第八章　曲线积分和曲面积分

我们前面已学过定积分和重积分，当一个函数定义在空间的曲线或曲面时，则要求我们计算曲线积分或曲面积分。由于物理背景的不同，我们还须区别曲线或曲面的方向性，因此我们要分别研究两种不同类型的积分。

§1 第一型曲线积分与曲面积分

1． 第一型曲线积分

我们研究如下的一个理想问题，给定空间的一条曲线物体 L，L 上每点有线密度，现在我们要求它的质量。

我们对此问题作如下限制，设 L 是空间的可求长曲线，端点为 A 和 B，密度函数 $f(x,y,z)$ 在 L 上定义。为了求质量，象定积分一样，我们对 L 作一分割，$A=A_0,A_1,\cdots,A_n=B,(A_j,\ j=1,2,\cdots,n,$在$L$上$)$，这样我们就将 L 分成 n 小段，设每段的长度为$\square s_j$。在每段弧长上任取一点(x_i,h_i,V_i)，作和式

$$\sum_{j=1}^{n} f(x_j,h_j,V_j)\square s_j$$

以此作为 L 质量的近似值。最后我们令 $l=\max\limits_{1\le j\le n}\{\square s_j\}\to 0$，即可得到 L 质量的精确值 M，即

$$M=\lim_{l\to 0}\sum_{j=1}^{n} f(x_j,h_j,V_j)\square s_j$$

由此我们可得到以下定义

定义　　设 L 是空间可求长曲线，$f(x,y,z)$ 在 L 上连续，L 的两个端点为 A,B，依次用分点 $A=A_0,A_1,\cdots,A_n=B$ 将 L 分成 n 小段。每小段弧及弧长均记为$\square s_j$，在$\square s_j$上任取一点 $P_j=(x_j,h_j,V_j)$，作和式

$$\sum_{j=1}^{n} f(x_j,h_j,V_j)\square s_j$$

如果当 $l=\max\limits_{1\le j\le n}\{\square s_j\}\to 0$ 时，上述和式的极限存在，且不依赖于 L 的分法及 P_j 的选取，则称这一极限值为 $f(x,y,z)$。在 L 上的第一型曲线积分，记作 $\int_L f(x,y,z)ds$。

第一型曲线积分也有类似于定积分的一些性质，如关于被积函数的线性及关于曲线的可

加性，它与定积分的一个差别是第一型曲线积分与曲线的方向无关。希望读者能注意到这一点。

关于第一型曲线积分，我们有以下定理。称一条曲线 L：$x=x(t), y=y(t), z=z(t)$，

$(a \le t \le b)$ 是光滑的，如果 $x(t), y(t), z(t) \in C^{(1)}[a,b]$，且对 $t \in [a,b]$，

$$x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t) \ne 0$$

定理 1　设 L：$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$，$(a \le t \le b)$，光滑曲线，函数 $f(x,y,z)$ 在 L 上连续，则

$$\int_L f(x,y,z)ds=\int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt$$

证：由弧长公式，我们有

$$s(t)=\int_a^t \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt$$

有 $S'(t)=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}>0$，从而 $s(t)$ 是 $[a,b]$ 上严格递增的连续函数，且记 $l=s(b)$，则 $s(t)$ 将 $[a,b]$ 一一地映成 $[0,l]$，$s=s(t)$ 存在反函数 $t=t(s)$。令 $x=x(t(s))$，$y=y(t(s))$，从而得到以弧长为参数的曲线 L 的方程，因此对 L 的任一分割得到的和式

$$\sum_{j=1}^n f(x_j, h_j, V_j)\square s_j=\sum_{j=1}^n f(x(t(\overline{s}_j)), y(t(\overline{s}_j)), z(t(\overline{s}_j)))\square s_j$$

由于右边是连续函数 $f(x(t(s)), y(t(s)), z(t(s)))$ 在 $[0,l]$ 上的 Riemann 和，从而当 $l=\max\limits_{1\le j\le n}\{\square s_j\}\to 0$ 时，右边趋向它在 $[0,l]$ 上的定积分，从而有

$$\int_L f(x,y,z)ds\int_0^l f(x(t(s)), y(t(s)), z(t(s)))ds$$

对上式右端作积分变量替换 $s=s(t)$，即得

$$\int_L f(x,y,z)ds=\int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt$$

例1　计算第一性曲线积分 $I=\int_L \sqrt{x^2+y^2}ds$，L：$x^2+y^2=ax$。

解：曲线的参数方程：$x=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos t$，$y=\frac{a}{2}\sin t$，$(0 \le t \le 2p)$。因

$ds=\sqrt{(\frac{a}{2}\sin t)^2+(\frac{a}{2}\cos t)^2}\,dt=\frac{a}{2}dt$，所以

$$I=\int_L\sqrt{x^2+y^2}\,ds=\int_0^{2p}\frac{a}{2}\sqrt{\frac{a(1+\cos t)}{2}}dt$$
$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{2p}|\cos\frac{t}{2}|dt=2a^2\int_0^{2p}\cos t dt=2a^2$$

例2　**设** L **为球面** $x^2+y^2+z^2=a^2$ **与平面** $x+y+z=0$ **的交线，试求**

$$I=\int_L x^2 ds$$

解法 1　**先求** L **的参数方程，为此考虑正交变换**

$$\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{2}}(x-y) \\ h=\frac{1}{\sqrt{6}}(x+y-2z) \\ V=\frac{1}{\sqrt{3}}(x+y+z) \end{cases}$$

在坐标系 O_{xhV} **中** L **的参数方程为** $x=a\cos t, h=a\sin t, V=0, (0\le t\le 2p)$，**所以在坐标系**

