一点；中截面平行于上、下底面.

2. ∵ $x_i \geqslant 0(i=1,2,\cdots,n)$，且 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$，

∴ $0 \leqslant x_i \leqslant 1(i=1,2,\cdots,n)$. ∴ $0 \leqslant x_i \leqslant \sqrt{x_i} \leqslant 1$.

∴ $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n} \geqslant x_1+x_2+\cdots+x_n=1$.

而 $(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n})^2$

$=(x_1+x_2+\cdots+x_n)+2(\sqrt{x_1x_2}+\sqrt{x_1x_3}+\sqrt{x_1x_4}+\cdots+\sqrt{x_{n-1}x_n})$

$\leqslant n(x_1+x_2+\cdots+x_n)=n$.

∴ $1 \leqslant \sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n} \leqslant \sqrt{n}$.

习题 2（教材 P. 118）

1. 略.
2. 球心与截面圆（不经过球心的小截面圆）圆心的连线垂直于截面；与球心距离相等的两个截面圆的面积相等，与球心距离不等的两个截面圆的面积不等，距球心较近的截面圆的面积较大.
3. （1）不正确.　（2）不正确.　（3）不正确.

6.1.3 练习（教材 P. 121）

因为任意的平行四边形的两条对角线互相平分，（大前提）
而矩形是平行四边形，（小前提）
所以矩形的两条对角线互相平分.（结论）

习题 3（教材 P. 121）

1. 因为任意的等腰三角形的两底角相等，（大前提）
而∠ABC 和∠ACB 是等腰△ABC 的两底角，（小前提）
所以∠ABC＝∠ACB.（结论）
2. 因为不在同一直线上的三点可以确定一个圆，（大前提）
A，B，C 三点不在同一直线上，（小前提）
所以 A，B，C 三点可以确定一个圆.（结论）
3. 因为所对的弦是直径的圆周角是直角，（大前提）
而已知圆周角所对的弦是直径，（小前提）
所以这个圆周角是直角.（结论）
4. 因为两条互相垂直的直线所成角是 90°，（大前提）
而两条直线都与第三条直线垂直，（小前提）
所以这两条直线与第三条直线所成角都是 90°，（结论）
因为同位角相等两直线平行，（大前提）
而两条直线与第三条直线所成的同位角都等于 90°，（小前提）
所以这两条直线平行.（结论）

6.2.1 练习（教材 P.125）

1. 法 1：（综合法）设两个不相等的正数分别是 a，b，则

$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2>0\Rightarrow a+b-2\sqrt{ab}>0\Rightarrow a+b>2\sqrt{ab}\Rightarrow\dfrac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$.

即两个不相等的正数的算术平均数大于它们的几何平均数.

法 2：（分析法）设两个不相等的正数分别是 a，b，则

$\dfrac{a+b}{2}>\sqrt{ab}\Leftarrow a+b>2\sqrt{ab}\Leftarrow a+b-2\sqrt{ab}>0\Leftarrow(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2>0$.

最后一个不等式成立，故$\dfrac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$.

即两个不相等的正数的算术平均数大于它们的几何平均数.

2. 左边$=\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{a}\right)+\left(\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{b}\right)+\left(\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}\right)-3=\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\right)+\left(\dfrac{c}{b}+\dfrac{b}{c}\right)+\left(\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{a}\right)-3$，

$\because a$，b，c 为不全相等的正数，$\therefore\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\geqslant 2$，$\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{b}\geqslant 2$，$\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{a}\geqslant 2$，且这三式的等号不能同时成立（否则 $a=b=c$）.

$\therefore\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\right)+\left(\dfrac{c}{b}+\dfrac{b}{c}\right)+\left(\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{a}\right)-3>6-3=3$，即$\dfrac{b+c-a}{a}+\dfrac{c+a-b}{b}+\dfrac{a+b-c}{c}>3$.

