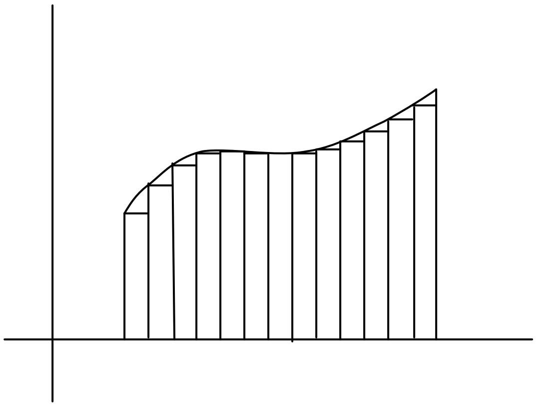
第 六 章　定 积 分

§ 6.1 定积分与不定积分

给定非负函数 $y = f(x)$**，定义于闭区间** $[a,b]$**，如果我们要求函数图形** $y = f(x)$ **下边曲边梯形面积，就需要定积分** $\int_a^b f(x)dx$**。**



给定闭区间 $[a,b]$ **内任意时刻** t **的即时速度** $y = f(t)$**，求** $[a,b]$ **内走过路程，也需要定积分** $\int_a^b f(t)dt$**。**

定义　**函数** $f(x)$ **定义在** $[a,b]$ **上，给** $[a,b]$ **任意一个分割** $\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$**，记** $l = \max\limits_{1\le k\le n} \Delta x_k$**，** $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$**，** $\forall\, x_k \in [x_{k-1}, x_k]$**，作和** $s = \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k$**。**

如果 $\lim\limits_{l\to 0} s = I$ **存在，则称** I **为** $f(x)$ **在** $[a,b]$ **上的定积分，记作** $I = \int_a^b f(x)dx$**。称** a **为积分上限，** b **为积分下限，** $f(x)$ **为被积函数，** x **为积分变量（哑变量），即**

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

用 $e - d$ **语言表述定：** $\forall e > 0$**，** $\exists d > 0$**，使得不管如何分割** Δ**，如何选取** $x_k \in [x_{k-1}, x_k]$**，只要** $l = \max\limits_{1\le k\le n} \Delta x_k < d$ **，就有** $| s - I | < e$ **，则称** I **为** $f(x)$ **在** $[a,b]$ **的定积分，记为** $I = \int_a^b f(x)dx$**。**

如果 $f(x)$ **在** $[a,b]$ **存在定积分，称它为** Riemann **可积，简称可积，将来到实变函数论中还有** Lebesgue **可积概念。**

综上定义： **定积分的定义包含分割，代替，求和，取极限四个步骤。这个极限不同于以前的极限，比较复杂，条件** $l < d$ **不像以前的** $0 < |x - x_0| < d$ **或** $n > N$ **那样简单，固定** l **，分割** Δ **有很多种，固定** Δ **，** x_k **的选择还有很多种。**

定积分与不定积分有密切关系，看例子：速度 $v(t)$ **在** $[a,b]$ **通过路程** $S = \int_a^b v(t)dt$ **；由原函数定义，** $S(t) = \int v(t)dt + C$ **，则** $\int_a^b v(t)dt = S(b) - S(a)$ **，一般地我们有**

定理 1（Newton-Leibinz 公式） **设** $f(x) \in C[a,b]$ **，** $F(x) \in C[a,b]$ **，且** F **在** (a,b) **上是** $f(x)$ **的原函数，即** $F'(x) = f(x)$ **，** $x \in (a,b)$ **，则**

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b \text{ 。}$$

证 **给定** $[a,b]$ **任意一个分割：** $\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ **，**

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n}\left[F(x_k) - F(x_{k-1})\right] = \sum_{k=1}^{n} f(h_k)\Delta x_k \text{ ，}$$

这里 $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ **，** $h_k \in [x_{k-1}, x_k]$ **，用了** Lagrange **中值定理。** $f(x) \in C[a,b]$ **，由** Cantor **定理，** f **在** $[a,b]$ **一致连续，所以** $\forall e > 0$ **，** $\exists d > 0$ **，只要** $x, h \in [a,b]$ **，** $|x - h| < d$ **，就有** $|f(x) - f(h)| < \dfrac{e}{b-a}$ **。**

于是，当 $l = \max\limits_{1\le k\le n} \Delta x_k < d$ **时，对** $\forall x_k \in [x_{k-1}, x_k]$ **，有**

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k - \left[F(b) - F(a)\right]\right| = \left|\sum_{k=1}^{n}\left[f(x_k) - f(h_k)\right]\Delta x_k\right| < e \text{ 。}$$

定理 2 **设** $f(x)$ **在** $[a,b]$ **可积（不一定连续），又设** $F(x)$ **在** $[a,b]$ **上连续，并且在** (a,b) **上，** $F'(x) = f(x)$ **，则** $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ **。**