O_{xyz} **中** L **的参数方程为：**

$x=\frac{a}{\sqrt{2}}\cos t+\frac{a}{\sqrt{6}}\sin t, y=-\frac{a}{\sqrt{2}}\cos t+\frac{a}{\sqrt{6}}\sin t, z=-\frac{2a}{\sqrt{6}}\sin t$，$(0\le t\le 2p)$，**应用公式得**

$$I=\int_0^{2p}(\frac{a}{\sqrt{2}}\cos t+\frac{a}{\sqrt{6}}\sin t)^2 a dt=\frac{2}{3}p a^3。$$

解法 2　**由对称性知**

$$\int_L x^2 ds=\int_L y^2 ds=\int_L z^2 ds$$

所以

$$I=\frac{1}{3}\int_L(x^2+y^2+z^2)ds=\frac{a^2}{3}\int_L ds=\frac{a^2}{3}\cdot 2p a=\frac{2}{3}p a^2。$$

2．**第一型曲面积分**

为了定义第一型曲面积分，我们首先要解决曲面的面积问题。回忆一下，在求曲线长度时，我们是用曲线的内接折线或外接折线的长度来逼近曲线的长度的。对于空间的曲面，我们现在能够直接计算的只有平面图形的面积，因此我们希望用多面形的面积来逼近曲面的面

积。

一个最自然的方法是用曲面的内接多面形的面积逼近曲面的面积。遗憾的是这种方法是行不通的。Schwarz 曾对圆柱面这一简单曲面作过研究，他证明了圆柱面的内接三角形面积和的极限依赖于三角形高与低的比例。若我们选取的小三角形与圆柱切面几乎垂直时，则三角形面积和可以趋于无穷。因此，我们不能用这种方法来逼近曲面的面积。

仔细分析以上的例子，我们发现出现这种情况的主要问题是构造的平面与切平面的角度不保持一致。这也启发我们用小块切平面来近似曲面的面积。这时曲面与近似的平面保持方向一致。因此分割很细时，它们的面积和将近似于曲面的面积。

我们先来求光滑曲面 S：

$$z = f(x, y) \qquad\qquad (x, y) \in D$$

的面积。这里我们对此曲面作如下假定：D 是又光滑函数曲线围成的区域，f_x, f_y 在 D 连续。由此，我们知道曲面每一点的切平面都存在。

任给曲面一个分割，我们相应地得到 D 的一个分割。反之亦然。因此，我们从 D 的一个分割着手。设 D 有一个分割 $\Delta D_i (i = 1, 2 \cdots n)$。这样我们得到 S 的一个分割 $\Delta S_i (i = 1, 2 \cdots n)$。为了近似地求出 ΔS_i 的面积，我们在 ΔS_i 任取一点 $(x_i, h_i, f(x_i, h_i))$，作曲面过该点的切平面，去切平面与 ΔS_i 具有相同的投影区域的部分为 Δs_i。因此我们得到了曲面 S 的一个近似面积

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i$$

由于曲面在 $P_j(x_j, h_j, f(x_j, h_j))$ 处的法向为

$$\pm(f_x(x_j, h_j), f_y(x_j, h_j), -1)$$

从而 S 在 P_j 处的方向余弦 $(\cos a, \cos b, \cos g)$ 中的 $\cos g$ 满足

$$|\cos g| = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2(x_j, h_j) + f_y^2(x_j, h_j)}}$$

因此 S 的面积可以近似地表示成连续函数 $F(x, y) = \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)}$ 在区域 D 内的 Riemann 和。由假定，当 $l = \max_{1 \le j \le n}$ {D_j 的直径} $\to 0$ 时，我们有

$$\begin{aligned} S &= \lim_{l \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(x_i, h_i) \Delta D_i \\ &= \iint_D \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)}\, dxdy \end{aligned}$$

这样我们就得到了曲面S的面积计算公式。从微元法的观点，我们有以下的面积微元表达式，

$$ds = \frac{dxdy}{|\cos g\,|} = |\vec{n}\,|\,dxdy$$

前一表达式我们从以上推导得到，后一表达式我们可以这样来理解，任取曲面一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$，作以平面 $x = x_0$ 及 $y = y_0$ 与曲面的交得到两条曲线，这两条曲线在 P_0 的切方向为 $\vec{r}_1 = (1,0, f_x)$ 及 $\vec{r}_2 = (1,0, f_y)$，它们张成的小平行四边形的面积即为

$$|\,\vec{r}_1 \times \vec{r}_2\,|\,dxdy = \sqrt{1 + f_x^{\,2} + f_y^{\,2}}\,dxdy$$

利用这种思路，我们可以用微元法求一般参数方程所确定的曲面的面积。

设空间曲面S方程为：

$$x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v), \quad (u,v) \in D$$

其中 D 是有界闭区域。函数 x, y, z 在 D 具有连续偏导，且 Jacobi **矩阵**

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

在 D **的每一点的秩为2。因此我们推出曲面每点都存在两个线性无关的切向量**

$$\vec{r}_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\ \ \frac{\partial y}{\partial u}\ \ \frac{\partial z}{\partial u}\right)$$

$$\vec{r}_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\ \ \frac{\partial y}{\partial v}\ \ \frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

从而该点的法向量

$$\begin{aligned}\vec{n} &= \pm\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) \\ &= \pm\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \\ &= \pm(\vec{r}_u \times \vec{r}_v) \neq 0\end{aligned}$$

现记

$$A = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \quad B = \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \quad C = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

我们有

$$\vec{n} = \pm(A, B, C)$$

由前面关于曲面 $z = f(x, y)$ 的面积的讨论，我们推知，现在的曲面的面积微元为

$$ds = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,dudv$$

若我们令

$$\begin{aligned} E &= x_u'^2 + y_u'^2 + z_u'^2 \\ G &= x_v'^2 + y_v'^2 + z_v'^2 \\ F &= x_u' x_v' + y_u' y_v' + z_u' z_v' \end{aligned} \qquad (*)$$