习题 4（教材 P.126）

1. 法 1：（综合法）

$$\left.\begin{array}{r}\text{由平行四边形 } ABCD \text{ 得 } AD=BC，AD\parallel BC\\ BM=MC=\dfrac{1}{2}BC\\ AN=ND=\dfrac{1}{2}AD\end{array}\right\}\Rightarrow\text{四边形 } ANCM \text{ 是平行四边形}$$

$$\left.\begin{array}{r}\Rightarrow AM\parallel CN\\ BM=MC\end{array}\right\}\Rightarrow BE=EF，\text{同理可得 } FD=EF，\text{所以 } BE=EF=FD.$$

法 2：（分析法）略.

2. 法 1：（综合法）

$$(x^2-1)^2\geqslant 0\Rightarrow x^4+1\geqslant 2x^2\Rightarrow\frac{x^2}{1+x^4}\leqslant\frac{1}{2}.$$

法 2：（分析法）

$$\frac{x^2}{1+x^4}\leqslant\frac{1}{2}\Leftarrow x^4+1\geqslant 2x^2\Leftarrow(x^2-1)^2\geqslant 0.$$

最后一个不等式成立，故$\dfrac{x^2}{1+x^4}\leqslant\dfrac{1}{2}$.

3. 法 1：（分析法）

$a^3+b^3>a^2b+ab^2 \Leftrightarrow a^2(a-b)+b^2(b-a)>0 \Leftrightarrow (a-b)(a^2-b^2)>0 \Leftrightarrow (a-b)^2(a+b)>0$.

$\because a$，b 均为正实数，且 $a\neq b$，$\therefore$最后一个不等式成立，故原不等式成立.

法 2：(综合法)

$\because a$，b 均为正实数，且 $a\neq b$，

$\therefore (a-b)^2(a+b)>0$. $\therefore (a-b)(a^2-b^2)>0$.

$\therefore a^2(a-b)+b^2(b-a)>0$.

$\therefore a^3+b^3>a^2b+ab^2$.

4. 法 1：(综合法)

$$\left.\begin{array}{l}\text{平行四边形 } ABCD \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} AB=CD \\ AB\parallel DC \Rightarrow \angle 1=\angle 2 \end{array}\right. \\ \quad \left.\begin{array}{l} AE\perp BD \\ CF\perp BD \end{array}\right\} \Rightarrow \angle AEB=\angle CFD=90^{\circ} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \triangle ABE \cong \triangle CDF \Rightarrow AE=CF \\ \quad \left.\begin{array}{l} AE\perp BD \\ CF\perp BD \end{array}\right\} \Rightarrow AE\parallel CF \end{array}\right\} \Rightarrow AECF \text{ 是平行四边形.}$$

法 2：(分析法) 略.

5. 法 1：(分析法)

$\sqrt{3}+\sqrt{7}<2\sqrt{5}$

$\Leftarrow (\sqrt{3}+\sqrt{7})^2<(2\sqrt{5})^2$

$\Leftarrow 10+2\sqrt{21}<20$

$\Leftarrow 2\sqrt{21}<10$

$\Leftarrow 84<100$.

最后一个不等式成立，故原不等式成立.

法 2：(综合法)

$84<100$

$\Rightarrow 2\sqrt{21}<10$

$\Rightarrow 10+2\sqrt{21}<20$

$\Rightarrow (\sqrt{3}+\sqrt{7})^2<(2\sqrt{5})^2$.

因为$\sqrt{3}+\sqrt{7}>0$，$2\sqrt{5}>0$，所以$\sqrt{3}+\sqrt{7}<2\sqrt{5}$.

6.2.2 练习 (教材 P.129)

假设 $a\parallel\alpha$ 不成立，$\because a\not\subset\alpha$，$\therefore a$ 与 α 相交，设 $a\cap\alpha=A$.

$\because a\parallel b$，$\therefore A\notin b$. 在平面 α 内过点 A 作直线 $c\parallel b$，

所以 $a\parallel c$，这与 $a\cap c=A$ 矛盾. $\therefore a\parallel\alpha$.

