第二章 函数序列与函数级数

§2.1 引言

在初等数学中我们有加法和乘法运算，在微积分中我们引进了新的运算极限 $\lim$，求导 $\dfrac{d}{dx}$ 和积分 $\int_a^b$. 在定义这些运算时我们都特别指出其与加法和数乘可交换，即与加法和数乘相容. 例如，$\int_a^b\big(f(x)+g(x)\big)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$，$\int_a^b cf(x)dx=c\int_a^b f(x)dx$. 一个自然的问题是这些运算之间是否可交换顺序，例如 $\lim\dfrac{d}{dx}$ 与 $\dfrac{d}{dx}\lim$ 是否相等. 在多元积分中我们曾讨论了积分交换顺序的问题，本章中我们将讨论极限与极限，极限与积分，极限与微分交换顺序的问题.

从实际应用的角度，我们往往需要用一个函数 $f_t(x)$ 来表示某些变化过程或者运动状态在时刻 t 的情况（假定这个变化过程对时间 t 是连续的）. 我们需要了解当 t 越来越接近某一关键时刻 t_0 时，$f_t(x)$ 是怎样变到 $f_{t_0}(x)$ 的，或 $f_{t_0}(x)$ 的许多性质能否通过 $f_t(x)$ 得到. 例如，设 $f_t(x)$ 都是连续的，问 $f_{t_0}(x)$ 是否连续，即 $\lim\limits_{x\to x_0} f_{t_0}(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{t\to t_0} f_t(x)$ 是否与 $\lim\limits_{t\to t_0}\lim\limits_{x\to x_0} f_t(x)=\lim\limits_{t\to t_0} f_t(x_0)=f_{t_0}(x_0)$ 相等. 我们这里需要讨论极限交换顺序的问题. 设 $f_t(x)$ 都可导，问 $f_{t_0}(x)$ 是否可导，其导数 $f_{t_0}'(x)$ 是否是 $f_t'(x)$ 的极限，即 $\dfrac{d}{dx}f_{t_0}'(x)=\dfrac{d}{dx}\left(\lim\limits_{t\to t_0} f_t'(x)\right)$ 与 $\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{d}{dx}f_t(x)$ 是否相等，求导与极限是否可交换. 又如，$\int_a^b f_{t_0}(x)dx=\int_a^b\left(\lim\limits_{t\to t_0} f_t(x)\right)dx$ 是否与 $\lim\limits_{t\to t_0}\int_a^b f_t(x)dx$ 相等，即 $\int_a^b\lim=\lim\int_a^b$ 是否成立.

将我们的问题归纳为数学分析的语言. 设 $f_n(x)$ 是 $[a,b]$ 上的函数，$n=1,2,\cdots$，$\{f_n(x)\}$ 称为一函数序列. 如果 $x\in[a,b]$, x 固定时序列 $\{f_n(x)\}$ 收敛，设其极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)=f(x)$，则我们得到 $[a,b]$ 上的函数 $f(x)$，称为函数序列 $\{f_n(x)\}$ 的极限函数. 我们的问题是 $f_n(x)$ 的性质有多少在取极限后还能保留下来.

连续函数的极限函数可以不连续.

例 4.1.1：令 $f_n(x)=x^n$, $x\in[0,1]$，则

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=f(x)=\begin{cases}0, & x\in[0,1),\\ 1, & x=1,\end{cases}$$

$f(x)$ 在 $x=1$ 时不连续.

上例中 $f_n'(x)=nx^{n-1}$，因此 $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n'(x)=n$，因而 $n\to+\infty$ 时 $f_n(x)$ 的速度趋于无穷. 速度太大，产生了断裂.

可导函数的极限函数可以不可导.

例 4. 1. 2：设 $x\in[-1,1]$，令 $f_n(x)=e^{-n^2x^2}$，则

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$$

$f_n(x)$ 都可导，而其极限函数在 $x=0$ 处不连续，因而不可导.

例 4. 1. 3：令 $f_n(x)=\dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}$, $x\in\left(-\dfrac{p}{2},\dfrac{p}{2}\right)$, 则

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=f(x)\equiv 0\,.$$

$f(x)$ 是可导的，但 $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n'(x)=+\infty\neq f'(x)=0$. 即极限函数可导时，也不一定是函数序列导函数的极限.

连续的过程取极限后可能产生间断，可导的性质在取极限后不能保留，这样的现象在实际生活中经常可以看到. 例如，海平面的形状对时间 t 总是连续的，无风时海平面很光滑，风越来越大时海平面越来越粗糙，产生了浪珠，脱离海平面时形成间断，产生了浪尖是不可导的.