则　$A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2$

从而我们有

$$\begin{aligned} S &= \iint_D \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,dudv \\ &= \iint_D \sqrt{EG - F^2}\,dudv \end{aligned}$$

有了以上准备，我们可以给出第一型曲面积分的定义。

定义　设 S 是可求面积的连续曲面，$f(x, y, z)$ 在 S 上有定义，对 S 作分割 $\Delta S_1, \cdots, \Delta S_n$（$\Delta S_i$ 的面积仍记为 ΔS_i）。记 $l = \max\limits_{1 \le i \le n}$ {S_i 的直径}，在 ΔS_i 上任取一点 $M_i = (x_i, h_i, V_i)$。

如果存在不依赖于分划及 M_i 的选取的极限

$$I = \lim_{l \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, h_i, V_i)\Delta S_i$$

则称 I 为 $f(x, y, z)$ 在 S 上的第一型曲面积分，记作

$$I = \iint_S f(x, y, z)\,ds$$

以下的定理给出了第一型曲面积分的计算公式。

定理　设 S 是光滑曲面，其参数方程为

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v), \quad (u, v) \in D$$

再设 $f(x, y, z)$ 在 S 上连续，则积分 $\iint_S f(x, y, z)\,ds$ 存在，且

$$\iint_S f(x,y,z)ds=\iint_D f[x(u,v),y(u,v),z(u,v)]dudv$$

其中 A,B,C **见（∗）。**

定理的证明可以由定义得到。略。

例１．　计算 $x^2+y^2+z^2=R^2$ **被** $x^2+y^2\le Rx$ **所截出的曲面面积。**

解：对球面方程求偏导得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z}，\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

设所求面积为 S**，则有**

$$S=\iint_{x^2+y^2\le Rx}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$=2R\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}dq\int_0^{R\cos q}\frac{rdr}{\sqrt{R^2-r^2}}$$

$$=2R\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}(R-R|\sin q|)dq$$

$$=4(\frac{p}{2}-1)R^2$$

例２．　计算曲面积分

$$I=\iint_S z^2dS$$

其中 S**：**$x^2+y^2+z^2=a^2$**。**

解法一　由对称性，容易看出

$$\iint_S x^2dS=\iint_S y^2dS=\iint_S z^2dS$$

所以

$$I=\iint_S(x^2+y^2+z^2)dS==\frac{a^2}{3}\int_S dS=\frac{4}{3}p\,a^4$$

解法二　**S **的参数式为

$$x=a\cos q\sin j\ ,\ y=a\sin q\sin j\ ,\ z=a\cos j$$
$$D=\{(q\ ,j\ ):0\le q\le 2p\ ,\ 0\le j\le p\ \}$$

因

$$E=a^2\sin^2 j\ ,\ F=0,\ G=a^2$$

所以

$$dS=\sqrt{EG-F^2}d\theta\, d\varphi\ =a^2\sin\varphi\, d\theta d\varphi\ ,$$

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}a^2\cos^2\varphi\cdot a^2\sin\varphi\, d\varphi\ =\frac{4}{3}\pi\, a^4$$

例３． 计算曲面积分

$$I=\iint_S\frac{1}{z}dS$$

其中 S **是曲面** $x^2+y^2+z^2=a^2$ **被平面** $z=h$ **（**$0<h<a$**）所截的顶部。**

解 S **可表示为：**

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2},\quad D: x^2+y^2\le a^2-h^2$$

$$dS=\sqrt{1+{z_x}^2+{z_y}^2}dxdy=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$$

于是有

$$I=\iint_S\frac{1}{z}dS=\iint_D\frac{a}{a^2-x^2-y^2}dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{a^2-h^2}}\frac{a}{a^2-r^2}\cdot rdr=2\pi\, a\log\frac{a}{h}$$

例４． 求半径为Ｒ，密度为 ρ **的均匀球层对任意一点Ａ的位势。**

解 去球心为坐标原点，z **轴过** A **点，设Ａ点的坐标为** $(0,0,a)$ **（**$0<a<R$ **或** $a>R$**），所以** A **点的单层位势为：**

$$W(0,0,a)=\iint_S\frac{\rho\, dS}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}$$

S **的参数方程为**

$$x=R\cos\theta\sin\varphi,\ y=R\sin\theta\sin\varphi,\ z=R\cos\varphi$$

$$D=\{(\theta,\varphi):0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le\varphi\le\pi\},\ dS=R^2\sin\varphi\, d\theta d\varphi$$

所以

$$
\begin{aligned}
W(0,0,a) &= \rho R^2\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\pi}\frac{\sin\varphi\, d\varphi}{\sqrt{R^2-2Ra\cos\varphi+a^2}} \\
&= 2\pi\rho R^2\left[\frac{1}{2aR}\int_0^{\pi}\frac{d(R^2-2Ra\cos\varphi+a^2)}{\sqrt{R^2-2Ra\cos\varphi+a^2}}\right] \\
&= \frac{2\pi\rho R}{a}\sqrt{R^2-2Ra\cos\varphi+a^2}\Big|_0^{\pi} \\
&= \frac{2\pi R}{a}\rho\left[R+a-\left|R-a\right|\right]=\begin{cases}4\pi R\cdot\rho\ , & 0<a<R\\ \dfrac{4\pi R^2}{a^2}\rho\ , & a>R\end{cases}
\end{aligned}
$$

结果表明：在均匀球层里面，它的位势为一常数；在球层外面，相当于把球层的全部质量集中于球心时所产生的位势一样。

求球层时 $A(0,0,a)$ **点的引力，由对称性知** $F_x=F_y=0,$

$$
F_z=\frac{\partial W(0,0,z)}{z}\bigg|_{z=a}=\begin{cases}0\ , & 0<a<R\\ -\dfrac{4\pi R^2\rho}{a^2}, & a>R\end{cases}
$$

