第五章 参变量积分

所谓含参量的积分是指如下两大类积分：

1. $F(x)=\int_a^b f(x,y)dy$

   若对于 $\forall x\in[a,b]$ 上述积分均是有意义的，即 $[a,b]$ 可以到无穷，积分是收敛的（若为广义积分的话）。也就是说，作为 y 的函数，$f(x,y)$ 在 $[a,b]$ 上可积或广义可积，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上就是关于 x 的函数，从积分本身的性质来讨论这类积分与以往介绍的积分没有什么两样，但这里我们所关心的是：作为 x 的函数，$F(x)$ 与 $f(x,y)$ 的性质有哪些关系？$F(x)$ 何时是可积的？连续的？可导的？等等这一系列的函数性质正是这一章我们要讨论的问题。

2. $G(x)=\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,y)dy$

   这种形式的积分与上面说的积分之不同之处在于 $G(x)$ 的性质不但依赖于 $f(x,y)$ 之性质，而且与 $a(x)$，$b(x)$ 之性质相关。

另外，上面所介绍的含参量积分一般说来是非初等函数。因而在这里我们又可以接触到非初等函数的具体形式。

§1 含参量的定积分

我们先从最简单的情形开始讨论。先看含参量的定积分，即 $f(x,y)$ 作为 y 的函数无瑕点，$[a,b]$ 是有限区间的情形（或 $[a(x),b(x)]$ 均为有限区间）。

为便于书写，记 $\mathbf{D}=[a,b]\times[a,b]$。

1 连续性

定理 1： $f(x,y)\in C(\mathbf{D})$，则 $I(x,y)=\int_a^y f(x,t)dt\in C(\mathbf{D})$。

证明： 由连续定义，

$$\left|I(x,y)-I(x_0,y_0)\right|=\left|\int_a^y f(x,t)dt-\int_a^{y_0} f(x_0,t)dt\right|$$
$$\le\left|\int_a^{y_0}\left[f(x,t)-f(x_0,t)\right]dt\right|+\left|\int_{y_0}^{y} f(x,t)dt\right|$$

上式中，第一项可利用函数之连续性，第二项利用函数的可积性说明为小量：
由 $f(x,y)\in C(\mathbf{D})$，$\mathbf{D}$ 是有界闭集，所以 $f(x,y)$ 在 $\mathbf{D}$ 上一致连续。

因而：$\forall e>0$，$\exists d_1>0$，当 $|x-x_0|<d_1$，$|y-y_0|<d_1$ 时，有：

$\left|f(x,y)-f(x_0,y_0)\right|<e/2(b-a)$，

令：$d=\min\left\{d_1,\dfrac{e}{2M}\right\}$，$M=\max\limits_{(x,y)\in D}\left|f(x,y)\right|$，

则当$\left|x-x_0\right|<d$ ，$\left|y-y_0\right|<d$ 时，有：

$$\left|I(x,y)-I(x_0,y_0)\right|<\frac{e}{2(b-a)}\left|y_0-a\right|+M\left|y-y_0\right|<\frac{e}{2}+M\frac{e}{2M}=e$$

所以$I(x,y)\in C(D)$。

证毕

定理 1 可以有如下形式之推论：

推论： $f(x,y)\in C(D)$，则$F(x)=\int_a^b f(x,y)dy\in C[a,b]$，即：

$\lim\limits_{x\to x_0}\int_a^b f(x,y)dy=\int_a^b f(x_0,y)dy=\int_a^b \lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)dy$。

推论可以简称为：极限号与积分号可以交换次序。

定理 2： $f(x,y)\in C(D)$，$j(x),y(x)\in C[a,b]$，

且$x\in[a,b]$时，$a\le j(x),y(x)\le b$ ，

则：$G(x)=\int_{j(x)}^{y(x)} f(x,y)dy\in C[a,b]$。

证明：由于$G(x)=\int_a^{y(x)} f(x,y)dy-\int_a^{j(x)} f(x,y)dy=I(x,y(x))-I(x,j(x))$

由复合函数之连续性知：$G(x)\in C[a,b]$。

2　可导性

定理 3：设 $f(x,y),f_x(x,y)\in C(D)$，则$F(x)=\int_a^b f(x,y)dy\in C^{(1)}[a,b]$，

且$F'(x)=\int_a^b f_x(x,y)dy$，即求导与积分可以交换次序。

证明：由导数定义：

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\int_a^b\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}dy$$

$$\overset{\text{中值定理}}{=}\int_a^b f_x(x+q\Delta x,y)dy\qquad(0<q<1)$$

由于 $f_x(x,y)\in C(D)$，由上一段推论知：

$$\lim_{\Delta x\to 0}\int_a^b f_x(x+q\Delta x,y)dy=\int_a^b f_x(x,y)dy$$

所以$F'(x)=\int_a^b f_x(x,y)dy$。

同样由于由于 $f_x(x,y)\in C(\mathbf{D})$，由上一段推论知：$F'(x)\in C[a,b]$，

所以 $F(x)\in C^{(1)}[a,b]$。

证毕

定理 4： $f(x,y), f_x(x,y)\in C(\mathbf{D})$，$\varphi(x),\psi(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，

且 $x\in[a,b]$ 时，$a\le\varphi(x),\psi(x)\le b$，

则 $G(x)=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy$ 在 $[a,b]$ 上可导，并且：

$$G'(x)=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f_x(x,y)\,dy+f(x,\psi(x))\cdot\psi'(x)-f(x,\varphi(x))\cdot\varphi'(x)。$$

证明： 令 $F(u,v,x)=\int_v^u f(x,y)\,dy$，则 $G(x)=F(\psi(x),\varphi(x),x)$。

利用复合函数之求导法则，有：

$$G'(x)=\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{dv}{dx}+\frac{\partial F}{\partial x}\bigg|_{\substack{u=\psi(x)\\ v=\varphi(x)}}$$

$$=f(x,\psi(x))\cdot\psi'(x)-f(x,\varphi(x))\cdot\varphi'(x)+\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f_x(x,y)\,dy$$

证毕

例 1： $F(x)=\int_x^{x^2}\frac{\sin(xy)}{y}dy$，求 $F'(x)$。

解： 由定理 4，

$$F'(x)=\int_x^{x^2}\frac{y\cos(xy)}{y}dy+\frac{\sin(x\cdot x^2)}{x^2}\cdot 2x-\frac{\sin(x\cdot x)}{x}\cdot 1$$

$$=\int_x^{x^2}\cos(xy)\,dy+\frac{2\sin(x^3)-\sin(x^2)}{x}$$

$$=\frac{\sin(xy)}{x}\bigg|_x^{x^2}+\frac{2\sin(x^3)-\sin(x^2)}{x}=\frac{3\sin(x^3)-2\sin(x^2)}{x}$$

例 2： 求积分 $I(\theta)=\int_0^{\pi}\ln(1+\theta\cos x)\,dx$，$|\theta|<1$。

解： 在 $|\theta|\le 1-\delta<1$ 内，由定理 3 知 $I(\theta)$ 可导，因此：

$$I'(\theta)=\int_0^{\pi}\frac{\cos x}{1+\theta\cos x}dx\overset{\tan\frac{x}{2}=t}{=}\int_0^{+\infty}\frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)(1+\theta+(1-\theta)t^2)}dt$$

$$=\frac{2}{\theta}\int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{1+t^2}-\frac{1}{1+\theta+(1-\theta)t^2}\right]dt$$

所以：$I'(q)=\dfrac{2}{q}\left[\dfrac{p}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{1-q^2}}\dfrac{p}{2}\right]=-\dfrac{pq}{\sqrt{1-q^2}\left(\sqrt{1-q^2}+1\right)}$，因而：

$$I(q)=I(0)+\int_0^q I'(q)\,dq=0+\int_0^q\frac{-pq}{\sqrt{1-q^2}\left(1+\sqrt{1-q^2}\right)}dq$$

$$=p\ln\left(1+\sqrt{1-q^2}\right)\Big|_0^q=p\ln\left(1+\sqrt{1-q^2}\right)-p\ln 2$$

例 3：设 $u(x)=\int_0^p\cos(nq-x\sin q)\,dq$，求证：$u(x)$ 满足方程 $x^2u''+xu'+\left(x^2-n^2\right)u=0$。

证明：由定理 3，

$$u'(x)=-\int_0^p\sin(nq-x\sin q)(-\sin q)\,dq=\int_0^p\sin(nq-x\sin q)\sin q\,dq$$

$$u''(x)=-\int_0^p\cos(nq-x\sin q)\sin^2q\,dq$$

因而：$x^2u''+xu'+\left(x^2-n^2\right)u$

$$=\int_0^p\left\{\left[-x^2\sin^2q+x^2-n^2\right]\cos(nq-x\sin q)+x\sin q\sin(nq-x\sin q)\right\}dq$$

$$=\int_0^p\left\{\left(x^2\cos^2q-n^2\right)\cos(nq-x\sin q)+x\sin q\sin(nq-x\sin q)\right\}dq$$

$$=\int_0^p\left\{-(n+x\cos q)\,d\sin(nq-x\sin q)-\sin(nq-x\sin q)\,d(n+x\cos q)\right\}$$

$$=-(n+x\cos q)\sin(nq-x\sin q)\Big|_0^p=0$$

故命题得证。

3 可积性

定理 5：$f(x,y)\in C(\mathbf{D})$，$\forall z\in[a,b]$ 有：$\int_a^z\left[\int_a^b f(x,y)\,dy\right]dx=\int_a^b\left[\int_a^z f(x,y)\,dx\right]dy$。