可积性和积分对极限过程一般也是不能交换的.

例 4. 1. 4：设 $x\in[0,1]$，令

$$f_n(x)=\begin{cases}1, & x=\dfrac{p}{q}, q\le n,\\ 0 & \text{其余的}x，\end{cases}$$

$f_n(x)$ 仅有有限个间断点，因而 Riemann 可积的，但

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=f(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数},\\ 0, & x\text{为无理数},\end{cases}$$

$f(x)$ 不是 Riemann 可积的.

例 4. 1. 5：设 $x\in[0,1]$，定义 $f_n(x)=2(n+1)x(1-x^2)^n$，易证 $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)=f(x)\equiv 0$，而

$$\int_0^1 f_n(x)dx = 1 \neq \int_0^1 f(x)dx = 0.$$

如果将序列极限转化为无穷级数，则我们可以从另一角度来考察上面的问题.

设 $\{u_n(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上一个函数序列，定义其函数级数为 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$. 设对任意 $x \in [a,b]$, x 固定后级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 收敛，则我们得到 $[a,b]$ 上的函数 $u(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

对于有限加法，我们知道如果 $u_1(x),\cdots,u_n(x)$ 连续，则 $u_1(x)+\cdots+u_n(x)$ 连续.

如果 $u_1(x),\cdots,u_n(x)$ 可导，则 $u_1(x)+\cdots+u_n(x)$ 可导，并且

$$\left(u_1(x)+\cdots+u_n(x)\right)' = u_1'(x)+\cdots+u_n'(x).$$

如果 $u_1(x),\cdots,u_n(x)$ 可积，则 $u_1(x)+\cdots+u_n(x)$ 可积，并且

$$\int_a^b [u_1(x)+\cdots+u_n(x)]dx = \int_a^b u_1(x)dx + \cdots + \int_a^b u_n(x)dx.$$

问题是对于级数，有限和的这些性质是否还成立.

将什么关于函数序列的极限表示为函数级数，则我们看到，有限加法的性质对于无穷级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 一般不再成立，即函数级数一般不能保持函数的连续性、函数的微分和函数的积分.

但是不论在数学的实际应用还是数学的理论研究中，极限与极限，极限与微分和极限与积分交换顺序的问题都是经常会碰到的十分重要的关系. 因此我们需要对函数序列和函数级数的极限过程加上适当的条件，使我们所需要的交换关系都能够成立，使无穷级数保持有限加法的性质. 在数学分析中我们对函数序列和函数级数加的条件是一致收敛性.

§4.2 一致收敛性及其判别法

设 $f_n(x)$ 是区间 (a,b) 上的函数列，在 (a,b) 上收敛于 $f(x)$，设 $f_n(x)$ 在 $x_0 \in (a,b)$ 处连续，我们需要给出适当的条件，使 $f(x)$ 在 x_0 连续，即 $x \to x_0$ 时，$|f(x)-f(x_0)| \to 0$. 但

$$|f(x)-f(x_0)| \leq |f(x)-f_n(x)| + |f_n(x)-f_n(x_0)| + |f_n(x_0)-f(x_0)|.$$

由 $f_n(x)$ 在 x_0 连续，且 $\lim_{n\to+\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$，因此，只要 x 充分接近 x_0，n 充分大，总可以使 $|f_n(x)-f_n(x_0)|$ 和 $|f_n(x_0)-f(x_0)|$ 任意小. 要使 $f(x)$ 在 x_0 连续，需要 n 充分大时，

$\left|f(x)-f_n(x)\right|$可以任意小.

对于任意 $e>0$，由 $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)=f(x)$ 知，对每一个 $x\in(a,b)$，总存在 N_x，当 $x>N_x$ 时有 $\left|f_n(x)-f(x)\right|<e$. 但 $x\to x_0$ 时，必须考虑无穷多个 x，因而其所对应的 N_x 不一定有上界. 如果 N_x 有上界，即对 $e>0$，存在 N，使 $n>N$ 后，$\left|f_n(x)-f(x)\right|<e$ 对所有 $x\in(a,b)$ 都成立. 则取定一个 $n>N$，由 $f_n(x)$ 在 x_0 处连续，知存在 $d>0$，使 $\left|x-x_0\right|<d$ 时 $\left|f_n(x)-f_n(x_0)\right|<e$. 因此，$\left|x-x_0\right|<d$ 时

$$\begin{aligned}\left|f(x)-f(x_0)\right| &\le \left|f(x)-f_n(x)\right|+\left|f_n(x)-f_n(x_0)\right|+\left|f_n(x_0)-f(x_0)\right| \\ &< e+e+e=3e.\end{aligned}$$

得 $f(x)$ 在 x_0 处连续. 由此我们给出下面定义

定义 4. 2. 1： 称函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在集合 D 上一致收敛于 $f(x)$，如果对 $\forall e>0, \exists N$，当 $n>N$ 时，$\left|f_n(x)-f(x)\right|<e$ 对所有 $x\in D$ 成立. 记为 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$.

