高等数学A

第1章 函数与极限

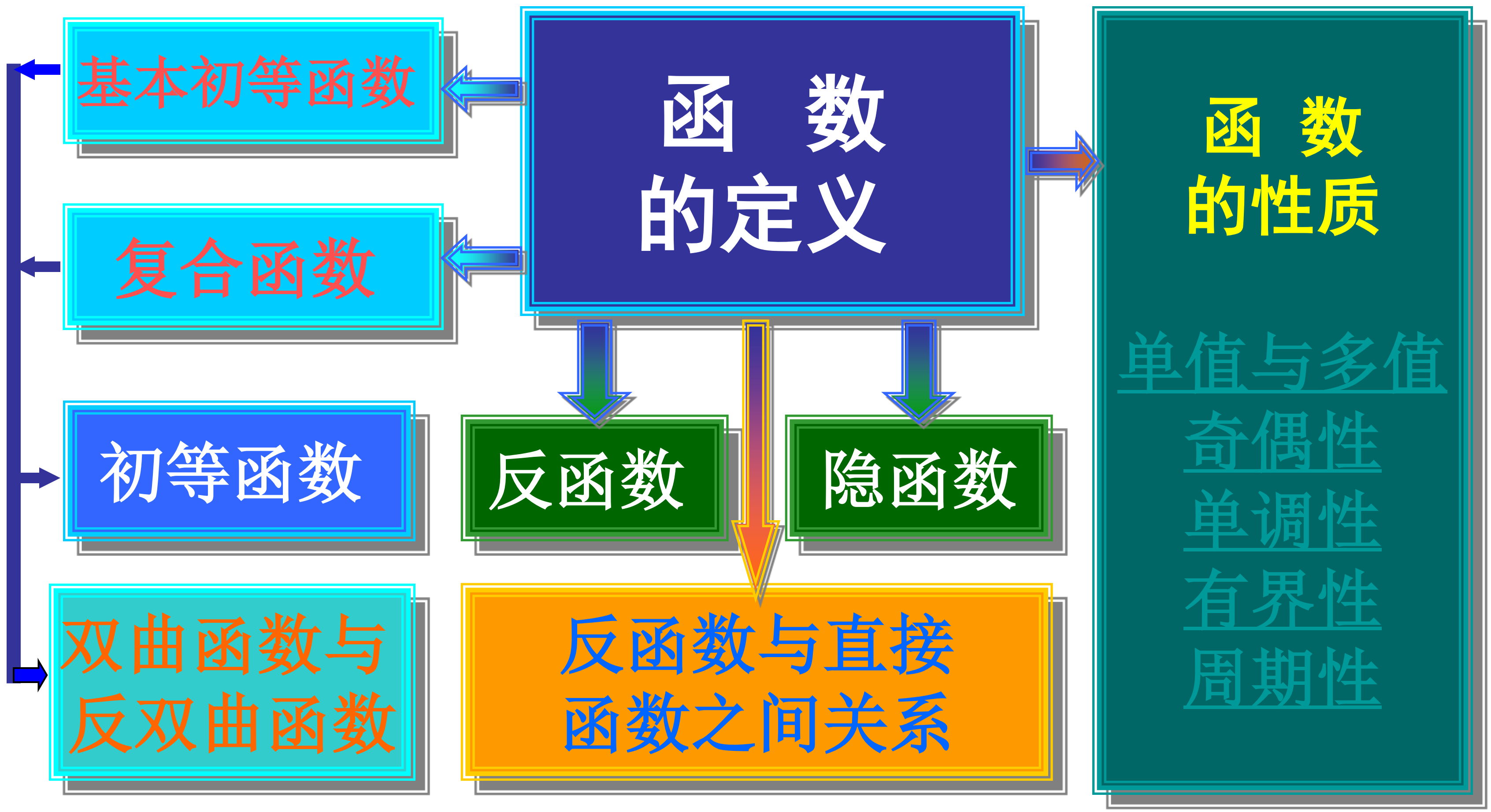
习 题 课

中南大学开放式精品示范课堂高等数学建设组

函数与极限习题课

- 结构框图
  - 函数的定义
  - 极限的概念
  - 连续的概念
- 简略内容小结
  - 定义与性质
  - 求极限的常用方法
  - 求极限的常用结果
  - 判定极限不存在的常用方法
  - 常见题型
- 典型习例1-12

（一）函数的定义



基本初等函数
复合函数
初等函数
双曲函数与反双曲函数
函数的定义
反函数
隐函数
反函数与直接函数之间关系
函数的性质
单值与多值
奇偶性
单调性
有界性
周期性