证明：令：$F(z)=\int_a^z\left[\int_a^b f(x,y)\,dy\right]dx$，$G(z)=\int_a^b\left[\int_a^z f(x,y)\,dx\right]dy$。

一方面，由于 $f(x,y)\in C(\mathbf{D})$，所以 $\int_a^b f(x,y)\,dy\in C[a,b]$

因而变上限积分 $F(z)$ 可导，且 $F'(z)=\int_a^b f(z,y)\,dy$；

另一方面，$\forall y\in[a,b]$，变上限积分 $\int_a^z f(x,y)\,dx\in C^{(1)}[a,b]$，所以：

$$G'(z)=\int_a^b\left[\frac{\partial}{\partial z}\int_a^z f(x)\,dx\right]dy=\int_a^b f(z,y)\,dy。$$

所以：$F'(z)=G'(z)$，因此有 $F(z)=G(z)+C$。

又：$z=a$ 时，$F(a)=G(a)$，所以：$C=0$，

即：$\int_a^z\left[\int_a^b f(x,y)\,dy\right]dx=\int_a^b\left[\int_a^z f(x,y)\,dx\right]dy$。

证毕

推论：$f(x,y)\in C(\mathbf{D})$，则：$\int_a^b\left[\int_a^b f(x,y)\,dy\right]dx=\int_a^b\left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right]dy$。

例 4：设 $0<a<b$，求积分 $I=\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx$。

解：　由于 $\frac{x^b-x^a}{\ln x}=\int_a^b x^y\,dy$，所以：

$$I=\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx=\int_0^1\left[\int_a^b x^y dy\right]dx=\int_a^b\left[\int_0^1 x^y dx\right]dy$$

$$=\int_a^b\left.\frac{x^{y+1}}{y+1}\right|_0^1 dy=\int_a^b\frac{dy}{y+1}=\ln\frac{b+1}{a+1}$$

例 5：　设 $f(x)\in C^{(n)}(-\infty,+\infty)$，$(n\geq 1)$，令 $g(x)=\begin{cases}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} & x\neq a\\ f'(a) & x=a\end{cases}$

求证：$g(x)\in C^{(n-1)}(-\infty,+\infty)$。

证明：$f(x)-f(a)=\int_0^1\frac{d}{dt}f\left(a+t(x-a)\right)dt=\int_0^1 f'\left(a+t(x-a)\right)(x-a)\,dt$

所以：$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\int_0^1 f'\left(a+t(x-a)\right)dt$，$x\neq a$

又因为：$f'(a)=\int_0^1 f'\left(a+t(a-a)\right)dt$，所以：$g(x)=\int_0^1 f'\left(a+t(x-a)\right)dt$。

由于 $f'(x)\in C^{(n-1)}(-\infty,+\infty)$，所以 $g(x)\in C^{(n-1)}(-\infty,+\infty)$。

例 6：计算积分 $I(r)=\int_0^p\ln\left(1-2r\cos q+r^2\right)dq$，$|r|<1$。

解：　在 $|r|\leq 1-d<1$ 内 $I(r)$ 可导，因此：$I'(r)=\int_0^p\frac{2r-2\cos q}{1-2r\cos q+r^2}dq$。

$I'(0)=\int_0^p(-2\cos q)\,dq=0$，而当 $r\neq 0$ 时，

$$I'(r)=\frac{1}{r}\int_0^p\left[1-\frac{1-r^2}{1-2r\cos q+r^2}\right]dq=\frac{1}{r}\left[q-2\arctan\left(\frac{1-r}{1+r}\tan\frac{q}{2}\right)\right]\Bigg|_0^p=0$$

所以：$I'(r)\equiv 0$，$I(r)\equiv I(0)=0$。

§2　一致收敛与极限函数之性质

1　一致收敛的概念

在讲授函数项级数之时，曾经介绍过函数序列的一致收敛的概念，我们说：$f_n(x)\overset{\mathbf{X}}{\Rightarrow} f(x)$是指：

$\forall e>0$，$\exists N$，当$n>N$时，$\forall x\in\mathbf{X}$，有：$\left|f_n(x)-f(x)\right|<e$。

由于有了一致收敛性，极限函数$f(x)$的性质就可以由函数$f_n(x)$的性质推得，如一致收敛之函数序列保持连续性、可导性、可积性等等。

这里我们要讨论另一种形式的一致收敛性，它不再是指函数列的收敛性，而是一般函数极限的一致收敛问题，即将函数列的一致收敛的过程推广至一般的极限过程之一致收敛性。

对于含参量的广义积分，一般其收敛收是指积分：$\int_0^{+\infty} f(x,y)\,dy$的收敛性，上述积分之收敛性等价于函数$F(x,A)=\int_a^A f(x,y)\,dy$当$A\to+\infty$时的极限性质，我们在这里试图引入函数$F(x,A)$的一致收敛性来讨论极限函数$\int_0^{+\infty} f(x,y)\,dy$之性质。

定义 1：设$j(x)$在$\mathbf{X}$上定义，若$\forall e>0$，$\exists d>0$，当$y\in\mathbf{Y}$，$0<\left|y-y_0\right|<d$时，$\forall x\in\mathbf{X}$，有$\left|f(x,y)-j(x)\right|<e$

则称$f(x,y)$对于$\mathbf{X}$在$y\to y_0$（$y\in\mathbf{Y}$）时一致收敛到$j(x)$，

记作：$f(x,y)\underset{y\to y_0}{\overset{\mathbf{X}}{\Rightarrow}} j(x)$。

类似地，可定义$y\to+\infty$时的一致收敛性：

若$\forall e>0$，$\exists M>0$，当$y\in\mathbf{Y}$，$y>M$时，$\forall x\in\mathbf{X}$，有$\left|f(x,y)-j(x)\right|<e$，称$f(x,y)$对于$\mathbf{X}$在$y\to+\infty$（$y\in\mathbf{Y}$）时一致收敛到$j(x)$，记作$f(x,y)\underset{y\to+\infty}{\overset{\mathbf{X}}{\Rightarrow}} j(x)$。

例 1：求证$\sqrt{x^2+y^2}\underset{y\to 0}{\overset{(-\infty,+\infty)}{\Rightarrow}}|x|$。

证明：由于：$\left|\sqrt{x^2+y^2}-|x|\right|=\dfrac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}+|x|}|y|\le|y|$，所以：

$\forall e>0$，$\exists d=e>0$，当$|y|<d$时，$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，$\left|\sqrt{x^2+y^2}-|x|\right|<e$，

所以：$\sqrt{x^2+y^2}\underset{y\to 0}{\overset{(-\infty,+\infty)}{\Rightarrow}}|x|$。

例 2：求证$\forall c>0$，$y\to+\infty$时，$\dfrac{1}{xy+1}$在$[c,+\infty)$上一致收敛性；但在$(0,+\infty)$上不一致收敛。

证明： 当 $0 < c \le x < +\infty$ 时，$0 < \dfrac{1}{xy+1} \le \dfrac{1}{cy+1} < \dfrac{1}{cy}$，$(y>0)$，所以 $\dfrac{1}{xy+1} \overset{[c,+\infty)}{\underset{y\to+\infty}{\rightrightarrows}} 0$；

而对于 $\mathbf{X}=(0,+\infty)$，显然 $\dfrac{1}{xy+1} \xrightarrow{y\to+\infty} 0$，但它不是一致收敛的，这是因为：

$\exists e_0 = \dfrac{1}{2} > 0$，对于 $\forall M > 0$，$y > M$ 时，$\exists x_0 = \dfrac{1}{y} \in (0,+\infty)$，使得：

$\left|\dfrac{1}{xy+1} - 0\right| = \dfrac{1}{2} = e_0$，这是一致收敛定义的逆否命题。

下面我们来讨论一致收敛之充要条件：

定理 1： $y \to y_0$（$y \to +\infty$）时，$f(x,y)$ 在 $x \in \mathbf{X}$ 上一致收敛。$\Leftrightarrow$

$\forall e > 0$，$\exists d > 0$，（$\exists M > 0$），当 $y', y'' \in \mathbf{Y}$，且 $0 < \begin{matrix}|y'-y_0|\\|y''-y_0|\end{matrix} < d$ （$\begin{matrix}y' > M\\y'' > M\end{matrix}$）

时，$\forall x \in \mathbf{X}$，有：$|f(x,y') - f(x,y'')| < e$

证明： 由一致收敛的定义，必要性是显然的；

充分性：针对 $y \to y_0$ 证明。

由条件知 $\exists j(x)$，使得：$\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) = j(x)$；

在条件中，令 $y'' \to y_0$，则我们得到：$\forall e > 0$，$\exists d > 0$，当 $y' \in \mathbf{Y}$，且 $0 < |y' - y_0| < d$ 时，$\forall x \in \mathbf{X}$，有：$|f(x,y') - j(x)| \le e$，

这就是一致收敛的定义，所以：$f(x,y) \overset{\mathbf{X}}{\underset{y\to y_0}{\rightrightarrows}} j(x)$。

证毕

定理 2： $y \to +\infty$（$y \to y_0$）时，$f(x,y)$ 在 $x \in \mathbf{X}$ 上一致收敛到 $j(x)$。$\Leftrightarrow$

$\forall y_n \in \mathbf{Y}$，$y_n \to +\infty$（$y_n \to y_0$），均有：$f(x,y_n) \overset{\mathbf{X}}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} j(x)$

