一张图读懂函数 数学

一 函数概念

① 函数三要素 ② 分段函数 ③ 复合函数

① 函数三要素

定义域 自变量的取值范围

题型一：具体函数求法

① 整式函数或奇次根式函数，定义域 R

② 分式函数 $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$,则定义域是 $h(x)\neq0$ 的解集

③ $f(x)=\sqrt[2n]{g(x)}$,则定义域是 $g(x)=0$ 的解集

④ $f(x)=\log_{g(x)}h(x)$,则定义域是 $\begin{cases}h(x)>0\\g(x)>0\\g(x)\neq1\end{cases}$ 的解集

⑤ $f(x)=[h(x)]^0$,则定义域是 $h(x)\neq0$ 的解集

⑥ $y=\tan x$ 的定义域是 $\{x|x=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z\}$

⑦ 若解析式由几个部分的数学式子构成则定义域是使各部分式子都有意义的实数集（即求各部分的交集）

⑧ 实际问题中函数的定义域是使变量都有实际意义的实数集合解题步骤：

第一步:找出函数 f(x) 每个式子有意义的条件；

第二步:列出不等式或不等式组； 第三步:解不等式或不等式组，即得到函数f(x)的定义域.

题型二：抽象函数的定义域求法

① 已知原函数 f(x) 的定义域为 (a,b)，求复合函数 f[g(x)] 的定义域；

解法：只需解不等式 $a<g(x)<b$，不等式的解集即为所求函数的定义域.

② 已知复合函数 f[g(x)] 的定义域为 (a,b)，求原函数 f(x) 的定义域；

解法：只需根据 $a<x<b$ 求出函数 g(x)的值域，即得原函数f(x) 的定义域.

③ 若 f(x)，g(x) 的定义域分别为 D_f、D_g，求 $F(x)=f(x)\pm g(x)$的定义域.

解法：$D_F = D_f\ D_g$

题型三：知定义域范围求参数问题

例：定义域R，求参数范围， 常用方法：

① 二次函数恒成立 ② 分离变量法 ③ 导数法

数学思想：分类讨论（特别是多项式函数最高项系数的讨论），转化划归

对应法则 自变量x 到对应函数值 y 的对应关系

函数解析式的求法

① 待定系数法：已知 f(x) 的函数类型（例二次函数，可设 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$）

② 代入法：已知 f(x) g(x) 的解析式，求 f[g(x)] 的解析式，将 g(x) 代替 f(x) 中的 x

③ 换元法：已知 f[g(x)] 的解析式，求 f(x) 的解析式

④ 配凑法：已知 f[g(x)] 的解析式，求 f(x) 的解析式

⑤ 方程组法：已知 f(x) 与 f[g(x)] 满足的关系式，要求 f(x) 时，可用 g(x) 代替两边所有的x，得到关于 f(x) 与 f[g(x)] 的方程组，解之即可求出 f(x)

⑥ 特殊值法：通过某些特殊值代入题设中的等式,可是问题具体化,简单化,从中找到规律

⑦ 图象法

⑧ 函数性质法

注：以上方法求函数解析式时一定要考虑并确定自变量x的取值范围,所求函数式必须注明定义域

值域 函数值的取值范围的集合

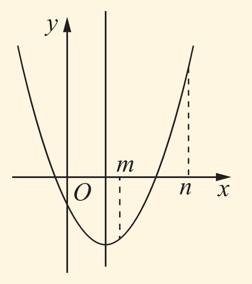
值域（最值）的求法

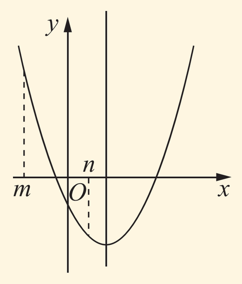
① 定义法 ② 基本函数法：通过函数图象的性质直接求解（下附二次函数特例）

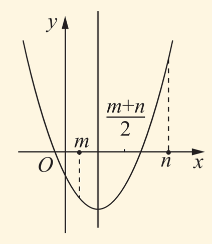
③ 函数单调性法 ④ 判别式法 ⑤ 配方法 ⑥ 不等式法：利用基本不等式

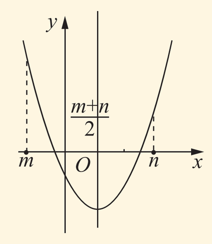
⑦ 换元法：代数换元和三角换元 ⑧ 数形结合 ⑨ 分离常数法 ⑩ 反函数法 ⑪ 导数法

二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c\ \ a\ (a>0)$ 在 $x\in[m,n]$最值问题









常考三种形式：对称轴和区间都定；对称轴和区间一动一定；对称轴和区间都动；分离变量解决不等式恒成立问题.

