第五章 隐函数定理

§3.1 Jacobi 矩阵与 Jacobi 行列式

这章以及下一章中，我们希望用偏导数来研究多元函数和多元向量函数.

设 G 和 Ω 分别是 $\mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{R}^m$ 中区域，$F: G \to \Omega$ 是一向量函数. 要研究 F，我们需要了解 F 的象集

$$F(G)=\{Q\in\Omega \mid \exists P\in G, s.t.\, Q=F(P)\}$$

以及逆象集

$$F^{-1}(Q)=\{P\in G \mid F(P)=Q\}.$$

我们先讨论 $F^{-1}(Q)$.

将 F 表示为

$$(x_1,\cdots,x_n)\to(f_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,f_m(x_1,\cdots,x_n)),$$

设 $Q=(q_1^0,\cdots,q_m^0)\in\Omega$，则 $F^{-1}(Q)$ 为下面方程组的解:

$$\begin{cases} f_1(x_1,\cdots,x_n)=q_1^0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_m(x_1,\cdots,x_n)=q_m^0\ . \end{cases} \tag{1.1}$$

如果令 $F_1(x_1,\cdots,x_n)=f_1(x_1,\cdots,x_n)-q_1^0,\cdots,F_m(x_1,\cdots,x_n)=f_m(x_1,\cdots,x_n)-q_m^0$，则我们需要解

$$\begin{cases} F_1(x_1,\cdots,x_n)=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_m(x_1,\cdots,x_n)=0\,. \end{cases} \tag{1.2}$$

一般不能期望将方程的解都给出来. 通常将 $F_i(x_1,\cdots,x_n)=0$ 看作变量 $(x_1,\cdots,x_n)$ 的约束条件. 我们希望知道在这些约束条件下哪些变量是自由的，使其余的变量由其决定,即是否存在一组函数，例如

$$\begin{aligned} x_{k+1}&=g_1(x_1,\cdots,x_k) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n&=g_{n-k}(x_1,\cdots,x_k)\,, \end{aligned} \tag{1.3}$$

使得 $(x_1,\cdots,x_n)$ 为方程组（1.2）的解当且仅当其满足（1.3），其中 $(x_1,\cdots,x_k)$ 在一个开集内取值.

满足上面关系的函数 $g_1(x_1,\cdots,x_k),\cdots,g_{n-k}(x_1,\cdots,x_k)$ 称为由方程组（1.2）确定的

$F_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,F_m(x_1,\cdots,x_n)$ 的隐函数．虽然一般不能将这样的隐函数的解析表达式给出，但仍然希望能够通过 $F_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,F_m(x_1,\cdots,x_n)$ 的连续性、可微性、偏导数等得到其隐函数的连续性、可微性和偏导数.

设 $P_0=(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ 是方程组（1.2）的解，且 $F_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,F_m(x_1,\cdots,x_n)$ 在 P_0 的邻域上可微，则对 $P=(x_1,\cdots,x_n)$，有

$$
\begin{gathered}
F_1(x_1,\cdots,x_n)=\frac{\partial F_1(P_0)}{\partial x_1}(x_1-x_1^0)+\cdots+\frac{\partial F_1(P_0)}{\partial x_n}(x_n-x_n^0)+o(\|P-P_0\|),\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
F_m(x_1,\cdots,x_n)=\frac{\partial F_m(P_0)}{\partial x_1}(x_1-x_1^0)+\cdots+\frac{\partial F_m(P_0)}{\partial x_n}(x_n-x_n^0)+o(\|P-P_0\|).
\end{gathered}
$$

由于我们讨论的仅是解的存在性问题，忽略高阶无穷小，则方程组可近似地化为齐次线性方程组

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial F_1(P_0)}{\partial x_1}(x_1-x_1^0)+\cdots+\dfrac{\partial F_1(P_0)}{\partial x_n}(x_n-x_n^0)=0\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\dfrac{\partial F_m(P_0)}{\partial x_1}(x_1-x_1^0)+\cdots+\dfrac{\partial F_m(P_0)}{\partial x_n}(x_n-x_n^0)=0.
\end{cases}
$$

齐次方程组是我们熟知的，其解空间由其系数矩阵确定．上面方程组中的系数矩阵称为 $F_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,F_m(x_1,\cdots,x_n)$ 在 P_0 点的 Jacobi 矩阵.

定义：设 $P_0=(x_1^0,\cdots,x_n^0)$，映射 $F:(x_1,\cdots,x_n)\to(f_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,f_m(x_1,\cdots,x_n))$ 在 P_0 可微，则矩阵

$$
\frac{D(f_1,\cdots,f_m)}{D(x_1,\cdots,x_n)}(P_0)=\begin{bmatrix}
\dfrac{\partial f_1(P_0)}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial f_1(P_0)}{\partial x_n}\\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\
\dfrac{\partial f_m(P_0)}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial f_m(P_0)}{\partial x_n}
\end{bmatrix}
$$

称为 $(f_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,f_m(x_1,\cdots,x_n))$ 在 P_0 点的 Jacobi 矩阵．如果 $n=m$，则行列式

$$
\frac{\partial(f_1,\cdots,f_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}(P_0)=\begin{vmatrix}
\dfrac{\partial f_1(P_0)}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial f_1(P_0)}{\partial x_n}\\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\
\dfrac{\partial f_n(P_0)}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial f_n(P_0)}{\partial x_n}
\end{vmatrix}
$$

称为映射$(f_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,f_n(x_1,\cdots,x_n))$在$P_0$点的 Jacobi 行列式.

