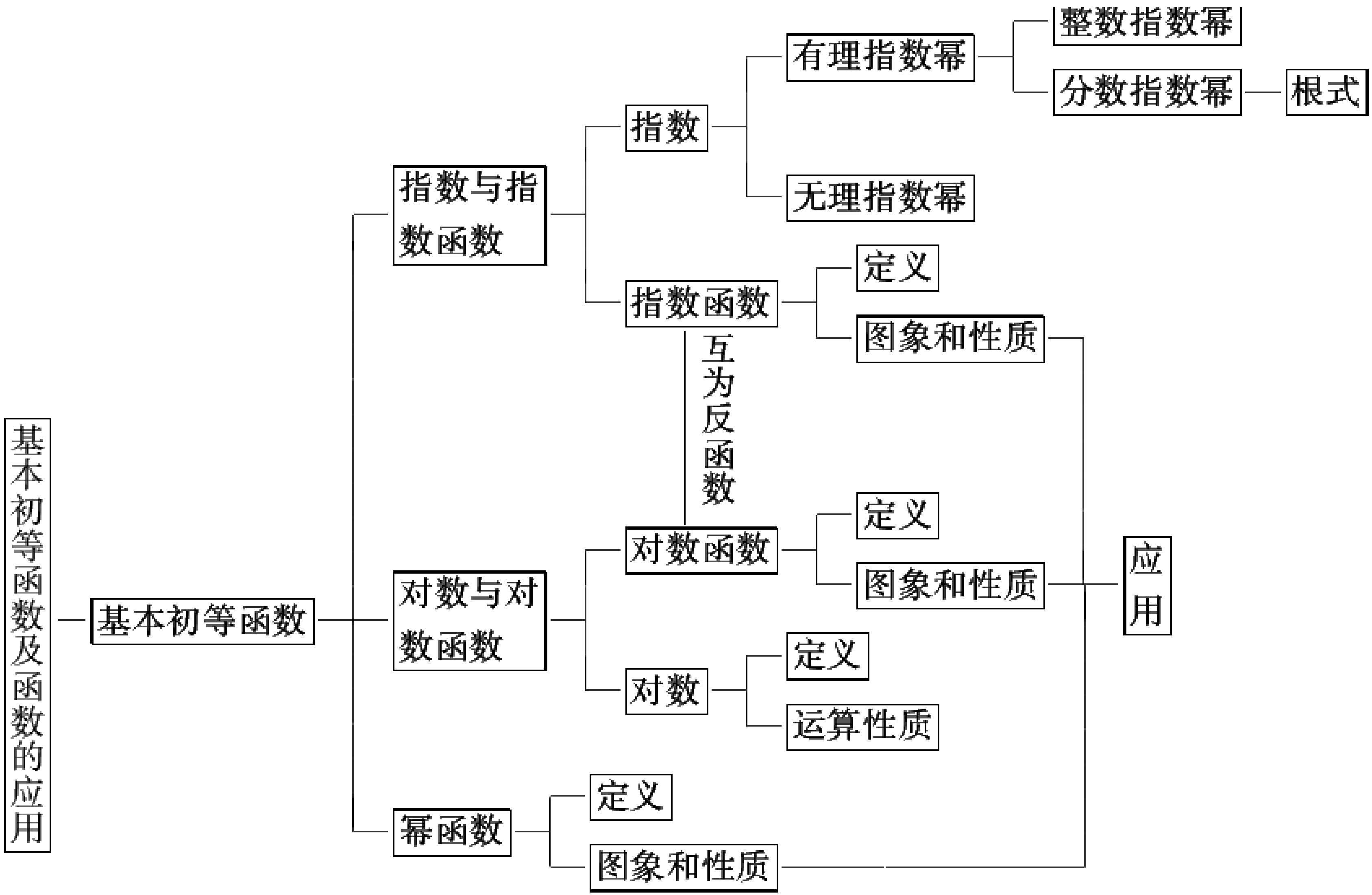
第二章

函数与基本初等函数

ZHI SHI WANG LUO

知识网络

- 映射
  - 映射概念
- 函数
  - 函数的概念
    - 定义域
    - 值域
    - 对应法则
  - 函数的表示法
    - 解析法
    - 图象法
    - 列表法
  - 函数的基本性质
    - 单调性
    - 奇偶性
- 基本初等函数及函数的应用


