第七讲　幂函数

KE QIAN XUE SHENG DU YU CE

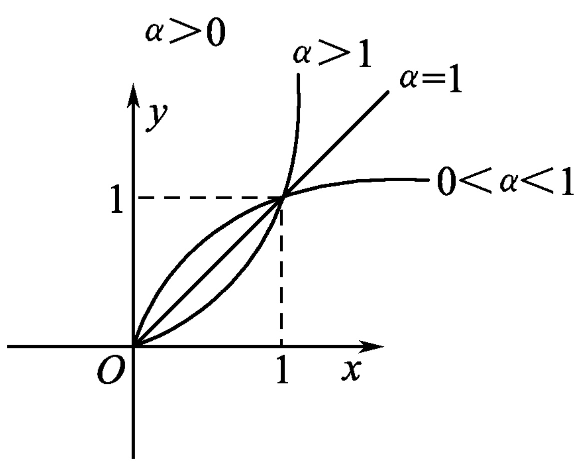
课前学生读与测

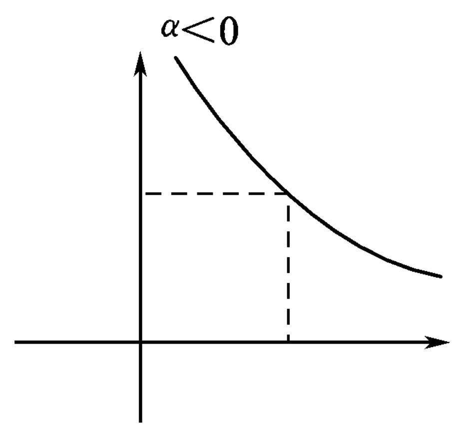
读　知识与方法梳理

1. 幂函数的定义：形如 $y=x^{\alpha}$ 的函数叫幂函数(α 为常数)

要重点掌握 $\alpha=1,2,3,\frac{1}{2},-1$ 时的幂函数.

2．幂函数的图象：(只做出第一象限图象)





幂函数在其他象限的图象，可由幂函数的奇偶性根据对称性做出．$\alpha=\frac{n}{m}$(其中 $m\in\mathbf{N}^*$，$n\in\mathbf{Z}$ 且 m，n 互质)．

(1)当 n 为偶数时，$f(x)$为偶函数，其图象关于 y 轴对称．

(2)当 m，n 都为奇数时，$f(x)$为奇函数，其图象关于原点对称．

(3)当 m 为偶数，n 为奇数时，$f(x)$为非奇非偶函数，其图象只能在第一象限．

3．幂函数的性质

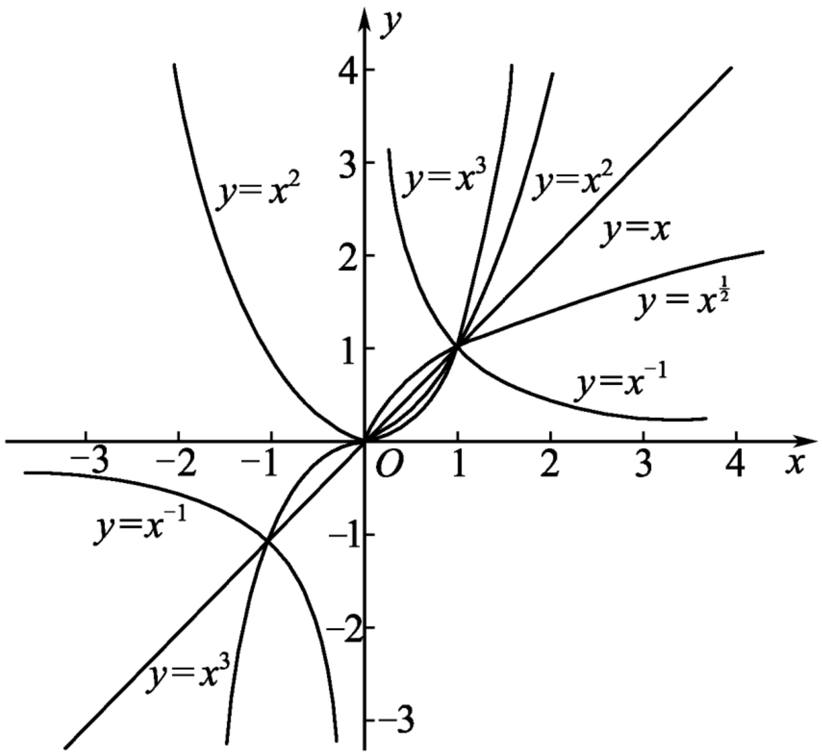
(1)当$\alpha>0$时，幂函数图象都过__(0,0)__点和__(1,1)__点；且在[0，+∞)上都是__增__函数；当$0<\alpha<1$时曲线__上凸__；当$\alpha>1$时，曲线__下凹__；$\alpha=1$时为过__(0,0)__点和__(1,1)__点的直线.

