高等数学A

第3章 一元函数积分学

3.1 不定积分

3.1.1 原函数与不定积分的概念
3.1.2 不定积分的性质
3.1.3 基本积分表

中南大学开放式精品示范课堂高等数学建设组

3.1 不定积分

不定积分的概念与性质

- 3.1.1 原函数的概念
  - 问题
  - 原函数的定义
  - 原函数的存在性
- 3.1.2 不定积分的概念
  - 定义
  - 不定积分的几何意义
- 3.1.3 基本积分表
- 3.1.2 不定积分的性质
- 求积分习例2-14
- 思考题---分段函数的不定积分

一、原函数的概念

1. 问题

(1)已知速度$v(t)$,求路程$s(t)$.

即 $s'(t)=v(t)$(已知),求$s(t)$.

(2)已知曲线上每一点处的切线斜率$k(x)$,求曲线$y=f(x)$.

即 $y'=k(x)$(已知),求$y=f(x)$.

2. 原函数的定义

若在I内, $F'(x)=f(x)$或$dF(x)=f(x)dx$,

则称$F(x)$为$f(x)$在I内的一个原函数.

如 $(\sin x)'=\cos x$, $\sin x$是$\cos x$的原函数.

$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}\ (x>0)$, $\ln x$是$\dfrac{1}{x}$在区间$(0,+\infty)$内的原函数.

3. 原函数的存在性

定理1. 若函数$f(x)$在区间I上连续, 则$f(x)$在I上存在原函数$F(x)$.

问题： (1) 原函数是否唯一？

(2) 若不唯一,它们之间有什么联系？

如 $(\sin x)' = \cos x$ $\quad$ $(\sin x + C)' = \cos x$

（C为任意常数）

定理2. 设$F(x)$是$f(x)$在区间I内的一个原函数, 则

(1) $F(x)+C$也是$f(x)$的一个原函数,其中C为任意常数;

(2) 若$\Phi(x)$是$f(x)$的一个原函数,则$\Phi(x)=F(x)+C$.

证明: (1) $\because [F(x)+C]'=F'(x)=f(x)$,

$\therefore F(x)+C$ 是$f(x)$的一个原函数.

(2) $\because [\Phi(x)-F(x)]'=\Phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$

$\therefore \quad \Phi(x)-F(x)=C$

即 $\Phi(x)=F(x)+C \quad$ (C为任意常数).

注意:

(1) 初等函数在其定义区间上都有原函数.

(2) 初等函数的原函数不一定是初等函数.

(3) 原函数不唯一.

如$\frac{1}{2}\sin^2 x, -\frac{1}{2}\cos^2 x, -\frac{1}{4}\cos 2x$都是$(\sin x\cos x)$的原函数.

(4) 如果 $f(x)$ 在 I 上存在原函数,则称$f(x)$在 I 上可积.

二、不定积分的概念

1. 定义 函数$f(x)$在区间I上的原函数全体, 称为$f(x)$在I上的不定积分. 记为

$$\int f(x)dx$$

$$\boxed{\int}\ \boxed{f(x)dx} = F(x) + \boxed{C}$$

积分号

被积函数

被积表达式

积分变量

任意常数

习惯上，称求已知函数 $f(x)$ 的全部原函数的过程，为求函数 $f(x)$ 的不定积分.

求不定积分是求导的逆运算.

例如：

$$(x^2)' = 2x, \qquad \int 2x\,dx = x^2 + C;$$

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C;$$

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}, \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C.$$

每一个求导公式，反过来就是一个求原函数的公式，加上积分常数C就成为一个求不定积分的公式.

注意: (1) 尽管不定积分中各个部分都有其独特的含义，但在使用时须作为一个整体看待.

(2) 积分变量是指d后面的那个量.

如$\int f(u)du$中u为积分变量,比较$\int u^x dx$与$\int u^x du$.