证 **任给** $[a,b]$ **一分割** $\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ **，由** Lagrange **中值定理**

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} f(h_k)\Delta x_k \text{ ，} h_k \in (x_{k-1}, x_k) \text{ 。}$$

因 f **在** $[a,b]$ **可积，令** $l = \max\limits_{1\le k\le n} \Delta x_k \to 0$ **，则上式右边** $\to \int_a^b f(x)dx$ **。所以**

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx \text{ 。}$$

§ 6.2 定积分的性质

1. 初等性质

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，c 实数，则 $cf(x)$ 亦可积，且 $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$。

设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，则 $f(x)\pm g(x)$ 亦可积，且

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx \quad 。$$

这说明定积分是个线性运算。

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，$a<c<b$，则 $f(x)$ 在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 都可积，且

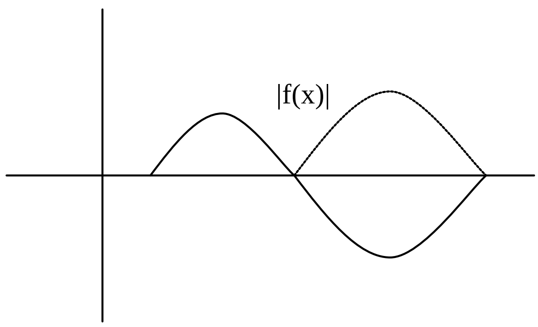
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

反之亦然。

定理（推广的 Newton-Leibniz 公式） 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，$F(x)$ 在 $[a,b]$ 除去有限个点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 外是 $f(x)$ 的原函数，这些点或是 $F(x)$ 的连续点或是第一类间断点，则 $\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{m-1} F(x)\Big|_{x=x_i+0}^{x=x_{i+1}-0}$。

证 $\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{m-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \sum_{i=0}^{m-1} F(x)\Big|_{x=x_i+0}^{x=x_{i+1}-0}$。

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，则 $|f(x)|$ 亦可积，且 $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$。



几何上看 $\left|\int_a^b f(x)dx\right|$ 有可能出现正负面积相消情况，$\int_a^b |f(x)|dx$ 将全部负面积翻成正面积之和。

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，$f(x)\ge 0$，$x\in[a,b]$，则 $\int_a^b f(x)dx \ge 0$。

若 f ，g 在$[a,b]$可积，$f(x) \le g(x)$，$x \in [a,b]$，则$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$。

即定积分运算是保序的。

2．积分第一中值定理

定理 设$f(x)$，$g(x)$和$f(x)g(x)$在$[a,b]$可积，$g(x)$在$[a,b]$不变号，

$$m = \inf_{a \le x \le b} f(x)\text{，}\quad M = \sup_{a \le x \le b} f(x)\text{，}$$

则存在m，$m \le m \le M$ ，使得$\int_a^b f(x)g(x)dx = m\int_a^b g(x)dx$。

证 不妨设$g(x) \ge 0$，则$mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x)$，由积分不等式，我们有

$$m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx\text{。}$$

若$\int_a^b g(x)dx = 0$，取任意m都行。

若$\int_a^b g(x)dx > 0$，令$m = \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$ 即可。

推论 1 若$f(x)$在$[a,b]$连续，$g(x)$在$[a,b]$上可积，不变号，则$\exists x \in [a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(x)\int_a^b g(x)dx\text{。}$$

推论 2 若$f(x)$在$[a,b]$连续，则存在$\exists x \in (a,b)$，使得$\int_a^b f(x)dx = f(x)(b-a)$。

推论 1 是积分第一中值定理与连续函数取中间值定理的直接结论。

推论 2 的结论中要求$x \in (a,b)$，证明还需要作点加工：若f为常数，结论显然；若f非常数，则$\exists x_1', x_2'$，使得$f(x_1') < M$，$f(x_2') > m$ 且$f(x_1') > f(x_2')$，还可找到$d > 0$，使得

$$M - f(x) > 0\text{，}\quad |x - x_1'| < d\text{；}$$

$$f(x) - m > 0\text{，}\quad |x - x_2'| < d\text{。}$$

所以

$$m(b-a) < \int_a^b f(x)dx < M(b-a)\text{，}$$

取 $m = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$，$m < m < M$ ，所以$\exists x \in (a,b)$，使得$f(x) \in m$。

3．变限定积分

用 Newton-Leibniz 公式，我们知道，若$f(x) \in C[a,b]$，$F(x)$在$[a,b]$上是$f(x)$的原函数，则$\forall x \in [a,b]$，有$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$。

但是我们还不知道若 $f(x)\in C[a,b]$ 原函数是否存在，我们称 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 为变上限定积分，它启示我们它就是 $f(x)$ 的一个原函数。

定理 设 $f(x)\in C[a,b]$，则 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数，满足 $F'(x)=f(x)$，并且满足 $F(a)=0$。

