高等数学下册公式大全

第八章　向量代数与空间解析几何

两点间距离公式：

$|M_1-M_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$，

$\vec a=(a_x,a_y,a_z)=a_x\vec i+a_y\vec j+a_z\vec k$;　$\vec b=(b_x,b_y,b_z)=b_x\vec i+b_y\vec j+b_z\vec k$

$\vec a\pm\vec b=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z)$;　$\lambda\vec a=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$

方向余弦：

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\vec a|}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{a_y}{|\vec a|}=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{a_z}{|\vec a|}=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$$

单位向量： $\vec e_a=\frac{\vec a}{|\vec a|}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

数量积： $\vec a\cdot\vec b=|\vec a||\vec b|\cos(\widehat{\vec a,\vec b})=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$

$\vec a\cdot\vec a=\vec a^2=|\vec a|^2\Rightarrow\vec i\cdot\vec j=\vec j\cdot\vec k=\vec k\cdot\vec i=0$，$\vec i\cdot\vec i=\vec j\cdot\vec j=\vec k\cdot\vec k=1$

夹角余弦： $\cos(\widehat{\vec a,\vec b})=\frac{\vec a\cdot\vec b}{|\vec a||\vec b|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_yb_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$

向量积： $\vec a\times\vec b=(a_yb_z-a_zb_y)\vec i+(a_zb_x-a_xb_z)\vec j+(a_xb_y-a_yb_x)\vec k=\begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}$

$\vec a\times\vec a=\vec 0$

空间位置关系： $\vec a//\vec b\Leftrightarrow\vec a\times\vec b=\vec 0\Leftrightarrow(\exists\alpha,\beta)\alpha\vec a+\beta\vec b=\vec 0\Leftrightarrow\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}$

$\vec a\perp\vec b\Leftrightarrow\vec a\cdot\vec b=\vec 0\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0\Leftrightarrow|\vec a+\vec b|=|\vec a-\vec b|$

平面的方程：点法式： $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$；

一般式： $Ax+By+Cz+D=0$；

截距式：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

两平面的夹角：$\cos\theta=\frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$

点到平面的距离：$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

直线与平面的夹角：$\sin\varphi=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{s}|}{|\vec{n}||\vec{s}|}=\frac{Am+Bn_2+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$

球面：$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$

椭圆柱面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$；双曲柱面：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$；抛物柱面：$x^2=2py$

旋转曲面：圆柱面：$x^2+y^2=a^2$；圆锥面：$z^2=b^2(x^2+y^2)$；双叶双曲面：

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{c^2}=1$

单叶双曲面：$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$；旋转椭球面：$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$；旋转抛物面：

$x^2+y^2=2pz$

二次曲面：

椭球面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a>0,b>0,c>0)$

抛物面：椭圆抛物面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$；双曲抛物面：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$

单叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$；双叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$

椭圆锥面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$

第八章　　多元函数微分法及其应用

一、　偏导数定义：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}=\left.\frac{d}{dx}f(x,y_0)\right|_{x=x_0}=f_x(x_0,y_0)=f_x(x,y)|_{(x_0,y_0)}$$

二、微分：

$\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\Delta z-f_x(x,y)\Delta x-f_y(x,y)\Delta y}{\rho}=0\Leftrightarrow$可微，偏导连续$\Rightarrow$可微$\Rightarrow$连续+偏导存在，

全微分：$dz=f_x(x,y)dx+f_y(x,y)dy$

三、隐函数求导：

1° $F(x,y)=0\Rightarrow y=f(x)$且$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F_x}{F_y}$.

2° $F(x,y,z)=0\Rightarrow z=f(x,y)$且

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y}{F_z}$

四、曲线的切线和法平面

1、曲线方程 $L:\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\\z=\omega(t)\end{cases}$，切线：$\dfrac{(x-x_0)}{\varphi'(t_0)}=\dfrac{(y-y_0)}{\psi'(t_0)}=\dfrac{(z-z_0)}{\omega'(t_0)}$，法平面：

$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$

2、曲线方程 $L:\begin{cases}y=y(x)\\z=z(x)\end{cases}$，切线：$\dfrac{x-x_0}{1}=\dfrac{y-y_0}{y'(x_0)}=\dfrac{z-z_0}{z'(x_0)}$，法平面：

$(x-x_0)+y'(x_0)(y-y_0)+z'(x_0)(z-z_0)=0$

五、曲面的切平面和法线

1、曲面方程：$F(x,y,z)=0$，法向量：$\vec{n}=\pm\{F_x,F_y,F_z\}_{M_0}$，切平面：

$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$，法线：

$\dfrac{(x-x_0)}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{(y-y_0)}{F(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{(z-z_0)}{F(x_0,y_0,z_0)}$

2、曲面方程：$z=f(x,y)$，切平面

$f_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0$，

法线：$\dfrac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\dfrac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\dfrac{z-z_0}{-1}$