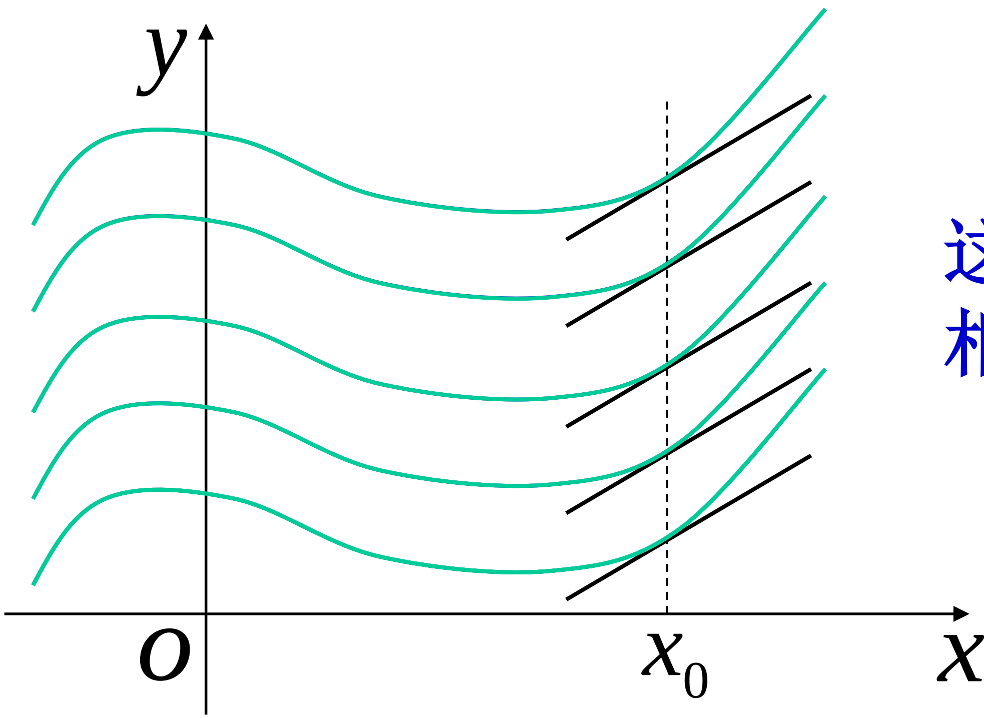
(3) 不定积分与原函数是两个不同的概念，它们是整体 与个体的关系，原函数是一个函数，不定积分是一族函数.

(4) 若$F'(x)=f(x)$,则$\int f(x)dx=F(x)+C$.

2.不定积分的几何意义

若$F(x)$是$f(x)$的一个原函数,则称$y=F(x)$的图形为$f(x)$的一条积分曲线.

则$\int f(x)dx$表示$f(x)$的某一条积分曲线沿着纵轴方向任意地平行移动所得到的所有积分曲线组成的曲线族.



这些曲线在横坐标相同处切线平行.

例1. 设曲线通过点（1，2），且其上任一点处的切线斜率等于这点横坐标的两倍，求此曲线方程.

解: 设曲线方程为 $y = f(x)$,

根据题意知 $\dfrac{dy}{dx} = 2x$,

即 $f(x)$ 是 $2x$ 的一个原函数.

$\because \int 2x dx = x^2 + C$, $\quad \therefore f(x) = x^2 + C$,

由曲线通过点（1，2）$\Rightarrow C = 1$,

所求曲线方程为 $y = x^2 + 1$.

三、基本积分表

(1) $\int k dx = kx + C \quad (k\text{是常数});$

(2) $\int x^{\mu} dx = \dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1);$

特别地, $\int x dx = \dfrac{x^2}{2} + C \quad \int \dfrac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$

$\int \dfrac{1}{x^2} dx = -\dfrac{1}{x} + C$

(3) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C;$

(4) $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C;$

(5) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C;$

(6) $\int \cos x dx = \sin x + C;$

(7) $\int \sin x dx = -\cos x + C;$

(8) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x dx = \tan x + C;$

(9) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C;$

(10) $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C;$

(11) $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C;$

(12) $\int e^x dx = e^x + C;$

(13) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$

(14) $\int \sinh x dx = \cosh x + C;$

(15) $\int \cosh x dx = \sinh x + C;$

(16) $\int 0 dx = C.$

四、不定积分的性质

不定积分的基本性质：

(1) $\dfrac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right] = f(x)$, 或 $d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx$,

(2) $\int F'(x)dx = F(x) + C$, 或 $\int dF(x) = F(x) + C$.