证 为证 $F'(x)=f(x)$，$a\le x\le b$，我们固定 $x_0\in(a,b)$，

考虑当 $x>x_0$ 时：

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\right| &= \left|\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t)dt-f(x_0)\right| \\ &= \left|\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x [f(t)-f(x_0)]dt\right| \\ &\le \frac{1}{|x-x_0|}\int_{x_0}^x |f(t)-f(x_0)|dt\end{aligned}$$

当 $x<x_0$ 时，

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\right| \le \frac{1}{|x-x_0|}\int_x^{x_0} |f(t)-f(x_0)|dt$$

因为 $f(x)$ 在 x_0 连续，$\forall e>0$，$\exists d>0$，使得 $|x-x_0|<d$ 时，有 $|f(x)-f(x_0)|<e$

这时

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\right| &\le \frac{1}{|x-x_0|}\left|\int_{x_0}^x |f(t)-f(x_0)|dt\right| \\ &\le \frac{1}{|x-x_0|}\cdot e\cdot|x-x_0|=e\end{aligned}$$

x_0 是区间端点时，左右导数可类似证明。

变限定积分还有一些变种

$G(x)=\int_x^b f(t)dt=-\int_b^x f(t)dt$， $G'(x)=-f(x)$，

$\Phi(x)=\int_a^{j(x)} f(t)dt=F(j(x))$，

$\Phi'(x)=f(j(x))j'(x)$。

例 设 $f(x)\in C[-1,1]$，证明 $\lim\limits_{h\to 0+0}\int_{-1}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}f(t-x)dx = pf(t)$。

证 不妨设 $t=0$，考虑

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-1}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)dx - pf(0)\\
&= \int_{-1}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}[f(x)-f(0)]dx + 2(arctg\frac{1}{h}-\frac{p}{2})f(0)\\
&= \int_{0}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}[f(x)+f(-x)-2f(0)]dx + 2(arctg\frac{1}{h}-\frac{p}{2})f(0)\\
&= \int_{0}^{d}\frac{h}{h^2+x^2}[f(x)+f(-x)-2f(0)]dx + \int_{d}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}[f(x)+f(-x)-2f(0)]dx\\
&\quad + 2(arctg\frac{1}{h}-\frac{p}{2})f(0)
\end{aligned}$$

对 $\forall e>0$， $f(x)\in C[-1,1]$，$|f(x)|\le M$，$\exists d>0$，使当 $|x|<d$ 时，有

$$|f(x)-f(0)|<\frac{e}{6},$$

由 $arctg\frac{1}{h}-arctg\frac{d}{h}\to 0\ (h\to 0+0)$，$\exists h>0$，使当 $0<h<h$ 时，

$$arctg\frac{1}{h}-arctg\frac{d}{h}=\int_{d}^{1}\frac{h\,dx}{h^2+x^2}<\frac{e}{2M}，且 \left|arctg\frac{1}{h}-\frac{p}{2}\right|<\frac{e}{6M}，$$

这时 $|I|<\frac{e}{3}+\frac{e}{3}+\frac{e}{3}=e$。

§6.3 定积分的换元法、分部积分法和第二中值定理

1. 换元法

定理 1 $f(x)\in C[a,b]$，$j\in C^1[a,b]$，又 $j(a)=a$，$j(b)=b$，$a\le j(t)\le b$ $(a\le t\le b)$。则 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f[j(t)]j'(t)dt$。

证 $f(x)\in C[a,b]$，它有原函数，记为 $F(x)$，则 $F[j(t)]$ 是 $f[j(t)]j'(t)$ 的原函数，由 Newton-Leibniz 公式，有

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a),$$

及 $\int_a^b f[j(t)]j'(t)dt = F[j(b)]-F[j(a)] = F(b)-F(a)$，可得结论。

注1　在原函数定义$\int_a^b f(x)dx$中“ dx ”仅是一个记号，这个定理告诉我们它可看成微分，$x = j(t)$，$dx = j'(t)dt$，这样理解换元法公式是自然了。

定理 2　设$f(x) \in C[a,b]$，$x = j(t) \in C^1[a,b]$，满足

1°　$j(a) = a$，$j(b) = b$；

2°　$j(t)$在$[a,b]$严格单调，则

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f[j(t)]j'(t)dt \text{。}$$

证　不妨设$j(t)$严格上升，这时$a < b$，给$[a,b]$任意一个分割$\Delta: a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$，因为$j(t)$严格上升，相应地产生$[a,b]$一个分割$\Delta': a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$，其中$x_i = j(t_i)$，$i = 0, 1, 2, \cdots, n$。

因$j(t)$在$[a,b]$一致连续，$\forall e > 0$，$\exists d > 0$，使得$\Delta t_i = t_i - t_{i-1} < d$时，有

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = j(t_i) - j(t_{i-1}) < e \text{。}$$