证明： 由一致收敛的定义，必要性也是显然的；

充分性：针对 $y \to +\infty$ 证明。

采用反证法，假设 $f(x,y)$ 在 $x \in \mathbf{X}$ 上不一致收敛，则：

$\exists e_0 > 0$，$\forall n$，$\exists y_n \in \mathbf{Y}$，$y_n > n$，$\exists x_n \in \mathbf{X}$，使得：$|f(x_n,y_n) - j(x_n)| \ge e_0$

这样构造出的 $y_n \in \mathbf{Y}$，$y_n \to +\infty$，但 $f(x_n,y_n)$ 不一致收敛于 $j(x)$，

与条件矛盾。所以反证法假设不成立。

证毕

2　极限函数之性质

定理 3：（极限交换次序定理）

若 $\lim\limits_{x\to x_0} F(x,y)=\varphi(y)$，$\forall y\in \mathbf{Y}$，**且** $F(x,y)\underset{y\to y_0}{\overset{\mathbf{X}}{\rightrightarrows}}\psi(x)$，

则： $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} F(x,y)=\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} F(x,y)$ （x_0,y_0 **可以为无穷**）

证明： $\forall y_n\in \mathbf{Y}$，$y_n\to y_0$，**由定理** 2 **知** $F(x,y_n)\underset{n\to\infty}{\overset{\mathbf{X}}{\rightrightarrows}}\psi(x)$

又由于 $\lim\limits_{x\to x_0} F(x,y_n)=\varphi(y_n)$，**由序列（函数序列）极限性质，我们得到：**

$$\lim_{x\to x_0}\psi(x)=\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to+\infty} F(x,y_n)=\lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to x_0} F(x,y_n)=\lim_{n\to+\infty}\varphi(y_n)$$

其中第二个等式用到了函数列的一致收敛性质。

又由数列极限与函数极限之关系，

已知 $\forall y_n\in \mathbf{Y}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(y_n)=\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)$，**所以** $\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)=\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)$，

即： $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} F(x,y)=\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} F(x,y)$。

证毕

定理 4：（连续性与可积性定理）

设 $\forall y\in \mathbf{Y}\setminus\{y_0\}$，$F(x,y)$ **对于** $x\in \mathbf{X}$ **是连续的，且** $F(x,y)\underset{y\to y_0}{\overset{\mathbf{X}}{\rightrightarrows}}\varphi(x)$

则 $\varphi(x)\in C(\mathbf{X})$，**且** $\forall[a,b]\subset \mathbf{X}$，$\lim\limits_{y\to y_0}\int_a^b F(x,y)dx=\int_a^b\varphi(x)dx$。

证明：连续性：

$\forall x,x_0\in \mathbf{X}$，$\forall y\in \mathbf{Y}\setminus\{y_0\}$，**有：**

$$\begin{aligned}|\varphi(x)-\varphi(x_0)|&=|\varphi(x)-F(x,y)+F(x,y)-F(x_0,y)+F(x_0,y)-\varphi(x_0)|\\&\le|\varphi(x)-F(x,y)|+|F(x,y)-F(x_0,y)|+|F(x_0,y)-\varphi(x_0)|\end{aligned}$$

由于 $F(x,y)\underset{y\to y_0}{\overset{\mathbf{X}}{\rightrightarrows}}\varphi(x)$，**我们有：**

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$|y-y_0|<\delta$ **时，** $\forall x\in \mathbf{X}$，**有** $|F(x,y)-\varphi(x)|<\varepsilon/3$，

所以， $\exists y'\in O^-(y_0,\delta)$，$|F(x,y')-\varphi(x)|<\varepsilon/3$，$|F(x_0,y')-\varphi(x_0)|<\varepsilon/3$

对于上述 y'，**由于** $F(x,y)$ **对于** $x\in \mathbf{X}$ **是连续的，所以**

$\exists\delta'>0$，$|x-x_0|<\delta'$**时，** $|F(x,y')-F(x_0,y')|<\varepsilon/3$，**因此：**

$|\varphi(x)-\varphi(x_0)|<\varepsilon/3+\varepsilon/3+\varepsilon/3=\varepsilon$，**即** $\varphi(x)\in C(\mathbf{X})$。

可积性：

由于函数 $j(x)$ 是连续的，所以也是 Riemann 可积的。并且：

$$\left|\int_a^b F(x,y)\,dx-\int_a^b j(x)\,dx\right|\le\int_a^b\left|F(x,y)-j(x)\right|dx$$

由于 $F(x,y)\underset{y\to y_0}{\overset{\mathbf{X}}{\rightrightarrows}} j(x)$，我们有：

$\forall e>0$，$\exists d>0$，$|y-y_0|<d$ 时，$\forall x\in\mathbf{X}$，有 $|F(x,y)-j(x)|<e/(b-a)$，

所以：$\left|\int_a^b F(x,y)\,dx-\int_a^b j(x)\,dx\right|<\dfrac{e}{b-a}\int_a^b dx=e$，

即：$\lim\limits_{y\to y_0}\int_a^b F(x,y)\,dx=\int_a^b j(x)\,dx$

证毕

定理 5：（可导性）

设 $F(x,y)$，$F_x(x,y)$ 在 $\mathbf{X}\times\mathbf{Y}$（$\mathbf{X}$ 为有界集）上定义，且满足：

1) $\lim\limits_{y\to y_0}F(x,y)=j(x)$，　2) $F_x(x,y)\underset{y\to y_0}{\overset{\mathbf{X}}{\rightrightarrows}}\Phi(x)$，

则：$j(x)$ 在 $\mathbf{X}$ 上可微，且 $j'(x)=\Phi(x)$。

证明：先证：$\lim\limits_{y\to y_0}F(x,y)=j(x)$ 是一致收敛的。

$\forall x\in\mathbf{X}$，$\forall y',y''\in\mathbf{Y}$，取定 $x_0\in\mathbf{X}$，则有：

$$\left|F(x,y')-F(x,y'')\right|$$

$$\le\left|F(x,y')-F(x,y'')-F(x_0,y')+F(x_0,y'')\right|+\left|F(x_0,y')-F(x_0,y'')\right|$$

由收敛性，$\forall e>0$，$\exists d_1>0$，$|y'-y_0|<d_1$，$|y''-y_0|<d_1$ 时，

$$\left|F(x_0,y')-F(x_0,y'')\right|<e/2$$

又因为：$F(x,y')-F(x,y'')$ 对 x 可导，由 Lagrange 中值定理：$\exists q\in(0,1)$

$$\left|F(x,y')-F(x,y'')-F(x_0,y')+F(x_0,y'')\right|$$

$$=\left|F_x\left(x_0+q(x-x_0),y'\right)-F_x\left(x_0+q(x-x_0),y''\right)\right|\cdot|x-x_0|$$

由于 $F_x(x,y)\underset{y\to y_0}{\overset{\mathbf{X}}{\rightrightarrows}}\Phi(x)$，所以 $\exists d_2>0$，$|y'-y_0|<d_2$，$|y''-y_0|<d_2$ 时

$$\left|F_x\left(x_0+q(x-x_0),y'\right)-F_x\left(x_0+q(x-x_0),y''\right)\right|\le e/2M$$

其中 M 为有界集 $\mathbf{X}$ 的直径。令：$d=\min\{d_1,d_2\}$，

则当 $|y'-y_0|<d$，$|y''-y_0|<d$ 时，有：$|F(x,y')-F(x,y'')|<e$，

即：$F(x,y)\underset{y\to y_0}{\overset{\mathbf{X}}{\rightrightarrows}}j(x)$。

其次，令：$G(x,y)=\begin{cases}\dfrac{F(x,y)-F(x_0,y)}{x-x_0} & x\neq x_0\\ F_x(x_0,y) & x=x_0\end{cases}$

显然：$\lim\limits_{x\to x_0}G(x,y)=F_x(x_0,y)$，$\lim\limits_{y\to y_0}G(x,y)=\begin{cases}\dfrac{j(x)-j(x_0)}{x-x_0} & x\neq x_0\\ F_x(x_0,y_0) & x=x_0\end{cases}$

所以：

$$\begin{aligned}\Phi(x_0)&=\lim_{y\to y_0}F_x(x_0,y)=\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0}G(x,y)\\&=\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0}G(x,y)=\lim_{x\to x_0}\frac{j(x)-j(x_0)}{x-x_0}=j'(x_0)\end{aligned}$$

证毕

§3 含参量的广义积分

有了上一节关于一致收敛性的讨论，我们可以开始研究含参量之广义积分的性质了。含参量的广义积分有两类：一类是无穷积分，$F(x)=\int_a^{+\infty}f(x,y)dy$ ，另一类是瑕积分，$G(x)=\int_a^b f(x,y)dy$。

一般地广义积分的两类情形是可以通过变量替换互换的，因而这里我们着重考虑无穷积分的情形。

1 含参量无穷积分的一致收敛性

令：$F(x,A)=\int_a^A f(x,y)dy$，这是一个二元函数，当 $A\to+\infty$ 时该函数关于 x 的一致收敛性也就是广义积分的一致收敛性，因此：

定义： 若函数 $F(x,A)=\int_a^A f(x,y)dy$ 当 $A\to+\infty$ 时，对 $x\in$ **X** 一致收敛，则称积分 $\int_a^{+\infty}f(x,y)dy$ 对 $x\in$ **X** 一致收敛。