一般以

$$\frac{D\left(f_{i_1},f_{i_2},\cdots,f_{i_k}\right)}{D\left(x_{j_1},x_{j_2}\cdots,x_{j_l}\right)}(P_0)=\begin{bmatrix} \frac{\partial f_{i_1}(P_0)}{\partial x_{j_1}} & \frac{\partial f_{i_1}(P_0)}{\partial x_{j_2}} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_{i_1}(P_0)}{\partial x_{j_l}} \\ \frac{\partial f_{i_2}(P_0)}{\partial x_{j_1}} & \frac{\partial f_{i_2}(P_0)}{\partial x_{j_2}} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_{i_2}(P_0)}{\partial x_{j_l}} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \frac{\partial f_{i_k}(P_0)}{\partial x_{j_1}} & \frac{\partial f_{i_k}(P_0)}{\partial x_{j_2}} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_{i_k}(P_0)}{\partial x_{j_l}} \end{bmatrix}$$

表示分量$f_{i_1},f_{i_2},\cdots,f_{i_k}$相对于自变量分量$x_{j_1},x_{j_2}\cdots,x_{j_l}$在$P_0$点的 Jacobi 矩阵. 以

$$\frac{\partial\left(f_{i_1},f_{i_2},\cdots,f_{i_k}\right)}{\partial\left(x_{j_1},x_{j_2}\cdots,x_{j_k}\right)}(P_0)=\begin{vmatrix} \frac{\partial f_{i_1}(P_0)}{\partial x_{j_1}} & \frac{\partial f_{i_1}(P_0)}{\partial x_{j_2}} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_{i_1}(P_0)}{\partial x_{j_k}} \\ \frac{\partial f_{i_2}(P_0)}{\partial x_{j_1}} & \frac{\partial f_{i_2}(P_0)}{\partial x_{j_2}} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_{i_2}(P_0)}{\partial x_{j_k}} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \frac{\partial f_{i_k}(P_0)}{\partial x_{j_1}} & \frac{\partial f_{i_k}(P_0)}{\partial x_{j_2}} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_{i_k}(P_0)}{\partial x_{j_k}} \end{vmatrix}$$

表示分量$f_{i_1},f_{i_2},\cdots,f_{i_k}$相对于自变量分量$x_{j_1},x_{j_2}\cdots,x_{j_k}$在$P_0$点的 Jacobi 行列式.

利用 Jacobi 矩阵，对向量函数$(f_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,f_m(x_1,\cdots,x_n))$，有下面形式的 Taylor 展开

$$\begin{pmatrix} f_1(x_1,\cdots,x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1,\cdots,x_n) \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} f_1(x_1^0,\cdots,x_n^0) \\ \vdots \\ f_m(x_1^0,\cdots,x_n^0) \end{pmatrix}=\frac{D(f_1,\cdots,f_m)}{D(x_1,\cdots,x_n)}(P_0)\begin{pmatrix} x_1-x_1^0 \\ \vdots \\ x_n-x_n^0 \end{pmatrix}$$
$$+o\left(\sqrt{(x_1-x_1^0)^2+\cdots+(x_n-x_n^0)^2}\right),$$

这里o表示一个无穷小的m阶向量.

因此代替每个分量函数的偏导数, Jacobi 矩阵$\frac{D(f_1,\cdots,f_m)}{D(x_1,\cdots,x_n)}(P_0)$可看作映射

$$F:(x_1,\cdots,x_n)\to(f_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,f_m(x_1,\cdots,x_n))$$

的导函数，也记为$DF(P_0)$，其在数学的多个分支中有广泛应用.

例：如果$f(x_1,\cdots,x_n)$在$P_0=(x_1^0,\cdots,x_n^0)$可微，则

$$Df(P_0)=\frac{D(f)}{D(x_1,\cdots,x_n)}(P_0)=\left(\frac{\partial f(P_0)}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f(P_0)}{\partial x_n}\right)=\mathrm{grad}(f)(P_0).$$

Jacobi 矩阵就是 f 的梯度向量.

例：设 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 在 $P_0=(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ 邻域上二阶可微. 定义映射

$$\mathrm{grad}:(x_1,\cdots,x_n)\to\mathrm{grad}(f)(x_1,\cdots,x_n)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right),$$

则其 Jacobi 矩阵

$$D(\mathrm{grad})=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots\cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n} & \cdots\cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}\end{bmatrix}$$

就是函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 的 Hessi 矩阵.

Jacobi 矩阵作为向量函数的导数，与一元函数的导数相同，也满足链法则.

定理 1：设 $F:(x_1,\cdots,x_n)\to(y_1,\cdots,y_m)$ 和 $G:(y_1,\cdots,y_m)\to(z_1,\cdots,z_r)$ 都是可微的映射，则 Jacobi 矩阵满足 $D(G\circ F)=DG\circ DF$，或表示为

$$\frac{D(z_1,\cdots,z_r)}{D(x_1,\cdots,x_n)}=\frac{D(z_1,\cdots,z_r)}{D(y_1,\cdots,y_m)}\cdot\frac{D(y_1,\cdots,y_m)}{D(x_1,\cdots,x_n)}.$$

证明：利用偏导数的链法则和矩阵乘法直接计算即可.