基本初等函数及函数的应用
基本初等函数
指数与指数函数
指数
有理指数幂
整数指数幂
分数指数幂
根式
无理指数幂
指数函数
定义
图象和性质
互为反函数
对数与对数函数
对数函数
定义
图象和性质
对数
定义
运算性质
幂函数
定义
图象和性质
应用

- 基本初等函数及函数的应用
  - 函数的应用
    - 函数与方程
      - 函数的零点与其对应方程根的关系
        - 结合起来解决实际问题
      - 用二分法求方程近似解
    - 函数模型及其应用
      - 比较几种常见函数模型的图象
        - 指数函数
        - 对数函数
        - 幂函数
        - 一次与二次函数
      - 利用已知函数模型解决问题
      - 建立实际问题的函数模型

KAO GANG XUE XI

考纲学习

函数概念与基本初等函数Ⅰ(指数函数、对数函数、幂函数)

1．函数

(1)了解构成函数的要素，会求一些简单函数的定义域和值域；了解映射的概念.

(2)在实际情境中，会根据不同的需要选择恰当的方法(如图象法、列表法、解析法)表示函数.

(3)了解简单的分段函数，并能简单应用.

(4)理解函数的单调性、最大值、最小值及其几何意义；结合具体函数，了解函数奇偶性的含义.

(5)会运用函数图象理解和研究函数的性质.

2．指数函数

(1)了解指数函数模型的实际背景.

(2)理解有理指数幂的含义，了解实数指数幂的意义，掌握幂的运算.

(3)理解指数函数的概念，理解指数函数的单调性，掌握指数函数图象通过的特殊点.

3．对数函数

(1)理解对数的概念及其运算性质，知道用换底公式能将一般对数转化成自然对数或常用对数；了解对数在简化运算中的作用.

(2)理解对数函数的概念，理解对数函数的单调性，掌握对数函数图象通过的特殊点.

(3)了解指数函数$y=a^x$与对数函数$y=\log_a x$互为反函数($a>0$，且$a\neq1$).

4．幂函数

(1)了解幂函数的概念．

(2)结合函数 $y=x$，$y=x^2$，$y=x^3$，$y=\frac{1}{x}$，$y=x^{\frac{1}{2}}$的图象，了解它们的变化情况．

5．函数与方程．

(1)结合二次函数的图象，了解函数的零点与方程根的联系，判断一元二次方程根的存在性及根的个数．

(2)根据具体函数的图象，能够用二分法求相应方程的近

6．函数模型及其应用

(1)了解指数函数、对数函数以及幂函数的增长特征，知道直线上升、指数增长、对数增长等不同函数类型增长的含义.

(2)了解函数模型(如指数函数、对数函数、幂函数、分段函数等在社会生活中普遍使用的函数模型)的广泛应用.

KAO QING FEN XI

考情分析

2007年、2010年广东卷均考查了求函数定义域的问题，还考查了函数的单调性和奇偶性，是以选择题或填空题的形式出现.

2009年考查了反函数的问题和函数图象的问题，均是简单题.2007年20题、2009年20题、2010年文科20题，主要考查二次函数的性质及应用，由此可见二次函数仍是广东高考的一个热点.

第一讲 函数的概念及定义域

KE QIAN XUE SHENG DU YU CE

课前学生读与测

读 知识与方法梳理

1．映射

设A，B是两个非空的集合，如果按某一个确定的对应关系f，使对于集合__A中的任意一个__元素x，在集合__B__中都有__唯一确定__的元素y与之对应，那么就称对应__f：$A\to B$__为从集合A到集合B的一个__映射__.

