5.5 反常积分

一、选择题：

1.下列反常积分中收敛的是（　　）.

（A）$\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x\mathrm{d}x$　　（B）$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$　　（C）$\int_{-1}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$　　（D）$\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x$

解：由反常积分的定义可得（C）成立.

2. 反常积分$\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{-kx}\mathrm{d}x$收敛时，$k$应满足（　　）.

（A）$k>0$　　（B）$k\geq 0$　　（C）$k<0$　　（D）$k\leq 0$

解：当$k\neq 0$时，$\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{-kx}\mathrm{d}x=\lim\limits_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\mathrm{e}^{-kx}\mathrm{d}x=\lim\limits_{a\to-\infty}(-\frac{1}{k}\mathrm{e}^{-kx})\Big|_{a}^{0}=\lim\limits_{a\to-\infty}(-\frac{1}{k}+\frac{1}{k\mathrm{e}^{ka}})$，

当$k>0$时，$\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{-kx}\mathrm{d}x=+\infty$，当$k<0$时，$\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{-kx}\mathrm{d}x=-\frac{1}{k}$，

当$k=0$时，$\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{-kx}\mathrm{d}x=\lim\limits_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\mathrm{d}x=\lim\limits_{a\to-\infty}x\Big|_{a}^{0}=\lim\limits_{a\to-\infty}(-a)=+\infty$，故应选（C）.

3．下列广义积分收敛的是（　　）．

（A）$\int_e^{+\infty}\frac{\ln x}{x}dx$　（B）$\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx$　（C）$\int_e^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^2}dx$　（D）$\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

解：$$\int_e^{+\infty}\frac{\ln x}{x}dx=\int_e^{+\infty}\ln x d\ln x=\frac{1}{2}\ln^2 x\Big|_e^{+\infty}=\infty;$$

$$\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx=\int_e^{+\infty}\frac{1}{\ln x}d\ln x=\ln\ln x\Big|_e^{+\infty}=\infty;$$

$$\int_e^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^2}dx=\int_e^{+\infty}\frac{1}{(\ln x)^2}d\ln x=-\frac{1}{\ln x}\Big|_e^{+\infty}=1;$$

$$\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}dx=\int_e^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\ln x}}d\ln x=2\sqrt{\ln x}\Big|_e^{+\infty}=\infty.$$

故选(C).

二、计算下列广义积分

1. $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2-x}}$；

解：$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2-x}}=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^2}=\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{1}{e}\arctan\frac{e^x}{e}\Big|_1^b$

$$=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{e}(\arctan\frac{e^b}{e}-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{e}(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{4e}.$$

2. $\int_0^{+\infty}\frac{x}{(1+x)^3}\mathrm{d}x$；

解：原式$=\int_0^{+\infty}\frac{x+1-1}{(1+x)^3}dx=\int_0^{+\infty}[\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{(1+x)^3}]dx=[-\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2(1+x)^2}]_0^{+\infty}=\frac{1}{2}.$

3. $\int_{3}^{+\infty}\frac{dx}{(x-1)^{4}\sqrt{x^{2}-2x}}$

解： 令 $x-1=\sec\theta$， 则 $dx=\sec\theta\tan\theta\,d\theta$，

$$原式=\int_{3}^{+\infty}\frac{dx}{(x-1)^{4}\cdot\sqrt{(x-1)^{2}-1}}=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec\theta\tan\theta}{\sec^{4}\theta\tan\theta}d\theta=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^{2}\theta)\cos\theta d\theta=\frac{2}{3}-\frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

4. $\int_{0}^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^{2}}dx$；

解： $原式=\int_{0}^{1}\frac{\ln x}{1+x^{2}}dx+\int_{1}^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^{2}}dx$，

$$因为\int_{1}^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^{2}}dx\overset{x=\frac{1}{t}}{=\!=\!=}\int_{1}^{0}\frac{\ln\frac{1}{t}}{1+\frac{1}{t^{2}}}\left(-\frac{1}{t^{2}}dt\right)=\int_{1}^{0}\frac{\ln t}{1+t^{2}}dt=-\int_{0}^{1}\frac{\ln x}{1+x^{2}}dx,$$

所以， $原式=\int_{0}^{1}\frac{\ln x}{1+x^{2}}dx-\int_{0}^{1}\frac{\ln x}{1+x^{2}}dx=0.$

5. $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{|x-x^2|}}$；

解：原式 $= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} + \int_{1}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x^2-x}} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}} + \int_{1}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}}$

$$= \arcsin(2x-1)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} + \ln\left((x-\frac{1}{2})+\sqrt{x^2-x}\right)\Big|_{1}^{\frac{3}{2}}.$$

$$= \frac{\pi}{2}+\ln(2+\sqrt{3})$$

6. $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(2-x)\sqrt{1-x}}$.