（二）极限的概念

数列极限	函　数　极　限	
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$

- 无穷大 $\lim f(x) = \infty$
- 两者的关系
- 极限存在的充要条件
- 左右极限
- 无穷小的比较
- 无穷小 $\lim f(x) = 0$
- 判定极限存在的准则
- 两个重要极限
- 等价无穷小及其性质
- 无穷小的性质
- 唯一性
- 求极限的常用方法
- 极限的性质

（三）连续的概念

连 续 定 义

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$　　$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

间断点定义

第一类：可去间断点、跳跃间断点

第二类：无穷间断点、振荡间断点

左右连续

连续的充要条件

在区间[a, b]上连续

连续函数的运算性质

非初等函数的连续性

初等函数的连续性

连续函数的 性 质

内容小结

一. 定义

1. 函数定义
2. "$\varepsilon - N$"定义
3. "$\varepsilon - X$"定义
4. "$\varepsilon - \delta$"定义
5. 连续的定义
6. 无穷小及阶的定义
7. 无穷大的定义

二. 性质

1. 极限的性质
2. 连续的性质
3. 无穷小的性质
4. 闭区间上连续函数的性质

三. 求极限的常用方法

1. 利用极限的运算法则及函数的连续性;
2. 利用两个重要极限;
3. 利用有理化、通分、三角函数恒等变形等;
4. 利用变量代换;
5. 利用无穷小量与有界变量的乘积仍是无穷小量;
6. 利用等价无穷小替换;
7. 利用夹逼准则;
8. 利用单调有界准则;
9. 利用左右极限求分段函数极限.

四. 求极限的常用结果

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>0);$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1;$$

$$\lim_{n\to\infty}q^n=\begin{cases}+\infty, & q>1,\\ 1, & q=1,\\ 0, & |q|<1,\\ \text{不确定}, & q\le -1;\end{cases}$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\begin{cases}\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}, & Q(x_0)\neq 0,,\\ \infty, & Q(x_0)=0, P(x_0)\neq 0,\\ \text{约去公因子}, & Q(x_0)=P(x_0)=0;\end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a_0x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_k}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+a_m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & m=k,\\ 0, & m>k,\\ \infty, & m<k.\end{cases}$$

四. 判定极限不存在的常用方法

(1)利用 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x_0+0)=f(x_0-0)=A.$

(2)利用极限存在的唯一性

或 函数极限存在的充要条件是它的任何子列的极限都存在且相等.

五. 常见题型

1. 考虑函数的定义域及函数的性质

2. 计算极限

3. 函数连续性的讨论与间断点的分类

4. 利用连续性理论证明等式与根的存在性

5. 求待定参数

6. 无穷小阶的讨论

典型习题

例1 证明由$0 < x_1 < \sqrt{3}, x_{n+1} = \dfrac{3(1+x_n)}{3+x_n}$确定的数列$\{x_n\}$收敛,并求其极限.

例2 设$0 < x_1 < 3, x_{n+1} = \sqrt{x_n(3-x_n)}(n=1,2,\cdots)$,证明数列$\{x_n\}$的极限存在,并求此极限.

例3 计算极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.

例4 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2n-1}{2n})$.

例5 设$x_n = \dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot 2n-1}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot 2n}$),$n=1,2,\cdots$,求$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}$.

例6 计算极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\sin^2 x+e^x)-x}{\ln(x^2+e^{2x})-2x}$.

例7 若$\lim\limits_{x\to0}\left[1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=e^3$,求$\lim\limits_{x\to0}\left[1+\dfrac{f(x)}{x^2}\right]$.

例8试确定常数λ,μ使$\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}-\lambda x-\mu)=0$.

例9 设函数$f(x)=\frac{1}{x^3}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$,如何定义$f(0)$的值,

使得$f(x)$在点$x=0$连续.

例10 设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,且$a\le x\le b$,

证明存在$x_0\in[a,b]$使$f(x_0)=x_0$.

例1 证明由$0 < x_1 < \sqrt{3}, x_{n+1} = \dfrac{3(1+x_n)}{3+x_n}$确定的数列$\{x_n\}$收敛,并求其极限.

解 (1) $\because 0 < x_1 < \sqrt{3},$

$$0 < x_2 = \frac{3(1+x_1)}{3+x_1} = 1 + \frac{2x_1}{3+x_1} = 1 + \frac{2}{\dfrac{3}{x_1}+1} < 1 + \frac{2}{\dfrac{3}{\sqrt{3}}+1} = \sqrt{3},$$

设$0 < x_{n-1} < \sqrt{3},$

同理可证，$0 < x_n < \sqrt{3},$ 即x_n有界.