结果表明：在球层里面的单位质量，都不受球层的任何引力；在球层外面的单位质量，相当于把球层的质量集中到球心时所受到的引力一样。

§2 第二型曲线积分和曲面积分

1．第二型曲线积分

我们观察以下的物理问题。设空间一质点在变力 $\vec{F}(x,y,z)$ **的作用下沿光滑曲线** L **从点** A **运动到了点** B**。现在要求我们计算** $\vec{F}(x,y,z)$ **所做的功W。**

我们知道常力 $\vec{F}$ **作用质点沿力的方向从A移到B时的功为** $W=\vec{F}\cdot\overline{AB}$**。现在的问题是变力** $\vec{F}(x,y,z)$ **的大小及方向都在变化。为此我们使用积分中的惯用方法。**

从 A **到** B **给曲线L一个划分：**

$$
A=M_0,M_1,\cdots,M_n=B
$$

其中 $M_i=(x_i,y_i,z_i)\in L,\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ **的弧长记为** ΔS_i **，并记** $l=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta S_i\}$**。在** $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ **上任取** (ξ_i,η_i,ζ_i)**。当** l **很小，并且** $\vec{F}(x,y,z)$ **性质很好时，我们可以将** $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ **近似的看成** $\overline{M_{i-1}M_i}$ **，而将** $\vec{F}(x,y,z)$ **在** $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ **上近似地看作** $\vec{F}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$**。由此我们得到W的一个近似值**

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(x_i, h_i, V_i)\overline{M_{i-1}M_i}$$

当 $l \to 0$ 时，若上式存在不依赖于分划及 (x_i, h_i, V_i) 选取的极限时，该极限即为W的精确值。

记

$$\vec{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$$

$$\overline{M_{i-1}M_i} = (\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i) = (x_i - x_{i-1}, y_i - y_{i-1}, z_i - z_{i-1})$$

$$W = \lim_{l \to 0} \sum_{i=1}^{n} P(x_i, h_i, V_i)\Delta x_i + Q(x_i, h_i, V_i)\Delta y_i + R(x_i, h_i, V_i)\Delta z_i$$

由此我们引入以下定义

定义　设函数 $P(x,y,z)$ 在空间光滑曲线 $L = \overset{\frown}{AB}$ 上有定义，从 A 到 B 给 L 一个分划：$A = M_0, M_1, \cdots, M_n = B$，其中 $M_i = (x_i, y_i, z_i) \in L$，记 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 的弧长为 ΔS_i，$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ 及 $l = \max\limits_{1 \le i \le n}\{\Delta S_i\}$，任取 $(x_i, h_i, V_i) \in \overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$，作和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, h_i, V_i)\Delta x_i$$

若当 $l \to 0$ 时，若上式存在不依赖于分划及 (x_i, h_i, V_i) 选取的极限 I，则称 I 为函数 f 沿有向曲线 L 对 x 的第二型曲线积分，记为 $I = \int_L f(x,y,z)dx = \int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y,z)dx$

同理我们可以定义

$$\int_L f(x,y,z)dy \text{ 和 } \int_L f(x,y,z)dz$$

回到关于功的计算，我们有

$$W = \int_L P(x,y,z)dx + \int_L Q(x,y,z)dy + \int_L R(x,y,z)dz$$

若记 $d\vec{s} = (dx, dy, dz)$，则

$$W = \int_L \vec{F}(x,y,z)d\vec{s}$$

第二型曲线积分与第一型曲线积分的区别之一是第二型曲线积分具有方向性。换句话说，我们有以下等式

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy + Rdz = -\int_{\overset{\frown}{BA}} Pdx + Qdy + Rdz$$

以后我们还会遇到闭曲线 L 的积分。我们有以下记号

$$\oint_L Pdx+Qdy+Rdz$$

这时积分只与 L 的方向有关，而与起点的选择无关。

对于第二型曲线积分的计算，我们有以下结果。

定理 **设** $f(x,y,z)$ **在光滑曲线**

$$\overset{\frown}{AB}:\quad x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)\quad a\le t\le b$$

上连续，其中 $A=(x(a),y(a),z(a))$**，** $B=(x(b),y(b),z(b))$

则

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y,z)dx=\int_a^b f(x(t),y(t),z(t))x'(t)dt$$

证：由曲线的方向决定其上每点 (x,y,z) **处的单位切向量是** $\vec{t}$ **的方向，** t **的方向余弦记为**

$(\cos<t,x>\quad \cos<t,y>\quad \cos<t,z>)$**，其中** $<t,x><t,y><t,z>$ **分别表示向量** $\vec{t}$ **与坐标向量** $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ **的内积，从而由参数式有**

$$\cos<t,x>=\frac{x'(t)}{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}}=\frac{dx}{ds}$$

$$\cos<t,y>=\frac{dy}{ds}$$

$$\cos<t,z>=\frac{dz}{ds}$$

从而，由第一型曲线积分的计算公式得

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y,z)dx=\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y,z)\cos<t,x>ds$$
$$=\int_a^b f(x(t),y(t),z(t))x'(t)dt$$