转化技巧：通常 $a>f(x)$ 或 $a<f(x)$ 恒成立时，常转化为函数 y=f (x) 的最值问题.

$a>f(x)$ 恒成立须$a>f(x)_{max}$；$a<f(x)$ 恒成立须 $a<f(x)_{min}$

② 分段函数

在函数的定义域内，对于自变量的不同取值区间，有着不同的对应法则，这样的函数称为分段函数．分段函数的单调性问题，除了需要单独考虑函数在各段上的单调性，还需要考虑在分段点处函数值的大小关系．分段函数的零点问题常常会结合图象去思考讨论.

③ 复合函数

复合函数的概念：如果函数合函数 y=f(u) 的定义域为A，函数合义数 u=g(x) 的定义域为D，值域为C，且$C\subseteq A$时，称函数 y= f[g(x)]为 y=f(u) 与 u=g(x)在D上的复合函数，其中叫 u 中间变量，u=g(x) 叫做内层函数，y=f(u) 叫做外层函数.

二 函数性质

① 函数单调性 ② 函数奇偶性 ③ 函数对称性 ④ 函数的周期性 ⑤ 函数的最值 ⑥ 函数零点 ⑦ 函数图像

① 函数单调性

定义f(x)是 A上

① 增函数：$x_1<x_2\in A$，有 $f(x_1)<f(x_2)$

② 减函数：$x_1<x_2\in A$，有 $f(x_1)>f(x_2)$

③ 单调性：函数的增、减性叫做函数的单调性 函数的增减区间叫做函数的单调区间

④ 图像特征：增函数图像从左到右是“上升的” 减函数的图像从左到右是“下降的

变式

$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0\Leftrightarrow(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]>0$ 单调递增

$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0\Leftrightarrow(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]<0$ 单调递增

题型

（1）用定义证明函数的单调性 步骤

① 任取 x_1,x_2 在定义域内，$x_1<x_2$ ② 作差变形，$f(x_1)-f(x_2)$ ③ 定$f(x_1)-f(x_2)$的符号

④ 判断单调性

（2）求函数单调区间的方法

① 定义法

② 图像法

③ 导数法

④ 单调性的运算

增函数与增函数的和为增函数，

减与减的和为减函数，乘以正的常数后单调性不变，乘以负的常数后单调性相反；

⑤ 复合函数法：F(x)=f[g(x)]同增异减（知二求一）例: F↑, f↑⇨g↑

如果有多个单调的函数进行复合，那么其中单调递减的函数有奇数个时复合后的函数单调递减；有偶数个时，复合后的函数单调递增.

（3）应用

比较大小（函数值大小、自变量大小）→解不等式→求参数取值范围

② 函数奇偶性

1. A为f(x)的定义域，x∈ A

① 定义

奇函数：$f(-x)=-f(x)$，其中 A关于原点对称 非奇非偶函数 $f(-x)\neq-f(x)$, $f(-x)\neq f(x)$

② 图像特征

奇函数 ⇔ 图像关于原点成中心对称图形 偶函数 ⇔ 图像关于 y 轴成轴对称图形

奇函数在其对称区间上的单调性相同 偶函数在其对称区间上的单调性相反

③ 性质

偶函数的和、差、积、商（分母不为0）仍为偶函数 奇函数的和、差仍为奇函数

一个偶函数和一个奇函数的积是奇函数 奇（偶）数个奇函数的积为奇（偶）函数

注：注意定义域的取值范围

④ 应用

利用定义判断或证明函数的奇偶性或求参数值

2. 函数奇偶性的判断方法

① 定义法

首先看定义域是否对称；在定义域对称的情况下，直接将 f(-x) 向 f(x) 方向变形，对于比较复杂的函数，可以先通过取一对特殊值判断出可能的奇偶性，再直接计算 f(-x)+f(x)或f(-x)+f(x)的值；