2．函数的概念

(1)设A，B是<u>非空</u>的<u>数集</u>，如果按照某种确定的对应关系f，使对于集合A中的<u>任意一个</u>数x，在集合B中都有<u>唯一确定</u>的数$f(x)$和它对应，那么就称f：$A\to B$为集合A到集合B的一个函数，记作$y=f(x)$．$x\in A$.其中，<u>x</u>叫做<u>自变量</u>，<u>x的取值范围A</u>叫做函数的定义域；与x的值相对应的<u>y值</u>叫做函数值，<u>函数值的集合$\{f(x)|x\in A\}$</u>叫做函数的值域.

(2)函数的三要素：__定义域__、__值域__、__对应法则__；　其中，__对应法则__是核心，__定义域__是灵魂；__对应法则__与__定义域__确定__值域__；若__对应法则__与__定义域__相同，则两个函数是__相同的函数__.

3．**确定函数定义域的原则**

定义域是函数的灵魂，因此在研究函数时一定要遵循："定义域优先"的原则，而确定函数的定义域的原则是：

(1)当函数$y=f(x)$是用表格给出时，函数的定义域是指__表格中实数x的集合__.

(2)当函数$y=f(x)$是用图象给出时，函数的定义域是指____图象在x轴上的正投影所覆盖实数x的集合____.

(3)当函数$y=f(x)$是用解析式给出时，那么函数的定义域就是指____使表达有意义的实数x的集合____.

(4)若$y=f(x)$是由实际问题给出时，则函数的定义域____由实际意义确定____.

测

1．(2011·深圳一模)已知全集$U=\mathbf{R}$，集合A为函数$f(x)=\ln(x-1)$的定义域，则$\complement_U A=$________.

[答案]　$\{x|x\leqslant 1\}$

2.(2009 **江西卷**)函数 $y=\dfrac{\sqrt{-x^2-3x+4}}{x}$的定义域为

(　　)

A．$[-4,1]$　　B．$[-4,0)$

C．$(0,1]$　　D．$[-4,0)\cup(0,1]$

[解析]　由$\begin{cases}x\neq 0\\-x^2-3x+4\geq 0\end{cases}$ 得$-4\leqslant x<0$ 或 $0<x\leqslant 1$，故选 D.

[答案]　D

3．(2009 **福建卷**)下列函数中，与函数 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$有相同定义域的是(　　)

A．$f(x)=\ln x$　　B．$f(x)=\frac{1}{x}$

C．$f(x)=|x|$　　D．$f(x)=e^x$

[解析]　由 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$可得定义域是 $x>0$.$f(x)=\ln x$ 的定义域 $x>0$；$f(x)=\frac{1}{x}$的定义域是 $x\neq 0$；$f(x)=|x|$的定义域是 $x\in\mathbf{R}$；$f(x)=e^x$ 定义域是 $x\in\mathbf{R}$.故选 A.

[答案]　A

KE NEI SHI SHENG JIANG YU XUE

课内师生讲与学

主要题型研究

题型1　相同函数的判断问题

例1　试判断以下各组函数是否表示同一函数？

(1) $f(x)=\sqrt{x^2}$，$g(x)=\sqrt[3]{x^3}$；

(2) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$，$g(x)=\begin{cases}1, & x\geq 0,\\ -1, & x<0;\end{cases}$

(3) $f(x)=\sqrt{x}\sqrt{x+1}$，$g(x)=\sqrt{x^2+x}$；

(4) $f(x)=x^2-2x-1$，$g(t)=t^2-2t-1$.

[分析]　对于两个函数$y=f(x)$和$y=g(x)$，当且仅当它们的定义域、值域、对应法则都相同时，$y=f(x)$和$y=g(x)$才表示同一函数．若两个函数表示同一函数，则它们的图象完全相同，反之亦然．

[解]　(1)由于 $f(x)=\sqrt{x^2}=|x|$，$g(x)=\sqrt[3]{x^3}=x$，故它们的值域及对应法则都不相同，所以它们不是同一函数．

(2)由于函数 $f(x)=\frac{|x|}{x}$的定义域为$(-\infty，0)\cup(0，+\infty)$，而

$g(x)=\begin{cases}1，& x\geqslant0，\\-1，& x<0\end{cases}$ 的定义域为 **R**，所以它们不是同一函数．

(3)由于函数 $f(x)=\sqrt{x}\sqrt{x+1}$的定义域为$\{x|x\geqslant 0\}$，而 $g(x)=\sqrt{x^2+x}$的定义域为$\{x|x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 0\}$，它们的定义域不同，所以它们不是同一函数.