例１． 计算曲线积分

$$I=\int_{\overset{\frown}{OA}}(x^2+y^2)dx+4xydy$$

1）$\overset{\frown}{OA}$ **为上半圆周：** $x^2+y^2=ax(y\ge 0)$

2）$\overset{\frown}{OA}$ **为** x **轴上线段** $\overline{OA}$**。**

解 1）$\overset{\frown}{OA}$ **的参数方程为** $x=x,\ y=\sqrt{ax-x^2}\ (0\le x\le a)$**，起点** O **对应于** $x=0$**，终点** A **对应于** $x=a$**。所以**

$$I=\int_0^a\left[ax+2x(a-2x)\right]dx=\int_0^a(3ax-4x^2)dx=\frac{a^3}{6}$$

若取$\overset{\frown}{OA}$**的参数方程为** $x=\frac{a}{2}(1+\cos t),\ y=\frac{a}{2}\sin t(0\le t\le p)$**，起点对应** $t=p$ **，终点对应** $t=0$**，所以**

$$I=\int_p^0\left[\frac{a^2}{2}(1+\cos t)(-\frac{a^2}{2}\sin t)+a^2(1+\cos t)\sin t(\frac{a}{2}\cos t)\right]$$

$$=\frac{a^3}{4}\int_0^p(\sin t-2\sin t\cos^2 t)dt=\frac{a^3}{6}$$

2）**直线段**$\overline{OA}$**的参数方程为：** $x=x,\ y=0(0\le x\le a)$**，所以**

$$I=\int_0^a x^2dx=\frac{a^3}{3}$$

此例说明，曲线积分的值不仅与被积函数有关，还与路径有关。

例２． 计算曲线积分

$$I=\int_L e^x\cos ydx-e^x\sin ydy$$

其中 L **为１）折线**$\overset{\frown}{OAB}$ **；直线段**$\overline{OB}$

解　１）折线$\overset{\frown}{OAB}$**的方程为：**

$$y=\begin{cases}x\ , & 0\le x\le\frac{p}{2}\\ p-x\ , & \frac{p}{2}\le x\le p\end{cases}$$

所以

$$I=\int_0^{\frac{p}{2}}e^x(\cos x-\sin x)dx+\int_{\frac{p}{2}}^{p}e^x[\cos(p-x)-\sin(p-x)]dx$$

$$=e^x\cos x\Big|_0^{\frac{p}{2}}+e^x\cos(p-x)\Big|_{\frac{p}{2}}^{p}=e^p-1$$

２） $\overline{OB}$**的参数方程为**$x=x,\ y=0(0\le x\le p)$**，所以**

$$I=\int_0^p e^xdx=e^x\Big|_0^p=e^p-1$$

此例说明，有些曲线积分的值只与被积函数和路径起点、终点有关，而与路径取法无关。

例３． 计算曲线积分

$$I=\int_L (y-z)\,dz+(z-x)dy+(x-y)dz$$

其中 L **是球面** $x^2+y^2+z^2=a^2$ **与平面** $x+y+z=0$ **的交线，从** z **轴正向看出** L **取逆时针方向。**

解法１　取 L 的参数方程为：

$$x=\frac{a}{\sqrt{2}}\cos t+\frac{a}{\sqrt{6}}\sin t, y=-\frac{a}{\sqrt{2}}\cos t+\frac{a}{\sqrt{6}}\sin t, z=-\frac{2a}{\sqrt{6}}\sin t\text{，}(0\le t\le 2p)\text{，}$$

所以

$$\begin{aligned}
&x=\frac{a}{\sqrt{2}}\cos t+\frac{a}{\sqrt{6}}\sin t, y=-\frac{a}{\sqrt{2}}\cos t+\frac{a}{\sqrt{6}}\sin t, z=-\frac{2a}{\sqrt{6}}\sin t\\
&I=\int_0^{2p}[(-\frac{a}{\sqrt{2}}\cos t+\frac{3a}{\sqrt{6}}\sin t)(-\frac{a}{\sqrt{2}}\sin t+\frac{a}{\sqrt{6}}\cos t)+(-\frac{3a}{\sqrt{6}}\sin t-\frac{a}{\sqrt{2}}\cos t)\cdot\\
&\quad(\frac{a}{\sqrt{2}}\sin t+\frac{a}{\sqrt{6}}\cos t)+(\frac{2a}{\sqrt{2}}\cos t)(-\frac{2a}{\sqrt{6}}\cos t)]dt\\
&=-\int_0^{2p}a^2(\sqrt{3}\sin^2 t+\sqrt{3}\cos^2 t)dt=-2\sqrt{3}p\,a^2
\end{aligned}$$

解法二　为求 L 的切向量 $\vec{t}$ **，先求出平面与球面的法向量为：**

$$\vec{N}_1=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}, \vec{N}_2=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

所以 L 的切向量 $\vec{T}$ **为：**

$$\vec{T}=\vec{N}_1\times\vec{N}_2=(z-y)\vec{i}+(x-z)\vec{j}+(y-x)\vec{k}$$

由图可以看出 $\vec{T}$ **的方向与 L 的方向一致，由此得**

$$\vec{t}=\frac{(z-y)\vec{i}+(x-z)\vec{j}+(y-x)\vec{k}}{\sqrt{(z-y)^2+(x-z)^2+(y-x)^2}}$$

于是有

$$\begin{aligned}
&\vec{t}=\frac{(z-y)\vec{i}+(x-z)\vec{j}+(y-x)\vec{k}}{\sqrt{(z-y)^2+(x-z)^2+(y-x)^2}}\\
&I=\int_L[(y-z)\cos<t,x>+(z-x)\cos<t,y>+(x-y)\cos<t,z>]ds\\
&\quad=-\int_L\frac{(z-y)^2+(x-z)^2+(y-x)^2}{\sqrt{(z-y)^2+(x-z)^2+(y-x)^2}}ds\\
&\quad=-\int_L\sqrt{(z-y)^2+(x-z)^2+(y-x)^2}\,ds\\
&\quad=-\int_L\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)^2}\,ds=-\int_L\sqrt{3}a\,ds=-2\sqrt{3}p\,a^2
\end{aligned}$$