六、方向导数：$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{M_0}=f_x|_{M_0}\cos\alpha+f_y|_{M_0}\cos\beta+f_z|_{M_0}\cos\gamma$=梯度向量点乘单位向量

梯度：$\text{grad}\,u|_{M_0}=\{f_x, f_y, f_z\}_{M_0}$

第十章：重积分

一、二重积分：

直角坐标：$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy=\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$

极坐标：$\iint\limits_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$

二、三重积分：

1、直角坐标系：先一后二法：$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dV=\iint\limits_{D_{xy}} dxdy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$

先二后一法：$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dv=\int_{c_1}^{c_2} dz\iint\limits_{D(z)} f(x,y,z)dxdy.$

2、柱面坐标系：$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta, \quad dv=rdrd\theta dz,\\ z=z.\end{cases}$

$$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dv=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} dr\int_{z_1(\rho,\theta)}^{z_2(\rho,\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\rho dz.$$

柱面坐标=极坐标+竖坐标

3*、球面坐标系：

$$\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta,\\ y=r\sin\varphi\sin\theta, \quad dv=r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta,\\ z=r\cos\varphi.\end{cases}$$

$$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dxdydz=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} d\varphi\int_{r_1(\theta,\varphi)}^{r_2(\theta,\varphi)} f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)r^2\sin\varphi dr.$$

二、重积分的应用：

1、体积：$V=\iiint\limits_\Omega dxdydz=\iint\limits_{D_{xy}}[z_2(x,y)-z_1(x,y)]dxdy$

2、曲面Σ：$z=f(x,y)$ 面积：$S=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+f_x'^2(x,y)+f_y'^2(x,y)}dxdy$

3、质量：$M=\iint\limits_D \rho(x,y)d\sigma$ 或 $M=\iiint\limits_\Omega \mu(x,y,z)\,dv$

4、质心 $(\bar{x},\bar{y})$：

$$\bar{x}=\frac{\iint\limits_D x\rho(x,y)d\sigma}{M},\ \bar{y}=\frac{\iint\limits_D y\rho(x,y)d\sigma}{M}$$ 或

$$\bar{x}=\frac{\iiint\limits_\Omega x\mu(x,y,z)\,dv}{\iiint\limits_\Omega \mu(x,y,z)\,dv},\ \bar{y}=\frac{\iiint\limits_\Omega y\mu(x,y,z)\,dv}{\iiint\limits_\Omega \mu(x,y,z)\,dv},\ \bar{z}=\frac{\iiint\limits_\Omega z\mu(x,y,z)\,dv}{\iiint\limits_\Omega \mu(x,y,z)\,dv}$$

5、 转动惯量：$I_x=\iint\limits_D y^2\rho(x,y)d\sigma,\ I_y=\iint\limits_D x^2\rho(x,y)d\sigma,\ I_o=\iint\limits_D (x^2+y^2)\rho(x,y)d\sigma$

或

$$I_x=\iiint\limits_\Omega (y^2+z^2)\mu(x,y,z)\,dv,\ I_y=\iiint\limits_\Omega (z^2+x^2)\mu(x,y,z)\,dv$$

$$I_z=\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2)\mu(x,y,z)\,dv,\ I_o=\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2+z^2)\mu(x,y,z)\,dv$$

第十一章：曲线积分和曲面积分

一、第一类曲线积分（对弧长的曲线积分）：

$$\int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt=\int_a^b f(x,y(t))\sqrt{1+y'^2(t)}\,dx$$

$$=\int_\alpha^\beta f(\rho(\theta)\cos\theta,\rho(\theta)\sin\theta)\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\,d\theta$$

$$\int_L f(x,y,z)ds=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\omega'^2(t)}\,dt$$

二、第二类曲线积分（对坐标的曲线积分）：

1、计算公式：

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_L [P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta]ds$$

$$=\int_a^b [P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)]dt$$

2、格林公式：

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_{\partial D^+} Pdx+Qdy=\oint_{\partial D}(P\cos\alpha+Q\cos\beta)ds$$

三、第一类曲面积分：

$$\Sigma: z=z(x,y):\ \iint\limits_\Sigma f(x,y,z)dS=\iint\limits_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+Z_x^2+Z_y^2}\,dxdy$$

四、第二类曲面积分：

1、计算公式：

$$\iint_{\Sigma}\vec{F}(x,y,z)d\vec{S}=\iint_{\Sigma}P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy$$

$$=\iint_{\Sigma}\vec{F}(x,y,z)\cdot\vec{e}_n dS=\iint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS$$

$$\iint_{\Sigma上侧}R(x,y,z)dxdy=\iint_{D_{xy}}R[x,y,z(x,y)]dxdy;\ \iint_{\Sigma下侧}R(x,y,z)dxdy=-\iint_{D_{xy}}R[x,y,z(x,y)]dxdy$$

$$\iint_{\Sigma}P(x,y,z)dydz=\pm\iint_{D_{yz}}p(x(y,z),y,z)dydz;\quad \iint_{\Sigma}Q(x,y,z)dzdx=\pm\iint_{D_{zx}}p(x,y(z,x),z)dzdx$$