一致收敛也称为均匀收敛，其表示 $n\to+\infty$ 时 $f_n(x)$ 趋于 $f(x)$ 的过程基本是均匀的，可以控制的.

例 4. 2. 1： 设 $x\in[0,1]$，定义 $f_n(x)=\dfrac{x^n}{n}$. 则 $\forall e>0$，取 N 使 $\dfrac{1}{N}<e$，则 $n>N$ 后，$\left|f_n(x)\right|\le\dfrac{1}{n}<e$. 因此在 $[0,1]$ 上，$f_n(x)\rightrightarrows 0$.

例 4. 2. 2： 设 $x\in[0,1]$，令 $f_n(x)=x^n$，证明 $\{f_n(x)\}$ 不一致收敛.

证明： 由

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=f(x)=\begin{cases}0, & x\in[0,1),\\ 1, & x=1,\end{cases}$$

取 $e_0=\dfrac{1}{2}$，则对任意 n，由 $\lim\limits_{x\to 1-0} f_n(x)=1$，知总存在 $x\in[0,1)$，使 $f_n(x)>\dfrac{1}{2}$. 因此 $f_n(x)$ 不一致收敛.

与函数序列相同，我们定义函数级数 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}u_k(x)$ 的一致收敛性为

定义 4. 2. 2： 称函数级数 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}u_k(x)$ 在集合 D 上一致收敛于 $u(x)$，如果 $\forall e>0, \exists N$，使

得$n>N$后，$\forall x\in D$，恒有$\left|\sum_{k=1}^{n}u_k(x)-u(x)\right|<e$．记为$\sum_{k=1}^{+\infty}u_k(x)\rightrightarrows u(x)$．

例 4. 2. 3：证明当$0<e<1$时，函数级数$\sum_{k=0}^{+\infty}x^k$在$[0,1-e]$上一致收敛，但在$[0,1)$上不一致收敛.

证明：$\sum_{k=0}^{+\infty}x^k$在$[0,1)$上收敛于$\frac{1}{1-x}$．当$x\in[0,1-e]$时，

$$\left|\sum_{k=0}^{n}x^k-\frac{1}{1-x}\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}x^k\right|=\frac{x^{n+1}}{1-x}\le(1-e)^{n+1}.$$

但$(1-e)^{n+1}\to 0$，因而$\sum_{k=0}^{+\infty}x^k$在$[0,1-e]$上一致收敛.

但在$[0,1)$上，$\left|\sum_{k=0}^{n}x^k-\frac{1}{1-x}\right|>x^{n+1}$．而$x\to 1$时$x^{n+1}\to 1$，因此对任意$n$，总可以找到$x\in[0,1)$，使$\left|\sum_{k=0}^{n}x^k-\frac{1}{1-x}\right|>\frac{1}{2}$．$\sum_{k=0}^{+\infty}x^k$不一致收敛.

一致收敛的判别法

对于函数序列和函数级数通常我们不能通过其与极限函数的比较来判断是否一致收敛，我们必须通过序列和级数自身来判断其是否有一致收敛性．因此我们需要建立一些判别的方法，其最基本的 Cauchy 准则.

Cauchy 准则：函数序列$\{f_n(x)\}$（函数级数$\sum_{k=1}^{+\infty}u_k(x)$）在集合$D$上一致收敛的充分必要条件是 $\forall e>0,\exists N$，当 $n>N,\ p=0,1,2\cdots$ 时，$\left|f_n(x)-f_{n+p}(x)\right|<e$（$\left|\sum_{k=1}^{n+p}u_k(x)-\sum_{k=1}^{n}u_k(x)\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(x)\right|<e$）对所有$x\in D$成立.