解：令 $u=\sqrt{1-x}$，则 $x=1-u^2$，

原式$=\int_1^0 \frac{-2u\mathrm{d}u}{(1+u^2)u}=2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}=2\arctan u\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}$.

三、已知$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=\int_a^{+\infty}4x^2e^{-2x}\mathrm{d}x$，求常数$a$.

解：左边 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2a}{x+a}\right)^x=e^{-2a}$，

右边 $=-2\int_a^{+\infty}x^2d(e^{-2x})=-2x^2e^{-2x}\Big|_a^{+\infty}+4\int_a^{+\infty}xe^{-2x}dx=2a^2e^{-2a}-2\int_a^{+\infty}xd(e^{-2x})$

$=2a^2e^{-2a}-2xe^{-2x}\Big|_a^{+\infty}+2\int_a^{+\infty}e^{-2x}dx=2a^2e^{-2a}+2ae^{-2a}+e^{-2a}$,

有 $e^{-2a}=2a^2e^{-2a}+2ae^{-2a}+e^{-2a}\quad\Rightarrow\quad a=0$,或 $a=-1$.

四、证明: $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

证：令 $x=\frac{1}{t}$，则 $dx=-\frac{1}{t^2}dt$

有 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^4}dx=\int_{+\infty}^{0}\frac{-\frac{1}{t^2}dt}{1+\frac{1}{t^4}}=\int_{+\infty}^{0}\frac{-t^2}{1+t^4}dt=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx$,

令 $I=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^4}dx$，

$$2I=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^4}dx+\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx=\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx=\int_0^{+\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{\pi}{\sqrt{2}},$$

从而可得， $I=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

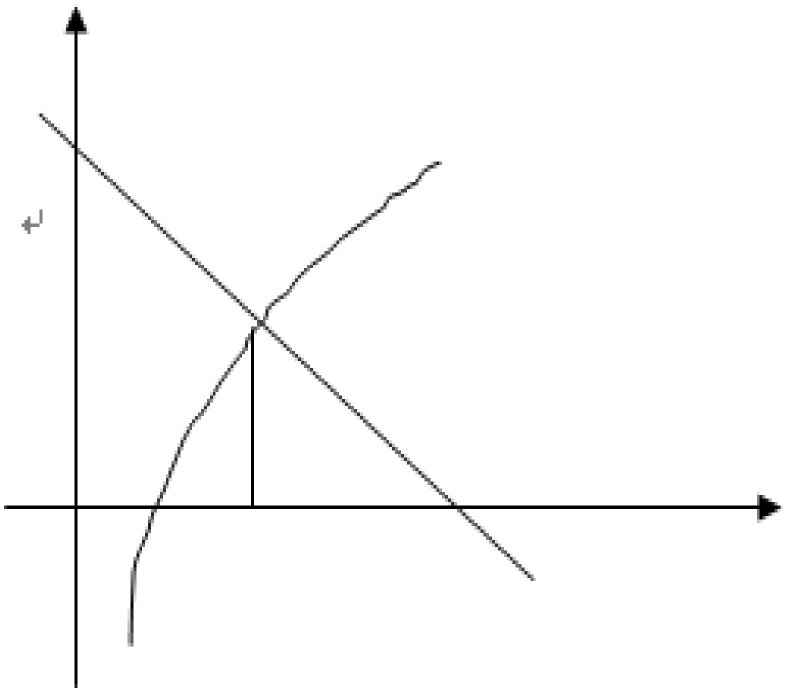
5.6 定积分的几何应用

一、填空题：

1. 曲线 $y=\ln x$ 与两直线 $y=(e+1)-x$ 及 $y=0$ 所围成的平面图形的面积为________.