即当$\max \Delta t_i \to 0$时，有$\max \Delta x_i \to 0$。

作$f[j(t)]j'(t)$的任一积分和：　$s = \sum_{i=1}^{n} f[j(t_i)]j'(t_i)\Delta t_i$，$t_i \in [t_{i-1}, t_i]$

及$f(x)$的某一积分和：

$$s' = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)[j(t_i) - j(t_{i-1})]$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f[j(t_i)]j'(\overline{t_i})\Delta t_i,$$

$j(t_i) = x_i$，$\overline{t_i} \in [t_{i-1}, t_i]$。因$j'(t)$在$[a,b]$一致连续，$\forall e > 0$，$\exists h > 0$，当$l = \max \Delta x_i < h$时，有$\left| j'(t_i) - j'(\overline{t_i}) \right| < e$。

于是

$$\left| s - s' \right| \le \sum_{i=1}^{n} f[j(t_i)] \left| j'(t_i) - j'(\overline{t_i}) \right| \Delta t_i$$
$$\le M(b - a)e,$$

其中 $M=\sup\limits_{a\le x\le b}\left|f(x)\right|$。

所以 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma'=\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$。

例 1 $I=\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t\,dt\qquad (x=\sin t,\quad 0<t\le\frac{\pi}{2})$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\,dt=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)\,dt$$

$$=\frac{1}{8}(x-\frac{\sin 4t}{4})\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{16}。$$

从这个例子，我们可以看出定积分和不定积分换元有两点区别：1）不定积分换元是作为整体的变量替换，定积分是作为一个特定区间上的变量替换，有时前者行不通而后者却可以进行；2）不定积分换元后必须换回去，而定积分换元不必，只要把定积分值算出来就行了。

例 2

1． $f(x)\in C[-a,a]$ **偶函数，则**

$$\int_{-a}^a f(x)dx=\int_0^a f(x)dx+\int_{-a}^0 f(x)dx$$

$$=\int_0^a f(x)dx-\int_a^0 f(-t)dt$$

$$=2\int_0^a f(x)dx。$$

2． $f(x)\in C[-a,a]$**，奇函数 ，则** $\int_{-a}^a f(x)dx=0$。

例3 $I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

解 $I=2\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

$$=-2\int_{\pi}^0\frac{(\pi-t)\sin(\pi-t)}{1+\cos^2(\pi-t)}dt\qquad (x=\pi-t)$$

$$=2\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dx-2\int_0^{\pi}\frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}dx，$$

$$2I=-2\pi\int_1^{-1}\frac{du}{1+u^2}，\quad u=\cos t。$$

$$I=\pi\ arctg\,u\Big|_{-1}^{1}=\frac{\pi^2}{2}\ 。$$

2 分部积分法

定理 3 设u，$v\in C^1[a,b]$，则$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$。

$$（\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu）$$

证 $$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)，$$

所以 $$\int_a^b (u(x)v(x))'dx = u(x)v(x)\Big|_a^b，$$

即 $$\int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b 。$$

例 4 $I_n = \int_0^{\frac{p}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{p}{2}} \cos^n x\,dx$

解 $$I_n = -\int_0^{\frac{p}{2}} \sin^{n-1} x\,d\cos x$$

$$= -\sin^{n-1} x\cos x\Big|_0^{\frac{p}{2}} + \int_0^{\frac{p}{2}} \cos x\,d\sin^{n-1} x$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{p}{2}} \sin^{n-2} x\cos^2 x\,dx$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{p}{2}} \sin^{n-2} x\,dx - (n-1)\int_0^{\frac{p}{2}} \sin^n x\,dx，$$

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \qquad (n \ge 2)$$

$$I_0 = \frac{p}{2}，\quad I_1 = 1。$$

所以 $$I_{2k} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{p}{2}，\qquad I_{2k+1} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}。$$

例 5 （J.Wallis **公式**）

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n+1} = \frac{p}{2}$$

证 $0 < x < \frac{p}{2}$时，有$\sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x$， 采用例 4 中的记号我们可得

$$I_{2n+1} < I_{2n} < I_{n-1}，$$

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}<\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{p}{2}<\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}，\quad \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n+1}<\frac{p}{2}<\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{(2n)(2n+1)}$

$$\le\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\cdot\frac{p}{2}=0。$$

3 积分余项的 Taylor 公式

引理 $g(x)\in C[x_0,b]$， $\forall x: x_0<x\le b$，有

$$\int_{x_0}^{x}\left[\int_{x_0}^{t}g(t_1)dt_1\right](x-t)^m dt=\frac{1}{m+1}\int_{x_0}^{x}g(t_1)(x-t_1)^{m+1}dt_1，\ m\in\mathbf{Z}^+$$