$\because 0 < x_n < \sqrt{3},$

又$x_{n+1} - x_n = \dfrac{3 - x_n^2}{3 + x_n} = \dfrac{(\sqrt{3} - x_n)(\sqrt{3} + x_n)}{3 + x_n} > 0$

$\therefore x_{n+1} > x_n$， 即x_n单调递增.

$\therefore$ 数列x_n收敛.

(2)不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$， 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3(1 + x_n)}{3 + x_n}$,

即$a = \dfrac{3(1+a)}{3+a}$， $a = \pm\sqrt{3}$,(负号舍去)

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{3}.$

例2 设$0 < x_1 < 3, x_{n+1} = \sqrt{x_n(3 - x_n)}(n = 1,2,\cdots)$,

证明数列$\{x_n\}$的极限存在,并求此极限.

解 (1)由$0 < x_1 < 3$,知$x_1, 3 - x_1$均为正数,

故$0 < x_2 = \sqrt{x_1(3 - x_1)} \le \frac{1}{2}(x_1 + 3 - x_1) = \frac{3}{2}$.

设$0 < x_k \le \frac{3}{2} \quad (k > 1)$,

则$0 < x_{k+1} = \sqrt{x_k(3 - x_k)} \le \frac{1}{2}(x_k + 3 - x_k) = \frac{3}{2}$,

由数学归纳法知,对任意正整数$n > 1$,均有$0 < x_n \le \frac{3}{2}$,

因而$\{x_n\}$有界.

$(\because 0 < x_n \le \frac{3}{2})$

又当$n>1$时,

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{x_n(3-x_n)}-x_n=\sqrt{x_n}(\sqrt{3-x_n}-\sqrt{x_n})$$

$$=\sqrt{x_n}(\sqrt{3-x_n}-\sqrt{x_n})=\frac{\sqrt{x_n}(3-2x_n)}{\sqrt{3-x_n}+\sqrt{x_n}}\ge 0$$

因而有$x_{n+1}\ge x_n(n>1)$.即$\{x_n\}$单调增加.

由单调有界数列必有极限,知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

(2)不妨设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 则$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n(3-x_n)}$,

即$a=\sqrt{a(3-a)}$, $a=\frac{3}{2}$, $\therefore \lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{3}{2}$.

例3 计算极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.

解 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$

$$=\lim_{n\to+\infty}\sin(n\pi+\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi)$$

$$=\lim_{n\to+\infty}(-1)^n\sin\pi\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$$

$$=\lim_{n\to+\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$$

$$=0.$$

$$\because \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} \quad (a>0, b>0)$$

例4 计算极限 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}\right)$.

解 $\because \sqrt{(2k-1)(2k+1)} < 2k \quad (k \geq 1)$,

$$\therefore 0 < \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{1\cdot 3}}\cdot\frac{3}{\sqrt{3\cdot 5}}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\cdot\cdots\cdot\frac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+1}} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

而 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}} = 0$, 由夹逼原理，知

故 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}\right) = 0$.

例5 设$x_n=\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot 2n-1}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot 2n}),n=1,2,\cdots,$求$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}$.

解 $\because \sqrt{(2k-1)(2k+1)}<2k \quad (k\ge 1),$

$$\therefore \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{1\cdot3}}\cdot\frac{3}{\sqrt{3\cdot5}}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\cdot\cdots\cdot\frac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+1}}=\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

又$\sqrt{(k-1)(k+1)}<k \quad (k\ge 2),$

$$\therefore \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}>\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2\cdot4}}{4}\cdot\frac{\sqrt{4\cdot6}}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{\sqrt{2(n-1)\cdot2n}}{2n}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}}\cdot\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{6}}\cdot\cdots\cdot\frac{\sqrt{2(n-1)}}{\sqrt{2n}}=\frac{1}{2\sqrt{n}}$$

$$\therefore\frac{1}{2\sqrt{n}}<\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

从而, $\sqrt[n]{\dfrac{1}{2\sqrt{n}}}<\sqrt[n]{x_n}<\sqrt[n]{\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}}$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{2\sqrt{n}}}=1,\qquad \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}}=1,$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=1.$$

例6 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin^2 x+e^x)-x}{\ln(x^2+e^{2x})-2x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin^2 x+e^x)-x}{\ln(x^2+e^{2x})-2x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln[e^x(1+e^{-x}\sin^2 x)]-x}{\ln[e^{2x}(1+e^{-2x}x^2)]-2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+e^{-x}\sin^2 x)}{\ln(1+e^{-2x}x^2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}\sin^2 x}{e^{-2x}x^2}=1.$$

例7 若 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=e^{3}$,求 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\dfrac{f(x)}{x^{2}}\right]$.