解：由 $y=\ln x$ 及 $y=(e+1)-x$ 求出交点 $A(e,1)$，所以

$$S=\int_1^e \ln x dx+\int_e^{e+1}[(e+1)-x]dx=\frac{3}{2}.$$



解 2：$S=\int_0^1[(e+1-y)-e^y]dy$

$$=(e+1)-\frac{1}{2}-(e-1)=\frac{3}{2}$$

2. 星形线 $x = a\cos^3 t$，$y = a\sin^3 t$ 的全长为____________.

解：利用对称性，$S = 4S_1 = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a\cos t\sin t\,dt = 6a$.

3. 心形线 $r = a(1+\cos\theta)$ 的全长为____________.

解：$S = 2S_1 = 2\int_0^{\pi} \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\,d\theta = 2\sqrt{2}a\int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos\theta}\,d\theta = 4a\int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = 8a$.

4. 设平面区域 D 由曲线 $y = \sin x + 1$ 与三直线 $x = 0$，$x = \pi$, $y = 0$ 围成，则 D 绕 ox 轴旋转一周所得旋转体体积为____________.

解：$V = \int_0^{\pi} \pi y^2\,dx = \pi\int_0^{\pi} (\sin x + 1)^2\,dx = \pi(4 + \frac{3\pi}{2})$.

二、求双纽线 $r^2 = a^2\cos 2\theta$ 所围成且在 $r = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ 内的图形面积.

解：由 $r^2 = a^2\cos 2\theta$ 及 $r = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ 求得 $\theta = \dfrac{\pi}{6}$.

$$A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{a^2}{4} d\theta + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{a^2\cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{a^2}{4}\left(\frac{\pi}{6} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)，而 A = 4A_1 = a^2\left(\frac{\pi}{6} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

三、问 k 为何值时，由曲线 $y = x^2$，直线 $y = kx (0 < k < 2)$ 及 $x = 2$ 围成的平面图形面积最小？

解： $y = x^2$ 与 $y = kx$ 的交点坐标为 $(0,0),(k,k^2)$，所围图形面积为

$$A = \int_0^k (kx - x^2)dx + \int_k^2 (x^2 - kx)dx = \frac{1}{3}k^3 - 2k + \frac{8}{3},$$

$A' = k^2 - 2$， $A'' = 2k$.

令 $A' = k^2 - 2 = 0$，解得 $k = \pm\sqrt{2}$ ($k = -\sqrt{2}$ 舍去)，且 $A''(\sqrt{2}) > 0$，所以， $k = \sqrt{2}$ 时， A 有最小值.

四、求位于曲线 $y=e^{x}$ 下方，该曲线过原点的切线的左方以及 x 轴上方之间的图形的面积.

解：可求得切线方程为 $y=ex$,

故所求面积为 $S=\int_{-\infty}^{0}e^{x}dx+\int_{0}^{1}(-ex+e^{x})dx=e^{x}\Big|_{-\infty}^{0}+e^{x}\Big|_{0}^{1}-\frac{1}{2}ex^{2}\Big|_{0}^{1}=\frac{e}{2}$.

五、求曲线 $y=x^2-2x$，$y=0$，$x=1$，$x=3$ 所围成的平面图形的面积 S，并求该平面图形绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积 V.

解：设位于 x 轴下方的面积为 S_1，位于 x 轴上方的面积为 S_2，则

$$S_1=\int_1^2(2x-x^2)dx=(x^2-\frac{1}{3}x^3)\Big|_1^2=\frac{2}{3},$$

$$S_2=\int_2^3(x^2-2x)dx=(\frac{1}{3}x^3-x^2)\Big|_2^3=\frac{4}{3},$$

故所求图形的面积 $S=S_1+S_2=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=2$.