(4)函数的定义域、值域和对应法则都相同，所以它们是同一函数.

[点评与警示]　①第(4)小题易错误判断成它们是不同的函数．要注意，在函数的定义域及对应法则f不变的条件下，自变量变换字母，以至变换成其他字母的表达式，这对于函数本身并无影响，比如$f(x) = x^2 + 1$，$f(t) = t^2 + 1$，$f(u + 1) = (u + 1)^2 + 1$都是同一函数．

②对于两个函数来讲，只要函数的三要素中有一要素不相同，则这两个函数就不可能是同一函数．

题型 2　判断是否是映射

例 2　(人教A版必修1第22页题改编)以下给出的对应是不是从集合 A 到集合 B 的映射？

(1) $A=\mathbf{R}$，$B=\mathbf{R}$，f：$x\to y=\dfrac{1}{x+1}$；

(2) $A=\{x|x\geqslant 0\}$，$B=\mathbf{R}$，f：$x\to y^2=x$；

(3) $A=\{\alpha|0°\leqslant\alpha\leqslant 180°\}$，$B=\{x|0\leqslant x\leqslant 1\}$．$f$：求余弦；

(4) $A=\{$平面 α 内的矩形$\}$，$B=\{$平面 α 内的圆$\}$，f：作矩形的外接圆．

[分析]　应该这样思考，什么是映射？映射这个概念应满足什么要求？然后作出判断.

[解]　(1)当$x=-1$时，y值不存在，所以不是映射.

(2)不是映射，如A中元素$x=1$时，在f作用下，B中有两个元素± 1，不具备惟一性.

(3)不是映射，例如当$\alpha=180°$时，在B中没有元素与之对应.

(4)由于平面内每一个矩形只有一个外接圆与之对应，所以这个对应是从集合A到B的一个映射.

[点评与警示]　欲判断对应f：$A\rightarrow B$是否是从A到B的映射，必须做两点工作：①明确A、B中的元素．②根据对应判断A中的每个元素是否在B中能找到惟一确定的对应元素．

题型3 求函数定义域问题

例3 求下列函数的定义域

(1)$y=\dfrac{1}{2-|x|}+\sqrt{x^2-1}$;

(2)$y=\lg(|x|-x)$;

(3)已知 $f(x)$的定义域为$(-1,1)$，求函数 $F(x)=f(1-x)+f(\dfrac{1}{x})$的定义域.

[分析] (1)、(2)可由函数的解析式有意义所满足的条件进行求解，(3)将 $1-x$ 与 $\frac{1}{x}$ 均看成一个整体，则它们的值均在 $(-1,1)$ 中，据此即可求得 x 的取值范围.

[解]　(1)由$\begin{cases}2-|x|\neq 0,\\ x^2-1\geqslant 0.\end{cases}$　解得$\begin{cases}x\neq \pm 2;\\ x\leqslant -1，或x\geqslant 1.\end{cases}$

所以函数的定义域为$(-\infty，-2)\cup(-2，-1]\cup[1,2)\cup(2，+\infty)$.

(2)由$|x|-x>0$.得$|x|>x$，$\therefore x<0$

所以函数的定义域为$(-\infty，0)$.

(3)由$\begin{cases}-1<1-x<1,\\ -1<\dfrac{1}{x}<1.\end{cases}$　得$\begin{cases}0<x<2\\ x<-1或x>1\end{cases}$

$\therefore 1<x<2$.

所以 $F(x)$的定义域为$\{x|1<x<2\}$.

[点评与警示]　求有解析式的函数的定义域就是求使解析式有意义的x的范围．掌握基本初等函数(如分式函数、对数函数、三角函数、根式函数等)的定义域是求函数定义域的基础．(3)中函数$F(x)$是由两个函数相加而成的，其定义域为两个函数的定义域的交集.