推论：如果在定理 1 中 $n=m=r$，则 Jacobi 行列式满足

$$\frac{\partial(z_1,\cdots,z_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}=\frac{\partial(z_1,\cdots,z_n)}{\partial(y_1,\cdots,y_n)}\cdot\frac{\partial(y_1,\cdots,y_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}.$$

§3.2 隐函数定理

设 $F_1(x_1,\cdots,x_n)=0,\cdots,F_l(x_1,\cdots,x_n)=0$ 是一函数方程组，称集合 S 上的函数

$$x_{k+1}=f_1(x_1,\cdots,x_k),\cdots,x_n=f_{n-k}(x_1,\cdots,x_k)$$

为此方程组在 S 上确定的隐函数. 如果在 S 上恒有

$$F_1(x_1,\cdots,x_k,f_1(x_1,\cdots,x_k),\cdots f_{n-k}(x_1,\cdots,x_k))=0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$F_l(x_1,\cdots,x_k,f_1(x_1,\cdots,x_k),\cdots f_{n-k}(x_1,\cdots,x_k))=0\,.$$

例：设 $F(x,y)=x^2-y^2$**，则其在** $(0,0)$ **的邻域上确定无穷多个隐函数** $y=f(x)$**；但如果要求** $y=f(x)$ **连续，则** $F(x,y)=0$ **在** $(0,0)$ **的邻域上确定了四个隐函数；如果要求** $y=f(x)$ **可导，则在** $(0,0)$ **的邻域上满足** $F(x,f(x))\equiv 0$ **的函数仅有两个.**

对于函数方程组，上一节中我们提出利用 Jacobi **矩阵将其近似地化为齐次线性方程组. 本节和下一节中我们将证明这样的想法是合理的. 我们将把关于齐次线性方程组的相关结果局部地推广到函数方程组上. 我们从一个方程开始.**

定理 1: 设 $F(x,y)$ **在** $P_0=(x_0,y_0)$ **邻域上有连续偏导，且** $F(x_0,y_0)=0$，$\dfrac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}\neq 0$，**则存在** $e>0,d>0$，**使得** $F(x,y)=0$ **在** $(x_0-d,x_0+d)\times(y_0-e,y_0+e)$ **上确定唯一的隐函数** $f:(x_0-d,x_0+d)\to(y_0-e,y_0+e)$；$f(x)$ **在** (x_0-d,x_0+d) **上可导，并且** $f'(x)=-\dfrac{F_x(x,f(x))}{F_y(x,f(x))}$. **如果进一步假定** $F(x,y)$ **是** C^r **的函数，则** $y=f(x)$ **也是** C^r **的函数.**

证明：不妨设 $\dfrac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}>0$. **由** $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}$ **连续，知存在** (x_0,y_0) **的邻域** $(a,b)\times(c,d)=U$，**使得** $\left.\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}\right|_U>0$. **特别的，当** $x\in(a,b)$ **固定时，**$F(x,y)$ **是** y **在** (c,d) **上严格单调上升的函数. 任取** e，**使** $0<e<\min\{y_0-c,d-y_0\}$，**则由** $F(x_0,y_0)=0$ **知** $F(x_0,y_0-e)<0,\ F(x_0,y_0+e)>0$. **但** $F(x,y_0-e)$ **和** $F(x,y_0+e)$ **对** x **连续，因此存在** d，**使** $0<d<\min\{x_0-a,b-x_0\}$. $F(x,y_0-e)$ **在** (x_0-d,x_0+d) **上恒小于零，而** $F(x,y_0+e)$ **在** (x_0-d,x_0+d) **上恒大于零.**

任取 $x \in (x_0 - d, x_0 + d)$，当 y 由 $y_0 - e$ 变到 $y_0 + e$ 时，$F(x, y)$ 由负变到正．而其对 y 连续并严格单调，因此由连续函数的介值定理知，在 $(y_0 - e, y_0 + e)$ 中存在唯一的 y，使得 $F(x, y) = 0$．记之为 $y = f(x)$．我们得到定理中的隐函数的存在唯一性．

在 $(x_0 - d, x_0 + d)$ 中任取 $x, x + \Delta x$，设 $y = f(x)$，$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$．则由 $F(x, y)$ 的可微性知，存在 q，$0 < q < 1$，使得

$$\begin{aligned} 0 &= F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) \\ &= \frac{\partial F(x + q\Delta x, y + q\Delta y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F(x + q\Delta x, y + q\Delta y)}{\partial y}\Delta y. \end{aligned}$$

因此，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F_x(x + q\Delta x, y + q\Delta y)}{F_y(x + q\Delta x, y + q\Delta y)}.$$

令 $\Delta x \to 0$，等式右边极限存在，因此 $f(x)$ 可导，且

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}.$$

如果 $F(x, y)$ 是 C^r 的函数，$r \geq 2$，则由 $f(x)$ 是 C^1 的函数，得 $F_x(x, f(x))$，$F_y(x, f(x))$ 也是 C^1 的．因而 $f'(x) = -\dfrac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}$ 是 C^1 的，得 $f(x)$ 是 C^2 的函数．依此类推不难得到 $f(x)$ 是 C^r 的函数．

例：设 $y = f(x)$ 是定理 1 中 $F(x, y) = 0$ 确定的隐函数．设 $F(x, y)$ 是 C^2 的函数，求 $f''(x)$．

解：由 $f'(x) = -\dfrac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))} = -\dfrac{F_x}{F_y}$，利用复合函数求导得

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= -\frac{(F_{xx}+F_{xy}\cdot y')F_y - F_x(F_{xy}+F_{yy}\cdot y')}{{F_y}^2} \\
&= -\frac{(F_{xx}+F_{xy}\cdot(-F_x/F_y))F_y - F_x(F_{xy}+F_{yy}\cdot(-F_x/F_y))}{{F_y}^2} \\
&= -\frac{F_{xx}\cdot {F_y}^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}\cdot {F_x}^2}{{F_y}^3}.
\end{aligned}
$$

定理1的证明显然对n个变元的函数也是成立的. 这里我们用几何的语言给出这个定理一个等价的表述.