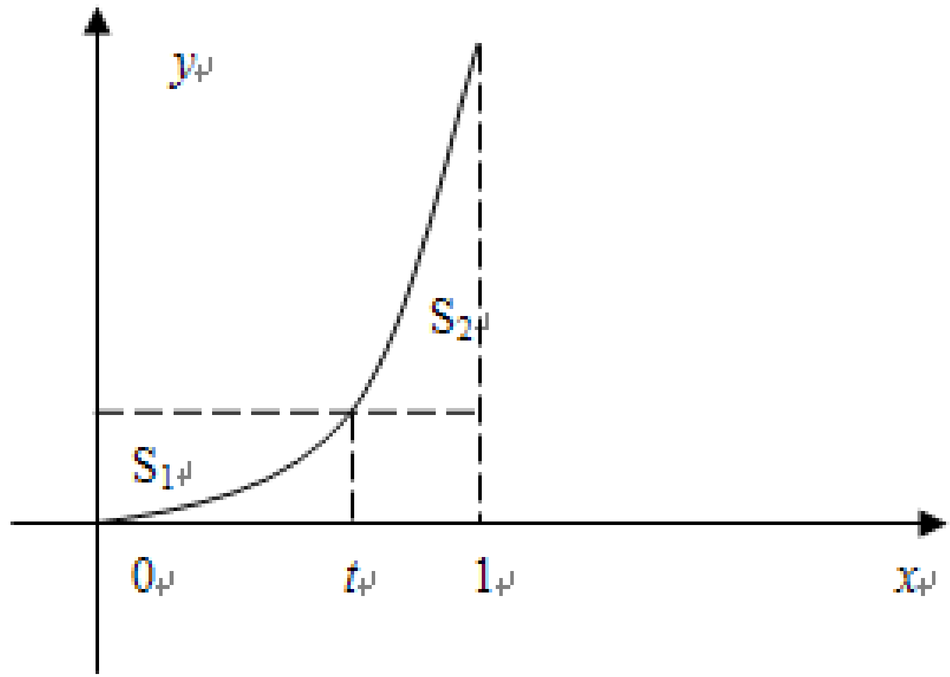
平面图形 S_1 绕 y 轴旋转一周所得旋转体体积为

$$V_1=\int_1^2 2\pi x\,|x^2-2x|\,dx=\int_1^2 2\pi x(2x-x^2)dx=\frac{11}{6}\pi,$$

平面图形 S_2 绕 y 轴旋转一周所得旋转体体积为 $V_2=\int_2^3 2\pi x(x^2-2x)dx=\frac{43}{6}\pi$，

故所求旋转体体积为 $V=V_1+V_2=\frac{11}{6}\pi+\frac{43}{6}\pi=9\pi$.

六、在闭区间 [0,1] 上给定函数 $y = x^2$，点 t 在什么位置时，面积 S_1 和 S_2 之和分别具有最大值和最小值？



解：$S_1 = \int_0^t (t^2 - x^2)dx = \frac{2}{3}t^3$，

$S_2 = \int_t^1 (x^2 - t^2)dx = \frac{1}{3} - t^2 + \frac{2}{3}t^3$，

令 $(S_1 + S_2)_t' = 0$，即 $4t^2 - 2t = 0$，

解得 $t_1 = 0, t_2 = \frac{1}{2}$. 又 $S_1(0) + S_2(0) = \frac{1}{3}$，$S_1(\frac{1}{2}) + S_2(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$，$S_1(1) + S_2(1) = \frac{2}{3}$，

故当 $t = 1$ 时，$\max(S_1 + S_2) = \frac{2}{3}$；当 $t = \frac{1}{2}$ 时，$\min(S_1 + S_2) = \frac{1}{4}$.

自测题(第 5 章)

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）：

1. 设 $f(x)$ 是连续函数，且 $\int_0^{x^3-1} f(t)dt = x$，则 $f(7) =$ ________________.

解：两边对 x 求导得 $3x^2 f(x^3-1) = 1$，令 $x^3-1=7$，得 $x=2$，所以 $f(7) = \left.\dfrac{1}{3x^2}\right|_{x=2} = \dfrac{1}{12}$.

2. 设 $f(x) = x^2 + e^{-x}\int_0^1 f(x)dx$,则$f(x) =$ ____________________.

解：令 $a = \int_0^1 f(x)dx$，则 $f(x) = x^2 + ae^{-x}$，

从而 $a = \int_0^1 (x^2+ae^{-x})dx = \left.\left(\dfrac{x^3}{3} - ae^{-x}\right)\right|_0^1 = \dfrac{1}{3} - a(e^{-1}-1)$，

解得 $a = \dfrac{e}{3}$，于是 $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{3}e^{1-x}$.

3. $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{xe^{\cos x}+x^2\sin^3 x+1}{1+|x|}dx=$ ________________.