◆ 变形思考1

求下列函数的定义域

(1)$y=\dfrac{1}{2-|x|}+\sqrt[3]{x^2-1}$;

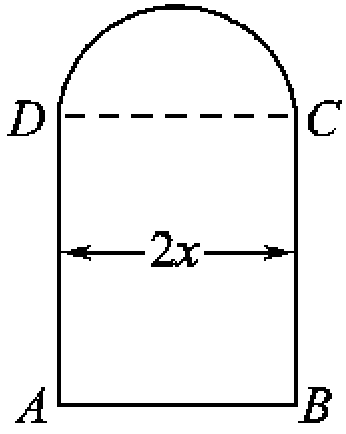
(2)已知 $f(x-1)$的定义域为$(-1,1)$，求函数 $f(x)$的定义域.

[答案]　(1)

(2)$(-2,0)$

题型 4　由实际问题给出的函数定义域的确定

例 4　用长为l的铁丝弯成下部为矩形，上部为半圆形的框架(如图)，若矩形底部长为$2x$，求此框架围成的面积y与x的函数关系式，并指出其定义域.



[分析]　本题中框架由一个矩形和一个半圆围成，函数关系不难写出，关键是在求定义域时，除考虑 $x>0$ 外，还得使$\frac{l}{2}-\frac{\pi}{2}x-x>0$.

[解]　由题意知，此框架围成的面积是由一个矩形和一个半圆组成的图形的面积，而矩形的长 $AB=2x$.设宽为 a，则有 $2x+2a+\pi x=l$，即 $a=\frac{l}{2}-\frac{\pi}{2}x-x$，半圆的半径为 x，所以 $y=\frac{\pi x^2}{2}+(\frac{l}{2}-\frac{\pi}{2}x-x)\cdot 2x=-(2+\frac{\pi}{2})x^2+lx$.

由实际意义知：$\frac{l}{2}-\frac{\pi}{2}x-x>0$，因 $x>0$，解得 $0<x<\frac{l}{2+\pi}$.

即函数 $y=-(2+\frac{\pi}{2})x^2+lx$ 的定义域是$\{x|0<x<\frac{l}{2+\pi}\}$.

[点评与警示]　求由实际问题确定的定义域时，除考虑函数的解析式有意义外，还要考虑使实际问题有意义．如本题使函数解析式有意义的x的取值范围是$x\in\mathbf{R}$，但实际问题的意义是矩形的边长为正数，而边长是用变量x表示的，这就是实际问题对变量的制约．

◆变形思考2

已知扇形周长为10 cm，求扇形半径r与扇形面积S的函数关系$S=f(r)$，并确定其定义域.

[解]　设弧长为 l，则 $l=10-2r$，所以 $S=\frac{1}{2}lr=(5-r)r$

$=-r^2+5r$

由$\begin{cases} r>0, \\ l>0, \\ l<2\pi r \end{cases}$　得$\frac{5}{\pi+1}<r<5$.

$\therefore S=-r^2+5r$ 的定义域为$\left(\frac{5}{\pi+1}, 5\right)$.

JIE TI JING YAN GONG XIANG

解题经验共享

1．映射是一种特殊的对应，而函数又是一种特殊的映射，即两个非空数集之间的映射.

2．求已知解析式函数的定义域就是求使函数式有意义的x的取值范围；由实际问题或几何问题建立的函数式，其定义域应使实际问题或几何问题有意义.

3．求由解析式表示的函数定义域常见的几种情况：

(1)若$f(x)$是整式，则函数的定义域是实数集**R**.

(2)若$f(x)$是分式，则函数的定义域是使分母不等于0的实数集.

(3)若$f(x)$是二次(偶次)根式，则函数的定义域是使被开方式大或等于0的实数集合.

(4)若$f(x)$是对数式，则函数的定义域是使真数大于0，且底数大于0且不等于1的实数集.

(5)含参数问题的定义域要分类讨论；

(6)若$f(x)$是指数式，则零指数幂的底数不等于0.

(7)若$f(x)$是由几个部分的数学式子构成的，则函数的定义域是使各个式子同时有意义的实数的集合.

KE WAI XUE SHENG LIAN YU WU

课外学生练与悟