解 $\because \lim\limits_{x\to 0}\left[1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\dfrac{x^{2}+f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{x^{2}+f(x)}{x}\right]^{\frac{x}{x^{2}+f(x)}\cdot\frac{x^{2}+f(x)}{x^{2}}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^{2}+f(x)}{x^{2}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\frac{f(x)}{x^{2}}\right]}=e^{3},$$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\left[1+\dfrac{f(x)}{x^{2}}\right]=3.$

例8试确定常数λ,μ使 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}-\lambda x-\mu)=0.$

解 由 $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\left[\dfrac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x}-\lambda-\dfrac{\mu}{x}\right]=0,$

有 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x}-\lambda-\dfrac{\mu}{x}\right]=0,$

得$\lambda=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x}=\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^3}-1}=-1,$

$$\text{从而}\mu=\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}+x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}-1}+1}{\frac{1}{x}}$$

$$=-\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^3}}-1}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{3x^2}=0.$$

例9 设函数$f(x)=\frac{1}{x^3}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$,如何定义$f(0)$的值,使得$f(x)$在点$x=0$连续.

解 $\because \lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln(\frac{2+\cos x}{3})}-1}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(\frac{2+\cos x}{3})}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\frac{2+\cos x}{3})}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\frac{\cos x-1}{3})}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x-1}{3}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=-\frac{1}{6}.$$

令$f(0)=-\frac{1}{6}$, 则$f(x)$在点$x=0$连续.

例10 设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且$a \le x \le b$，证明存在$x_0 \in [a,b]$使$f(x_0) = x_0$.

证 设$F(x) = f(x) - x, \quad x \in [a,b]$，

则$F(x)$在$[a,b]$上连续，

且$F(a) = f(a) - a \ge 0, \qquad F(b) = f(b) - b \le 0$，

当$F(a) = 0$时，取$x_0 = a$； 当$F(b) = 0$时，取$x_0 = b$；

当$F(a) \cdot F(b) < 0$时，

由零点定理，至少存在一点$x_0 \in (a,b)$使得$F(x_0) = 0$；

$\therefore$ 结论成立.

自测题（第 1 章）

一. 选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处间断，则有（　　）

(A) $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处一定没有意义；

(B) $f(x_0-0)\neq f(x+0)$；(即 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$)；

(C) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在，或 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$；

(D) 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有定义，则 $x\to x_0$ 时，$f(x)-f(x_0)$ 不是无穷小

2. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=0$，其中 a，b 是常数，则（　　）

(A) $a=1,b=1,$　　(B) $a=-1,b=1$

(C) $a=1,b=-1$　　(D) $a=-1,b=-1$

3. 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，则必有（　　）

(A) $f(x)$ 为 (a,b) 内的有界函数;

(B) $f(x)$ 在 (a,b) 内必有最大值和最小值;

(C) $f(x)$ 必取得介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任何值;

(D) 若 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) > 0$， $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) < 0$，则 $f(x)=0$ 至少有一根

4. 下列函数中，在给定趋势下是无界变量且为无穷大的函数是（　　）

(A) $y = x\sin\dfrac{1}{x}(x\to\infty)$;　　(B) $y = n^{(-1)^n}\ (n\to\infty)$;

(C) $y = \ln x(x\to 0^+)$;　　(D) $y = \dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}(x\to 0)$

5. $x=0$ 是函数 $f(x) = x^5\sin\dfrac{1}{x^5}$ 的（　　）

(A) 可去间断点;　(B) 跳跃间断点;　(C) 无穷间断点;　(D) 振荡间断点

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 已知 $f(e^x-1)=x^2+1$，则 $f(x)$ 的定义域为______

2. 设 $f(x)=\dfrac{1}{x}\ln(1-x)$，要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，应补充定义 $f(0)=$___

3. 已知 $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{x^{-2}}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$___

4. 函数 $f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{x(x-1)}$ 的可去间断点为 $x_0=\underline{0}$，补充定义 $f(x_0)=$___，则函数在 x_0 处连续.

5. 在 $[a,b]$ 上连续的单调减少的函数 $f(x)$，在点 $x=\underline{a}$ 处取得最大值______；在 $x=\underline{b}$ 处取得最小值______.

三．计算下列函数极限（每小题 5 分，共 25 分）

1. 已知$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^{x}=9$，求常数$a$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x^{2}(1-\cos\sqrt{x})}{\ln(1+x)\sin^{2}x}$

3. $\lim\limits_{x \to 1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}$

4. $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}\arctan\dfrac{1}{x}$

四. (5分) 讨论 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x+x^2e^{nx}}{1+e^{nx}}$ 的连续性.