② 图像法

如果一个函数的图象关于y轴对称，那么它是偶函数；如果图象关于原点对称，那么它是奇函数；

3. 奇偶性的运算

两个奇偶性相同的函数相加或相减后仍然保持原来的奇偶性，相乘后一定是偶函数；奇函数乘以偶函数还是奇函数

4. 奇偶性的复合

在定义域满足条件的情况下，有偶则偶；不管多少个奇函数进行复合，复合后都仍然是奇函数利用奇偶函数对称特点求函数解析式、函数值、解不等式等

③ 函数对称性

轴对称

函数f(x)的图像关于 x =a 对称:

$f(a+x)=f(a-x)\Leftrightarrow f(2a-x)=f(x)\Leftrightarrow f(2a+x)=f(-x)$

$f(a+x)=f(b-x)$，f(x)的图像的对称轴为$x=\frac{a+b}{2}$

中心对称

函数f(x) 的图像的对称中心为(a,0)

$f(a+x)=f(a-x)\Leftrightarrow f(2a-x)=-f(x)\Leftrightarrow f(2a+x)=-f(-x)$

$f(a+x)=f(b-x)$，f(x)的图像的对称轴中心为 $(\frac{a+b}{2},0)$

$f(a+x)=2b-f(a-x)$，f(x)的图像的对称中心为（a，b）

④ 函数的周期性

变式

设 y=f(x), x∈D, 若3常数 T=0, 都有 f (x +T)=f(x),则称函数f(x)为周期函数.T 为它的一个周期.

图像特征

图像按一定规律重复出现

f(x)周期为2T基本结论

① $f(x+T)=-f(x)$，$f(x+T)=f(x-T)$

② $f(x+T)=\frac{1}{f(x)}$，$f(x+T)=\frac{f(x)+1}{f(x)-1}$

③ $f(x+T)=-\frac{1}{f(x)}$，$f(x+T)=\frac{1-f(x)}{1+f(x)}$

对称性与周期性的关系

① f(x) 关于 x=a, x=b 对称，则f(x)是周期为2｜a-b｜的周期函数

② f(x) 关于(a,m)，(b,m)对称，则f(x)是周期为2｜a-b｜的周期函数

③ f(x) 关于 (a,0),x=b 对称，则f(x)是周期为4｜a-b｜的周期函数

应用

利用周期性求函数值、解析式等

⑤ 函数的最值

函数的最大值

一般地，设函数 y=f(x) 的定义域为I，如果存在实数M满足：

① 对于任意的 x∈I，都有 f(x)≤M

② 存在 $x_0\in I$，使得 $f(x_0)=M$

那么，我们称M是函数 y=f(x) 的最大值

函数的最小值

一般地，设函数 y=f(x) 的定义域为I，如果存在实数M满足：

① 对于任意的 x∈I，都有 f(x)≥M

② 存在 $x_0\in I$，使得 $f(x_0)=M$

那么，我们称M是函数 y=f(x) 的最小值

通常在 f(x) 存在最值的情况下使用

通常 f(x)＞0（＜0）恒成立时，往往转化为函数 f(x) 的最大值与最小值问题，

再利用 f(x)＞0 恒成立，只需 $f(x)_{min}>0$；f(x)＜0恒成立，只需 $f(x)_{max}<0$ 求解

函数最值的求法（参考函数值域求法）

⑥ 函数的零点

定义

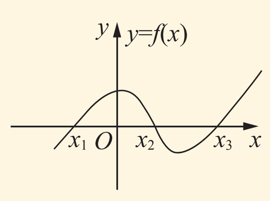
使 f(x)=0 成立的实数 x

函数 y =f(x)与x轴有交点⇔函数 y =f(x) 有零点

相关定义

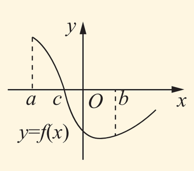
若函数f(x)的图像与x轴相切，此时的零点称为不变号零点

若函数f(x) 的图像与x轴相交，此时的零点称为变号零点



零点存在性定理

如图 f(a) f(b)＜0，则 f(x) 至少存在一点 c∈(a ,b)，使 f(c)=0



一般性质

函数图像通过零点时，函数值变号，两相邻零点之间函数值保持同号.