(2)当$\alpha<0$时，幂函数图象总经过__(1,1)__点，且在(0，+∞)上为减函数.

(3)$\alpha=0$时$y=x^{\alpha}=x^{0}$，表示过__(1,1)__点平行于x轴的直线(除(0,1)点).

4．幂函数当 $\alpha=1,2,3,\frac{1}{2},-1$ 时的图象与性质.

(1)图象(如图所示)



(2)性质(见下表)

	$y=x$	$y=x^2$	$y=x^3$	$y=x$	$y=x^{-1}$
定义域	**R**	**R**	**R**	[0，+∞)	(－∞，0)∪(0，+∞)
值域	**R**	[0，+∞)	**R**	[0，+∞)	(－∞，0)∪(0，+∞)
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数	非奇非偶函数	奇函数
单调性	在**R**上为增函数	在(－∞，0)上为减函数，在[0，+∞)上为增函数	在**R**上为增函数	在(0，+∞)上为增函数	在(－∞，0)上为减函数在(0，+∞)上为减函数
定点	(0,0)，(1,1)	(0,0)，(1,1)	(0,0)，(1,1)	(0,0)，(1,1)	(1,1)

测

1．若集合 $A=\{y|y=x^{\frac{1}{3}},\ -1\leqslant x\leqslant 1\}$，$B=\{y|y=(\frac{1}{2})^{x},\ x\leqslant 0\}$，则 $A\cap B$ 等于(　　)

A．$(-\infty,\ 1)$　　B．$[-1,1]$

C．$\varnothing$　　D．$\{1\}$

[答案]　D

2. 若幂函数 $f(x)$ 的图象经过点 $(3,\frac{1}{9})$，则其定义域为(　　)

A. $\{x|x\in\mathbf{R}，x>0\}$　　B. $\{x|x\in\mathbf{R}，x<0\}$

C. $\{x|x\in\mathbf{R}，且\ x\neq0\}$　　D. $\mathbf{R}$

[解析]　设 $f(x)=x^{\alpha}$.

$\because$ 图象过点 $(3，\frac{1}{9})$，

$\therefore \frac{1}{9}=3^{\alpha}$，即 $3^{-2}=3^{\alpha}$，$\therefore \alpha=-2$，

即 $f(x)=x^{-2}=\frac{1}{x^2}$，

$\therefore x^2\neq0$，即 $x\neq0$，

其定义域为 $\{x|x\in\mathbf{R}，且\ x\neq0\}$.

[答案]　C

3．已知函数 $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$，且 $f(2x-1)<f(3x)$，则 x 的取值范围是________．

[解析]　由 $\sqrt{2x-1}<\sqrt{3x}$ 得：$\begin{cases}2x-1\geqslant 0,\\3x>0,\\2x-1<3x,\end{cases}$ $\therefore x\geqslant\frac{1}{2}$.

[答案]　$x\geqslant\frac{1}{2}$

KE NEI SHI SHENG JIANG YU XUE

课内师生讲与学

主要题型研究

题型1 比较大小

例1 (2010安徽文数)设 $a=(\frac{3}{5})^{\frac{2}{5}}$，$b=(\frac{2}{5})^{\frac{3}{5}}$，$c=(\frac{2}{5})^{\frac{2}{5}}$，则 a，b，c 的大小关系是(　　)

A．$a>c>b$　　B．$a>b>c$

C．$c>a>b$　　D．$b>c>a$

[解析]　$y=x^{\frac{2}{5}}$在 $x>0$ 时是增函数，所以 $a>c$，$y=(\frac{2}{5})^x$在 $x>0$ 时是减函数，所以 $c>b$.

[答案]　A

[点评与警示]　比较幂形式的两个数的大小，一般的思路是：

(1)若能化为同指数，则用幂函数的单调性.

(2)若能化为同底数，则用指数函数的单调性.

(3)若既不能化为同指数，也不能化为同底数，则需寻找一个恰当的数作为桥梁来比较大小.