例 1：讨论积分 $\int_0^{+\infty}xe^{-xy}dy$ 的一致收敛性。

解： 显然，$x>0$ 时上述积分总是收敛的，但是否一致收敛呢？

按定义，$F(x,A)=\int_0^A xe^{-xy}dy=1-e^{-xA}$

若 $x\geq c>0$，则：$\left|F(x,A)-1\right|=e^{-xA}\leq e^{-cA}\to 0$，$(A\to+\infty)$

所以 $\int_0^{+\infty}xe^{-xy}dy$ 在 $[c,+\infty)$ 上一致收敛；

若 $x>0$，则：对于 $e_0=e^{-1}$，$\forall A>0$，$\exists x_0=\dfrac{1}{A}$，使得 $\left|F\left(x_0,A\right)-1\right|>e^{-1}$，因而不是一致收敛的。

2　一致收敛判别法

1)　一致收敛原理

$\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dy$ 对 $x\in \mathbf{X}$ 一致收敛的充分必要条件为：$\forall e>0$，$\exists A>a$，当 $A',A''>A$ 时，$\forall x\in \mathbf{X}$，$\left|\int_{A'}^{A''} f(x,y)\,dy\right|<e$。

一致收敛原理的证明可由上一节得定理 1 直接得到。

2)　Weierstrass 判别法（M 判别法）

类似于无穷积分的比较判别法，我们有如下的 Weierstrass 判别法：

若 $\forall x\in \mathbf{X}$，$y\ge a$ 时，有 $\left|f(x,y)\right|\le M(y)$，并且 $\int_a^{+\infty} M(y)\,dy$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dy$ 对于 $x\in \mathbf{X}$ 一致收敛。

3)　Abel 判别法

命题 1：
1) $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dy$ 对于 $x\in \mathbf{X}$ 一致收敛；
2) $g(x,y)$ 对于固定的 $x\in \mathbf{X}$，是 y 的单调函数，且 $g(x,y)$ 一致有界，即：$\exists M>0$，$\forall x\in \mathbf{X}$，$y\ge a$ 时，有 $\left|g(x,y)\right|\le M$；

则：$\int_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)\,dy$ 对于 $x\in \mathbf{X}$ 一致收敛。

证明： 由条件 1)，我们有：

$\forall e>0$，$\exists A>a$，当 $A',A''>A$ 时，$\forall x\in \mathbf{X}$，$\left|\int_{A'}^{A''} f(x,y)\,dy\right|<e/2M$，

由条件 2)，应用积分第二中值定理，我们有：

$$\begin{aligned}\left|\int_{A'}^{A''} f(x,y)g(x,y)\,dy\right| &= \left|g(x,A')\int_{A'}^{x} f(x,y)\,dy+g(x,A'')\int_{x}^{A''} f(x,y)\,dy\right| \\ &\le M\left|\int_{A'}^{x} f(x,y)\,dy\right|+M\left|\int_{x}^{A''} f(x,y)\,dy\right| \\ &< M\cdot\frac{e}{2M}+M\cdot\frac{e}{2M}=e\end{aligned}$$

所以，$\int_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)\,dy$ 对于 $x\in \mathbf{X}$ 一致收敛。

证毕

4)　Dirichlet 判别法

命题 2：若 1)　$\exists M>0$，$\forall x\in \mathbf{X}$，$A\ge a$ **时，有** $\left|\int_a^A f(x,y)\,dy\right|\le M$ ；

2)　$g(x,y)$ **对于固定的** $x\in\mathbf{X}$，**是** y **的单调函数，且** $g(x,y)\underset{y\to+\infty}{\overset{\mathbf{X}}{\rightrightarrows}}0$ ；

则： $\int_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)\,dy$ **对于** $x\in\mathbf{X}$ **一致收敛。**

证明： **由条件** 2)，$\forall e>0$，$\exists A>a$，**当** $A',A''>A$ **时，** $\forall x\in\mathbf{X}$，

有 $|g(x,A')|<e/4M$，$|g(x,A'')|<e/4M$ ；

同样应用积分第二中值定理，利用条件 1)，**我们有：**

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x,y)g(x,y)\,dy\right|=\left|g(x,A')\int_{A'}^{x} f(x,y)\,dy+g(x,A'')\int_{x}^{A''} f(x,y)\,dy\right|$$

$$\le 2M\,|g(x,A')|+2M\,|g(x,A'')|<e$$

因而 $\int_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)\,dy$ **对于** $x\in\mathbf{X}$ **一致收敛。**

证毕

3　含参量广义积分之性质

定理 1：（积分界内取极限定理）设：

1)　$\forall x\in\mathbf{X}\setminus\{x_0\}$，$f(x,y)$ **是** $y\in[a,+\infty)$ **上连续函数；**

2)　$\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dy$ **对于** $x\in\mathbf{X}$ **一致收敛；**

3)　x_0 **是** $\mathbf{X}$ **之聚点，且** $\forall b>a$ **有** $f(x,y)\underset{x\to x_0,x\in\mathbf{X}}{\overset{[a,b]}{\rightrightarrows}}g(y)$ ；

则： $\lim\limits_{x\to x_0}\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dy=\int_a^{+\infty} g(y)\,dy$ **（有限值）。**

证明： **考虑函数** $F(x,b)=\int_a^b f(x,y)\,dy$，**这是一个含参量之定积分**

由含参量之定积分的连续性， $F(x,b)\xrightarrow{x\to x_0}\int_a^b g(y)\,dy$ ；

又，由于条件 2)，$F(x,b)\underset{b\to+\infty}{\overset{x\in\mathbf{X}}{\rightrightarrows}}\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dy$ ；

由一致收敛函数之性质，有： $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{b\to+\infty}F(x,b)=\lim\limits_{b\to+\infty}\lim\limits_{x\to x_0}F(x,b)$，

因而 $\lim\limits_{x\to x_0}\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dy=\int_a^{+\infty} g(y)\,dy$。

证毕

定理 2**：（连续性定理）设** $f(x,y)\in C([a,b]\times[a,+\infty))$

$F(x)=\int_a^{+\infty} f(x,y)dy$ **在** $[a,b]$ **上一致收敛，则：** $F(x)\in C[a,b]$。

证明：对于 $\forall b\geq a$ **，由含参量定积分的性质，有：** $\int_a^b f(x,y)dy\in C[a,b]$**，**

又因为： $\int_a^b f(x,y)dy \underset{b\to+\infty}{\overset{[a,b]}{\rightrightarrows}} F(x)$**，因而** $F(x)\in C[a,b]$。

证毕

定理 3**：（积分顺序交换定理之一）设**

1) $f(x,y)\in C([a,b]\times[a,+\infty))$**，（**$[a,b]$ **有限）**

2) $F(x)=\int_a^{+\infty} f(x,y)dy$ **在** $[a,b]$ **上一致收敛，**

则有： $\int_a^b\left[\int_a^{+\infty} f(x,y)dy\right]dx=\int_a^{+\infty}\left[\int_a^b f(x,y)dx\right]dy$

证明：由条件知 $\forall b\geq a$ **有：** $\int_a^b f(x,y)dy \underset{b\to+\infty}{\overset{[a,b]}{\rightrightarrows}} F(x)$

因而由一致收敛函数求极限之定理，有：

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b\left[\int_a^b f(x,y)dy\right]dx=\int_a^b\lim_{b\to+\infty}\left[\int_a^b f(x,y)dy\right]dx=\int_a^b F(x)dx$$

另一方面，由含参量的定积分交换次序定理，

$$\int_a^b\left[\int_a^b f(x,y)dx\right]dy=\int_a^b\left[\int_a^b f(x,y)dy\right]dx$$

令 $b\to+\infty$ **，有：**

$$\int_a^{+\infty}\left[\int_a^b f(x,y)dx\right]dy=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b\left[\int_a^b f(x,y)dy\right]dx$$

$$=\int_a^b F(x)dx=\int_a^b\left[\int_a^{+\infty} f(x,y)dy\right]dx$$

证毕

定理 4**：（积分顺序交换定理之二）设**

1) $f(x,y)\in C([a,+\infty)\times[a,+\infty))$ **；**

2) $\int_a^{+\infty} f(x,y)dy$ **在** $[a,+\infty)$ **的任一有限子区间上一致收敛；**

3) $\int_a^{+\infty}\left(\int_a^{+\infty}|f(x,y)|dy\right)dx$ **与** $\int_a^{+\infty}\left(\int_a^{+\infty}|f(x,y)|dx\right)dy$ **两者至少有一个存在；**

则： $\int_a^{+\infty}\left(\int_a^{+\infty} f(x,y)dy\right)dx=\int_a^{+\infty}\left(\int_a^{+\infty} f(x,y)dx\right)dy$ **。**

证明： $\forall z\geq a$**，令：** $F(z,y)=\int_a^z f(x,y)dx$**，它满足：**

(1) $F(z,y)\in C([a,+\infty)\times[a,+\infty))$ **（由含参量定积分之性质）**

(2) **积分** $\int_a^{+\infty} F(z,y)\,dy$ **对** $z\in[a,+\infty)$ **一致收敛；**

这是因为 $\left|F(z,y)\right| \le \int_a^z \left|f(x,y)\right| dx \le \int_a^{+\infty}\left|f(x,y)\right| dx$ **，由条件** 3)**以及** Weierstrass **判别法，知** $\int_a^{+\infty} F(z,y)\,dy$ **对** $z\in[a,+\infty)$ **一致收敛**

(3) **有条件** 2)**，** $z\to+\infty$ **时，** $\forall y\in[a,b]$ **，** $F(z,y)$ **一致收敛到** $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ **；**

因此，由定理 1 **知：**

$$\lim_{z\to+\infty}\int_a^{+\infty} F(z,y)\,dy=\int_a^{+\infty}\lim_{z\to+\infty}F(z,y)\,dy=\int_a^{+\infty}\left(\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx\right)dy$$