2.**第二型曲面积分**

对于空间的曲面，很多的情形我们可以区分出它的侧。例如，在区域D定义的连续曲面，$z=f(x,y)$，我们可以说出它的上侧与下侧。对球面 $x^2+y^2+z^2=R^2\ (R>0)$ 可以说出它的内侧与外侧。是不是所有的曲面都有侧呢？ 首先我们看上面的例子，假设曲面S：$z=f(x,y)$ 是光滑的，那么 S **上每点** M **有两个相反的法向量** $\pm\vec{n}$ **,其中一个与** z **轴夹角** $<\dfrac{p}{2}$ **，我们称这个法向量为上侧的法向量。由于** $\vec{n}$ **的连续性，若M在曲面上沿任意的光滑曲线连续变动让法向量** $\vec{n}(M)$ **也连续地变化，只要M不越过S的边界，当它回到** M_0 **时，** $\vec{n}(M)$ **也回到了** $\vec{n}(M_0)$ **。对球面也一样，从一点出发的法线经过任何闭曲线而连续变化时，当它回到起点时，它又回到了起始的法向量。**

是不是所有的曲面都有此性质呢？著名的牟比乌斯()带就不具有此性质。我们取一长方形带子 ABCD**，先扭曲** 180° **，然后** A **与** C**，**B **与** D **粘合起来得到一条封闭的带子。此带子就称为牟比乌斯带。若在此带子上某一点取定一法向，然后沿中心线走一圈，回到该点时，法向则完全改变了方向。**

因此我们称法线沿着曲面上不越过边界曲线的闭曲线回到起点时不改变方向的曲面为双侧曲面，否则就称为单侧曲面。

球面与常见曲面都是双侧曲面，而牟比乌斯带则为单侧曲面。今后我们主要涉及的曲面都为双侧曲面。

对于双侧曲面来说，在曲面上一点确定一个法线的方向即确定了曲面的一侧。例如，设光滑曲面S由函数

$$z=f(x,y)\qquad (x,y)\in D$$

确定，在曲面上任意一点有确定的法线，曲面S的单位法方向为

$$(\cos a,\cos b,\cos g)=\pm\left(\frac{-f_x}{\sqrt{1+f_x{}^2+f_y{}^2}},\frac{-f_y}{\sqrt{1+f_x{}^2+f_y{}^2}},\frac{1}{\sqrt{1+f_x{}^2+f_y{}^2}}\right)$$

由曲面的光滑性推知，当上式取定了正负好时，三个分量即是 (x,y) **的连续函数。及法向量随点的位置连续变动，从而正负号的选取就确定曲面的一侧。例如，当** $\cos g>0$ **时，说明法向与** z **轴正向的夹角为锐角，即得到了曲面的上侧，若** $\cos g<0$ **，即得到了下侧。**

对于参数方程

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v),\quad z=z(u,v)\quad (u,v)\in D$$

确定的双侧光滑曲面，设 A,B,C **由上节中定义，则曲面上的法向量**

$$\vec{n}=\pm\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right)$$

同理取定正负号，由 A,B,C 的连续性也就确定了一侧。对于封闭曲面，有时要考虑内侧和外侧。例如，当我们考虑球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 时，它的外侧在 $z\ge 0$ 部分是曲面的上侧，而在 $z<0$ 的部分是它的下侧。同理在 $y\ge 0$ 的部分是曲面的右侧，而在 $y<0$ 的部分是曲面的左侧。

有了对曲面的侧的了解，我们现在来引进第二型曲面积分的概念。为此，我们先来看一个物理问题。

设空间有一流体场，为了方便起见，假定该流体场与时间无关，它的速度 $\vec{v}$ 与位置有关，即

$$\vec{v}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

现假定空间有双侧曲面 S，要求我们求出流体流过 S 的流量。

我们取定 S 的一侧为正侧，其对应的单位法向量 $\vec{n}=(\cos a,\cos b,\cos g)$ 的每个分量都是 (x,y,z) 的连续函数。设 $\vec{v}=(P,Q,R)$ 中的 P,Q,R 也是 (x,y,z) 的连续函数。现在我们来求流体单位时间从负侧流向正侧的流量。

我们首先给 S 的一个分划 $\Delta S_1,\cdots \Delta S_n$，其面积仍记为 ΔS_i。任取 $(x_i,h_i,V_i)\in \Delta S_i$，这点的流向量为 $\vec{v}(x_i,h_i,V_i)$，法向量为 $\vec{n}(x_i,h_i,V_i)$。当 ΔS_i 的直径很小时，将 ΔS_i 看成是点 (x_i,h_i,V_i) 的切平面上的一小块区域，且这一小块区域上的流速也看成是常数 $\vec{v}(x_i,h_i,V_i)$。这时流过切平面这一小块的流量应该是

$$\vec{v}(x_i,h_i,V_i)\Delta S_i \vec{n}(x_i,h_i,V_i)$$

从而整个流量可近似等于

$$\vec{v}(x_i,h_i,V_i)\Delta S_i \vec{n}(x_i,h_i,V_i)$$

$$s=\sum_{i=1}^{n}\vec{v}(x_i,h_i,V_i)\vec{n}(x_i,h_i,V_i)$$

当 $l=\max\limits_{1\le i\le n}\{S_i$ 的直径$\}\to 0$ 时，上述和的极限应是 s 的精确值。

把上述向量内积用分量形式表示出来，我们有

$$\begin{aligned}&\vec{v}(x_i,h_i,V_i)\vec{n}(x_i,h_i,V_i)\Delta S_i\\&=P(x_i,h_i,V_i)\cos a\Delta S_i+Q(x_i,h_i,V_i)\cos b\Delta S_i+R(x_i,h_i,V_i)\cos g\Delta S_i\end{aligned}$$

以上的 $\cos a\Delta S_i$，$\cos g\Delta S_i$ 和 $\cos b\Delta S_i$ 分别可以看成曲面 ΔS_i 在 yz 平面，zx 平面和 xy 平面的投影的面积。若前面 $\cos a$ （$\cos b$，$\cos g$）>0，这该面积为正值，否则为负值。因此它们可以认为是有向投影面积。