习题 5（教材 P. 129）

1. 设$|f(1)|$，$|f(2)|$，$|f(3)|$都小于$\frac{1}{2}$.$\because f(1)+f(3)-2f(2)=(1+a+b)+(9+3a+b)-2(4+2a+b)=2$，$\therefore |f(1)|+|f(3)|+2|f(2)|\geqslant|f(1)+f(3)-2f(2)|=2$，由假设$|f(1)|+|f(3)|+2|f(2)|<2$,矛盾,故结论成立.
2. 假设 a，b，c，d 都是非负实数，即 $a\geqslant0$，$b\geqslant0$，$c\geqslant0$，$d\geqslant0$. 由 $a+b=1$，$c+d=1$ 知$(a+b)(c+d)=(ac+bd)+(ad+bc)=1$，$\because ad+bc\geqslant0$，$\therefore ac+bd\leqslant1$，这与已知的 $ac+bd>1$ 矛盾. 所以假设错误，故 a，b，c，d 中至少有一个是负数.
3. 假设 $a(2-b)$，$b(2-c)$，$c(2-a)$都大于 1.
   $\because 0<a<2$，$0<b<2$，$0<c<2$，
   $\therefore a(2-b)b(2-c)c(2-a)\leqslant\left[\frac{a+(2-a)}{2}\right]^2\cdot\left[\frac{b+(2-b)^2}{2}\right]\cdot\left[\frac{c+(2-c)}{2}\right]^2=1.$
   又由假设易得 $a(2-b)b(2-c)c(2-a)>1$. 矛盾，故结论成立.
4. 假设方程 $x^2+px+q=0$ 有整数根 m，则有 $m^2+pm+q=0$，$\therefore m(m+p)=-q$. $\because p$ 为奇数，$\therefore$不论 m 为奇数还是偶数，m 与 $m+p$ 中必有一个是偶数. $\therefore m(m+p)$ 必为偶数. $\therefore -q$ 为偶数，即 q 为偶数，这与已知 q 为奇数矛盾. 假设不成立，故方程 $x^2+px+q=0$ 不可能有整数根.

5.假设不等式$\left(\frac{1}{x^2}-1\right)\left(\frac{1}{y^2}-1\right)\geqslant9$ 不成立，则有$\left(\frac{1}{x^2}-1\right)\left(\frac{1}{y^2}-1\right)<9$，

$\therefore \frac{1-x^2}{x^2}\cdot\frac{1-y^2}{y^2}<9$.$\therefore(1-x^2)(1-y^2)<9x^2y^2$.$\therefore(1-x)(1-y)(1+x)(1+y)<9x^2y^2$.

$\because x+y=1$，$\therefore xy(1+x)(1+y)<9x^2y^2$.$\because x,y>0$，$\therefore(1+x)(1+y)<9xy$.

$\therefore 1+x+y+xy<9xy$. $\therefore 2<8xy$，即 $xy>\frac{1}{4}$. 由 x，$y>0$，$x+y=1$ 得 $xy<\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$.

两式矛盾，假设不成立，$\therefore\left(\frac{1}{x^2}-1\right)\left(\frac{1}{y^2}-1\right)\geqslant9$.

6.3　练习（教材 P. 132）

1. (1) 当 $n=1$ 时，左边$=1$，右边$=1$，等式成立.
   (2) 假设当$n=k$ 时，等式成立，即
   $$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2.$$
   那么 $1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+2k+1=(k+1)^2$.
   这表明，当 $n=k+1$ 时，等式也成立.
   根据 (1)、(2)，可以断定，等式对任何正整数 n 都成立.
2. (1) 当 $n=1$ 时，左边$=S_1=a_1$，右边$=a_1$，等式成立.
   (2) 假设当 $n=k$ 时，等式成立，即 $S_k=\frac{a_1(1-q^k)}{1-q}$.

那么 $S_{k+1}=S_k+a_{k+1}=\dfrac{a_1(1-q^k)}{1-q}+a_1q^k$

$$=\frac{a_1[(1-q^k)+q^k-q^{k+1}]}{1-q}$$

$$=\frac{a_1(1-q^{k+1})}{1-q}.$$

这表明,当 $n=k+1$ 时,等式也成立.

根据(1)、(2),可以断定,等式对任何正整数 n 都成立.

习题 6（教材 P.132）

1.(1)当 $n=1$ 时,左边$=2$,右边$=2$,等式成立.

(2)假设当$n=k$ 时,等式成立,即

$$2+4+6+\cdots+2k=k^2+k.$$

那么 $2+4+6+\cdots+2k+2(k+1)=k^2+k+2(k+1)=(k+1)^2+(k+1)$.