证 $\int_{x_0}^{x}\left[\int_{x_0}^{t}g(t_1)dt_1\right](x-t)^m dt$

$$=\frac{-1}{m+1}\int_{x_0}^{x}\left[\int_{x_0}^{t}g(t_1)dt_1\right]d(x-t)^{m+1}$$

$$=\frac{-1}{m+1}\int_{x_0}^{t}g(t_1)dt_1(x-t)^{m+1}\Big|_{t=x_0}^{t=x}+\frac{1}{m+1}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{m+1}g(t)dt$$

$$=\frac{1}{m+1}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{m+1}g(t)dt。$$

定理 4 设 $f(x)\in C^{n+1}(x_0-h,x_0+h)$，则

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)，$$

其中 $R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$，$|x-x_0|<h$。

证 $n=1$时，

$$R_1(x)=f(x)-f(x_0)-\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)$$

$$=\int_{x_0}^{x}f'(t)dt-f'(x_0)(x-x_0)$$

$$=\int_{x_0}^{x}[f'(t)-f'(x_0)]dt=\int_{x_0}^{x}\left[\int_{x_0}^{t}f''(t_1)dt_1\right]dt$$

$$=-\int_{x_0}^{x}\left[\int_{x_0}^{t}f''(t_1)dt_1\right]d(x-t)=\int_{x_0}^{x}f''(t)(x-t)dt。$$

设 $n=m$ **时成立，即**

$$R_m=f(x)-\left[f(x_0)+\cdots+\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m\right]$$

$$=\frac{1}{m!}\int_{x_0}^{x} f^{(m+1)}(t)(x-t)^m dt \text{。}$$

$$R_{m+1}=f(x)-\left[f(x_0)+\cdots+\frac{f^{(m+1)}(x_0)}{(m+1)!}(x-x_0)^{m+1}\right]$$

$$=\frac{1}{m!}\int_{x_0}^{x} f^{(m+1)}(t)(x-t)^m dt-\frac{f^{(m+1)}(x_0)}{(m+1)!}(x-x_0)^{m+1}$$

$$=\frac{1}{m!}\int_{x_0}^{x} f^{(m+1)}(t)(x-t)^m dt-\frac{1}{m!}\int_{x_0}^{x} f^{(m+1)}(x_0)(x-t)^m dt$$

$$=\frac{1}{m!}\int_{x_0}^{x}\left[f^{(m+1)}(t)-f^{(m+1)}(x_0)\right](x-t)^m dt$$

$$=\frac{1}{m!}\int_{x_0}^{x}\left[\int_{x_0}^{t} f^{(m+2)}(t_1)dt_1\right](x-t)^m dt$$

$$=\frac{1}{(m+1)!}\int_{x_0}^{x} f^{(m+2)}(t)(x-t)^{m+1} dt \text{。}$$

推论： Lagrange **余项** $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}(x_0-x)^{n+1}$，$x$ **介于** x_0， x_1**之间。**

4 积分第二中值定理

Abel 变换 $\{a_i\}$，$\{b_i\}$，$1\le i\le m$ ，**令** $B_p=\sum_{i=1}^{p} b_i$， $p=1,2,\cdots,m$， $B_0=0$，

则 $b_i=B_i-B_{i-1}$，

$$\sum_{i=1}^{m} a_i b_i=\sum_{i=1}^{m} a_i(B_i-B_{i-1})=\sum_{i=1}^{m} a_i B_i-\sum_{i=0}^{m-1} a_{i+1} b_i$$

$$=\sum_{i=1}^{m-1}(a_i-a_{i+1})B_i+a_m B_m-a_1 B_0$$

$$=\sum_{i=1}^{m-1}(a_i-a_{i+1})B_i+a_m B_m$$

它实际上是分部积分公式

$$\int_a^b u(x)dv(x)=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)du(x)$$

给定分割 Δ **：令** $u(x_i)=a_i$， $b_i=v(x_{i+1})-v(x_i)$， $B_i=v(x_i)$ **之后的一种离散化形式。**

定理 5 （积分第二中值定理） **设** $g(x)\in C[a,b]$。

（1） $f(x)$ **在** $[a,b]$ **单调下降，** $f(x)\ge 0$， $a\le x\le b$ ，**则** $\exists x_1\in[a,b]$ **,使得**

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^{x_1} g(x)dx。$$

（2） $f(x)$ 在$[a,b]$单调上升， $f(x)\ge 0$，$a\le x\le b$，则$\exists x_2\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(b)\int_{x_2}^b g(x)dx。$$

（3） $f(x)$ 在$[a,b]$单调，则$\exists x\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^x g(x)dx + f(b)\int_x^b g(x)dx。$$

证（1） 令$G(x)=\int_a^x g(t)dt\in C^1[a,b]$，记$m=\min\limits_{a\le x\le b}G(x)$， $M=\max\limits_{a\le x\le b}G(x)$，给$[a,b]$一个分割$\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，记$m_k=\inf\limits_{x_{k-1}\le x\le x_k} f(x)$，$M_k=\sup\limits_{x_{k-1}\le x\le x_k} f(x)$，$f(x)$在$[a,b]$单调下降，所以可积，因而

$$\sum_{k=1}^n\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left|f(x)-f(x_{k-1})\right|\left|g(x)\right|dx\le\sup_{a\le x\le b}\left|g(x)\right|\sum_{k=1}^n(M_k-m_k)\Delta x_k\to 0$$