因此我们可以引入以下定义。

定义　　**设函数** $f(x,y,z)$ **在光滑双测曲面 S 上有定义。给定曲面的一侧，及给定了 S 上每点的法向量** $\vec{n}(x,y,z)=(\cos a,\cos b,\cos g)$ **，任给 S 的一个分划** $\Delta S_1,\cdots\Delta S_n$ **,我们同时用** ΔS_i **记** ΔS_i **的面积。在** ΔS_i **上任取一点** (x_i,h_i,V_i) **，及** $\cos g_i$ **为** $\cos g$ **在** (x_i,h_i,V_i) **的取值，** $\Delta D_i=\Delta S_i\cos g_i$ **，并且记** $l=\max\limits_{1\le i\le n}$ **{** S_i **的直径}，作和**

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i,h_i,V_i)\Delta D_i$$

如果当 $l\to 0$ **时，上式存在不依赖分划及** (x_i,h_i,V_i) **选取的极限** I **，则称** I **为** f **在 S 上指定侧对** x,y **的第二型曲面积分。记为**

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dxdy$$

同理我们可以定义 $\iint\limits_S f(x,y,z)dydz$ $\iint\limits_S f(x,y,z)dzdx$ **.**

在以上流量问题中，所求流量即为以下积分

$$\iint\limits_S P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy$$

在许多问题中，我们以后都会将这三个积分一并加以考虑.

关于第二型曲面积分的计算，由于我们有

$$\iint\limits_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint\limits_S (P\cos a+Q\cos b+R\cos g)ds$$

而等式的右端已是第一型曲面积分，因此，当光滑双测曲面是由

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v),\quad z=z(u,v)\quad (u,v)\in D$$

给出时

$$\cos a=\frac{\pm A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos b=\frac{\pm B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos g=\frac{\pm C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

由此得到

$$\iint\limits_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint\limits_D R(x,y,z(x,y))dxdy$$

其中最后的式中的函数都要用参数方程代入。

特别地，若 S 是光滑双侧曲面

$$z=f(x,y)\qquad (x,y)\in D$$

时

$$\iint_S R dxdy = \pm \iint_D R(x, y, z(x, y)) dxdy$$

积分号前取“＋”号为 S **上侧的积分，去“－”号为** S **下侧的积分。**

例１． 计算第二型曲面积分

$$I = \iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy$$

其中 S **是顶点为**(1,0,0),(0,1,0) **和** (0,0,1) **的三角形的下侧。**

解法一　曲面Ｓ的方程为

$$x + y + z = 1$$

取定法向量的方向余弦为：

$$\cos a = \cos b = \cos g = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

将 I **化为第一型曲面积分得**

$$I = -\iint_S \frac{x+y+z}{\sqrt{3}} dS = -\frac{1}{\sqrt{3}} \iint_S dS = -\frac{1}{2}$$

解法二　由对称性得

$$I = 3\iint_S zdxdy = -3 \iint_{\substack{x \ge 0, y \ge 0 \\ x+y \le 1}} (1 - x - y) dxdy$$

$$= -3\int_0^1 dy \int_0^{1-y} (1 - x - y) dx = -\frac{3}{2}\int_0^1 (1-y)^2 dy = -\frac{1}{2}$$

例２．计算第二型曲面积分

$$I = \iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$$

其中Ｓ是 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 (z \ge 0)$ **的上侧。**

解　因Ｓ是关于 yz **平面对称的上半平面，所以Ｓ上关于** yz **平面对称的元素**□S_i **在** yz

平面上的有向投影□s_i **正好抵消，被积函数关于** x **是偶函数，所以**

$$I = \iint_S x^2 dydz = 0$$

同理得

$$I = \iint_S y^2 dydz = 0$$

于是有

$$I=\iint_{S} z^{2}dydz=\iint_{x^{2}+y^{2}\le R^{2}}(R^{2}-x^{2}-y^{2})dxdy$$

$$=\int_{0}^{2p}dq\int_{0}^{R}(R^{2}-r^{2})rdr=\frac{p}{2}R^{4}$$

例３．计算第二型曲面积分

$$I=\iint_{S}x^{2}dydz+y^{2}dzdx+z^{2}dxdy$$

其中Ｓ是椭球面 $\frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}+\frac{z^{2}}{c^{2}}=1$ **的外侧。**

解　S **的参数方程为**

$$x=a\cos q\sin j\,,\quad y=b\sin q\sin j\,,\quad z=c\cos j$$

参数变化域 $D=\{(q\,,j\,):0\le q\le 2p\,,0\le j\le p\}$ **，雅可比矩阵为**

$$\begin{pmatrix} -a\sin q\sin j & b\cos q\sin j & 0 \\ a\cos q\cos j & b\sin q\cos j & -c\sin j \end{pmatrix}$$

由此求出

$$A=-b\cos q\sin^{2}j\,,B=-ac\sin q\sin^{2}j\,,C=-ab\sin j\cos j$$

因上半椭球面上一点的法向量的第三个分量大于零和 $C<0$ **，所以计算公式前应取“ － ”号，故得**

$$I=\iint_{D}[a^{3}\cos^{3}q\cos^{3}j\cdot bc\cos q\sin^{2}j+b^{3}\sin^{3}q\sin^{3}j\cdot ac\sin q\sin^{2}j+c^{3}\cos^{3}q\cdot ab\sin j\cos j]$$

$$=abc\int_{0}^{2p}dq\int_{0}^{p}[a^{2}\cos^{4}q\sin^{5}j+b^{2}\sin^{4}q\sin^{5}j+c^{2}\cos^{4}j\sin j]dq$$

$$=8abc\left(a^{2}\int_{0}^{\frac{p}{2}}\cos^{4}q\,dq\int_{0}^{\frac{p}{2}}\sin^{5}j\,dj+b^{2}\int_{0}^{\frac{p}{2}}\sin^{4}q\,dq\int_{0}^{\frac{p}{2}}\sin^{5}j\,dj\right.$$

$$\left.+\frac{p}{2}c^{2}\int_{0}^{\frac{p}{2}}\cos^{4}j\sin j\,dj\right)=\frac{4}{5}p\,abc(a^{2}+b^{2}+c^{2})$$