证明（以函数级数为例）：设$\sum_{k=1}^{+\infty}u_k(x)\rightrightarrows f(x)$，则$\forall e>0,\exists N$，只要$n>N$，$x\in D$，就有$\left|\sum_{k=1}^{n}u_k(x)-f(x)\right|<\frac{e}{2}$．因此，

$$\left|\sum_{k=1}^{n+p}u_k(x)-\sum_{k=1}^{n}u_k(x)\right|\le\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(x)-f(x)\right|+\left|f(x)-\sum_{k=1}^{n}u_k(x)\right|<\frac{e}{2}+\frac{e}{2}=e.$$

$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x)$满足 Cauchy 准则.

反之，设$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x)$满足 Cauchy 准则，则当 $x\in D$, x固定时，数值级数$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x)$满足 Cauchy 准则，因而收敛．设收敛于 $f(x)$． $\forall e>0, \exists N$， $n>N$ 后，$\forall x\in D$，恒有$\left|\sum_{k=1}^{n+p} u_k(x)-\sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right|<\frac{e}{2}$．令$p\to+\infty$，得$\left|f(x)-\sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right|\le\frac{e}{2}<e$ 对所有$x\in D$成立.

因而$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x)\rightrightarrows f(x)$.

推论 4. 2. 3：如果在D上， $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x)\rightrightarrows f(x)$，**则**$u_k(x)\rightrightarrows 0$.

例 4. 2. 4：证明对任意$R>0$，$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}$**在**$[-R,R]$**上一致收敛，但其在**$(-\infty,+\infty)$**上不一致收敛.**

证明：$\left|\sum_{k=n}^{n+p}\frac{x^k}{k!}\right|\le\sum_{k=n}^{n+p}\frac{R^k}{k!}$．而$\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{R^k}{k!}$收敛，因而满足 Cauchy 准则，得$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}$在$[-R,R]$上满足 Cauchy 准则，所以一致收敛．而在$(-\infty,+\infty)$上由$\left\{\frac{x^n}{n!}\right\}$不是一致趋于零的，因而$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}$在$(-\infty,+\infty)$上不一致收敛.

对于函数级数，利用 Cauchy 准则，我们可以建立进一步的判别法.

控制收敛判别法（Weierstrass 判别法）：如果存在收敛的数字级数$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ **及**N，**使**$n>N$，$x\in D$，**恒有**$|u_n(x)|\le a_n$．**则**$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$**和**$\sum_{n=1}^{+\infty}|u_n(x)|$**在**$D$**上都一致收敛.**

满足定理条件的级数$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 称为$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$的控制级数．而$\sum_{n=1}^{+\infty}|u_n(x)|$一致收敛时（显然这时$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$也一致收敛），称$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$绝对一致收敛.

证明：不妨设对所有k，$|u_k(x)| \le a_k$．$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ 收敛，则其满足 Cauchy 准则，即 $\forall e > 0, \exists N$，只要 $n > N,\ p = 1,2\cdots$，就有 $\left|\sum_{k=n}^{n+p} a_k\right| < e$．但 $\left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k(x)\right| \le \sum_{k=n}^{n+p} |u_k(x)| \le \sum_{k=n}^{n+p} a_k < e$，因而$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x)$和$\sum_{k=1}^{+\infty} |u_k(x)|$在$D$上满足 Cauchy 准则，因而都一致收敛.

例 4. 2. 5：证明$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛.

证明：由$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$，而$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$收敛，因而$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$在$(-\infty,+\infty)$上绝对一致收敛.

控制收敛判别法只能用在绝对一致收敛的级数上，对条件收敛的函数级数，其显然不适合．与条件收敛级数相同，我们有 Dirichlet 判别法和 Abel 判别法.

Dirichlet 判别法：考虑形式为$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x)b_n(x)$的函数级数．如果在集合$D$上$\{a_n(x)\}$单调且一致趋于零，而$\exists M$，使得$\forall n$及$x \in D$，恒有$\left|\sum_{k=0}^{n} b_k(x)\right| \le M$（这时称$\left\{\sum_{k=0}^{n} b_k(x)\right\}$在$D$上一致有界）．则$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x)b_n(x)$在$D$上一致收敛.