当 $l\to 0$时。

$$I=\int_a^b f(x)g(x)dx=\lim_{l\to 0}\sum_{k=1}^n\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_{k-1})g(x)dx$$

$$=\lim_{l\to 0}\sum_{k=1}^n f(x_{k-1})[G(x_k)-G(x_{k-1})]$$

$$=\lim_{l\to 0}\sum_{k=1}^n[f(x_{k-1})-f(x_k)]G(x_k)+f(b)G(b)$$

$$mf(a)\le I=\int_a^b f(x)g(x)dx\le Mf(a)。$$

若 $f(a)=0$，则 $f(x)\equiv 0$，x 可取任意值。

若 $f(a)>0$，$m\le\dfrac{1}{f(a)}\int_a^b f(x)g(x)dx\le M$ ，$G(x)\in C[a,b]$，$\exists x_1\in[a,b]$，使得

$G(x_1)=\dfrac{1}{f(a)}\int_a^b f(x)g(x)dx$，即$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^{x_1} g(x)dx$。

（2） 类似可证。

（3） 不妨设 $f(x)$ 单调上升，令$F(x)=f(x)-f(a)$，单调上升，$F(x)\ge 0$，由（2）$\exists x\in[a,b]$，使得$\int_a^b F(x)g(x)dx=F(b)\int_x^b g(x)dx=[f(b)-f(a)]\int_x^b g(x)dx$。

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^b g(x)dx + f(b)\int_x^b g(x)dx - f(a)\int_x^b g(x)dx$$

$$= f(a)\int_a^x g(x)dx + f(b)\int_x^b g(x)dx \text{。}$$

例 1 $f(x)$ **在** $[-p, p]$ **单调下降，求证**

$$b_{2n} = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\sin 2nx\,dx \ge 0\text{，}$$

$$b_{2n+1} = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\sin(2n+1)x\,dx \le 0\text{。}$$

证

$$b_{2n} = \frac{1}{p}\left[f(-p)\int_{-p}^{x}\sin 2nx\,dx + f(p)\int_x^p \sin 2nx\,dx \right]$$

$$= \frac{1}{p}\left[f(-p)\frac{1-\cos 2nx}{2n} + f(p)\frac{\cos 2nx - 1}{2n} \right]$$

$$= \frac{1}{2pn}[1-\cos 2nx][f(-p) - f(p)] \ge 0\text{，}$$

$$b_{2n+1} = \frac{1}{p}\left[f(-p)\int_{-p}^{x}\sin(2n+1)x\,dx + f(p)\int_x^p \sin(2n+1)x\,dx \right]$$

$$= \frac{1}{p}\left[f(-p)\frac{-1-\cos(2n+1)x}{2n+1} - f(p)\frac{-\cos(2n+1)x - 1}{2n+1} \right]$$

$$= \frac{1}{(2n+1)p}[-1-\cos(2n+1)x][f(-p) - f(p)] \le 0.$$

习题：

6.1 **利用定积分的几何意义，求下列积分：**

（1） $\int_a^b x dx$；（2） $\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}dx$；

（3） $\int_a^b \left| x - \frac{a+b}{2} \right| dx$。

6.2 **设** $f(x) \in R[a,b]$（$R[a,b]$**表示** $[a,b]$**上的可积函数全体），求证：**

（1） $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + \frac{i(b-a)}{n}\right)$；

（2） $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + \frac{(i+1)(b-a)}{n}\right)$；

(3) $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{b-a}{2n}[f(a)+2f(a+\frac{b-a}{n})+\cdots$

$$+2f(a+\frac{(n-1)(b-a)}{n})+f(b)]。$$

6.3 **设** $f(t)$ **在** $[a+c,b+c]$ **上可积。证明：** $f(x+c)$ **在** $[a,b]$ **上可积，且**

$$\int_a^b f(x+c)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(t)dt。$$

6.4 **计算下列定积分：**

(1) $\int_0^p \cos^2 x dx$ ； (2) $\int_0^a \sqrt{a-x}dx$ ；

(3) $\int_0^a x\sqrt{a-x}dx$ ； (4) $\int_{-4}^{-3}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$。

6.5 **求下列极限：**

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sin\frac{kp}{n}$ ；

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n})$ ；

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)\cdots(2n-1)}$。

6.6 **求下列积分：**

(1) $\int_0^p \cos x dx$ ； (2) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ；

(3) $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2}$ ； (4) $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2-2x\cos a+1}(0<a<p)$ ；

(5) $\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}\frac{dx}{\sin^2 x+2\cos^2 x}$ ； (6) $\int_a^b \sin|x|dx$ ；