这表明，当 $n=k+1$ 时，等式也成立.

根据（1)、(2)，可以断定，等式对任何正整数 n 都成立.

2.（1） 当 $n=1$ 时，左边$=1$，右边$=1$，等式成立.

（2） 假设当$n=k$ 时，等式成立，即

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

那么 $1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2$

$$=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$$

$$=(k+1)\left[\frac{k(2k+1)}{6}+(k+1)\right]$$

$$=(k+1)\frac{2k^2+7k+6}{6}=\frac{(k+1)(k+2)[2(k+1)+1]}{6}.$$

这表明，当 $n=k+1$ 时，等式也成立.

根据（1)、(2)，可以断定，等式对任何正整数 n 都成立.

3.（1） 当 $n=1$ 时，左边$=1$，右边$=1$，等式成立.

（2） 假设当$n=k$ 时，等式成立，即

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=\left[\frac{1}{2}k(k+1)\right]^2.$$

那么 $1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3$

$$=\left[\frac{1}{2}k(k+1)\right]^2+(k+1)^3=(k+1)^2\left[\frac{1}{4}k^2+(k+1)\right]$$

$$=\frac{1}{4}(k+1)^2(k^2+4k+4)=\frac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2=\left[\frac{1}{2}(k+1)(k+2)\right]^2.$$

这表明，当 $n=k+1$ 时，等式也成立.

根据（1）、（2），可以断定，等式对任何正整数 n 都成立.

4.（1）当 $n=1$ 时，左边 $=2$，右边 $=2$，等式成立.

（2）假设当 $n=k$ 时，等式成立，即

$$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+k\times(k+1)=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2).$$

那么 $1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+k\times(k+1)+(k+1)(k+2)$

$$=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)$$

$$=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)$$

$$=(k+1)(k+2)\left(\frac{1}{3}k+1\right)$$

$$=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3).$$

这表明，当 $n=k+1$ 时，等式也成立.

根据(1)、(2)，可以断定，等式对任何正整数 n 都成立.

5.（1）当 $n=3$ 时，$f(3)=180^\circ=(3-2)\times180^\circ$，公式成立.

（2）假设当 $n=k$ 时，公式成立，即 $f(k)=(k-2)\times180^\circ\ (k\geqslant3)$.

那么 $f(k+1)=f(k)+180^\circ=(k-2)\times180^\circ+180^\circ=[(k+1)-2]\times180^\circ\ (k\geqslant3)$.

这表明，当 $n=k+1$ 时，公式也成立.

根据（1）、（2），可以断定，公式对 $n\geqslant3$ 的任何正整数 n 都成立.

6. 法 1：$n=2$ 时，$f(1)=1=2\times f(2)-2$.

$n=3$ 时，$f(1)+f(2)=1+\left(1+\frac{1}{2}\right)=3\times f(3)-3$.

$n=4$ 时，$f(1)+f(2)+f(3)=4\times f(4)-4$.

归纳猜想 $g(n)=n$，再用数学归纳法证明.

法 2：$g(n)=\dfrac{\dfrac{n-1}{1}+\dfrac{n-2}{2}+\dfrac{n-3}{3}+\cdots+\dfrac{n-(n-1)}{n-1}}{f(n)-1}$

$$=\frac{n\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)-(n-1)}{f(n)-1}$$

$$=\frac{n[f(n)-1]}{f(n)-1}=n.$$

故存在 $g(n)$ 使等式成立.

复习题六（教材 P. 139）

1. 100^2.

2.16，$4n$.

3.$S_n=4(n-1)$.

4.等腰梯形的两个底角相等，

由已知 $AD\parallel BC$，$AB=DC$ 知梯形 $ABCD$ 是一个等腰梯形，

所以，梯形 $ABCD$ 的两个底角相等，即$\angle B=\angle C$.

5.由已知 a，b，c 为不全相等的三个正实数，

$\therefore a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$，$b+c\geqslant 2\sqrt{bc}$，$c+a\geqslant 2\sqrt{ca}$，且三个不等式中不能同时取"＝"号，

$\therefore (a+b)(b+c)(c+a)\geqslant 8abc$.