另一方面，由定理 3 **知：**

$$\int_a^z\left(\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dy\right)dx=\int_a^{+\infty}\left(\int_a^z f(x,y)\,dx\right)dy=\int_a^{+\infty}F(z,y)\,dy$$

令 $z\to+\infty$ **，即得：** $\int_a^{+\infty}\left(\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dy\right)dx=\int_a^{+\infty}\left(\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx\right)dy$

证毕

推论： 假设：

1) $f(x,y)\in C\left([a,+\infty)\times[a,+\infty)\right)$ **且非负，（即** $f(x,y)\ge 0$ **）**

2) $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx\in C[a,+\infty)$ **，** $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dy\in C[a,+\infty)$ **；**

3) $\int_a^{+\infty}\left(\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dy\right)dx$ **与** $\int_a^{+\infty}\left(\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx\right)dy$ **至少有一个存在；**

则： $\int_a^{+\infty}\left(\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dy\right)dx=\int_a^{+\infty}\left(\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx\right)dy$ **。**

证明仿照定理 4 **的证明即可。**

定理 5**：（积分号下求导定理）假设：**

1) $f(x,y), f_x(x,y)$ **在** $x\in[a,b]$ **，** $y\ge a$ **上连续；**

2) $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dy$ **存在；**

3) $\int_a^{+\infty} f_x(x,y)\,dy$ **在** $[a,b]$ **上一致收敛；**

则： $F(x)=\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dy\in C^{(1)}[a,b]$ **，且** $F'(x)=\int_a^{+\infty} f_x(x,y)\,dy$ **。**

证明：令： $j(x)=\int_a^{+\infty} f_x(x,y)\,dy$ **，显然** $j(x)\in C[a,b]$ **，并且由定理** 3**，有：**

$$\int_a^x j(x)\,dx=\int_a^x\left[\int_a^{+\infty} f_x(x,y)\,dy\right]dx=\int_a^{+\infty}\left[\int_a^x f_x(x,y)\,dx\right]dy$$

$$=\int_a^{+\infty}\left[f(x,y)-f(a,y)\right]dy=F(x)-F(a)$$

因而结论成立。

证毕

4　几个例子

例 1：**求积分**：1) $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$，　2) $\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}dx$，其中 $a,b>0$。

解：　**方法一，利用交换积分次序的定理。**

1)　$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx=\int_0^{+\infty}\left(\int_a^b e^{-xy}dy\right)dx$，由于 $\left|e^{-xy}\right|\le e^{-ax}$，

所以 $\int_0^{+\infty}e^{-xy}dx$ 在 $y\in[a,b]$ 上一致收敛，由定理 3，

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx=\int_a^b\left(\int_0^{+\infty}e^{-xy}dx\right)dy=\int_a^b\frac{dy}{y}=\ln\frac{b}{a}。$$

2)　$\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}dx=\int_0^{+\infty}\left(\int_a^b\frac{\sin xy}{x}dy\right)dx$，

考虑积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{x}dx$，$x=0$ 不是瑕点，由于：

$$\left|\int_0^A\sin xydx\right|=\frac{\left|1-\cos Ay\right|}{y}\le\frac{2}{a},$$

并且 $x\to+\infty$ 时，$\frac{1}{x}$ 在 $y\in[a,b]$ 上单调一致趋于零，

由 Dirichlet 判别法知 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{x}dx$ 在 $y\in[a,b]$ 上一致收敛，由定理 3，

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}dx=\int_a^b\left(\int_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{x}dx\right)dy=\int_a^b\frac{p}{2}dy=\frac{p}{2}(b-a)。$$

方法二，利用积分号下求导定理。

1)　令：$I(y)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-xy}}{x}dx$，则：$I(a)=0$，$I(b)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$；

由于 $I'(y)=\int_0^{+\infty}e^{-xy}dx=\frac{1}{y}$，所以 $I(b)=\int_a^b I'(y)dy+I(a)=\ln\frac{b}{a}$。

2)　令：$I(y)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos xy}{x^2}dx$，

则：$I(a)=0$，$I(b)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}dx$；

$$I'(y)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{x}dx=\frac{p}{2},\quad I(b)=\int_a^b I'(y)dy+I(a)=\frac{p}{2}(b-a)。$$

例 2：**计算下列积分**：1) $\int_0^{+\infty}e^{-ax}\cos b\,xdx$，　2) $\int_0^{+\infty}e^{-ax}\frac{\sin b\,x}{x}dx$，

3) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin b\,x}{x}dx$，其中 $a>0$。

解：　1)　由于 $\int e^{-ax}\cos b\,xdx=\frac{e^{-ax}}{a^2+b^2}\left[-a\cos b\,x+b\sin b\,x\right]+C$，

所以$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx dx=\frac{a}{a^2+b^2}$。

2) 令$I(b)=\int_0^{+\infty} e^{-ax}\frac{\sin bx}{x}dx$，

则：$I(0)=0$，$I'(b)=\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx dx=\frac{a}{a^2+b^2}$，

$I(b)=\int_0^{b}\frac{a}{a^2+b^2}db+I(0)=\arctan\frac{b}{a}$。

3) 当$a\ge 0$时，由于$\int_0^{+\infty}\frac{\sin bx}{x}dx$一致收敛，$e^{-\alpha x}\le 1$是单调一致有界的，由 Abel 判别法，$I(b)$对于$a\ge 0$是一致收敛的，

所以：$\int_0^{+\infty}\frac{\sin bx}{x}dx=\lim\limits_{a\to 0^+}I(b)=\frac{p}{2}\operatorname{sgn} b$。

例 3：计算积分$J=\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$。

解： 方法一，利用利用函数列的一致收敛性。

因为$\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}$在$[0,A]$上连续，$e^{-x^2}\in C[0,A]$，$\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}$是单调下降函数列,并且$\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}\to e^{-x^2}$,由 Dini 定理知上述收敛在$[0,A]$上是一致收敛的；

又由于$0<\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}\le\frac{1}{1+x^2}$，所以$\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}dx$关于$n$是一致收敛的；

因此：$\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}dx=\int_0^{+\infty}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}dx=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$，而积分：

$$\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}dx=\sqrt{n}\int_0^{+\infty}\left(1+t^2\right)^{-n}dt=\sqrt{n}\int_0^{\frac{p}{2}}\cos^{2n-2}y dy=\sqrt{n}\frac{p(2n-3)!!}{2(2n-2)!!}$$

利用 Wallis 公式：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n)!!}{\sqrt{2n+1}(2n-1)!!}=\sqrt{\frac{p}{2}}$，

我们有：$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{p}}{2}$。

方法二，利用积分号下求导定理。令：$I(t)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t(x^2+1)}}{x^2+1}dx$，

则有：$I(0)=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1}=\frac{p}{2}$，$\lim\limits_{t\to+\infty}I(t)=0$，

$I'(t)=-\int_0^{+\infty}e^{-t(x^2+1)}dx$ 对于$t\ge d>0$一致收敛，并且：

$$I'(t)=-\int_0^{+\infty} e^{-t\left(x^2+1\right)}dx \overset{y=\sqrt{t}x}{=} -\int_0^{+\infty} e^{-t-y^2}\frac{1}{\sqrt{t}}dy=-\frac{J}{\sqrt{t}e^t}$$

所以：$I(A)-I(d)=-J\int_d^A \frac{dt}{\sqrt{t}e^t} \overset{\sqrt{t}=x}{=} -2J\int_{\sqrt{d}}^{\sqrt{A}} e^{-x^2}dx$

令$d\to 0^+$，$A\to+\infty$，**我们有：**$-\frac{p}{2}=-2J^2$，**所以：**$J=\frac{\sqrt{p}}{2}$。

例 4**：计算积分**$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos 2b\,xdx$。

解： **令：**$I(b)=\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos 2b\,xdx$，

$I'(b)=-\int_0^{+\infty} 2xe^{-x^2}\sin 2b\,xdx$，**对于** $b\in(-\infty,+\infty)$ **一致收敛。因此：**

$I'(b)=\int_0^{+\infty}\sin 2b\,xde^{-x^2}=-\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cdot 2b\cos 2b\,xdx=-2bI(b)$，

求得：$I(b)=Ce^{-b^2}$，**再利用** $I(0)=\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{p}}{2}$，

我们有：$I(b)=\frac{\sqrt{p}}{2}e^{-b^2}$，**即：**$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos 2b\,xdx=\frac{\sqrt{p}}{2}e^{-b^2}$。

例 5**：计算两个** Laplace **积分：**$I(b)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos b\,x}{x^2+a^2}dx$ **及** $J(b)=\int_0^{+\infty}\frac{x\sin b\,x}{x^2+a^2}dx$，$a>0$。

解： **当**$d>0$**时，因为**$\left|\int_0^A \sin b\,xdx\right|\le\frac{2}{d}$**，并且**$\frac{x}{x^2+a^2}$ **在** $b\in[d,+\infty)$ **上单调一致收敛趋于零，由** Dirichlet **判别法，积分** $J(b)=\int_0^{+\infty}\frac{x\sin b\,x}{x^2+a^2}dx$ **在** $b\in[d,+\infty)$ **上一致收敛。**

所以由定理 5，$I'(b)=-\int_0^{+\infty}\frac{x\sin b\,x}{x^2+a^2}dx$。**考虑到：**

$$I'(b)+\frac{p}{2}=-\int_0^{+\infty}\frac{x\sin b\,x}{x^2+a^2}dx+\int_0^{+\infty}\frac{\sin b\,x}{x}dx=a^2\int_0^{+\infty}\frac{\sin b\,x}{x\left(x^2+a^2\right)}dx$$