证明：在讨论积分第二中值定理时，我们曾给出了 Abel 变换和 Abel 不等式：在有限和$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$中令$B_0 = 0,\ B_m = \sum_{k=1}^{m} b_k$，令$a_0 = 0$，则

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k (B_k - B_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} a_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k B_{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n .$$

如果a_i单调，而$B_k \le M,\ k = 0,1,\cdots,n$，则有 Abel 不等式

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \le \sum_{k=0}^{n-1} |a_k - a_{k+1}||B_k| + |a_n||B_n| \le \sum_{k=0}^{n-1} |a_k - a_{k+1}| \cdot M + |a_n| \cdot M$$
$$\le (|a_1| + 2|a_n|) \cdot M .$$

由$\left|\sum_{k=0}^{n} b_k(x)\right| \le M$，得$\left|\sum_{k=n}^{n+p} b_k(x)\right| = \left|\sum_{k=1}^{n+p} b_k(x) - \sum_{k=1}^{n-1} b_k(x)\right| \le 2M$．因此利用 Abel 不等式得

$$\left|\sum_{k=1}^{n+p} a_k(x) b_k(x)\right| \le |a_n(x)| \cdot 2M + |a_{n+p}(x)| \cdot 4M \ .$$

但 $a_n(x) \rightrightarrows 0$，因而 $\forall e > 0, \exists N$， $n > N$ 后，$\forall x \in D$，恒有 $|a_n(x)| \le \dfrac{e}{6M}$． 因而 $n > N,\ p = 1,2\cdots$ 时，$\forall x \in D$，恒有

$$\left|\sum_{k=1}^{n+p} a_k(x) b_k(x)\right| \le \frac{e}{6M} \cdot 2M + \frac{e}{6M} \cdot 4M = e \ .$$

$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k(x) b_k(x)$ 满足一致收敛的 Cauchy 准则，因而一致收敛.

Abel 判别法：如果函数序列$\{a_n(x)\}$在 D 上单调且一致有界，而$\sum_{k=1}^{+\infty} b_k(x)$在 D 上一致收敛，则$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k(x) b_k(x)$ 在 D 上一致收敛.

Abel 判别法的证明与 Dirichlet 判别法基本相同，这里留给读者自证.

例 4. 2.6：证明$\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k} x^k$ 在$[0,1]$上一致收敛.

证明：令 $a_k(x) = x^k$，则 $a_k(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调且 $|a_k(x)| \le 1$，因而一致有界．令 $b_k(x) = \dfrac{(-1)^k}{k}$，则$\sum_{k=1}^{+\infty} b_k(x)$一致收敛．由 Abel判别法，得$\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k} x^k$ 在$[0,1]$上一致收敛.

由$\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k} = +\infty$ 不难得到$\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k} x^k$ 在$(0,1)$上不是一致收敛的，即$\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k} x^k$ 在$(0,1)$上不是绝对一致收敛.

例 4. 2. 7：$\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin nx}{n}$ 和$\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\cos nx}{n}$ 在$(-\infty,+\infty)$上都是一致收敛但非绝对收敛.

§4. 3 一致收敛性的极限函数的性质

定理 4. 3. 1：连续函数一致收敛的极限函数是连续的.

我们在上一节一致收敛的定义中已经给出了这个定理的证明．下面我们用极限交换顺序的语言给出这个定理更加一般的形式.

定理 4. 3. 2：设函数序列$\{f_n(x)\}$在集合 D 上一致收敛于 $f(x)$，设 x_0 是 D 的一个聚点，

且 $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)=A_n$ 存在. 则 $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 都存在且相等，即

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=\lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x).$$

证明：$f_n(x)\rightrightarrows f(x)$，因而 $\forall e>0,\exists N$，使 $n>N, m>N$ 后，$\forall x\in D$，恒有 $|f_n(x)-f_m(x)|<\dfrac{e}{2}$. 令 $x\to x_0$，得 $|A_n-A_m|\le\dfrac{e}{3}<e$. 因而序列 $\{A_n\}$ 满足 Cauchy 准则，得其收敛. 设 $A_0=\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$，则

$$|f(x)-A_0|\le|f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-A_n|+|A_n-A_0|.$$

取定一个 $n>N$，由 $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)=A_n$，得 $\exists d>0$，只要 $x\in U_0(x_0,d)\cap D$，就有 $|f_n(x)-A_n|<\dfrac{e}{3}$. 因而 $x\in U_0(x_0,d)\cap D$ 时 $|f(x)-A_0|<\dfrac{e}{3}+\dfrac{e}{3}+\dfrac{e}{3}=e$，得 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A_0$.

对于积分而言，一致收敛也是积分与极限可以交换顺序的一个充分条件. 设 $D=[a,b]$.

定理 4. 3. 3：D 上一致收敛的 Riemann 可积函数列 $\{f_n(x)\}$ 的极限函数 $f(x)$ 也是 Riemann 可积的，并且 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b\left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\right)dx=\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)dx$.