6.法 1：（分析法）

$\sqrt{3}+\sqrt{7}<2+\sqrt{6}$

$\Leftarrow(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2<(2+\sqrt{6})^2$

$\Leftarrow 10+2\sqrt{21}<10+4\sqrt{6}$

$\Leftarrow 2\sqrt{21}<4\sqrt{6}$

$\Leftarrow 84<96$，

最后一个不等式成立，故原不等式成立.

法 2：（综合法）

$84<96$

$\Rightarrow 2\sqrt{21}<4\sqrt{6}$

$\Rightarrow 10+2\sqrt{21}<10+4\sqrt{6}$

$\Rightarrow(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2<(2+\sqrt{6})^2$，

因为$\sqrt{3}+\sqrt{7}>0$，$2+\sqrt{6}>0$，所以$\sqrt{3}+\sqrt{7}<2+\sqrt{6}$.

法 3：（反证法）假设不等式$\sqrt{3}+\sqrt{7}<2+\sqrt{6}$不成立，则$\sqrt{3}+\sqrt{7}\geqslant 2+\sqrt{6}$，

$\sqrt{3}+\sqrt{7}\geqslant 2+\sqrt{6}$

$\Leftarrow(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2\geqslant(2+\sqrt{6})^2$

$\Leftarrow 10+2\sqrt{21}\geqslant 10+4\sqrt{6}$

$\Leftarrow 2\sqrt{21}\geqslant 4\sqrt{6}$

$\Leftarrow 84\geqslant 96$，

因为 $84\geqslant 96$ 显然违背常识，所以假设不成立，故$\sqrt{3}+\sqrt{7}<2+\sqrt{6}$.

7. 假设$\sqrt[n]{a}\geqslant\sqrt[n]{b}$不成立，则$\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$.

$\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}\Rightarrow a<b$，与已知 $a\geqslant b$ 矛盾，假设不成立，故$\sqrt[n]{a}\geqslant\sqrt[n]{b}$.

8.（1）①当 $n=1$ 时，左边$=4$，右边$=4$，等式成立.

②假设当$n=k$ 时，等式成立，即

$1\times4+2\times7+3\times10+\cdots+k\times(3k+1)=k(k+1)^2$.

那么 $1\times4+2\times7+3\times10+\cdots+k\times(3k+1)+(k+1)\times[3(k+1)+1]$

$=k(k+1)^2+(k+1)\times[3(k+1)+1]$

$=(k+1)[k(k+1)+3(k+1)+1]$

$=(k+1)(k^2+4k+4)$

$=(k+1)(k+2)^2.$

这表明，当 $n=k+1$ 时，等式也成立.

根据①、②，可以断定，等式对任何正整数 n 都成立.

(2) ①当 $n=1$ 时，左边 $=a_1^2$，右边 $=a_1^2$，等式成立.

②假设当 $n=k$ 时，等式成立，即

$(a_1+a_2+\cdots+a_k)^2=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2+2(a_1a_2+\cdots+a_1a_k+a_2a_3+\cdots+a_2a_k+\cdots+a_{k-1}a_k).$

那么 $(a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1})^2$

$=(a_1+a_2+\cdots+a_k)^2+a_{k+1}^2+2a_{k+1}(a_1+a_2+\cdots+a_k)$

$=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2+2(a_1a_2+\cdots+a_1a_k+a_2a_3+\cdots+a_2a_k+\cdots+a_{k-1}a_k)+$

$a_{k+1}^2+2a_{k+1}(a_1+a_2+\cdots+a_k)$

$=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2+a_{k+1}^2+2(a_1a_2+\cdots+a_1a_{k+1}+a_2a_3+\cdots+a_2a_{k+1}+\cdots+a_ka_{k+1}).$

这表明,当 $n=k+1$ 时,等式也成立.

根据①、②,可以断定,等式对任何正整数 n 都成立.

(3)①当 $n=1$ 时,左边 $=\frac{1}{3}$,右边 $=\frac{1}{3}$,等式成立.