由于 $I(b)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos b\,x}{x^2+a^2}dx$ **对于** $b\in[d,+\infty)$ **一致收敛，再利用定理** 5，**有：**

$\left[I'(b)+\frac{p}{2}\right]'=a^2\int_0^{+\infty}\frac{\cos b\,x}{x^2+a^2}dx$，**即：**$I''(b)=a^2I(b)$。

由此，我们得到：$I(b)=C_1e^{ab}+C_2e^{-ab}$。

又因为：$\left|I(b)\right|\le\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{p}{2a}$**，所以**$\lim\limits_{a\to+\infty}I(b)=0$**，代回到上面** $I(b)$ **的表达式中，我们有** $C_1=0$，**因此** $I(b)=C_2e^{-ab}$。

最后，考虑到 $\lim\limits_{b\to 0^+} I(b)=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{p}{2a}$，推出 $C_2=\frac{p}{2a}$，

即：$I(b)=\frac{p}{2a}e^{-ab}$。

而当 $b>0$ 时，$J(b)=\int_0^{+\infty}\frac{x\sin bx}{x^2+a^2}dx=-I'(b)=-\frac{p}{2}e^{-ab}$，因此，一般地：

因而 $J(b)=-\frac{p}{2}e^{-ab}\operatorname{sgn} b$。

§4 欧拉积分：Gamma 函数与 Beta 函数

这一节中我们介绍一类特殊的含参量广义积分，即欧拉积分，并引入由此定义的两种特殊函数：b 函数与 Γ 函数。

1 Gamma 函数

定义 1：含参量的广义积分 $\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{x-1}dt$ 定义了关于参量 x 的函数，

记作：$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{x-1}dt$，

称这一函数为 Γ 函数（Gamma 函数），也成为第二类 Euler 积分。

由定义可以看出 $\Gamma(x)$ 是定义在 $x>0$ 上的函数。

定理 1：$\Gamma(x)\in C(0,+\infty)$。

证明：首先 $x>0$ 时，积分 $\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt$ 是收敛的（$t=0$ 为瑕点）

对于 $d>0$，$\forall x\in[d,+\infty)$，$t\in[0,1]$，有 $e^{-t}t^{x-1}\le t^{d-1}e^{-t}$

因而积分 $\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt$ 在 $x\in[d,+\infty)$ 上是一致收敛的；

其次，积分 $\int_1^{+\infty}e^{-t}t^{x-1}dt$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上是一致收敛的，

所以：$\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{x-1}dt$ 在 $x\in[d,+\infty)$ 上一致收敛，因此 $\Gamma(x)\in C(0,+\infty)$。

证毕

定理 2：$\Gamma(x)\in C^{(\infty)}(0,+\infty)$，并且 $\Gamma^{(n)}(x)=\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{x-1}(\ln t)^n dt$。

证明：$A>a>0$ 时，$\forall x\in[a,A]$

当 $t\in[0,1]$，$\left|e^{-t}t^{x-1}(\ln t)^n\right|\le t^{a-1}(\ln t)^n$，而积分 $\int_0^1 t^{a-1}(\ln t)^n dt$ 收敛，

当$t\in[1,+\infty)$，$\left|e^{-t}t^{x-1}(\ln t)^n\right|\le t^{A+n-1}e^{-t}$，而积分$\int_1^{+\infty}t^{A+n-1}e^{-t}dt$收敛，

所以由 Weierstrass 判别法知积分$\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{x-1}(\ln t)^n\,dt$在$[a,A]$上一致收敛，

所以$\Gamma(x)\in C^{(\infty)}(0,+\infty)$，并且$\Gamma^{(n)}(x)=\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{x-1}(\ln t)^n\,dt$。

证毕

引理 1：（Schwartz 不等式）

设$f(x),g(x)\in C[a,b]$，且$f(x),g(x)\ge 0$，$l,m>0$，$l+m=1$，

则：$\int_a^b[f(x)]^l[g(x)]^m dx\le\left[\int_a^b f(x)dx\right]^l\left[\int_a^b g(x)dx\right]^m$。

证明：先证明：$u,v>0$时，$u^lv^m\le lu+mv$。

令$j(x)=-\ln x$，由于$j''(x)=\dfrac{1}{x^2}>0$，所以$j(x)$是$x>0$上的下凸函数，因此：$j(lu+mv)\le lj(u)+mj(v)$，即：$-\ln(lu+mv)\le -l\ln u-m\ln v$，所以：$u^lv^m\le lu+mv$。

其次，令$u=\dfrac{f(t)}{\int_a^b f(t)dt}$，$v=\dfrac{g(t)}{\int_a^b g(t)dt}$代入上述不等式，有：

$$\frac{[f(t)]^l[g(t)]^m}{\left[\int_a^b f(t)dt\right]^l\left[\int_a^b g(t)dt\right]^m}\le\frac{lf(t)}{\int_a^b f(t)dt}+\frac{mg(t)}{\int_a^b g(t)dt},$$

两边对t在$[a,b]$上积分，有：$\dfrac{\int_a^b[f(t)]^l[g(t)]^m dt}{\left[\int_a^b f(t)dt\right]^l\left[\int_a^b g(t)dt\right]^m}\le l+m=1$，

即：$\int_a^b[f(x)]^l[g(x)]^m dx\le\left[\int_a^b f(x)dx\right]^l\left[\int_a^b g(x)dx\right]^m$。

证毕

定理 3：（Γ 函数之基本性质）

1) $\Gamma(x)>0$，$\forall x\in(0,+\infty)$，并且$\Gamma(1)=1$；
2) $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$，$\forall x\in(0,+\infty)$；
3) $\ln\Gamma(x)$在$(0,+\infty)$上是下凸函数。

证明：1) 显然。

2) $\Gamma(x+1)=\int_0^{+\infty}e^{-t}t^x dt=-\int_0^{+\infty}t^x de^{-t}=\int_0^{+\infty}e^{-t}xt^{x-1}dt=x\Gamma(x)$。

3) 利用引理 1，$\forall b>a>0$，$l,m>0$，$l+m=1$，$x,y>0$，有：

$$\int_a^b e^{-t}t^{lx+my-1}dt \le \left(\int_a^b e^{-t}t^{x-1}dt\right)^l \left(\int_a^b e^{-t}t^{y-1}dt\right)^m,$$

令 $a\to 0^+, b\to +\infty$ 即得：$\Gamma(lx+my)\le\left[\Gamma(x)\right]^l\left[\Gamma(y)\right]^m$，

两边取对数，得到：$\ln\Gamma(lx+my)\le l\ln\Gamma(x)+m\ln\Gamma(y)$，

所以 $\Gamma(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是下凸函数。

证毕

推论：$\forall n\in\mathbf{N}$，$\Gamma(n+1)=n!$

定理 3 所描述的 Γ 函数的三条性质实际上是 Γ 函数之全部性质。也就是说它是 Γ 函数的充分条件，也可说是等价定义。这就是下面的定理 4：

定理 4：（Bohr & Mollerup）若在 $(0,+\infty)$ 定义的函数 $f(x)$ 满足：

1) $f(x)>0$，$\forall x\in(0,+\infty)$，并且 $f(1)=1$；
2) $f(x+1)=xf(x)$，$\forall x\in(0,+\infty)$；
3) $\ln f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是下凸函数；

则：$f(x)=\Gamma(x)$。

证明：令：$j(x)=\ln f(x)$，

由条件 1)，2)可得：$f(n+1)=n!$，$j(n+1)=\ln n!$，并且：

$f(x+n+1)=(x+n)(x+n-1)\cdots(x+1)x\cdot f(x)$，

$j(x+n+1)=\ln\left[(x+n)(x+n-1)\cdots(x+1)x\right]+j(x)$。

由条件 3)，$j(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是下凸函数，因而 $\forall x\in(0,1]$，有：

$$\frac{j(n+1)-j(n)}{(n+1)-n}\le\frac{j(x+n+1)-j(n+1)}{(x+n+1)-(n+1)}\le\frac{j(n+2)-j(n+1)}{(n+2)-(n+1)},$$

即：$\ln n\le\dfrac{j(x+n+1)-j(n+1)}{x}\le\ln(n+1)$，

因而：$x\ln n+\ln n!\le j(x+n+1)\le x\ln(n+1)+\ln n!$

将 $j(x+n+1)$ 的表达式代入上式，有：

$$\ln\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}\le j(x)\le\ln\frac{(n+1)^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)},$$

因此：$0\le j(x)-\ln\dfrac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}\le x\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\le\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$

上式说明：$\ln\dfrac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}\overset{x\in(0,1]}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}}j(x)$。

最后，由上式及条件 2)，$(0,+\infty)$ 上的 $f(x)$ 就完全确定了，所以满足条件 1)，

2)，3)的 $f(x)$ 是存在唯一的。

又由定理 3，$\Gamma(x)$ 满足条件 1)，2)，3)，所以 $\forall x>0$， $f(x)\equiv\Gamma(x)$。

证毕

推论： $\forall x>0$，$\Gamma(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$。

证明： 由定理 4 知 $x\in(0,1]$ 时 $\Gamma(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$，

$\forall x>0$ 时，记 $g(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$，则有：

$$g(x+1)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{x+1}n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n+1)}$$

$$=x\lim_{n\to\infty}\frac{n^x n!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}\cdot\frac{n}{x+n+1}=xg(x)$$

所以：$\forall x>0$ 时，$g(x)=\Gamma(x)$，即 $\Gamma(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$。