题型2　幂函数的图象及性质的应用

例2　幂函数$y=(m^2-m-1)xm^2-2m-3$当$x\in(0,+\infty)$时为减函数，求实数m的值.

[解]　令$m^2-m-1=1$，解得$m=2$或-1.

当$m=2$时，$m^2-2m-3=-3$，幂函数$y=x^{-3}$在$(0,+\infty)$上为减函数;

当$m=-1$时，$m^2-2m-3=0$，$y=x^0$在$(0,+\infty)$上为常函数.

所以，$m=2$.

[点评与警示]　注意幂函数的定义：形如$y=x^a$的函数叫做幂函数．因此有$m^2-m-1=1$.

◆变形思考1 若幂函数$y=(m^2-3m+3)x^{m^2-m-2}$的图象不经过原点，则实数m的值等于(　　)

A．1　　B．2

C．1或2　　D．0

[解析]　由于函数$y=(m^2-3m+3)x^{m^2-m-2}$是幂函数，

所以$m^2-3m+3=1$，解得$m=1$或2.

当$m=1$时$y=(m^2-3m+3)x^{m^2-m-2}=x^{-2}$，定义域是$\{x|x\in\mathbf{R},x\neq0\}$，图象不经过原点；

当$m=2$时，$y=(m^2-3m+3)x^{m^2-m-2}=x^0$，定义域是$\{x|x\in\mathbf{R},x\neq0\}$，图象不经过原点.

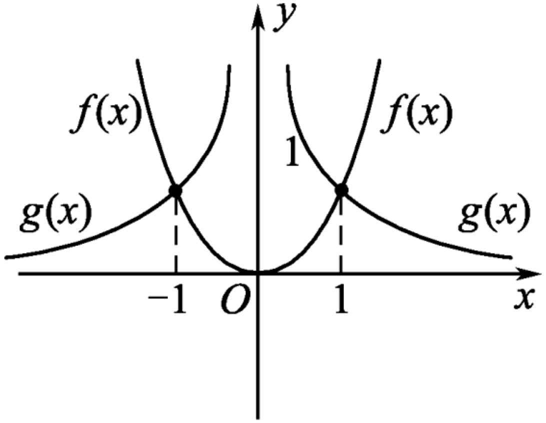
[答案]　C

例 3 点$(\sqrt{2}, 2)$在幂函数 $f(x)$的图象上，点$(-2, \frac{1}{4})$在幂函数 $g(x)$的图象上，问当 x 为何值时有：(1)$f(x)>g(x)$；(2)$f(x)=g(x)$；(3)$f(x)<g(x)$.

[分析]　先利用幂函数的定义求出$f(x)$，$g(x)$的解析式，再利用图象判断.

[解]　设 $f(x)=x^{\alpha}$，因为点$(\sqrt{2},2)$在幂函数 $f(x)$的图象上，将$(\sqrt{2},2)$代入 $f(x)=x^{\alpha}$ 中，得 $2=\sqrt{2}^{\alpha}$解得 $\alpha=2$，$\therefore f(x)=x^2$.

设 $g(x)=x^b$，因为点$(-2,\frac{1}{4})$在幂函数 $g(x)$的图象上，将$(-2,\frac{1}{4})$代入 $g(x)=x^b$ 中，得$\frac{1}{4}=(-2)^b$，解得 $b=-2$，即 $g(x)=x^{-2}$，在同一坐标下作出 $f(x)=x^2$ 和 $g(x)=x^{-2}$ 的图象.



据图可知，

(1)当$x>1$或$x<-1$时，$f(x)>g(x)$，

(2)当$x=1$或$x=-1$时，$f(x)=g(x)$，

(3)当$-1<x<1$且$x\neq0$时，$g(x)>f(x)$.

[点评与警示]　1.幂函数的一般形式是$y=x^{\alpha}$(α为常数)，确定幂函数的解析式一般用待定系数法，解出α即可.

2.　幂函数的图象在解不等式和方程时有重要的应用.

3.　本题注意$g(x)=x^{-2}$的定义域是$\{x|x\neq0\}$.

例4 已知幂函数$y=x^{m^2-2m-3}(m\in\mathbf{N}_+)$的图象关于$y$轴对称，且在$(0,+\infty)$上是减函数，求满足$(a+1)^{-\frac{m}{3}}<(3-2a)^{-\frac{m}{3}}$的$a$的取值范围

[解]　∵函数在$(0,+\infty)$上单调递减，

∴$m^2-2m-3<0$，解得$-1<m<3$.

∵$m\in\mathbf{N}_+$，∴$m=1,2$.