②假设当 $n=k$ 时,等式成立,即

$$\frac{1^2}{1\times3}+\frac{2^2}{3\times5}+\cdots+\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k(k+1)}{2(2k+1)}.$$

那么 $\frac{1^2}{1\times3}+\frac{2^2}{3\times5}+\cdots+\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}$

$=\frac{k(k+1)}{2(2k+1)}+\frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}$

$=\frac{k(k+1)(2k+3)}{2(2k+1)(2k+3)}+\frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}$

$=\frac{k(k+1)(2k+3)+2(k+1)^2}{2(2k+1)(2k+3)}$

$=\frac{(k+1)[k(2k+3)+2(k+1)]}{2(2k+1)(2k+3)}$

$=\frac{(k+1)(2k+1)(k+2)}{2(2k+1)(2k+3)}$

$=\frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)}.$

这表明，当 $n=k+1$ 时，等式也成立.

根据①、②，可以断定，等式对任何正整数 n 都成立.

(4) ①当 $n=1$ 时，左边 $=2$，右边 $=2$，等式成立.

②假设当 $n=k$ 时，等式成立. 即

$$(k+1)(k+2)\cdots(k+k)=2^k\times1\times3\times\cdots\times(2k-1).$$

那么 $(k+2)(k+3)\cdots(k+k)(2k+1)(2k+2)$

$=(k+1)(k+2)(k+3)\cdots(k+k)\cdot2(2k+1)$

$=2^k\times1\times3\times\cdots\times(2k-1)\cdot2(2k+1)$

$=2^{k+1}\times1\times3\times\cdots\times[2(k+1)-1].$

这表明，当 $n=k+1$ 时，等式也成立.

根据①、②，可以断定，等式对任何正整数 n 都成立.

9. 按图进行归纳，由周期性变化知第 2 015 次的图应与第三次的图一样，故小兔应坐在第 4 号座位上.

10. （反证法）假设不等式 $a^3+b^3>a^2b+ab^2$ 不成立，则 $a^3+b^3\leqslant a^2b+ab^2$，

$a^3+b^3\leqslant a^2b+ab^2$

$\Leftarrow a^3+b^3-a^2b-ab^2\leqslant0$

$\Leftarrow a^2(a-b)+b^2(b-a)\leqslant0$

$\Leftarrow(a-b)(a^2-b^2)\leqslant0$

$\Leftarrow(a-b)^2(a+b)\leqslant0.$

由 a，$b>0$,且 $a\neq b$ 得 $(a-b)^2(a+b)>0$，两个不等式矛盾,所以假设不成立，

故 $a^3+b^3>a^2b+ab^2$.

11. 假设圆内两条非直径的弦相交于点 P 并且互相平分，连接圆心 O 与点 P，则过点 P 有两条弦都垂直于 OP，这与“平面内过一点作直线的垂线有且仅有一条”矛盾，假设不成立，故圆内两条非直径的弦相交，它们不可能互相平分.

12. (1) 对任意实数 a，b 均有 $C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^nb^n=(a+b)^n$，（大前提）

而 1，-1 是实数，（小前提）

所以，$C_n^0-C_n^1+C_n^2-C_n^3+\cdots+(-1)^nC_n^nb^n=0$.（结论）

(2) 对任意实数 a，b 均有 $C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^nb^n=(a+b)^n$，（大前提）

而 $1-x$，x 是实数，（小前提）

所以，$C_n^0(1-x)^n+C_n^1(1-x)^{n-1}x+C_n^2(1-x)^{n-2}x^2+\cdots+C_n^nx^n=1$.（结论）

13. 任一存在反函数的函数 $y=f(x)$ 的图象与它反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称,而函数 $y=\dfrac{x-a}{ax-1}$ 的反函数由 $y=\dfrac{x-a}{ax-1}\Rightarrow x=\dfrac{y-a}{ay-1}$ 可求得 $f^{-1}(x)=\dfrac{x-a}{ax-1}$,所以,函数 $y=\dfrac{x-a}{ax-1}$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称.

14. 计算得

$S_1=\dfrac{1}{1\times2}=\dfrac{1}{2}$，

$S_2=\dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{2}{3}$，

$S_3=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{3}{4}$，

由此推测 $S_n=\frac{n}{n+1}$.