在定义域上的连续的单调函数至多有一个零点.

求法

① 代数法

若函数的解析式是代数式，直接令式子等于零求方程 f(x)=0 的根

若函数的解析式是超越式，依据定理，通过求端点值的符号找出零点位置

② 几何法

函数 y=f(x) 的图像与x轴的交点或转化为两个容易做出函数图像的交点

等价转化 零点理解的等价转化方程 f(x)=0 有实数解 ⇔ 函数 y=f(x) 与x轴有交点

③ 二分法

定义：对于区间[a ,b]上连续，且 f(a) f(b)＜0 的函数 y=f(x)，通过不断地把函数 f(x) 的零点所在区间一分为二，使区间两个端点逐步逼近零点，进而得到零点近似值的方法

二分法求 f(x)=0近似解的步骤

1.确定区间[a ,b]上连续，验证 f(a) f(b)＜0

2.求区间[a ,b] 的中点 x_1

3.计算 $f(x_1)$,

a.若$f(x_1)=0$，则x_1就是函数的零点

b.若$f(a)f(x_1)<0$，则令$b=x_1$（此时零点$x_0\in(a,x_1)$）

c.若$f(a)f(x_1)<0$，则令$a=x_1$（此时零点$x_0\in(x_1,b)$）

d. 给定精度 ε，用二分法求函数变号零点近似值的步骤重复2,3

函数的零点分布

函数的零点在数轴上的分布情况，尤其指二次函数的零点分布问题.

解决二次函数的零点分问题的主要方法

利用二次函数的图象列不等式组.

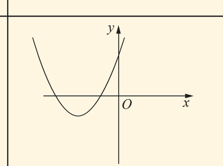
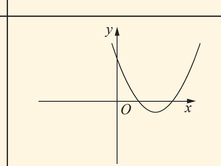
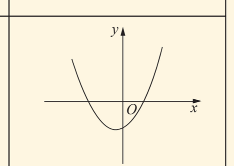
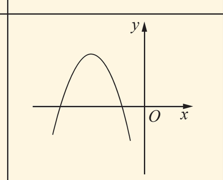
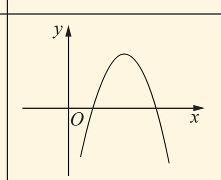
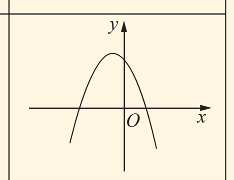
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$的实根分布,

结合二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$ 的图象可得到如下结论

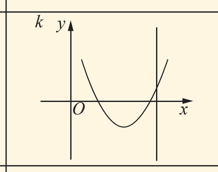
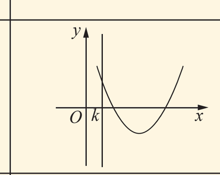
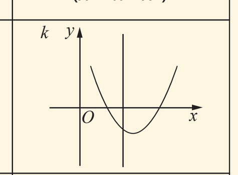
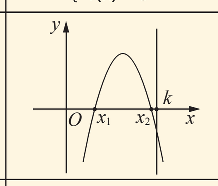
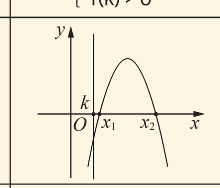
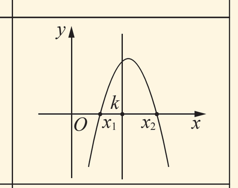
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$ 根的分布情况

设方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$ 的不等两根为x_1 x_2 且$x_1<x_2$，相应的二次函数为 $f(x)=ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$，方程的根即为二次函数图象与x轴的交点, 它们的分布情况见下面各表（每种情况对应的均是充要条件）