定理 2: 设D是$\mathbf{R}^n$中区域, $F(x_1,\cdots,x_n)\in C^1(D)$. 如果在$P_0=(x_1^0,\cdots,x_n^0)\in D$满足$F(x_1^0,\cdots,x_n^0)=0$, 而$F_{x_n}(x_1^0,\cdots,x_n^0)\neq 0$. 则存在$(x_1^0,\cdots,x_{n-1}^0)$的邻域$U_1$和$x_n^0$的邻域$U_2$及唯一的$C^1(U_1)$的函数$f:U_1\to U_2$, 使得在$P_0$的邻域$U=U_1\times U_2$上$F(x_1,\cdots,x_n)$的零点集合与$x_n=f(x_1,\cdots,x_{n-1})$的图象相同, 即

$$\{(x_1,\cdots,x_n)|F(x_1,\cdots,x_n)=0\}\cap U=\{(x_1,\cdots,x_{n-1},f(x_1,\cdots,x_{n-1}))|(x_1,\cdots,x_{n-1})\in U_1\}.$$

类似于齐次线性方程组的解, 对于函数方程组, 我们有下面定理

定理 3: 设D是$\mathbf{R}^n$中区域, 对$i=1,\cdots,k$, $F_i(x_1,\cdots,x_n)\in C^1(D)$, 且在$P_0=(x_1^0,\cdots,x_n^0)$处满足$F_i(x_1^0,\cdots,x_n^0)=0$, 而$\dfrac{\partial(F_1,\cdots,F_r)}{\partial(x_1,\cdots,x_r)}(P_0)\neq 0$. 则存在$(x_1,\cdots,x_r)$的邻域$U_1$和$(x_{r+1},\cdots,x_n)$的邻域$U_2$, 使得方程组

$$\begin{cases} F_1(x_1,\cdots,x_n)=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_r(x_1,\cdots,x_n)=0. \end{cases}$$

在P_0的邻域$U=U_1\times U_2$上确定唯一的一组$C^1(U_2)$的隐函数

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(x_{r+1},\cdots,x_n) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r &= f_r(x_{r+1},\cdots,x_n) \end{aligned},$$

使$(x_1,\cdots,x_r)\in U_1$.

证明: 用归纳法. $r=1$时已在定理1中证明. 设定理对$r-1$成立.

由 $\dfrac{\partial(F_1,\cdots,F_r)}{\partial(x_1,\cdots,x_r)}(P_0)\neq 0$，不妨设 $\dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}(P_0)\neq 0$. 则由 $F_1(x_1,\cdots,x_n)=0$ 可解出隐函数

$x_1=h(x_2,\cdots,x_n)$. 代入 $F_2,\cdots,F_r$ 中，令

$$\begin{gathered}G_2(x_2,\cdots,x_n)=F_2(h(x_2,\cdots,x_n),x_2,\cdots,x_n)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ G_r(x_2,\cdots,x_n)=F_r(h(x_2,\cdots,x_n),x_2,\cdots,x_n),\end{gathered}$$

利用隐函数的求导公式得

$$\begin{aligned}\frac{\partial(G_2,\cdots,G_r)}{\partial(x_2,\cdots,x_r)}&=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial G_2}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial G_2}{\partial x_r}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \dfrac{\partial G_r}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial G_r}{\partial x_r}\end{vmatrix}\\ &=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F_2}{\partial x_1}\cdot\dfrac{\partial h}{\partial x_2}+\dfrac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1}\cdot\dfrac{\partial h}{\partial x_r}+\dfrac{\partial F_2}{\partial x_r}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \dfrac{\partial F_r}{\partial x_1}\cdot\dfrac{\partial h}{\partial x_2}+\dfrac{\partial F_r}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial F_r}{\partial x_1}\cdot\dfrac{\partial h}{\partial x_r}+\dfrac{\partial F_r}{\partial x_r}\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

而

$$\frac{\partial(F_1,\cdots,F_r)}{\partial(x_1,\cdots,x_r)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_r}\\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_r}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \dfrac{\partial F_r}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_r}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_r}{\partial x_r}\end{vmatrix},$$

对 $i=2,\cdots,r$，将上式中第一列乘 $\dfrac{\partial h}{\partial x_i}$ 后加到第 i 列上，行列式不变. 但注意到在第一行中，

由 $\dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}\cdot\dfrac{\partial h}{\partial x_i}+\dfrac{\partial F_1}{\partial x_i}\equiv 0$，得

$$\frac{\partial(F_1,\cdots,F_r)}{\partial(x_1,\cdots,x_r)}=\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial(G_2,\cdots,G_r)}{\partial(x_2,\cdots,x_r)}.$$

特别的，由 $\dfrac{\partial(F_1,\cdots,F_r)}{\partial(x_1,\cdots,x_r)}(P_0)\neq 0$，得 $\dfrac{\partial(G_2,\cdots,G_r)}{\partial(x_2,\cdots,x_r)}(P_0)\neq 0$. 利用归纳假设，可由

$$G_2(x_2,\cdots,x_n)=0,\cdots,G_r(x_2,\cdots,x_n)=0$$

在$(x_2^0,\cdots,x_r^0)$邻域上解出

$$x_2 = f_2(x_{r+1},\cdots,x_n),\cdots,x_r = f_r(x_{r+1},\cdots,x_n).$$

代入$x_1 = h(x_2,\cdots,x_n)$中，令

$$x_1 = f_1(x_{r+1},\cdots,x_n) = h\big(f_2(x_{r+1},\cdots,x_n),\cdots,f_r(x_{r+1},\cdots,x_n),x_{r+1},\cdots,x_n\big),$$

得隐函数定理.