证明：在讨论 Riemann 积分时，我们证明下面的可积性定理：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积的充分必要条件是 $\lim\limits_{l\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} w_i(f)\Delta x_i=0$，其中 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 是 $[a,b]$ 的任意分割，$l=\max\{\Delta x_i=x_i-x_{i-1}\}$，$w_i(f)=M_i-m_i$，$M_i,m_i$ 分别为 $f(x)$ 在 $(x_{i-1},x_i]$ 上的上下确界.

由 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$，知 $\forall e>0,\exists N$，只要 $n>N$，则 $|f_n(x)-f(x)|<e$ 对所有 $x\in[a,b]$ 成立. 取 $n>N$，并将其固定. 由 $f_n(x)$ 在 D 上 Riemann 可积，因而对 e，存在 $d>0$，使对 $[a,b]$ 的任意分割 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，只要 $l=\max\{\Delta x_i=x_i-x_{i-1}\}<d$，就有 $\sum\limits_{i=1}^{n} w_i(f_n)\Delta x_i<e$.

但 $\forall x\in[a,b]$，$f_n(x)-e\le f(x)\le f_n(x)+e$，因此 $w_i(f)\le w_i(f_n)+2e$，得

$\sum_{i=1}^{n} w_i(f)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} w_i(f_n)\Delta x_i + 2e(b-a)$. 但$e$是任意的，而$\sum_{i=1}^{n} w_i(f)\Delta x_i \ge 0$，因此必须$\lim_{l\to 0}\sum_{i=1}^{n} w_i(f)\Delta x_i = 0$，$f(x)$在$[a,b]$上 Riemann 可积. 而

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx\right| \le \int_a^b \left|f(x)-f_n(x)\right|dx \le \sup\{f_n(x)-f(x)\}\cdot(b-a) \to 0,$$

得$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)dx$.

例 4.3.1：设 $x\in[0,1]$，令 $f_n(x)=2n^2xe^{-n^2x^2}, x\in[0,1]$，容易看出，$\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=f(x)\equiv 0$. 而对于任意$n$，$f_n'(x)=2n^2e^{-n^2x^2}\left(1-2n^2x^2\right), f_n'(x)=0$，则$x=\frac{1}{\sqrt{2}\,n}$. 而$x<\frac{1}{\sqrt{2}\,n}$时$f'(x)>0$；$x>\frac{1}{\sqrt{2}\,n}$时$f'(x)<0$，因而$x=\frac{1}{\sqrt{2}\,n}$是$f_n(x)$在$[0,1]$中的极大值点. 但$f_n'\left(\frac{1}{\sqrt{2}\,n}\right)=\sqrt{2}\,ne^{-\frac{1}{2}}\to+\infty$，因此$\{f_n(x)\}$在$[0,1]$上并不是一致收敛与零的. 但$\int_0^1 f_n(x)dx = 1 \ne \int_0^1\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)dx$.

上例说明，一致收敛只是连续函数的极限函数为连续的充分条件，并不是必要的，其同时也说明如果没有一致收敛性，积分与极限不一定能交换顺序.

例 4. 3. 2：设$x\in[0,1]$，令$f_n(x)=x^n$，则$\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=f(x)=\begin{cases}0, & x\ne 1,\\ 0, & x=1,\end{cases}$ $f_n(x)$不是一致收敛的. 但$f(x)$在$[a,b]$上 Riemann 可积，并且

$$0=\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}.$$

此例说明一致收敛仅是极限函数可积及积分与极限可交换顺序的一个充分条件.

以后将在更一般的条件下建立积分与极限的交换关系. 但一致收敛作为连续函数的极限函数是连续的充分条件，在很多情况下也是必要的.

定理 4. 3. 4：设$f_n(x)\in C[a,b]$，并且$\{f_n(x)\}$对n单调有界. 则$f(x)=\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$在$[a,b]$上连续的充分必要条件是$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛于$f(x)$.

证明：设$\{f_n(x)\}$单调上升，$f(x)\in C[a,b]$但$\{f_n(x)\}$不一致收敛. 由定义知，$\exists e_0>0$，使$\forall N$，$\exists n>N, x_n\in[a,b]$，使得$\left|f_n(x_n)-f(x_n)\right|\ge e_0$. 由此得一单调上升序

列$n_i \to +\infty$及$[a,b]$中序列$\{x_{n_i}\}$，使$\left| f_{n_i}(x_{n_i}) - f(x_{n_i}) \right| = f(x_{n_i}) - f_{n_i}(x_{n_i}) \ge e_0$.