(3) $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$;

证明: $\because \left[\int f(x)dx \pm \int g(x)dx\right]'$

$$= \left[\int f(x)dx\right]' \pm \left[\int g(x)dx\right]' = f(x) \pm g(x).$$

故结论正确.

(4) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$ (k为任意常数)

(5) $\int \sum_{i=1}^{n} k_i f_i(x)dx = \sum_{i=1}^{n} k_i \int f_i(x)dx.$

性质(1)(2)说明微分运算与求不定积分的运算是**互逆**的.

性质(3)可推广到有限多个函数之和的情况.

练习1. $d\int d\int d\int f(x)dx = (\quad f(x)dx \quad)$

练习2.

设$\int xf(x)dx = \arccos x + C$,则$f(x) = (\qquad)$

五、求不定积分习例---直接积分法

例2. 计算 $\int \sqrt{x}(x^2-5)dx$ 例3. $\int (10^x \cdot 3^{2x} + 3\sin x + \sqrt{x})dx$

例4. 计算 $\int \frac{(2x\sqrt{x} - x + 3\sqrt{x})\sqrt{x}}{x^2}dx$ 例5 $\int (2^x - 3^x)^2 dx$

例6. $\int (\frac{3}{1+x^2} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}})dx$ 例7. 计算 $\int \frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)}dx$

例8. 计算 $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx$ 例9. 计算 $\int \frac{x^4+1}{x^2+1}dx.$

例10. $\int \sec x(\sec x - \tan x)dx$ 例11. $\int \cot^2 x dx.$

例12. 计算 $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x}dx$ 例13. $\int \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}}dx$

例14 $\int \frac{1}{1+\cos 2x}dx.$

例2. 计算 $\int \sqrt{x}(x^2-5)dx.$

解: $\int \sqrt{x}(x^2-5)dx = \int (x^{\frac{5}{2}} - 5x^{\frac{1}{2}})dx$

根据积分公式（2）$\int x^{\mu}dx = \dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C$

$= \int x^{\frac{5}{2}}dx - 5\int x^{\frac{1}{2}}dx$

$= \dfrac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - \dfrac{10}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$

例3. 计算 $\int (10^x \cdot 3^{2x} + 3\sin x + \sqrt{x})dx.$

解: $\int (10^x \cdot 3^{2x} + 3\sin x + \sqrt{x})dx$

$$= \int 90^x dx + 3\int \sin x dx + \int \sqrt{x} dx$$

$$= \frac{90^x}{\ln 90} - 3\cos x + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$

例4. 计算 $\int \frac{(2x\sqrt{x}-x+3\sqrt{x})\sqrt{x}}{x^2}dx.$

解: $\int \frac{(2x\sqrt{x}-x+3\sqrt{x})\sqrt{x}}{x^2}dx$

$$=\int (2-x^{-\frac{1}{2}}+\frac{3}{x})dx$$

$$=2x-2\sqrt{x}+3\ln|x|+C$$

例5. 计算 $\int (2^x - 3^x)^2 dx.$

解: $\int (2^x - 3^x)^2 dx = \int (4^x - 2\cdot 6^x + 9^x) dx$

$$= \frac{4^x}{\ln 4} - 2\cdot\frac{6^x}{\ln 6} + \frac{9^x}{\ln 9} + C$$

下面几个例子是对有理函数的不定积分，可用的公式为

(3) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$ (4) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C;$

例6. 计算 $\int\left(\frac{3}{1+x^2}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx.$

解: $\int\left(\frac{3}{1+x^2}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$

$$=3\int\frac{1}{1+x^2}dx-2\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=3\arctan x-2\arcsin x+C$$

例7. 计算 $\int \frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)}dx.$

分式化成最简真分式的代数和

解: $\int \frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)}dx = \int \frac{x+(1+x^2)}{x(1+x^2)}dx$

$= \int \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{x} \right) dx = \int \frac{1}{1+x^2} dx + \int \frac{1}{x} dx$

$= \arctan x + \ln|x| + C.$

例8. 计算 $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx.$

分式化成最简真分式的代数和

解: $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx = \int \frac{1+x^2+x^2}{x^2(1+x^2)}dx$

$$= \int \frac{1}{x^2}dx + \int \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= -\frac{1}{x} + \arctan x + C.$$