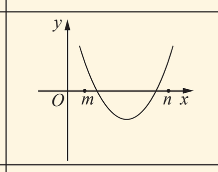
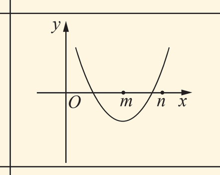
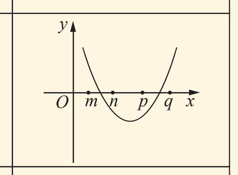
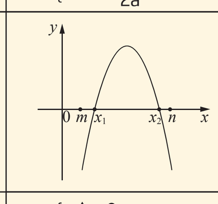
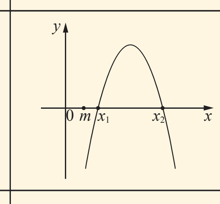
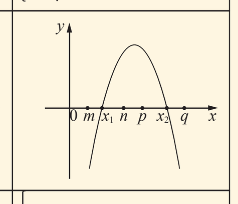
表一：（两根与 0 的大小比较即根的正负情况）

分布情况	两个负根即两根都小于0 $(x_1<0, x_2<0)$	两个正根即两根都大于0 $(x_1>0, x_2>0)$	一正根一负根即一个根小于0，一个大于0 $(x_1<0<x_2)$
大致图像（a＞0）			
得出的结论	$\begin{cases}\Delta>0\\-\frac{b}{2a}<0\\f(0)>0\end{cases}$	$\begin{cases}\Delta>0\\-\frac{b}{2a}>0\\f(0)>0\end{cases}$	$f(0)<0$
大致图像（a＜0）			
得出的结论	$\begin{cases}\Delta>0\\-\frac{b}{2a}<0\\f(0)<0\end{cases}$	$\begin{cases}\Delta>0\\-\frac{b}{2a}>0\\f(0)<0\end{cases}$	$f(0)>0$
综合结论(不讨论a)	$\begin{cases}\Delta>0\\-\frac{b}{2a}<0\\a\cdot f(0)>0\end{cases}$	$\begin{cases}\Delta>0\\-\frac{b}{2a}>0\\a\cdot f(0)>0\end{cases}$	$a\cdot f(0)<0$

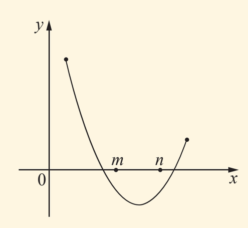
表二：（两根与k的大小比较）

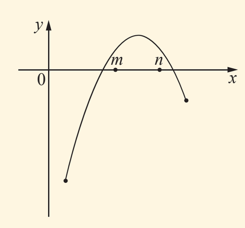
分布情况	两根都小于k 即 $(x_1<k, x_2<k)$	两根都大于k即 $(x_1>k, x_2>k)$	一个根小于k，一个大于k即 $(x_1<k<x_2)$
大致图像（a＞0）			
得出的结论	$\begin{cases}\Delta>0\\-\frac{b}{2a}<k\\f(k)>0\end{cases}$	$\begin{cases}\Delta>0\\-\frac{b}{2a}>k\\f(k)>0\end{cases}$	$f(k)<0$
大致图像（a＜0）			
得出的结论	$\begin{cases}\Delta>0\\-\frac{b}{2a}<k\\f(k)<0\end{cases}$	$\begin{cases}\Delta>0\\-\frac{b}{2a}>k\\f(k)<0\end{cases}$	$f(k)>0$
综合结论(不讨论a)	$\begin{cases}\Delta>0\\-\frac{b}{2a}<k\\a\cdot f(k)>0\end{cases}$	$\begin{cases}\Delta>0\\-\frac{b}{2a}>k\\a\cdot f(k)>0\end{cases}$	$a\cdot f(k)<0$