下用数学归纳法证明：

(1) 当 $n=1$ 时，左边$=\frac{1}{2}$，右边$=\frac{1}{2}$，等式成立.

(2) 假设当 $n=k$ 时，等式成立，即 $S_k=\frac{k}{k+1}$，

那么
$$S_{k+1}=S_k+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}.$$

这表明，当 $n=k+1$ 时，等式也成立.

根据 (1)、(2)，可以断定，等式对任何正整数 n 都成立.

15. 推测 $S_n=\frac{(2n+1)^2-1}{(2n+1)^2}$.

下用数学归纳法证明：

(1) 当 $n=1$ 时，左边$=S_1=\frac{8\times1}{1^2\times3^2}=\frac{8}{9}$，右边$=\frac{8}{9}$，等式成立.

(2) 假设当 $n=k$ 时，等式成立，即 $S_k=\frac{(2k+1)^2-1}{(2k+1)^2}$，

那么
$$S_{k+1}=S_k+\frac{8(k+1)}{(2k+1)^2(2k+3)^2}$$
$$=\frac{(2k+1)^2-1}{(2k+1)^2}+\frac{8(k+1)}{(2k+1)^2(2k+3)^2}$$
$$=\frac{[(2k+1)^2-1](2k+3)^2+8(k+1)}{(2k+1)^2(2k+3)^2}$$
$$=\frac{(2k+1)^2(2k+3)^2-(4k^2+4k+1)}{(2k+1)^2(2k+3)^2}$$
$$=\frac{(2k+1)^2[(2k+3)^2-1]}{(2k+1)^2(2k+3)^2}$$
$$=\frac{(2k+3)^2-1}{(2k+3)^2}.$$

这表明，当 $n=k+1$ 时，等式也成立.

根据 (1)、(2)，可以断定，等式对任何正整数 n 都成立.

16. 设平面上满足条件的 n 条直线将平面分成 $f(n)$ 个部分，则由 $f(1)=2$，$f(2)=4$，$f(3)=7$，$f(4)=11$ 可推测.

$$f(n)=1+1+2+3+\cdots+n=1+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2+n+2}{2}.$$

下用数学归纳法证明：

（1）当 $n=1$ 时，左边 $=2$，右边 $=2$，等式成立；

（2）假设当 $n=k$ 时，等式成立，即 $f(k)=\dfrac{k^2+k+2}{2}$，

那么 $f(k+1)=f(k)+k+1=\dfrac{k^2+k+2}{2}+k+1=\dfrac{k^2+3k+4}{2}=\dfrac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}$.

这表明，当 $n=k+1$ 时，等式也成立.

根据（1）、（2），可以断定，等式对任何正整数 n 都成立.

17. 直角三角形中有勾股定理：“$\triangle ABC$ 两边 AB，AC 互相垂直，则 $AB^2+AC^2=BC^2$”，将勾股定理推广到直四面体可以猜想所得的结果应是：“设直四面体 $A\text{-}BCD$ 的三个侧面 ABC，ACD，ADB 两两相互垂直，且三个侧面面积分别等于 S_1，S_2，S_3，底面 $\triangle BCD$ 的面积为 S，则 $S^2=S_1^2+S_2^2+S_3^2$”. 现将二者的证明类比如下.

勾股定理的证明：$\triangle ABC$ 中，过点 A 作斜边 BC 的垂线，垂足为 D，如图 6－8.

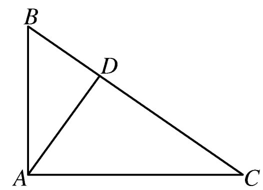


图 6－8

由 $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{BD}{AB}$ 得 $AB^2=BD\cdot BC$.

同理 $AC^2=CD\cdot CB$.

两式相加得 $AB^2+AC^2=BC^2$.

类比勾股定理的证明：在三棱锥中，设二面角 $A\text{-}CD\text{-}B$ 的平面角大小为 α，如图 6－9.