五. (7分) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)$

六．（8 分）已知数列 $a_1 = 2$，$a_2 = 2 + \frac{1}{2}$，$a_3 = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}$，……，极限存在，求此极限.

七．（8 分）设 $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x-1}}, & x > 0 \\ \ln(1+x), & -1 < x \le 0 \end{cases}$，求 $f(x)$ 的间断点，并说明间断点的所属类型

八. （7 分）已知 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+f(x)\sin x}-1}{e^{2x}-1}=3$，求极限 $\lim_{x\to 0}f(x)$.

九. (10 分) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x^2e^x}{\sqrt{1+2x^2}}, x<0,\\ \dfrac{x^2+4x-5}{2x^2-x-1}, x>1\end{cases}$，试将 $f(x)$ 的定义域扩充到 $(-\infty,+\infty)$，并使 $f(x)$ 处处连续，且在 $(0,1)$ 内的图形是关于直线 $x=\dfrac{1}{3}$ 对称的抛物线.

所以，扩充定义域后的$f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{1+x^2e^x}{\sqrt{1+2x^2}}, x<0\\ 3\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{2}{3}, 0\le x\le 1\\ \dfrac{x^2+4x-5}{2x^2-x-1}, x>1\end{cases}$

例11 设函数对于闭区间$[a,b]$上的任意两点x,y,恒有$|f(x)-f(y)|\le L|x-y|$,其中$L>0$为常数,且$f(a)\cdot f(b)<0$证明至少存在一点$\xi\in(a,b)$使得$f(\xi)=0$.

证 $\forall x_0\in(a,b)$, $\forall\varepsilon>0$, 取$\delta=\min\{\frac{\varepsilon}{L},x_0-a,b-x_0\}$,

则当$|x-x_0|<\delta$时, 由已知条件有

$|f(x)-f(x_0)|\le L|x-x_0|\le\varepsilon$, 所以$f(x)$在$x_0$连续,

由$x_0\in(a,b)$的任意性知, $f(x)$在(a,b)内连续.

当$x_0=a$或$x_0=b$时, 取$\delta=\frac{\varepsilon}{L}$,

则$x \in [a, a+\delta)$或$x \in (b-\delta, b]$时,

就有$|f(x) - f(x_0)| \le L|x - x_0| \le \varepsilon$,

从而$f(x)$在$x = a$右连续, 在$x = b$左连续,

从而$f(x)$在$[a,b]$上连续.

由已知有$f(a) \cdot f(b) < 0$,

所以由零点定理知, $\exists \xi \in (a,b)$, 使$f(\xi) = 0$.

例12 设$f(x)=\begin{cases} x, x\in Q, \\ 0, x\in Q^c, \end{cases}$ 证明:

(1) $f(x)$在点$x=0$连续;(2) $f(x)$在非零的点x都不连续.

证 (1)$\forall\varepsilon>0$, 取$\delta=\varepsilon$, 则当$|x-0|=|x|<\delta$时,

$$|f(x)-f(0)|=|f(x)|\le|x|<\varepsilon,$$

故$\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$, 即$f(x)$在$x=0$连续.

(2) $\forall x_0 \neq 0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 不连续. 事实上,

若 $x_0 = r \neq 0, r \in Q$, 则 $f(x_0) = f(r) = r$.

分别取一有理数列 $\{r_n\}: r_n \to r (n \to \infty), r_n \neq r$,

取一无理数列 $\{s_n\}: s_n \to r (n \to \infty)$,

则 $\lim\limits_{n \to \infty} f(r_n) = \lim\limits_{n \to \infty} r_n = r$, $\lim\limits_{n \to \infty} f(s_n) = \lim\limits_{n \to \infty} 0 = 0$,

而 $r \neq 0$, 由函数极限与数列极限的关系知 $\lim\limits_{x \to r} f(x)$ 不存在,

故 $f(x)$ 在 r 处不连续.

若$x_0 = s, s \in Q^c$， 则$f(x_0) = f(s) = 0.$

分别取一有理数列$\{u_n\}: u_n \to s(n \to \infty)$,

取一无理数列$\{v_n\}: v_n \to s(n \to \infty), v_n \neq s$

则$\lim\limits_{n\to\infty} f(u_n) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n = s,\ \lim\limits_{n\to\infty} f(v_n) = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0,$

由函数极限与数列极限的关系知$\lim\limits_{x\to s} f(x)$不存在,

故$f(x)$在s处不连续.