解：在$[-\pi,\pi]$上，$\frac{xe^{\cos x}}{1+|x|}$与$\frac{x^2\sin^3 x}{1+|x|}$都是奇函数，而$\frac{1}{1+|x|}$是偶函数，由奇偶函数在对称区间上的定积分性质有，原式$=2\int_0^{\pi}\frac{1}{1+x}dx=2\ln(1+x)\Big|_0^{\pi}=2\ln(1+\pi)$.

4. 曲线$y=\int_{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{x}\cos t^2dt$在点$(\frac{\sqrt{\pi}}{2},0)$处的法线方程为 ________________.

解：因为$\frac{dy}{dx}=\cos x^2$，则$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所对应的法线方程为$y-0=-\sqrt{2}(x-\frac{\sqrt{\pi}}{2})$，即$\sqrt{2}x+y=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

5. 在区间$[0,\pi]$上曲线$y=\cos x, y=\sin x$之间所围图形的面积为________.

解： $A=\int_0^{\pi}\left|\cos x-\sin x\right|dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}(\sin x-\cos x)dx$

$=(\sin x+\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+(-\cos x-\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}=\sqrt{2}-1+1+\sqrt{2}=2\sqrt{2}.$

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）：

1. 设$f(x)$是连续函数,且$F(x)=\int_{x}^{e^{-x}} f(t)dt$,则$F'(x)=$（　　）.

（A）$-e^{-x}f(e^{-x})-f(x)$　　（B）$-e^{-x}f(e^{-x})+f(x)$

（C）$e^{-x}f(e^{-x})-f(x)$　　（D）$e^{-x}f(e^{-x})+f(x)$

解：由积分上限函数的导数可得 $F'(x)=-e^{-x}f(e^{-x})-f(x)$，故选（A）.

2. 设$f(x)$是以T为周期的连续函数,则$I=\int_{a}^{a+T} f(x)dx$的值（　　）.

（A）依赖于a,T　　（B）依赖于a,T和x

（C）依赖于T,x，不依赖于a　　（D）依赖于T，不依赖于a

解：根据周期函数定积分的性质有$\int_{l}^{l+T} f(x)dx=\int_{0}^{T} f(x)dx$,故应选$(D)$.

3. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$ 的值为（　　）.

（A）0　　（B）1　　（C）ln2　　（D）不存在

解：原式$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2$，故选（$C$）.

4. 曲线 $y=\sin^{\frac{3}{2}}x\ (0\le x\le\pi)$ 与 x 轴围成的图形绕 x 轴旋转所成的旋转体的体积为（　　）.

（A）$\frac{4}{3}$　　（B）$\frac{4}{3}\pi$　　（C）$\frac{2}{3}\pi^2$　　（D）$\frac{2}{3}\pi$

解：所求旋转体的体积为

$$V=\int_0^{\pi}\pi y^2dx=\pi\int_0^{\pi}\sin^3 x dx=-\pi\int_0^{\pi}(1-\cos^2 x)d\cos x=-\pi[\cos x-\frac{\cos^3 x}{3}]_0^{\pi}=\frac{4}{3}\pi.$$

故应选(B).

5. 设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 x dx$，$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x+\cos^4 x)dx$，

$P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3 x-\cos^4 x)dx$，则有（　　）.

（A）$N<P<M$　　（B）$M<P<N$

（C）$N<M<P$　　（D）$P<M<N$

解：利用定积分的奇偶性质知 $M=0$，$N=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x dx>0$，$P=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x dx<0$，所以 $P<M<N$，故选（D）.

三、解答下列各题（每小题 6 分，共 30 分）：

1. 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \ln(\cos t)dt}{x^3}$；

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\tan x}{6x}=-\frac{1}{6}$.

2. 计算 $\int_0^{\pi} x e^{\sin x}|\cos x|\,dx$；

解：原式 $=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}\cos x dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} d\sin x=\pi e^{\sin x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi(e-1)$.