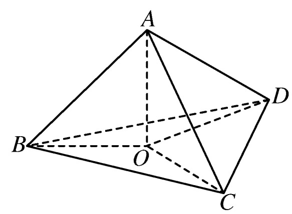


图 6－9

由立体几何知识有 $\cos\alpha=\dfrac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle BCD}}=\dfrac{S_{\triangle COD}}{S_{\triangle ACD}}$，

故有 $S_{\triangle ACD}^2=S_{\triangle COD}\cdot S_{\triangle BCD}$.

同理 $S_{\triangle ABC}^2=S_{\triangle BOC}\cdot S_{\triangle BCD}$，$S_{\triangle ABD}^2=S_{\triangle BOD}\cdot S_{\triangle BCD}$.

三式相加得 $S^2=S_1^2+S_2^2+S_3^2$.

18. 通过类比可以得到正四面体的性质：正四面体内任一点 P 到三条边的距离之和等于正四面体的高. 证明如下：

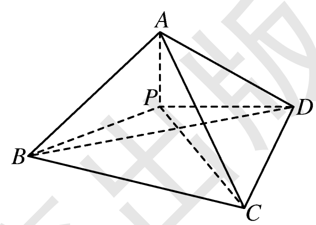


图 6－10

如图 6－10，设点 P 是正四面体内的任一点，点 P 到面 ABC、面 ACD、面 ADB、面 BCD 四个面的距离分别是 h_1，h_2，h_3，h_4，正四面体的高为 h，则有

$$V_{A\text{-}BCD}=V_{P\text{-}ABC}+V_{P\text{-}ACD}+V_{P\text{-}ADB}+V_{P\text{-}BCD},$$

$$\therefore \frac{1}{3}S_{BCD}\cdot h=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot h_1+\frac{1}{3}S_{ACD}\cdot h_2+\frac{1}{3}S_{ADB}\cdot h_3+\frac{1}{3}S_{BCD}\cdot h_4.$$

$\because S_{BCD}=S_{ABC}=S_{ACD}=S_{ADB}$，$\therefore h=h_1+h_2+h_3+h_4$.

即正四面体内任一点 P 到三条边的距离之和等于正四面体的高.

19. 法 1：假设存在满足题设条件的常数 a，b，c，则 $n=1$，2，3 时，有

$$\begin{cases}4=\dfrac{1}{6}(a+b+c),\\ 22=\dfrac{1}{2}(4a+2b+c),\\ 70=9a+3b+c.\end{cases}$$ 解得 $$\begin{cases}a=3,\\ b=11,\\ c=10.\end{cases}$$

应用数学归纳法容易证得

$1\times 2^2+2\times 3^2+\cdots+n(n+1)^2=\dfrac{n(n+1)}{12}(3n^2+11n+10)$.（证明略）

法 2：由 $a_n=n(n+1)^2=n^3+2n^2+n$ 可得

$1\times 2^2+2\times 3^2+\cdots+n(n+1)^2=(1^3+2^3+\cdots+n^3)+2(1^2+2^2+\cdots+n^2)+(1+2+\cdots+n)=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2+\dfrac{2n(n+1)(2n+1)}{6}+\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{n(n+1)}{12}(3n^2+11n+10)$.

∴存在常数 $a=3$，$b=11$，$c=10$ 使得等式对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立.

20.猜想：$1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}<\dfrac{2n-1}{n}$ $(n\geqslant 2, n\in\mathbf{N}^*)$.

证明：$n=2$ 时，$1+\dfrac{1}{2^2}=\dfrac{5}{4}$，$\dfrac{2n-1}{n}=\dfrac{6}{4}$，不等式成立.

假设 $n=k$ 时，$1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{k^2}<\dfrac{2k-1}{k}$，

那么 $1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{k^2}+\dfrac{1}{(k+1)^2}<\dfrac{2k-1}{k}+\dfrac{1}{(k+1)^2}=\dfrac{(2k-1)(k+1)^2+k}{k(k+1)^2}=\dfrac{2k^3+3k^2+k-1}{k(k+1)^2}<\dfrac{2k^3+3k^2+k}{k(k+1)^2}=\dfrac{(2k+1)(k+1)}{(k+1)^2}=\dfrac{2k+1}{k+1}=\dfrac{2(k+1)-1}{k+1}$.

这表明，当 $n=k+1$ 时，不等式也成立.

综上所述，猜想成立.

21.略.