又∵函数图象关于y轴对称，

∴m^2-2m-3是偶数.

而$2^2-2\times2-3=-3$为奇数，

$1^2-2\times1-3=-4$为偶数，∴$m=1$.

而 $y=x^{-\frac{1}{3}}$在$(-\infty，0)$，$(0，+\infty)$上均为减函数，

$\therefore(a+1)^{-\frac{1}{3}}<(3-2a)^{-\frac{1}{3}}$等价于 $a+1>3-2a>0$ 或 $3-2a<a+1<0$ 或 $a+1<0<3-2a$.

解得 $a<-1$ 或$\frac{2}{3}<a<\frac{3}{2}$.

故 a 的取值范围为$\{a|a<-1$ 或$\frac{2}{3}<a<\frac{3}{2}\}$.

◆变形思考2

已知幂函数$f(x)=x^{m^2-2m-3}$$(m\in\mathbf{N})$的图象关于坐标原点对称且在$(0,+\infty)$上是减函数，求$f(x)$的表达式并画出该函数的草图.

[解]　$\because f(x)$在$(0,+\infty)$上是减函数

$\therefore m^2-2m-3<0$即$-1<m<3$

由$m\in\mathbf{N}$，得$m=0$、1、2.

又$f(x)$的图象关于原点对称.

$\therefore m^2-2m+3$是奇数.

而$m=0$时，$m2-2m-3=-3$是奇数

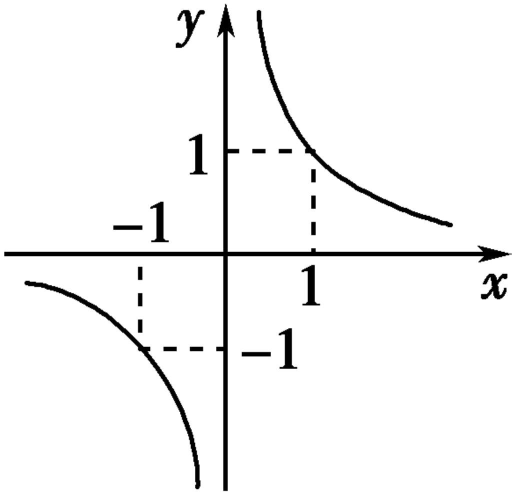
$m=1$时，$m2-2m-3=-4$不是奇数

$m=2$时，$m2-2m-3=-3$是奇数.

$\therefore m=0$或2，

$f(x)=x-3$.

草图如右图.



JIE TI JING YAN GONG XIANG

解题经验共享

1．幂函数 $y=x^{\alpha}$($\alpha\in\mathbf{R}$，α 是常数)与指数函数 $y=a^{x}$($a>0$ 且 $a\neq 1$)的区别：幂函数是以幂的底为自变量，指数为常数；而指数函数是底数是常数，自变量则处在幂指数位置．

现阶段只研究幂函数 $y=x^{\alpha}$($\alpha\in\mathbf{R}$，α 是常数)中的 α 是有理数的情形，且考纲明确要求掌握如下几种特殊的幂函数 $y=x^{\alpha}$，如：$\alpha=1,2,3$，-1，-2，$\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{2}$的图象及特征．

2．在研究幂函数的性质时，通常将分式指数幂化为根式形式，负整指数幂化为分式形式再去进行讨论.

3．对于幂函数$y=x^a$，我们首先应该分析函数的定义域、值域和奇偶性，由此确定图象的位置，即所在象限，其次确定曲线的类型，即$a<0,0<a<1$和$a>1$三种情况下曲线的基本形状，还要注意$a=0$，± 1三个曲线的形状.

4．利用幂函数和指数函数的单调性可以比较幂值的大小，具体方法如下：

(1)当幂的底数相同，指数不同时，可以利用指数函数的单调性比较；

(2)当幂的底数不同，指数相同时，可以利用幂函数的单调性比较；

(3)当幂的底数和指数都不同时，一种方法是作商，通过商与1的大小关系确定两个幂值的大小，可以利用幂函数的单调性比较；另一种方法是运用媒介法，即找到一个中间值(如1)，通过比较两个幂值与中间值的大小，确定两个幂值的大小．

(4)比较多个幂值的大小，一般也是运用媒介法，即先判断这组数中每个幂值与0,1等数的大小关系，据此将它们分成若干组，然后将同一组内的各数用相关的方法进行比较，最后确定各数之间的大小关系.

KE WAI XUE SHENG LIAN YU WU

课外学生练与悟