由波尔察诺定理知$\{x_{n_i}\}$中有收敛子列，不妨设$x_{n_i} \to x_0$．则对任意n，$n \le n_i$时，

$f(x_{n_i}) - f_n(x_{n_i}) = f(x_{n_i}) - f_{n_i}(x_{n_i}) \ge e_0$.

令$n_i \to +\infty$，得$f(x_0) - f_n(x_0) \ge e_0$．但已知$\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$，矛盾.

下面讨论极限与导数交换顺序的问题．先看一个例子.

例 4. 3. 3：设$f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}$，则$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \equiv 0$．但$f_n'(x) = \sqrt{n}\cos nx$并不收敛于$f'(x) \equiv 0$.

由此函数列已知收敛并不能保证导数与极限可交换．但如果将收敛条件加在导函数上，则有下面定理

定理 4. 3. 5：设$f_n(x) \in C^1[a,b]$，并且

（1）$f_n'(x)$在$[a,b]$上一致收敛；

（2）存在$x_0 \in [a,b]$，使$\{f_n(x_0)\}$收敛.

则$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛，并且$\left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\right)' = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n'(x)$.

证明：设$u(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n'(x)$．由$f_n'(x)$一致收敛知$u(x) \in C[a,b]$，并且$\forall x \in [a,b]$，

$\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{x_0}^{x} f_n'(t)dt = \int_0^x u(t)dt$．但$\int_{x_0}^{x} f_n'(t)dt = f_n(x) + f_n(x_0)$．设$\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_0) = A$，则

$$\begin{aligned}\left| f_n(x) - \left(A + \int_{x_0}^{x} u(t)dt\right) \right| &\le \left| \int_{x_0}^{x} f_n'(t)dt - \int_{x_0}^{x} u(t)dt \right| + \left| f_n(x_0) - A \right| \\ &\le \max\left| f_n'(x) - u(x) \right|(b-a) + \left| f_n(x_0) - A \right|.\end{aligned}$$

由此得$f_n(x) \rightrightarrows A + \int_0^x u(t)dt$．显然，$f_n(x) \rightrightarrows \left(A + \int_0^x u(t)dt\right)' = u(x)$.

定理中条件（2）是不可缺少的．例如，令$f_n(x) = (-1)^n$，则$\{f_n'(x)\}$一致收敛，但$\{f_n(x)\}$并不收敛．但定理中$f_n(x) \in C^1[a,b]$的条件只是为了证明方便而加的．如果不用积分，则这个条件可以改为只要求$f_n(x)$可导.

上面的定理都是对函数序列给出的，如果换为函数级数，则可分别表示为

定理 4.3.6：设$u_n(x)\in C[a,b]$，**如果**$\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$**一致收敛，则**$\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)\in C[a,b]$.

定理 4.3.7 如果$u_n(x)$**都在**$[a,b]$**上** Riemann **可积，且**$\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$**一致收敛，则**$\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$**在**$[a,b]$**上** Riemann **可积，并可逐项积分，即**

$$\int_a^b\left(\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)\right)dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_a^b u_n(x)dx .$$

定理 4.3.8：如果$u_n(x)\in C^1[a,b]$，**且**$\sum_{n=1}^{+\infty}u_n'(x)$**一致收敛，并存在**$x_0\in[a,b]$，**使**$\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x_0)$ **收敛．则** $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ **一致收敛，并且** $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)\in C^1[a,b]$，$\left(\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)\right)'=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n'(x)$.

习题

1. **求出下列函数项级数的收敛区域（绝对的和条件的）：**

（1）$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$；（2）$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$；

（3）$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$；（4）$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{1+a^{2n}x^2}$.

（讨论$|a|>1$**及**$|a|\le 1$**两种情形．）**

2．**讨论下列函数序列在给定区间上的一致收敛性：**

（1）$f_n(x)=\frac{x^n}{1+x^n}$,

1）$0\le x\le b(<1)$,

2）$0\le x\le 1$,

3）$(1<)a\le x<+\infty$；

（2）$f_n(x)=\frac{1}{1+nx}$,

1）$(0<)a\le x<+\infty$，

2）$0<x<+\infty$；

（3） $f_n(x)=\dfrac{n^2x^2}{1+n^3x^3}$，

1）$(0<)a\le x<+\infty$，

2）$0<x<+\infty$；

（4） $f_n(x)=\dfrac{1}{n}\ln(1+e^{-nx})$，$-\infty<x<+\infty$；

（5） $f_n(x)=e^{-(x-n)^2}$，

1）$-l\le x\le l$，

2）$-\infty<x<+\infty$；

（6） $f_n(x)=x^n-x^{n+1}$，$0\le x\le 1$；

（7） $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n+x}$，$0\le x\le 1$.