(7) $\int_0^{\frac{p}{2}}\frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}\quad(a,b>0)$ ；

(8) $\int_0^{\frac{p}{2}}\frac{\cos x dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}\quad(a,b>0)$ ；

(9) $\int_{-1}^{1}|1-x|dx$ ； (10) $\int_0^{2p}\frac{dx}{1+e\cos x}\quad(0<e<1)$。

6.7 **设** $f(x)\in C[a,b]$**，且** $\int_a^b f(x)dx=0$ **，求证：** $f(x)\equiv 0(a\le x\le b)$。

6.8 **设** $f(x),g(x)\in C[a,b]$**。求证：**

$$\left|\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx\right| \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}\cdot\sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}\text{，}$$

而且等号成立当且仅当$g(x)=lf(x)$（**或** $f(x)=lg(x)$），**其中** l **为常数。**

6.9 **设** $f(x),g(x)\in C[a,b]$。**求证：**

$$\sqrt{\int_a^b [f(x)+g(x)]^2 dx} \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}+\sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}\text{，}$$

而且等号成立当且仅当$g(x)=lf(x)$（$l\ge 0$**为常数）。**

6.10 **设** $I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$，**试建立** I_n **的递推公式；并利用所得结果证明：**

$$\lim_{n\to+\infty}[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}]=\ln 2\text{。}$$

6.11

(1) **试建立** $I_n=\int_0^{\frac{p}{2}}\frac{\sin^2 nt}{\sin t}dt$ **的递推公式；**

（2） **求证：**

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\ln n}\int_0^{\frac{p}{2}}\frac{\sin^2 nt}{\sin t}dt=1\text{。}$$

6.12 **证明下列极限：**

（1） $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^b (1-x^2)^n dx=0 \qquad (0<b<1)$；

（2） $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 (1-x^2)^n dx=0$；

（3） $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{p}{2}} \sin^n x dx=0$。

6.13

（1）**任给**$d>0$，**求证：** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\int_d^1 (1-t^2)^n dt}{\int_0^1 (1-t^2)^n dt}=0$；

（2）**设** $f(x)\in C[-1,1]$，**令** $l_n=2\int_0^1 (1-t^2)^n dt$， **求证：**

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{l_n}\int_{-1}^1 (1-t^2)^n f(t)dt=f(0)\text{。}$$

6.14 **设** $f(x)\ge 0$， $f''(x)\le 0$，**对** $\forall x\in[a,b]$**成立。求证：**

$$f(x) \le \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)dx \quad 。$$

6.15　**设** $f(x)\in C(-\infty,+\infty)$**，并存在常数** a **满足**

$$5x^3+40=\int_a^x f(t)dt 。$$

（1）　**求出** $f(x)$ **；**　　　(2)　**定出常数** a **。**

6.16　**设** $f(x)\in C(-\infty,+\infty)$**，求出下列函数的导数。**

（1）　$F(x)=\int_0^{x^2} f(t)dt$ ；　　　（2）　$F(x)=\int_{x+a}^{x+b} f(t)dt$ 。

6.17　**求下列极限：**

（1）　$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{h^2}\int_0^h(\frac{1}{q}-ctgq)dq$ ；　　　（2）　$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{e^{-x^2}}{x}\int_0^x t^2e^{t^2}dt$ 。

6.18　**求下列函数：**

（1）　$f(x)=\int_0^x \operatorname{sgn} t dt$ ；　　　（2）　$f(x)=\int_0^x |t|dt$ ；

（3）　$f(x)=\int_0^1 |x-t|dt$ ；　　　（4）　$f(x)=\int_0^1 t|x-t|dt$ 。

6.19　**设** $P_n(x)$ **为** n **次代数多项式。求证：** $\int_a^b |P_n'(x)|dx \le 2n\max\limits_{a\le x\le b}|P_n(x)|$ 。

6.20　**计算下列积分：**

（1）　$\int_0^1 \frac{x}{(1+x)^a}dx$ ；　　　（2）　$\int_0^1 \ln(1+\sqrt{x})dx$ ；

（3）　$\int_0^a \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}dx$ ；　　　（4）　$\int_0^a arctg\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}dx$ ；

（5）　$\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}}\ (a>0)$ ；　　　（6）　$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx$ ；

（7）　$\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx$ ；　　　（8）　$\int_1^9 x\sqrt[3]{1-x}dx$ ；

（9）　$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$ ；　　　（10）　$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx \quad (a>0)$ ；

（11）　$\int_0^{p/2} \sin^2 x\cos x dx$ ；　　　（12）　$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx \quad (a>0)$ ；

（13）　$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx$ ；　　　（14）　$\int_a^{2a} \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}dx$ 。

6.21　**求证：**

(1) $\int_0^{2p} \frac{1-r^2}{1-2r\cos q + r^2} dq = 2p \qquad (0 < r < 1)$；

(2) $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^n)\sqrt[n]{1+x^n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$。