例：设$F(u,v,x,y),\ G(u,v,x,y)$是点$P_0=(u_0,v_0,x_0,y_0)$邻域上C^1的函数，满足

$$F(u_0,v_0,x_0,y_0)=0,\ G(u_0,v_0,x_0,y_0)=0$$

且$\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}(P_0)\neq 0$. 设$u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$是由$F(u,v,x,y)=0,\ G(u,v,x,y)=0$在$P_0$邻域上确定的隐函数. 求$u_x,u_y,v_x,v_y$.

解：将$u(x,y),v(x,y)$代入F和G，得恒等式

$$F(u(x,y),v(x,y),x,y)\equiv 0$$
$$G(u(x,y),v(x,y),x,y)\equiv 0.$$

对其微分，得

$$\begin{cases}(F_u\cdot u_x+F_v\cdot v_x+F_x)dx+(F_u\cdot u_y+F_v\cdot v_y+F_y)dy=0\\(G_u\cdot u_x+G_v\cdot v_x+G_x)dx+(G_u\cdot u_y+G_v\cdot v_y+G_y)dy=0.\end{cases}$$

但x和y是独立变量，因此必须

$$\begin{cases}F_u\cdot u_x+F_v\cdot v_x+F_x=0\\G_u\cdot u_x+G_v\cdot v_x+G_x=0,\end{cases}\qquad\begin{cases}F_u\cdot u_y+F_v\cdot v_y+F_y=0\\G_u\cdot u_y+G_v\cdot v_y+G_y=0.\end{cases}$$

解这两个线性方程组得

$$\begin{pmatrix}u_x\\v_x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}F_u & F_v\\G_u & G_v\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-F_x\\-G_x\end{pmatrix},\qquad\begin{pmatrix}u_y\\v_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}F_u & F_v\\G_u & G_v\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-F_y\\-G_y\end{pmatrix}.$$

例：设L是由$F(x,y,z)=0$和$G(x,y,z)=0$确定的曲线. 设$P_0\in L$，$F(x,y,z)$，$G(x,y,z)$在P_0邻域上是C^1的函数，且$\operatorname{rank}\left(\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y,z)}(P_0)\right)=2$. 证明$L$在$P_0$邻域上是光滑曲线，并求$L$在$P_0$的切线.

证明： 由 $\mathrm{rank}\left(\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y,z)}(P_0)\right)=2$，不妨设 $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}(P_0)\neq 0$．由隐函数定理，$F(x,y,z)=0, G(x,y,z)=0$ 在 P_0 邻域上确定唯一的隐函数 $x=x(z),\ y=y(z)$，即在 P_0 邻域上 L 可表示为 $z\to(x(z),y(z),z)$，并且 $x(z),\ y(z)$ 都是 C^1 的函数，得 L 在 P_0 邻域上是光滑曲线.

对 $F(x(z),y(z),z)\equiv 0, G(x(z),y(z),z)\equiv 0$ 求导得

$$\begin{cases} F_x\cdot x'+F_y\cdot y'+F_z=0\\ G_x\cdot x'+G_y\cdot y'+G_z=0. \end{cases}$$

解得

$$x'=-\frac{\begin{vmatrix}F_z & F_y\\ G_z & G_y\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{vmatrix}},\qquad y'=-\frac{\begin{vmatrix}F_x & F_z\\ G_x & G_z\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{vmatrix}}.$$

因此 L 在 P_0 的切线可表为

$$(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=t\big(x'(P_0),y'(P_0),1\big)$$

或

$$(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=t\left(\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(P_0),\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}(P_0),\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}(P_0)\right).$$

L 在 P_0 的切线也可令解为：由 $\mathrm{rank}\left(\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y,z)}(P_0)\right)=2$，得 $\mathrm{grad}(F)(P_0)\neq 0$，不妨设 $\dfrac{\partial F}{\partial z}(P_0)\neq 0$．因此 $F(x,y,z)=0$ 局部可解出 $z=f(x,y)$．而 $f(x,y)$ 是 C^1 的，因而是可微的函数，得 $F(x,y,z)=0$ 定义的曲面在 P_0 有切面

$$\frac{\partial F(P_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial F(P_0)}{\partial y}(y-y_0)+\frac{\partial F(P_0)}{\partial z}(z-z_0)=0,$$

其中 $\mathbf{n}_1=\left(\dfrac{\partial F(P_0)}{\partial x},\dfrac{\partial F(P_0)}{\partial y},\dfrac{\partial F(P_0)}{\partial z}\right)$ 为其法向量.

同理 $G(x,y,z)=0$ 定义的曲面在 P_0 处有切面，而 $\mathbf{n}_2=\left(\dfrac{\partial G(P_0)}{\partial x},\dfrac{\partial G(P_0)}{\partial y},\dfrac{\partial G(P_0)}{\partial z}\right)$ 为此切面的法向量．得 $\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2$ 与 L 在 P_0 点的切线同向．但

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \left(\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(P_0), \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}(P_0), \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}(P_0) \right),$$

得 L 在 P_0 点的切线方程.