证毕

引理 2： $x\in(0,1)$ 时，有 $\sin p x=p x\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{x^2}{n^2}\right)$。

证明： 1) 当 a 非整数时，对 $\cos at$ 在 $[-p,p]$ 上 Fourier 展开，得到：

$$\cos at=\frac{\sin ap}{p}\left[\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2a\cos nt}{a^2-n^2}\right];$$

2) 在上述展开式中令 $t=p$ 有：$p\cot ap=\dfrac{1}{a}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2a}{a^2-n^2}$

因而当 $x\in(0,1)$ 时，有 $p\cot p x=\dfrac{1}{x}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2x}{x^2-n^2}$

3) 令：$y(x)=\ln\left[p\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{x^2}{n^2}\right)\right]=\ln p+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\dfrac{x^2}{n^2}\right)$

则有：$y(0)=0$，并且 $y'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2x}{x^2-n^2}=p\cot p x-\dfrac{1}{x}$

所以：$y(x)=\ln\dfrac{\sin p x}{x}$，即：$\sin p x=p x\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{x^2}{n^2}\right)$。

证毕

推论： $\forall x\in \mathbf{R}$ ，**均有** $\sin p\, x = p\, x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)$。

证明： $x\in \mathbf{R}$ ，**令** $h(x)=p\, x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)$，**则：**

1) $h(0)=h(1)=0$ ；

2) $h(-x)=-h(x)$，$\forall x\in \mathbf{R}$ ；

3) **因为：** $p\,(x+1)\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{(x+1)^2}{n^2}\right)=-p\, x\frac{N+1+x}{N-x}\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)$，**所以：**

$h(x+1)=-h(x)$，$\forall x\in \mathbf{R}$ ，

因而 $\forall x\in \mathbf{R}$ ，$h(x)=\sin p\, x$。

证毕

定理 5：（**余元公式**） $x\in(0,1)$ **时**，$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{p}{\sin p\, x}$。

证明：利用定理 4 **之推论：**

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^x}{x(1+x)\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right)},$$

$$\Gamma(1-x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{1-x}}{(1-x)\left(1-\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{n}\right)(n+1-x)},$$

因而 $x\in(0,1)$ **时：**

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{x(1-x^2)\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)(n+1-x)}$$

$$=\frac{1}{x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)}=\frac{p}{\sin p\, x}$$

证毕

推论 1：$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{p}$ 。

证明：由余元公式， $\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{p}{\sin\frac{1}{2}p}=p$ ，**所以** $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{p}$ 。

证毕

推论 2： $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{p}}{2}$。

证明：由定义， $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\frac{1}{2}-1} dt \overset{x=\sqrt{t}}{=} 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dt = \sqrt{p}$ **，所以** $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{p}}{2}$。

证毕

推论 3： $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{p}$ 。

证明：由定理 3**，** $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{p}$ 。

证毕

定理 6：（Legendre 公式，倍元公式） $\forall x > 0$ **，** $\Gamma(2x) = \frac{2^{2x-1}}{\sqrt{p}}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)$。

证明：由定理条件，只需证： $\forall x > 0$ **，** $\Gamma(x) = \frac{2^{x-1}}{\sqrt{p}}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)$。

令： $f(x) = \frac{2^{x-1}}{\sqrt{p}}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)$ **，则有：**

1) $f(x) > 0$ **，并且：** $f(1) = \frac{1}{\sqrt{p}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(1) = 1$ ；

2) $f(x+1) = \frac{2^x}{\sqrt{p}}\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+2}{2}\right) = \frac{2^x}{\sqrt{p}}\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)\frac{x}{2}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right) = xf(x)$ ；

3) $\ln f(x) = (x-1)\ln 2 + \frac{1}{2}\ln p + \ln\Gamma\left(\frac{x}{2}\right) + \ln\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)$

其中每一项均为 $(0,+\infty)$ **上的下凸函数，**

因而 $\ln f(x)$ **为** $(0,+\infty)$ **上的下凸函数；**

由定理 4 **可知：** $\forall x > 0$ **，** $f(x) = \Gamma(x)$。

证毕

2　Beta 函数

定义 2：含两个参量 x, y **之积分** $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ **称为 Beta 函数**

或第一类 Euler 积分，记作： $b(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ 。

类似于 Γ **函数，** b **函数有如下基本性质：**

命题： $b(x,y)$ **对于** $\forall x,y>0$ **有定义，且满足：**

1) $b(x,y)>0$，**并且：** $b(1,y)=\dfrac{1}{y}$；

2) $b(x+1,y)=\dfrac{x}{x+y}b(x,y)$；

3) $\forall y>0$，$\ln b(x,y)$ **关于** x **为下凸函数。**

证明： 1) **显然。**

2) **直接计算得：**

$$\begin{aligned}b(x+1,y)&=\int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}dt=\frac{1}{x+y}\int_0^1\left(\frac{t}{1-t}\right)^x d(1-t)^{x+y}\\&=-\frac{1}{x+y}\int_0^1(1-t)^{x+y}x\left(\frac{t}{1-t}\right)^{x-1}\frac{-1}{(1-t)^2}dt\\&=\frac{x}{x+y}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt=\frac{x}{x+y}b(x,y)\end{aligned}$$

3) $\forall l_1,l_2>0$，$l_1+l_2=1$，$x_1,x_2>0$，$y>0$，**由引理** 1，**我们有：**

$$\begin{aligned}b(l_1x_1+l_2x_2,y)&=\int_0^1 t^{l_1x_1+l_2x_2-1}(1-t)^{y-1}dt\\&=\int_0^1\left[t^{x_1-1}(1-t)^{y-1}\right]^{l_1}\left[t^{x_2-1}(1-t)^{y-1}\right]^{l_2}dt\\&\le\left[b(x_1,y)\right]^{l_1}\left[b(x_2,y)\right]^{l_2}\end{aligned}$$

因而 $\ln b(x,y)$ **是** x **的下凸函数。**

证毕

定理 7：（b 函数与 Γ 函数之关系） $\forall x,y>0$，**有：** $b(x,y)=\dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$。

证明： $\forall y>0$，**令：** $f(x)=\dfrac{b(x,y)\Gamma(x+y)}{\Gamma(y)}$，**只需证明** $f(x)$ **满足定理** 4 **的三个条件，即可证明** $f(x)=\Gamma(x)$。

1) $f(x)>0$，**并且** $f(1)=\dfrac{b(1,y)\Gamma(1+y)}{\Gamma(y)}=\dfrac{\Gamma(1+y)}{y\Gamma(y)}=1$；

2) **应用** b **函数与** Γ **函数性质，有：**

$$\begin{aligned}f(x+1)&=\frac{b(x+1,y)\Gamma(x+1+y)}{\Gamma(y)}\\&=\frac{\frac{x}{x+1}b(x,y)\cdot(x+y)\Gamma(x+y)}{\Gamma(y)}=xf(x)\end{aligned}$$

3) $\forall y>0$，$\ln b(x,y)$与$\ln\Gamma(x+y)$均是x的下凸函数，

而$\ln\Gamma(y)$与x无关，因而$\ln f(x)$是x的下凸函数；

由定理 4 知：$f(x)=\Gamma(x)$。

证毕

推论： 1) $b(x,y)=b(y,x)$；（对称性）

2) $\forall x\in(0,1)$，$b(x,1-x)=\dfrac{p}{\sin px}$；（余元公式）

3) $\forall x>0$，$b(x,x)=\dfrac{1}{2^{2x-1}}b\left(\dfrac{1}{2},x\right)$。（倍元公式）

例 1：求证 $b(x,y)=\int_0^{+\infty}\frac{u^{x-1}du}{(1+u)^{x+y}}=\int_0^1\frac{u^{x-1}+u^{y-1}}{(1+u)^{x+y}}du$。

证明： 利用换元法，有：

$$b(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt\overset{t=\frac{u}{1+u}}{=}\int_0^{+\infty}\frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x-1}}\frac{1}{(1+u)^{y-1}}\frac{du}{(1+u)^2}=\int_0^{+\infty}\frac{u^{x-1}du}{(1+u)^{x+y}}$$

由此，继续应用换元法，有：

$$b(x,y)=\int_0^{+\infty}\frac{u^{x-1}du}{(1+u)^{x+y}}=\int_0^1\frac{u^{x-1}du}{(1+u)^{x+y}}+\int_1^{+\infty}\frac{u^{x-1}du}{(1+u)^{x+y}}$$

$$=\int_0^1\frac{u^{x-1}du}{(1+u)^{x+y}}+\int_1^0\frac{v^{1-x}}{(1+v)^{x+y}v^{-x-y}}\left(-\frac{dv}{v^2}\right)=\int_0^1\frac{u^{x-1}+u^{y-1}}{(1+u)^{x+y}}du$$

例 2：计算积分 $\int_0^{\frac{p}{2}}\sin^a x\cos^b xdx$，其中$a,b>-1$。

解： 利用换元法，作变换$x=\arcsin\sqrt{t}$，有：

$$\int_0^{\frac{p}{2}}\sin^a x\cos^b xdx=\int_0^1 t^{\frac{a}{2}}(1-t)^{\frac{b}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-t}}\frac{dt}{2\sqrt{t}}=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{a-1}{2}}(1-t)^{\frac{b-1}{2}}dt$$

$$=\frac{1}{2}b\left(\frac{a+1}{2},\frac{b+1}{2}\right)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+b}{2}+1\right)}$$