6.22 求证：

(1) $\int_0^p \cos nx \cos kx dx = \begin{cases} \frac{p}{2}, & k = n, \\ 0, & k \neq n; \end{cases}$

(2) $\int_0^{p/2} \cos nx \cos^n x dx = \frac{p}{2^{n+1}}$。

6.23 求证：当 n 为奇数时，$F(x) = \int_0^x \sin^n t dt$ 是以 $2p$ 为周期的周期函数；而当 n 为偶数时，$F(x)$ 是线性函数与周期函数的和。

6.24 给定积分 $I = \int_0^p x f(\sin x) dx$， $f(x)$ 是[0，1]上的连续函数。求证：

(1) $I = \frac{p}{2}\int_0^p f(\sin x) dx$；

(2) 求 $\int_0^p \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x} dx$。

6.25 设 $f(x)$ 是周期为 T 的连续函数。求证：

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t) dt = \frac{1}{T}\int_0^T f(x) dx。$$

6.26 计算下列积分：

(1) $\int_0^1 \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$；

(2) $\int_0^1 x(arctgx)^2 dx$；

(3) $\int_0^p x^2 \sin nx dx$；

(4) $\int_{-p}^p e^x \cos nx dx$；

(5) $\int_0^1 \frac{dx}{(2-x^2)^2} dx$；

(6) $\int_1^2 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx$；

(7) $\int_0^1 x^2(1-x^3)^5 dx$；

(8) $\int_0^1 (1-x)^2 x^3 dx$；

(9) $\int_1^2 x^2 \ln x dx$；

(10) $\int_0^1 x^2 e^{\sqrt{x}} dx$。

6.27 求下列定积分：

(1) $\int_0^{p/2} e^{ax} \sin bx dx$；

(2) $\int_0^{p/2} e^{ax} \cos bx dx$。

6.28 求下列定积分，其中 m, n 为正整数：

(1) $\int_0^1 x^n \ln^n x dx$；

(2) $\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx$；

（3） $\int_0^1 tg^{2n} x dx$ ；　　　　　　　　（4） $\int_0^{2p} \sin^n x \cos^m x dx$ （$n+m$ 为奇数）

提示：先建立递推公式。

6.29　**设** $f'(x) \in C[a,b]$，**且** $f(a)=0$。**求证：**

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \frac{(b-a)^2}{2} \max_{a\le x\le b} |f'(x)|。$$

6.30　**设** $f''(x) \in C[a,b]$，**且** $f(a)=f(b)=0$。**求证：**

（1） $\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)dx$ ；

（2） $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \frac{(b-a)^3}{12} \max_{a\le x\le b} |f''(x)|$。

6.31　**求证：**

$$\lim_{n\to+\infty} \int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x} dx = 0 \qquad (p>0)。$$

6.32　**设** $f(x)$ **在** $[0,2p]$ **上单调有界。求证：**

（1） $\lim_{l\to+\infty} \int_0^{2p} f(x) \sin lx dx = 0$ ；

（2） $\lim_{l\to+\infty} \int_0^{2p} f(x) \cos lx dx = 0$ 。

6.33　**设** $f(x)$ **在** $[0,2p]$ **上单调下降。求证：**

$$b_n = \frac{1}{p}\int_0^{2p} f(x)\sin nx dx \ge 0。$$

6.34　**设** $f(x)$ **在** $[-p,p]$ **上单调下降。求证：**

$$b_{2n} = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\sin 2nx dx \ge 0 ；$$

$$b_{2n+1} = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\sin(2n+1)x dx \le 0。$$

6.35　**设** $f(x)$ **在** $[0,1]$ **上严格单调下降。求证：**

（1） $\exists q \in (0,1)$ **使得**

$$\int_0^1 f(x)dx = qf(0) + (1-q)f(1) ；$$

（2） $\forall c > f(0)$，$\exists q \in (0,1)$ **使得**

$$\int_0^1 f(x)dx = qc + (1-q)f(1)。$$

6.36 **利用梯形公式计算积分，并估计误差。**

（1） $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \quad (n=8)$；（2） $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} \quad (n=10)$。

6.37 **请按下列提示的思路证明：若** $f(x)\in C[a,b]$**，单调增加，则**

$$\int_a^b xf(x)dx \ge \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx。$$

思路一：对积分 $\int_a^b (x-\frac{a+b}{2})f(x)dx$ **分段使用第一中值定理。**

思路二：对积分 $\int_a^b (x-\frac{a+b}{2})f(x)dx$ **分段使用第二中值定理。**

思路三：从 $\int_a^b (x-\frac{a+b}{2})(f(x)-f(\frac{a+b}{2}))dx \ge 0$ **出发。**

思路四：从 $(t-x)(f(t)-f(x))\ge 0, \forall t,x\in[a,b]$ **出发，先固定** x **对** t **积分，将所得结果再对** x **积分。**