§3.3 函数相关性

如果用隐函数定理来讨论区域 $D \subset \mathbf{R}^n$ 上的向量函数

$$F : (x_1, \cdots, x_n) \to (y_1 = f_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, y_m = f_m(x_1, \cdots, x_n)).$$

则对 $P_0 \in D$，我们在 $\mathrm{rank}\left(\frac{D(f_1, \cdots, f_m)}{D(x_1, \cdots, x_n)}(P_0) \right) = m$ 的条件下描述了在集合 $F^{-1}(F(P_0))$ 上变量 $(x_1, \cdots, x_n)$ 中哪些是独立的，哪些因之而决定. 另一方面我们也同样关心在象集 $F(D)$ 上，变量 $(y_1, \cdots, y_m)$ 中哪些变量是独立的，哪些变量由独立的变量确定.

以线性函数为例. 设

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n. \end{cases}$$

我们知道如果 $\mathrm{rank}(a_{ij}) = r$，则 $y_1, \cdots, y_m$ 中有 r 个是线性独立的，其余的函数都是这 r 个函数的线性组合. 我们希望将类似的结果推广到向量函数上.

定义：区域 $D \subset \mathbf{R}^n$ 上的函数 $y_1 = f_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, y_m = f_m(x_1, \cdots, x_n)$ 称为函数相关的，如果存在连续可微的函数 $y_i = G(y_1, \cdots, y_{i-1}, y_{i+1}, \cdots, y_m)$，使得

$$f_i(x_1, \cdots, x_n) = G\big(f_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_{i-1}(x_1, \cdots, x_n), f_{i+1}(x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_m(x_1, \cdots, x_n)\big)$$

在 D 上恒成立.

设 $f_i = G(f_1, \cdots, f_{i-1}, f_{i+1}, \cdots, f_m)$，利用复合函数求导得

$$\mathrm{grad}(f_i) = \frac{\partial G}{\partial y_1}\mathrm{grad}(f_1) + \cdots + \frac{\partial G}{\partial y_{i-1}}\mathrm{grad}(f_{i-1}) + \frac{\partial G}{\partial y_{i+1}}\mathrm{grad}(f_{i+1}) + \cdots + \frac{\partial G}{\partial y_m}\mathrm{grad}(f_m).$$

因此向量 $\mathrm{grad}(f_1), \cdots, \mathrm{grad}(f_m)$ 线性相关，即

$$\operatorname{rank}\left(\frac{D(f_1,\cdots,f_m)}{D(x_1,\cdots,x_n)}\right)=\operatorname{rank}\left[\operatorname{grad}(f_1),\cdots,\operatorname{grad}(f_m)\right]<m$$

在 D **上成立. 反之, 有下面定理.**

定理 1: 设$\operatorname{rank}\left(\frac{D(f_1,\cdots,f_m)}{D(x_1,\cdots,x_n)}\right)=r<m$ **在** D **上处处成立. 则对于任意** $P_0\in D$**, 存在** P_0 **的邻域** U**, 使得在** U **上** $f_1,\cdots,f_m$ **中有** r **个是函数无关的, 其余都与这** r **个函数函数相关.**

证明: 这里仅对$m=2,\ n=3,\ r=1$**给予证明, 一般的证明可用归纳法得到.**

设 $u=f(x,y,z),\ v=g(x,y,z)$ **满足定理的条件. 设** $P_0=(x_0,y_0,z_0)\in D$, $\frac{\partial f(P_0)}{\partial x}\neq 0$, $u_0=f(x_0,y_0,z_0)$. **由隐函数定理,** $u-f(x,y,z)=0$ **在** (x_0,y_0,z_0,u_0) **邻域上确定唯一的隐函数** $x=x(y,z,u)$. **代入**$v=g(x,y,z)$**, 得**$v=g(x(y,z,u),y,z)$. **我们希望证明其与** y,z **无关, 仅是**u**的函数, 得**u,v **函数相关. 为此我们需证**

$$\frac{\partial g(x(y,z,u),y,z)}{\partial y}\equiv 0,\quad \frac{\partial g(x(y,z,u),y,z)}{\partial z}\equiv 0.$$

但

$$\begin{aligned}\frac{\partial g(x(y,z,u),y,z)}{\partial y}&=\frac{\partial g}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{\partial g}{\partial x}\cdot\left(-\frac{\partial f}{\partial y}\Big/\frac{\partial f}{\partial x}\right)+\frac{\partial g}{\partial y}\\&=\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial x}}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial g}{\partial x}\right)=\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial x}}\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)},\end{aligned}$$

而$\operatorname{rank}\left(\frac{D(f,g)}{D(x,y,z)}\right)=1$**, 因此**$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}=0$. **得**$g(x(y,z,u),y,z)$ **与** y **无关. 同理其与**z **无关. 定理得证.**

设在定理 1 中 $y_1=f_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,y_r=f_r(x_1,\cdots,x_n)$ **函数无关, 而** $f_{r+1}=G_{r+1}(f_1,\cdots,f_r),\cdots,f_m=G_m(f_1,\cdots,f_r)$. **则映射**

$$(x_1,\cdots,x_n)\to(f_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,f_m(x_1,\cdots,x_n))=(y_1,\cdots,y_m)$$

可分解为

$$
\begin{aligned}
(x_1,\cdots,x_m) &\to (f_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,f_r(x_1,\cdots,x_n)) = (y_1,\cdots,y_r) \\
&\to (y_1,\cdots,y_r,G_{r+1}(y_1,\cdots,y_r),\cdots,G_m(y_1,\cdots,y_r)),
\end{aligned}
$$

其中 $\operatorname{rank}\left(\dfrac{D(f_1,\cdots,f_r)}{D(x_1,\cdots,x_n)}\right)=r$. 这一分解简化了对映射象集的描述. 这里就不再进一步讨论了.

