专题

陈 现 平

E–mail: chxp123456789@163.com

聊城大学　数学科学学院

June 25, 2009

目录

线性空间

Example 1.1

(大连理工04)设P 是数域，$P^{3\times 3}$ 表示P 上的所有3×3 矩阵的集合，对于矩阵的加法及数乘运算，$P^{3\times 3}$ 是P 上的线性空间，令

$$V=\{A\in P^{3\times 3}|Tr(A)=0\}$$

则V的维数=（），V 的一组基为（）.

解: $\forall A\in V$,由于只要求A的对角元之和为0,而对其他位置元素无要求.设

$$A=\begin{pmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & x_2 & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & 0 & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_1 & & \\ & x_2 & \\ & & x_3\end{pmatrix}=B+C$$

而B可由$E_{ij}(i,j=1,2,3,i\neq j)$线性表示.而$C$的对角元满足

$$x_1+x_2+x_3=0$$

其基础解系为

$$(-1,1,0)^T,(-1,0,1)^T.$$

故C可由

$$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 0 & \\ & & 1\end{pmatrix}$$

线性表示.从而基为

$$diag(-1,1,0),diag(-1,0,1),E_{ij}(i,j=1,2,3,i\neq j)$$

Example 1.2

设V是数域F上的所有n阶对称矩阵关于矩阵的加法与数乘运算构成的线性空间.令

$$U = \{A \in V | tr(A) = 0\}, W = \{\lambda E | \lambda \in F\}$$

(1)求证:U, W为V的子空间.
(2)分别求U, W的一组基与维数.
(3)求证:$V = U \oplus W$.

Example 1.3

(1)设V是由实数域上全体四次三元齐次多项式所生成的线性空间,求V的维数.
(2)四元多项式环$C[X_1, X_2, X_3, X_4]$中由所有六次多项式生成的复空间的维数是多少?

解: (1)好像没有好的办法，写出所有可能的单项式，数一数有多少个吧。
设V是由实数域上全体四次三元齐次多项式所生成的线性空间,求V的维数一个变元4次3个；两个变元3+1次，6个；2+2,3个；三个变元2+1+1次，3个；一共15个吧。
(2)自己数数吧。

Example 1.4

(中科院02)设n阶实矩阵

$$A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda\end{pmatrix}$$

令$V=\{B|BA=AB, B$为$n\times n$实方阵$\}$.证明:(1)V为线性空间.(2)V的维数$\dim V=n$.

证: (1)略.

(2)设$A=\lambda E+C$,其中

$$C=\begin{pmatrix}0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0\end{pmatrix}$$

则

$$AB=BA\Leftrightarrow BC=CB$$

设$B=(b_{ij})$,则由$BC=CB$可得

$$B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & b_{12} \\ & & & b_{11}\end{pmatrix}(b_{ii}=b_{jj}, b_{ij}=b_{i+1,j+1}, i<j)$$

从而可得.

Example 1.5

求与$f(J)$可换的矩阵所构成线性空间的一组基.其中J为对角线元素为0的n阶Jordan块.$f(x)$为一个多项式.

证:

与J可交换的矩阵B具有一下特点:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{11} & & \\ & & \ddots & \\ a_{n1} & & a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

B显然可与 J的任意次方矩阵交换，故可与j的任意多项式交换

故所求线性空间的一组基为

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & & \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \end{pmatrix} \cdots\cdots \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$$