2、投影转化法：

$$\Sigma: z=z(x,y),\ dydz=\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}dxdy=-z_x dxdy,\ dzdx=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}dxdy=-z_y dxdy$$

$$\Sigma: F(x,y,z)=0,\ dydz=\frac{F_x}{F_z}dxdy,\ dzdx=\frac{F_y}{F_z}dxdy$$

3、高斯公式：

$$\iint_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS$$

$$=\pm\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV$$。（Σ为$\partial\Omega$外侧时取+；Σ为$\partial\Omega$内侧时取−.）

第十一章 无穷级数

一、常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$

1、常用级数：等比级数/几何级数：$\sum_{n=0}^{\infty}q^n\begin{cases}收=\frac{1}{1-q} & |q|<1\\ 发 & |q|\geq 1\end{cases}$

P级数：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\begin{cases}收 & p>1\\ 发 & 0<p\leq 1\end{cases}$；交错P级数：$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^p}$收敛$\begin{cases}绝对收敛 & p>1\\ 条件收敛 & 0<p\leq 1\end{cases}$

2、正项级数：$u_n\geq 0$

基本定理：收敛$\Leftrightarrow$部分和有上届$s_n<\sigma$

比较审敛法：大收小收，小发大发

比较审敛法的极限形式： 同阶：同收同发；低阶：同收；高阶：同发

比值/根值审敛法：$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}(\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n})\Rightarrow\begin{cases}<1，收敛\\ >1，发散\\ =1，失效\end{cases}$

3、交错级数：$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n(u_n \ge 0)$

莱布尼茨审敛法：$\begin{cases} u_{n+1} \le u_n \\ \lim_{n\to\infty} u_n = 0 \end{cases} \Rightarrow$ 级数收敛，$s \le u_1, |r_n| \le u_{n+1}$

绝对收敛：$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，条件收敛：$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛而$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散，发散

4、任意项级数：

- 利用定义：部分和有极限$\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} s, & 收敛 \\ \infty, & 发散 \end{cases}$；
- 利用收敛的必要条件：$\lim_{n\to\infty} u_n \ne 0 \Rightarrow$ 发散；
- 利用正项级数（比值/根植）审敛法：

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| (\rho = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}) \Rightarrow \begin{cases} <1, & 绝对收敛 \Rightarrow 收敛 \\ >1, & 绝对值发散 \Rightarrow 发散 \\ =1, & 失效 \end{cases}$$

二、幂级数：$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$

1、收敛半径：$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| (\rho = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}) \Rightarrow R = \begin{cases} 1/\rho, & 0<\rho<\infty \\ 0, & \rho=\infty \\ \infty, & \rho=0 \end{cases}$

2、常用等式：

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}(|x|<1)，\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}(|x|<1)，\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}(|x|<1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) \quad (-1 \le x < 1)，\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = \ln(1+x) \quad (-1 < x \le 1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad (|x|<1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}x^{2n-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| \quad (|x|<1)$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}(|x|<1)$$

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots;\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots;\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots;\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots;\quad x\in(-1,1]$$

$$(1+x)^{\alpha}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

$$=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots;\quad x\in(-1,1)$$

3、泰勒展开：

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n,\ a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0),\ R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},(\xi\in(x_0,x))$$

$$\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$$

三、傅里叶级数：$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

1、$T=2\pi$：$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=S(x)$，

（$x\in(-\infty,+\infty)$，且$x\neq$间断点）

其中$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$，$(n=0,1,2\cdots)$；$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$，$(n=1,2\cdots)$。

(间断点处，$S(x)=\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}$)

若$f(x)$为奇函数$\Rightarrow$正弦级数（$a_n=0,b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$）

若$f(x)$为偶函数$\Rightarrow$余弦级数（$b_n=0,a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$）

2、$T=2l$：$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l})$，（$x\in(-\infty,+\infty)$，且$x\neq$间断点）

其中$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$，$(n=0,1,2\cdots)$；$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$，$(n=1,2\cdots)$。

3、非周期函数$f(x)$.

(1) $x\in[-l,l]$：$f(x)\xrightarrow{\text{周期延拓}}F(x)$展开$\to$限制

$$f(x)=S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right),(x\in(-l,l))$$

$\left(x=\pm l\text{时，}S(x)=\frac{f(-l^+)+f(l^-)}{2}\right)$

(2) $x\in[0,l]$：$f(x)\xrightarrow{\text{奇延拓/偶延拓}}\xrightarrow{\text{周期延拓}}F(x)$展开$\to$限制

奇延拓：$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l},(x\in(0,l))$;

$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\quad(n=1,2,\cdots)$($x=0$或$l$时，$S(x)=0$);

偶延拓：$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}(x\in[0,l])$

$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\quad(n=0,1,2,\cdots)$，端点处不间断。