3．**设** $f(x)$ **定义于** (a,b)，**令**

$$f_n(x)=\frac{[nf(x)]}{n}\quad(n=1,2,\cdots).$$

求证：当 $n\to+\infty$ **时**

$$f_n(x)\rightrightarrows f(x)\quad(a<x<b).$$

4．**设** $f(x)$ **在** (a,b) **内有连续的导数** $f'(x)$，**且**

$$f_n(x)=n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right].$$

求证：在闭区间 $\alpha\le x\le \beta\ (a<\alpha<\beta<b)$ **上，当** $n\to+\infty$ **时**

$$f_n(x)\rightrightarrows f'(x).$$

5．**设** $f_1(x)$ **在** $[a,b]$ **上黎曼可积. 定义函数序列**

$$f_{n+1}(x)=\int_a^x f_n(t)dt\quad(n=1,2,\cdots).$$

求证：当 $n\to+\infty$ **时**

$$f_n(x)\rightrightarrows 0\quad(a\le x\le b).$$

6．**证明下列级数在所指定区间内的一致收敛性：**

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{x+2^n},\quad -2<x<+\infty$；(2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nx}{1+n^5x^2},\quad |x|<+\infty$；

(3) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n+x^{-n}),\quad \frac{1}{2}\le|x|\le 2$；(4) $\sum_{n=1}^{+\infty}x^2e^{-nx},\quad 0\le x<+\infty$；

(5) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n\ln^n x}{n!}x^n,\quad 0\le x\le 1$.

7．**通过一般项判断级数的一致收敛性：**

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty}2^n\sin\frac{1}{3^n x},\quad 0<x<+\infty$；(2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{x+n},\quad -1<x<+\infty$；

(3) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+\sin x},\quad -\infty<x<+\infty$.

8．**设级数** $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ **收敛．求证：级数** $\sum_{n=1}^{+\infty}a_ne^{-nx}$ **在** $x\ge 0$ **区域内一直收敛**.

9．**研究下列级数所表示的函数在指定区间上的连续性：**

(1) $\sum_{n=0}^{+\infty}x^n,\quad -1<x<1$；(2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n},\quad -1\le x<1$；

(3) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2},\quad |x|\le 1$；(4) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(x+n)(x+n+1)},\quad 0<x<+\infty$.

10．**研究下列级数在什么区间上一致收敛，其和函数在何处连续**.

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+n^2x^2}$；(2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nx}{1+n^4x^2}$；

(3) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$；(4) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$；

(5) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$.

11．**问参数** a **取什么值时，**

$$f_n(x)=n^a xe^{-nx},\quad n=1,2,3,\cdots$$

在闭区间 $[0,1]$ **收敛？在闭区间** $[0,1]$ **一致收敛？使** $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx$ **可在积分号下取极限？**

12．**设** $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ **在** (a,b) **内一致收敛，** $u_n(x)$ **在** $[a,b]$ **上连续，** $n=1,2,\cdots$．**求证：**

（1） $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 在$[a,b]$上一致收敛；

（2） $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 在$[a,b]$上连续.

13．设 $f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 在$[a,b]$上连续，且$n\to+\infty$时

$$f_n(x)\rightrightarrows f(x) \quad (a\le x\le b),$$

又设 $f(x)$ 在$[a,b]$上无零点．求证：

（1） 当n充分大时，$f_n(x)$在$[a,b]$上也无零点；

（2） $\dfrac{1}{f_n(x)}\rightrightarrows\dfrac{1}{f(x)} \quad (a\le x\le b)$，$n\to+\infty$.

14．求证：

（1） $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \ln x$ 在$[0,1]$上不一致收敛；

（2） $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \dfrac{\ln x}{1+\left|\ln\ln\frac{1}{x}\right|}$ 在$[0,1]$上一致收敛，并说明不能用控制判别法.

15．设对每一个自然数n，$f_n(x)$在$[a,b]$上连续，又对$[a,b]$中的每一个x，序列$f_n(x)$有界.

求证：存在$[a,b]$中的一个小区间，使得 $f(x)$ 在此小区间上一致有界.

提示：用区间套进行反证.

16．设 $f_n(x)$在(a,b)上连续，$\forall d>0$，当$n\to+\infty$时

$$f_n(x)\rightrightarrows f(x) \quad (a+d\le x\le b-d)$$

且瑕积分存在并满足

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx.$$

求证：

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b \left|f_n(x)-f(x)\right|dx=0.$$