§3.4 逆变换定理

设 D 和 Ω 都是 $\mathbf{R}^n$ 中区域, 连续映射 $F:D\to\Omega$ 称为拓扑同胚, 如果存在连续映射 $G:\Omega\to D$ 使得 $F\circ G=id, G\circ F=id$, 其中 id 表示恒等映射.

如果在上面定义中, F 和 G 都是 C^r 的映射, 则 F 称为 r 阶微分同胚. 映射 $F:(x_1,\cdots,x_n)\to(y_1,\cdots,y_n)$ 也称为坐标 $(x_1,\cdots,x_n)$ 到 $(y_1,\cdots,y_n)$ 的变元代换, G 称为 F 的逆变换, 也记为 F^{-1}.

如果 $F:(x_1,\cdots,x_n)\to(y_1,\cdots,y_n)$ 是 D 到 Ω 的 C^1 的微分同胚, 由 Jacobi 矩阵的链法则得

$$
I=\frac{D(x_1,\cdots,x_n)}{D(x_1,\cdots,x_n)}=\frac{D(x_1,\cdots,x_n)}{D(y_1,\cdots,y_n)}\cdot\frac{D(y_1,\cdots,y_n)}{D(x_1,\cdots,x_n)}
$$

特别的, $\dfrac{\partial(y_1,\cdots,y_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}\neq 0$ 在 D 上处处成立. 因此对于映射 $F:(x_1,\cdots,x_n)\to(y_1,\cdots,y_n)$, 其 Jacobi 行列式 $\dfrac{\partial(y_1,\cdots,y_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}$ 处处不为零是这一映射为微分同胚的一个必要条件.

如果 $n=1$, $f(x)$ 是 (a,b) 上的函数, 且 $f'(x)$ 在 (a,b) 上处处不为零, 则 $f'(x)$ 在 (a,b) 上恒大于零或恒小于零. 因此 $f(x)$ 是 (a,b) 上严格单调的函数, 其反函数也可导, 得 $f:(a,b)\to(f(a),f(b))$ 是微分同胚.

例: 设 $D=\{(x,y)\,|\,0<x^2+y^2<1\}$, 考虑 $F:D\to D$,

$$
F(x,y)=(x^2-y^2,2xy)=(u,v),
$$

则

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}2x & -2y\\ 2y & 2x\end{vmatrix}=4(x^2+y^2)>0\,.$$

但 $F\left(0,\frac{1}{2}\right)=F\left(0,-\frac{1}{2}\right)$, 映射不是 1–1 的, 因而不能是微分同胚.

注: 利用复数 $z=x+iy,\ w=u+iv$, 映射 F 可表为 $w=z^2$. 容易看出其是 2 对 1 的映射.

虽然 $n\ge 2$ 时, Jacobi 行列式处处不为零不能保证映射在整个区域上是微分同胚, 但确能保证映射局部是微分同胚.

定理 1: 区域 $D\subset\mathbf{R}^n$ 上 C^1 的映射 $F:(x_1,\cdots,x_n)\to(y_1,\cdots,y_n)$ 如果在点 $P_0=(x_1^0,\cdots,x_n^0)\in D$ 满足 $\frac{\partial(y_1,\cdots,y_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}(P_0)\ne 0$. 则存在 P_0 的邻域 U, 使得 $F:U\to F(U)$ 是 C^1 的微分同胚.

证明: 将 F 表示为向量函数

$$F:(x_1,\cdots,x_n)\to(f_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,f_n(x_1,\cdots,x_n))$$

将 $y_1,\cdots,y_n$ 作为自变量, 定义向量函数

$$\begin{gathered}F_1(x_1,\cdots,x_n;y_1,\cdots,y_n)=y_1-f_1(x_1,\cdots,x_n),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ F_n(x_1,\cdots,x_n;y_1,\cdots,y_n)=y_n-f_n(x_1,\cdots,x_n)\,.\end{gathered}$$

设 $y_1^0=f_1(x_1^0,\cdots,x_n^0),\cdots,y_n^0=f_n(x_1^0,\cdots,x_n^0)$, 令 $\tilde{P}=(x_1^0,\cdots,x_n^0;y_1^0,\cdots,y_n^0)$, 则

$$\frac{\partial(F_1,\cdots,F_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}(\tilde{P})=(-1)^n\frac{\partial(f_1,\cdots,f_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}(P_0)\ne 0\,.$$

对函数方程组

$$\begin{cases}F_1(x_1,\cdots,x_n;y_1,\cdots,y_n)=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ F_n(x_1,\cdots,x_n;y_1,\cdots,y_n)=0,\end{cases}$$

应用隐函数定理得, 存在 $(y_1^0,\cdots,y_n^0)$ 的邻域 V 和 V 上 C^1 的函数

$$x_1=g_1(y_1,\cdots,y_n),\cdots,x_n=g_n(y_1,\cdots,y_n)$$

满足上面函数方程组. 在V上定义映射

$$G:(y_1,\cdots,y_n)\to(g_1(y_1,\cdots,y_n),\cdots,g_n(y_1,\cdots,y_n)),$$

则由$F_1,\cdots,F_n$的定义得$F\circ G=id$. 令$U=G(V)$, 则不难看出U是开集, 且F限制在U上后满足$G\circ F=id$. 因此$F:U\to V$是C^1的微分同胚.

推论 1: 设F是$\mathbf{R}^n$中区域D到Ω的C^1的映射. 如果F是 1–1 的, 且F的 Jacobi 行列式处处不为零, 则F是微分同胚.

推论 2: 设F是$\mathbf{R}^n$中区域D到Ω的C^1的映射, 且F的 Jacobi 行列式处处不为零, 则F将D中开集映为Ω中开集, 将一个区域的边界映为其象集的边界.