例 3：计算积分 $\int_0^{\frac{p}{2}}(\tan x)^a dx$，其中$|a|<1$。

解： 利用上题结论：

$$\int_0^{\frac{p}{2}}(\tan x)^a dx=\int_0^{\frac{p}{2}}\sin^a x\cos^{-a}xdx=\frac{1}{2}b\left(\frac{a+1}{2},\frac{1-a}{2}\right)=\frac{p}{2\cos\frac{pa}{2}}$$。

例 4：**计算积分** $\int_0^{\frac{p}{2}}\sin^a xdx$ **及** $\int_0^{\frac{p}{2}}\cos^a xdx$ ，**其中** $a>-1$。

解：　**由例** 2 **结论**，$\int_0^{\frac{p}{2}}\sin^a xdx=\int_0^{\frac{p}{2}}\cos^a xdx=\frac{1}{2}b\left(\frac{a+1}{2},\frac{1}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{p}\,\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{a}{2}+1\right)}$。

习题

1．**设** $\overline{D}$ **是** $\mathbf{R}^m$ **中的有界闭区域**，$E=\overline{D}\times[a,b]$, $f(x,t)\in C(E)$，

$$I(x)=\int_a^b f(x,t)dt\text{。}$$

求证：$I(x)\in C(\overline{D})$。

2．**设** $f(x)$ **在** $[a,b]$ **黎曼可积**，$j(x,y)\in C^{(k)}(D)$，**其中** $D=[a,b]\times(a,b)$，**又设**

$$g(y)=\int_a^b f(x)j(x,y)dx\text{。}$$

求证：$g(y)\in C^{(k)}(a,b)$ **且**

$$g^{(n)}(y)=\int_a^b f(x)\frac{\partial^n j(x,y)}{\partial y^n}dx\quad(n=1,2,\cdots,k)\text{。}$$

3．**求下列极限：**

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+y^2}dy$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\int_0^2 y^2\cos xydy$；

(3) $\lim\limits_{a\to 0}\int_a^{1+a}\frac{dx}{1+x^2+a^2}$。

4．**求** $F'(x)$：

(1) $F(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}e^{x\sqrt{1-y^2}}dy$；

(2) $F(x)=\int_{a+x}^{b+x}\frac{\sin xy}{y}dy$；

(3) $F(x)=\int_0^x\left[\int_{t^2}^{x^2}f(t,s)ds\right]dt$。

5．**设** $F(y)=\int_0^1\ln\sqrt{x^2+y^2}dx$，**问是否成立：**

$$F'(0)=\int_0^1\frac{\partial}{\partial y}\ln\sqrt{x^2+y^2}\bigg|_{y=0}dx\text{。}$$

6．**证明：**

$$\int_0^1 dx\int_0^1\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy\neq\int_0^1 dy\int_0^1\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx\text{。}$$

7．**求出下列函数的定义域：**

(1) $F(x)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xy}}{1+y^2}dy$；

(2) $F(x,y)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t^y}{t^x}dt$ ；

(3) $F(x)=\int_0^2\frac{dt}{\left|\ln t\right|^x}$。

8．证明下列积分在所给定的区间内一致收敛：

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{\cos xy}{1+y^2}dy \quad (x\ge a>0)$ ；

(2) $\int_1^{+\infty}x^a e^{-x}dx \quad (a\le a\le b)$ ；

(3) $\int_1^{+\infty}e^{-ax}\frac{\cos x}{x^p}dx \quad (p>0,a\ge 0)$ ；

(4) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2}{1+x^p}dx \quad (p\ge 0)$ ；

(5) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-ax}dx \quad (a\ge 0)$。

9．叙述 $\int_a^{+\infty}f(x,y)dy$ 对 $x\in X$ 的不一致收敛原理。

10．设 $\int_0^{+\infty}f(x,y)dy$ 对 $x\in X$ 收敛。设有 X 的聚点 x_0，对任意 $A>0$，

$$\lim_{x\in X,\,x\to x_0}\int_A^{+\infty}f(x,y)dy=l(A)$$

存在，且对一切 $A>0$，$\left|l(A)\right|$ 所成集合有正下界。证明 $\int_0^{+\infty}f(x,y)dy$ 对 $x\in X$ 不一致收敛。

11．证明下列积分在所给定区间内不一致收敛：

(1) $\int_0^{+\infty}\sqrt{a}\,e^{-ax^2}dx \quad (0\le a<+\infty)$ ；

(2) $\int_0^1\frac{1}{x^n}\sin\frac{1}{x}dx \quad (0<n<2)$ ；

(3) $\int_0^{+\infty}e^{-x^2(1+y^2)}\sin y\,dy \quad (0<x<+\infty)$。

12．讨论下列积分在指定区间内的一致收敛性：

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-a)^2}dx$ （1° $a<a<b$， 2° $-\infty<a<+\infty$）；

(2) $\int_0^1 x^{p-1}\ln^2 x\,dx$ （1° $p\ge p_0$， 2° $p>0$）；

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin ax}{x}dx$ （1° $a\in[a,b],0\notin[a,b]$， 2° $a\in[a,b],0\in[a,b]$）；

(4) $\int_0^1\frac{\sin ax}{\sqrt{\left|x-a\right|}}dx$ （$0\le a\le 1$）。

13．讨论下列函数在指定区间上的连续性：

(1) $F(x)=\int_0^{+\infty}\frac{x}{x^2+y^2}dy,\quad x\in(-\infty,+\infty)$ ；

(2) $F(x)=\int_0^p\frac{\sin y}{y^x(p-y)^{2-x}}dy,\quad x\in(0,2)$ ；

（3） $F(x)=\int_0^{+\infty}\frac{y^2}{1+y^x}dy,\quad x>3$。

14．设 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx$ 存在。求证：

$$F(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos ux dx$$

在 $-\infty<u<+\infty$ 上有界且一致连续。

15．利用已知积分值

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{p}{2},\quad \int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{p}}{2}$$

与积分运算法则计算下列积分：

（1） $\int_0^{+\infty}\frac{\sin ax}{x}dx$ ；　　（2） $\frac{2}{p}\int_0^{+\infty}\frac{\sin y\cos yx}{y}dy$ ；

（3） $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^2}dx$ ；　　（4） $\int_0^{+\infty}x^2e^{-ax^2}dx\quad(a>0)$ ；

（5） $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(ax^2+bx+c)}dx\quad(a>0)$ ；　　（6） $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x^2+\frac{a^2}{x^2})}dx\quad(a>0)$ ；

16．利用对参数的微分法计算下列积分：

（1） $I_n(a)=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}$ （n 为自然数，$a>0$）；

（2） $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-a x^2}-e^{-b x^2}}{x}dx\quad(a>0,\ b>0)$ ；

（3） $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-a x}-e^{-b x}}{x}\sin mxdx\quad(a>0,\ b>0)$ ；

（4） $\int_0^{+\infty}xe^{-a x^2}\sin bxdx\quad(a>0)$。

16．利用对参数的积分法计算下列积分：

（1） $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-a x}-e^{-b x}}{x}\sin mxdx\quad(a>0,\ b>0)$ ；

（2） $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-a x^2}-e^{-b x^2}}{x}dx\quad(a>0,\ b>0)$。

17．从已知积分出发，利用对参数的微分法计算下列积分：

（1） $\int_0^{+\infty}e^{-a x^2}x^{2n}dx$ （$a>0$，n 为自然数）；

（2） $\int_0^1 x^{a-1}\ln^n xdx$ （$a>0$，n 为自然数）。

18．从等式

$$\frac{1}{a^2+x^2}=\int_0^{+\infty}e^{-t(x^2+a^2)}dt$$

出发，计算下列积分：

（1） $\int_0^{+\infty}\frac{\cos bx}{x^2+a^2}dx$ （$a>0$）；　　（2） $\int_0^{+\infty}\frac{x\sin bx}{x^2+a^2}dx$ （$a>0$）。

19．求下列积分：

（1） $\int_0^{p}\ln(1-2a\cos x+a^2)dx$ ；

（2）$\int_0^{\frac{p}{2}} \ln(a^2 - \sin^2 x)dx \quad (a > 1)$；

（3）$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin ax}{x}\right)^2 dx$；

（4）$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} a\, x}{x(1+x^2)} dx \quad (a \geq 0)$；

（5）$\int_0^{+\infty} \frac{\sin a\, x}{x} J_0(x) dx$，其中

$$J_0(x) = \frac{2}{p}\int_0^{\frac{p}{2}} \cos(x \sin q) dq。$$

20．求下列积分的存在域并用欧拉积分表示：

（1）$\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx$； （2）$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^m}}$；

（3）$\int_0^{\frac{p}{2}} \sin^m x \cos^n x dx$； （4）$\int_0^{\frac{p}{2}} \operatorname{tg}^n x dx$；

（5）$\int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^p dx$； （6）$\int_0^1 x^m \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{n-1} dx$；

（7）$\int_0^{+\infty} x^p e^{-ax} \ln x dx \quad (a > 0)$。

21．利用欧拉积分计算下列积分：

（1）$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^{\frac{1}{4}}}}$； （2）$\int_0^1 \sqrt{x-x^2} dx$；

（3）$\int_0^1 \sqrt{x^3\left(1-\sqrt{x}\right)} dx$； （4）$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2} dx \quad (a > 0)$；

（5）$\int_0^1 \frac{x^n}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} dx$ （n 为自然数）； （6）$\int_0^{\frac{p}{2}} \sin^6 x \cos^4 x dx$；

（7）$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$； （8）$\int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx$ （n 为自然数）；

（9）$\int_0^p \frac{dx}{\sqrt{3-\cos x}}$。