假分式
化成多项式
加真分式

例9. 计算 $\int \frac{x^4+1}{x^2+1}dx.$

解: $\int \frac{x^4+1}{x^2+1}dx = \int \frac{x^4+x^2-x^2-1+2}{x^2+1}dx$

$$= \int \left(x^2-1+\frac{2}{x^2+1}\right)dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - x + 2\arctan x + C.$$

以下几例中的被积函数都含有三角函数，需要对被积函数进行恒等变形，才能使用基本积分表,可用的积分公式为

(6) $\int \cos x dx = \sin x + C;$

(7) $\int \sin x dx = -\cos x + C;$

(8) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x dx$
$= \tan x + C;$

(9) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x dx$
$= -\cot x + C;$

(10) $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C;$

(11) $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C;$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1;$

$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x;$

$cot^2 x + 1 = \csc^2 x;$

$\sin 2x = 2\sin x \cos x;$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x;$

$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{\cos x - 1}{2}$

例10. 计算 $\int \sec x(\sec x - \tan x)dx$.

解: $\int \sec x(\sec x - \tan x)dx$

$= \int (\sec^2 x - \sec x \tan x)dx$

$= \tan x - \sec x + C$

例11. 计算 $\int \cot^2 x dx$.

解: $\int \cot^2 x dx = \int (\csc^2 x - 1)dx$

$= -\cot x - x + C$.

例12. 计算 $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx.$

解: $$\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$$

$$= \int (\csc^2 x - \sec^2 x) dx$$

$$= -\cot x - \tan x + C.$$

例13. 计算$\int \frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}dx.$

解:
$$\int \frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}dx = \int \frac{4}{\sin^2 x}dx$$

$$= 4\int \csc^2 x dx$$

$$= -4\cot x + C.$$

例14. 计算 $\int \frac{1}{1+\cos 2x} dx.$

解: $$\int \frac{1}{1+\cos 2x} dx = \int \frac{1}{1+2\cos^2 x - 1} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{2}\tan x + C.$$

说明: 被积函数为三角函数时需要进行三角恒等变形，才能使用基本积分表.

思考题----分段函数的不定积分的求法

1. 先求各分段部分在相应区间内的原函数

2. 考察在分界点处函数的连续性

例15. 设$f(x)=\begin{cases} x+1, x\le 1 \\ 2x, \ x>1 \end{cases}$，求$F(x)=\int f(x)dx$

例16. 求 $\int e^{-|x|}\,\mathrm{d}x$.

例15. 设$f(x)=\begin{cases} x+1, x\le 1 \\ 2x, \ x>1 \end{cases}$，求$F(x)=\int f(x)dx$

解: $x<1$时，$F(x)=\int (x+1)dx=\frac{1}{2}x^2+x+C_1$

$x>1$时，$F(x)=\int 2xdx=x^2+C_2$

又函数可导必连续，知$F(x)$在$x=1$处有定义且连续

从而有，$F(1+0)=F(1-0)=F(1)$

即：$\frac{1}{2}+1+C_1=1+C_2 \Rightarrow \frac{1}{2}+C_1=C_2$

令$C_1=C$，则$C_2=\frac{1}{2}+C$

所以

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^2+x+C, & x\le 1\\ x^2+\dfrac{1}{2}+C, & x>1\end{cases}$$

例16. 求 $\int e^{-|x|}\,\mathrm{d}x$.

解: 当 $x>0$ 时, $\int e^{-|x|}\,\mathrm{d}x=\int e^{-x}\,\mathrm{d}x=-e^{-x}+C_1$,

当$x<0$时, $\int e^{-|x|}\,\mathrm{d}x=\int e^{x}\,\mathrm{d}x=e^{x}+C_2$,

由于一个函数的原函数必是连续函数, 故

$$\lim_{x\to0^+}(-e^{-x}+C_1)=\lim_{x\to0^-}(e^{x}+C_2),$$

即有 $C_1=C_2+2$, 从而

$$\int e^{-|x|}\,\mathrm{d}x=\begin{cases}-e^{-x}+2+C, & x\ge0,\\ e^{x}+C, & x<0.\end{cases}\quad (C\text{为积分常数.})$$