表三：（根在区间上的分布）

分布情况	两根都在(m ,n)内	两根有且仅有一根在(m ,n)内(图象有两种情况，只画了一种)	一根在(m ,n)内，另一根在(p,q)内，m＜n＜p＜q
大致图像（a＞0）			
得出的结论	$\begin{cases}\Delta>0\\f(m)>0\\f(n)>0\\m<-\frac{b}{2a}<n\end{cases}$	$f(m)\cdot f(n)<0$	$\begin{cases}f(m)>0\\f(n)<0\\f(p)<0\\f(q)>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}f(m)f(n)<0\\f(p)f(q)<0\end{cases}$
大致图像（a＜0）			
得出的结论	$\begin{cases}\Delta>0\\f(m)<0\\f(n)<0\\m<-\frac{b}{2a}<n\end{cases}$	$f(m)\cdot f(n)<0$	$\begin{cases}f(m)<0\\f(n)>0\\f(p)>0\\f(q)<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}f(m)f(n)<0\\f(p)f(q)<0\end{cases}$
综合结论(不讨论a)	--------	$f(m)\cdot f(n)<0$	$\begin{cases}f(m)f(n)<0\\f(p)f(q)<0\end{cases}$

根在区间上的分布还有一种情况：两根分别在区间 (m ,n) 外，即在区间两侧$x<m$，$x>n$，（图形分别如下）需满足的条件是





① a＞0时，$\begin{cases}f(m)<0\\f(n)<0\end{cases}$； ② a＜0时，$\begin{cases}f(m)>0\\f(n)>0\end{cases}$；

不动点

对于函数 y=f(x)，方程 f(x)=x 的解称为函数函数 的一阶不动点，简称为不动点．不动点即函数图象与 y=x 的图象的交点的横坐标，如果a是f(x)不动点，有 f(a) =a=f(f(a)).

二阶不动点

二阶不动点的概念方程 f(f(x))=x 的根称为函数f(x)的二阶不动点．当然，我们也可以以此类推定义n阶不动点．二阶不动点的研究方法方程 f(f(x))=x 的解为曲线 y=f(x)与曲线 x=f(y)（这两条曲线关于直线y=x对称）的交点的横坐标.

二阶不动点的性质:

（1）二阶不动点的性质 1 单调递增函数的二阶不动点必然是不动点． 证明

设 f(x) 单调递增，假设$x=x_0$是方程f(f(x))=x 的解．若$f(x_0)>x_0$，则由于f(x)单调递增，因此 $f(f(x_0))>f(x_0)>x_0$

矛盾:若$f(x_0)<x_0$，则由于f(x)单调递增，因此 $f(f(x_0))<f(x_0)<x_0$

矛盾：因此$f(x_0)\neq x_0$

（2）二阶不动点的性质 2 连续函数存在二阶不动点的必要条件是存在不动点．证明假设连续函数f(x)没有不动点且存在二阶不动点，设二阶不动点为a，且 f(a)=b(a=b)，则f(b)=f(f(a))=a．考虑函数g(x)=f(x)-x，则g(a)与g(b)异号，因此连续函数g(x)存在零点，与函数f(x)没有不动点矛盾．因此连续函数存在二阶不动点的必要条件是存在不动点.

⑦ 函数图像

作图

① 描点作图 步骤：列表、描点、连线 关键：描出关键点，如零点、最值点、与 y 轴交点等

② 变换作图

a. 平移变换

将函数 f(x) 的图象向左平移a个单位，得到函数y= f(x+a) 的图象；将函数图象向右平移a个单位，得到函数y= f(x-a) 的图象； 将函数图象向上平移a个单位，得到函数y= f(x)+a 的图象； 将函数图象向下平移a个单位，得到函数y= f(x)-a 的图象.

b. 对称变换

将函数图象关于直线 x=a 对称，得到函数 y=f(2a-x) 的图象；

将函数图象关于点 (a,b) 对称，得到函数 y=2b-f(2a-x) 的图象；

如果函数 y=f(x) 存在反函数，则将函数图象关于直线 y=x 对称，得到函数 $y=f^{-1}(x)$的图像.

c. 函数图象的翻折

函数 y=｜f(x)｜的图象是将函数 y=f(x) 的图象在x轴下方的部分翻折到上方后得到的结果；

函数 y= f(｜x｜)的图象是将函数 y=f(x) 在y轴左侧的图象删去，然后再将y轴右侧的图象关于y轴对称复制到左边后得到的结果.

d. 伸缩变换（三角函数）

e. 旋转变换

识图

利用图像能看出函数的单调性、奇偶性、周期性、零点、最值等

用图

利用图像求单调区间、奇偶性、最值、零点等