习题

1． **求下列第一型曲线积分：**

1） $\int_{L}\sqrt{x^{2}+y^{2}}ds$ **，** L **为圆周** $x^{2}+y^{2}=ax$ **；**

2） $\int_{L}y^{2}ds$ **，** L **为摆线的一拱：** $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)\,(0\le t\le 2p)$ **；**

3） $\int_{L}(x^{4/3}+y^{4/3})ds$ **，** L **为内摆线：** $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ **；**

4） $\int_L xyzds$，L 为螺线：$x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt(0 \le t \le 2p)(0 < a < b)$

2．计算第一型曲线积分：

1） $\int_L (xy + yz + zx)ds$，L 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 与平面 $x + y + z = 0$ 的交线；

2） $\int_L xyds$，L 同上。

3．设 $f(x,y)$ 在 L 上连续，L 是一闭的逐段光滑简单曲线，证明：

$$u(x,y) = \oint_L f(x,h)\log\frac{1}{\sqrt{(x-x)^2 + (h-y)^2}}ds$$

当 $x^2 + y^2 \to +\infty$ 时趋于零的充要条件是

$$\oint_L f(x,h)ds$$

4．求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 包含在柱体 $z^2 + x^2 \le 1(a > 1)$ 那部分的面积。

5．求曲面 $x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + z^2 = 1$ 围成立体的表面积。

6．求下列第一型曲面积分：

1） $\iint\limits_S (x + y + z)dS,\ S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ z \ge 0$；

2） $\iint\limits_S (x^2 + y^2)dS$，S 为立体 $\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 2$ 的边界面；

3） $\iint\limits_S |xyz|dS$，S 为曲面 $z = x^2 + y^2$ 被平面 $z = 1$ 割下的部分；

4） $\iint\limits_S z^2 dS$，S 为螺旋面 $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = v(0 \le u \le a,\ 0 \le v \le 2p)$。

7．试求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的质量，如果它在各点处的面密度等于

1） 这点到 z 轴的距离；

2） 这点到 z 轴距离的平方；

8．求下列第二型曲线积分：

1） $\int_{\overset{\frown}{AB}} ydx - xdy$，其中 $A(1,1), B(2,4), \overset{\frown}{AB}$ 为连接 A,B 的直线段;

2） $\int_{\overset{\frown}{AB}} (x - 2xy)dx + (y - 2x^2y)dy$，其中 $\overset{\frown}{AB}$ 为连接 $A(0,0), B(2,4)$ 的抛物线 $y = x^2$;

3） $\int_{\overset{\frown}{AB}} (x + y)dx + xydy$，其中 $\overset{\frown}{AB}$ 为连接 $A(0,0), B(2,0)$ 的折线 $y = 1 - |1 - x|$;

4） $\oint_L (x^2 + y^2)dx + (x + y)^2 dy$，L 为圆周 $x^2 + y^2 = ax$，取逆时针方向.

9. 计算第二型曲线积分

$$I=\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$$

1) L: $x^2+y^2=a^2$,取逆时针方向;

2) L:$|x|\le 1, |y|\le 1$的边界,取逆时针方向.

10. 设P,Q为$\overset{\frown}{AB}$上的连续函数,光滑曲线$\overset{\frown}{AB}$有长度l,证明:

$$\left|\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx+Qdy\right|\le M\cdot l$$

其中$M=\max\limits_{(x,y)\in\overset{\frown}{AB}}\sqrt{P^2+Q^2}$

11. 求下列第二型曲线积分:

1) $\int_{\overset{\frown}{AB}}(x-y)dx+(y-z)dy+(z-x)dz$, $\overset{\frown}{AB}$ 为连接 $A(0,0,0)$ 和 $B(1,1,1)$ 的曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$;

2) $\int_{\overset{\frown}{AB}} y^2dx+z^2dy+x^2dz$, $\overset{\frown}{AB}$ 为连接 $A(a,0,0)$ 和 $B(a,1,2\pi r)$ 的曲线 $x=a\cos t, y=b\sin t, z=rt$ (a,b,r为正数)

12. 求第二型曲线积分

$$I=\int_L (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$$

1) L为球面三角形$x^2+y^2+z^2=1, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$的边界线,从球的外侧看去,L的方向为逆时针;

2) L 是球面$x^2+y^2+z^2=a^2$和柱面$x^2+y^2=ax(a>0)$的交线位于 xy 平面上方部分,从 x 轴正向看去,L 的方向为逆时针.

13. 求第二型曲面积分

$$\iint_S z^3dxdy$$

S 为球面$x^2+y^2+z^2=R^2$的外侧.

14. 计算第二型曲面积分

$$I=\iint_S \frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

S 为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$的外侧.

15. 求下列第二型曲面积分:

1) $I=\iint_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$,S **是立体** $0\le x\le a,0\le y\le b,0\le z\le c$ **边界面的外侧**;

2) $I=\iint_S xdydz+ydzdx+zdxdy$,S **是球面** $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ **的上半部分的上侧**;

3) $\iint_S\left(\frac{dydz}{x}+\frac{dzdx}{y}+\frac{dxdy}{z}\right)$,S **为椭球面** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ **的外侧**;

4) $I=\iint_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$,S **是锥面** $x^2+y^2=z^2(0\le z\le h)$ **所示部分的下侧**.