推论的证明留给读者作为思考题.

习题

1. 对由下列各方程式所定义的函数y求出y'和y''.

(1) $x^2+2xy-y^2=a^2$;　　(2) $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$;

(3) $y=2x\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$;　　(4) $xy-2^x\ln 2+2^y=0$.

2. 设

$$x^2+y^2+z^2-3xyz=0 \tag{*}$$

及

$$f(x,y,z)=xy^2z^3.$$

求:

(1) $f_x'(1,1,1)$, 其中$z=z(x,y)$是由方程(*)确定的隐函数.

(2) $f_x'(1,1,1)$, 其中$y=y(x,z)$是由方程(*)确定的隐函数.

3. 已知方程

$$x^2+y^2=1. \tag{A}$$

设

$$y=y(x)\quad(-1\le x\le 1) \tag{B}$$

为满足方程(A)的函数.

(1) 问有多少函数(B)满足方程(A)?

(2) 有多少连续函数(B)满足方程(A)?

（3）又设: $(a)\quad y(0)=1\quad (b)\quad y(1)=0$，问有多少连续函数（$B$）满足方程（$A$）？

4． 对下列函数 $f(x,y)$，当 $(x,y)\in\Omega\subset\mathbf{R}^2$ 时是否有 $\det Df(x,y)\neq 0$ ？求出 $f(\Omega)$，若 $f(x,y)$ 是单叶的，再求出 $f^{-1}(x,y)$.

（1） $f(x,y)=\begin{pmatrix} x+2y \\ x-y \end{pmatrix}$, $\Omega=\mathbf{R}^2$;

（2） $f(x,y)=\begin{pmatrix} x^2-x-2 \\ 3y \end{pmatrix}$, $\Omega=\mathbf{R}^2$;

（3） $f(x,y)=\begin{pmatrix} x^2-y^2 \\ xy \end{pmatrix}$, $\Omega=\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$;

（4） $f(x,y)=\begin{pmatrix} \ln(xy) \\ \dfrac{1}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$, $\Omega=\{(x,y)\,|\,0<y<x\}$.

5．设 $\overline{\Omega}\subset\mathbf{R}^m$ 是有界闭区域，$f(x)\in C(\overline{\Omega},\mathbf{R}^m)$ 且是单叶的. 求证 $f^{-1}(x)$ 在 $f(\overline{\Omega})$ 连续.

6．设 $\Omega\subset\mathbf{R}^m$ 是开凸集，$f(x)\in\mathbf{R}^m$，$f(x)$ 在 Ω 可微，$Df(x)$ 在 Ω 是正定矩阵. 求证: $f(x)$ 是 Ω 上的单叶函数.

7．设 $\Omega\subset\mathbf{R}^m$ 是开区域（连通开集），$f(x)$ 是 Ω 上的单叶函数，$f(x)\in C^{(1)}(\Omega,\mathbf{R}^m)$，$\det Df(x)\neq 0\ (x\in\Omega)$. 求证: $f(\Omega)$ 是开区域.

8．试由方程式的隐函数存在定理证明方程组

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$$

的隐函数存在定理.

9．由下列方程组求 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{dz}{dx}$ 和 $\dfrac{d^2y}{dx^2},\dfrac{d^2z}{dx^2}$.

（1） $\begin{cases} x+y+z=0, \\ x^2+y^2+z^2=1; \end{cases}$ （2） $\begin{cases} x^3+y^3+z^3=3xyz, \\ x+y+z=a. \end{cases}$

10．求由方程组

$$x=u\cos v,\ y=u\sin v,\ z=v$$

确定的函数 $z=z(x,y)$ 的所有二阶偏导数.

11．设函数 $u=u(x)$ 由方程组

$$u = f(x,y,z),\ g(x,y,z)=0,\ h(x,y,z)=0$$

定义．求 $\dfrac{du}{dx}, \dfrac{d^2u}{dx^2}$.

12．设 $x\in \mathbf{R}^m,\ y\in \mathbf{R}^n,\ F(x,y)\in \mathbf{R}^n$．又设 $F(x,y)\in C^{(1)}$，$\det D_y F(x,y)\neq 0$，由方程组 $F(x,y)=0$ 确定隐函数 $y=y(x)=(y_1(x),\cdots,y_n(x))$．

（1）求证：$Dy(x)=-\left[D_y F(x,y)\right]^{-1} D_x F(x,y)$；

（2）若 $n=m$，求证：

$$\frac{\partial(y_1,\cdots,y_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}=(-1)^n\,\frac{\partial(F_1,\cdots,F_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}\Bigg/\frac{\partial(F_1,\cdots,F_n)}{\partial(y_1,\cdots,y_n)}.$$

13．设 $f(x)$ 在 (a,b) 上导数不为零．求证：(a,b) 上任意函数 $y=j(x)$ 可以用 $f(x)$ 表示．

14．设 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2,\ g(x,y,z)=x+y+z$．问在任意区域内，它们是否相互表示？

15．给定 $C^{(1)}$ 函数组

$$u=f_1(x,y),\ v=f_2(x,y),\ w=f_3(x,y),$$

并设在开区域 Ω 内 $\dfrac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x,y)}\neq 0$．

（1）对任意 $M\in\Omega$，是否存在 M 的一个邻域 $U(M)$，在此邻域有

$$f_3(x,y)=\Phi\left[f_1(x,y),\ f_2(x,y)\right]\ ?$$

为什么？

（2）在整个区域 Ω 是否有 $f_3(x,y)=y\left[f_1(x,y),\ f_2(x,y)\right]$？