3. 设$x \geq -1$, 求$\int_{-1}^{x}(1-|t|)dt$；

解：当$-1 \leq x \leq 0$时，$F(x)=\int_{-1}^{x}(1-|t|)dt=\int_{-1}^{x}(1-t)dt=\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}$，

当$x>0$时，$F(x)=\int_{-1}^{0}(1+t)dt+\int_{0}^{x}(1-t)dt=-\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}$.

$$从而F(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}, & -1 \leq x \leq 0, \\ -\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}, & x>0.\end{cases}$$

4. 计算 $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}\mathrm{d}x$；

解：原式 $=-\int_1^{+\infty}\arctan x\mathrm{d}(\frac{1}{x})=-\frac{1}{x}\arctan x\Big|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x$

$$=\frac{\pi}{4}+\lim_{b\to+\infty}\int_1^{b}(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2})\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}+\lim_{b\to+\infty}[\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)]_1^{b}$$

$$=\frac{\pi}{4}+\lim_{b\to+\infty}\ln\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{1}{2}\ln 2=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2.$$

5. 求曲线 $y=|\ln x|$，直线 $x=\frac{1}{e}$，$x=e$ 和 x 轴所围图形的面积.

解：所求图形的面积为

$$A=\int_{e^{-1}}^{1}-\ln x dx+\int_1^{e}\ln x dx=-[x\ln x-x]_{e^{-1}}^{1}+[x\ln x-x]_1^{e}=2(1-e^{-1}).$$

四、已知 $f(x)$ 连续，试证 $\int_0^{2a} f(x)dx = \int_0^a [f(x)+f(2a-x)]dx$，并由此计算 $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

解：因为 $\int_0^{2a} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_a^{2a} f(x)dx$，

上式右端第二项中令 $x = 2a - t$，则

$$\int_a^{2a} f(x)dx = -\int_a^0 f(2a-t)dt = \int_0^a f(2a-t)dt = \int_0^a f(2a-x)dx,$$

所以 $\int_0^{2a} f(x)dx = \int_0^a [f(x)+f(2a-x)]dx$.

从而，$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x} + \frac{(\pi-x)\sin(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)}]dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi\sin x}{1+\cos^2 x}dx = -\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\cos x}{1+\cos^2 x} = -\pi\arctan(\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}.$$

五、（8 分）已知 $f(x)$ 连续， $F(x)=\int_0^x tf(x-2t)dt$,求$F''(0)$．

解： $F(x)\overset{u=x-2t}{\underset{t=\frac{x-u}{2}}{=\!=\!=\!=\!=}}\int_x^{-x}\frac{x-u}{2}f(u)\cdot(-\frac{1}{2})du=\frac{1}{4}\int_x^{-x}(x-u)f(u)du$

$=\frac{x}{4}\int_x^{-x}f(u)du-\frac{1}{4}\int_x^{-x}uf(u)du,$

则$F'(x)=\frac{1}{4}\int_x^{-x}f(u)du+\frac{x}{4}[f(x)+f(-x)]-\frac{1}{4}[xf(x)-xf(-x)]$

$=\frac{1}{4}\int_x^{-x}f(u)du+\frac{x}{2}f(-x).$ 从而 $F'(0)=0$,于是

$$F''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{F'(x)-F'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}[\frac{\int_{-x}^{x}f(u)du}{4x}+\frac{1}{2}f(-x)]=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+f(-x)}{4}+\frac{1}{2}f(0)$$

$=\frac{1}{2}f(0)+\frac{1}{2}f(0)=f(0).$

六、（8 分）设 $f(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{\pi - t}dt$，计算 $\int_0^\pi f(x)dx$。

解：因为 $f(\pi)=\int_0^\pi \frac{\sin t}{\pi - t}dt$， $f'(x)=\frac{\sin x}{\pi - x}$，故

$$\int_0^\pi f(x)dx = xf(x)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi xf'(x)dx = \pi f(\pi) - \int_0^\pi x\cdot\frac{\sin x}{\pi - x}dx$$

$$= \pi\int_0^\pi \frac{\sin t}{\pi - t}dt - \int_0^\pi \frac{x\sin x}{\pi - x}dx = \int_0^\pi \frac{(\pi - x)\sin x}{\pi - x}dx = \int_0^\pi \sin x dx = 2.$$

七、（8 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，试证 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos x|)dx = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} f(|\cos x|)dx$.

解：因为

$$\int_0^{2\pi} f(|\cos x|)dx \overset{x=\pi-t}{=\!=\!=\!=} \int_{-\pi}^{\pi} f(|\cos t|)dt = 2\int_0^{\pi} f(|\cos t|)dt \overset{t=\frac{\pi}{2}-u}{=\!=\!=\!=} 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(|\sin u|)du$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\sin u|)du \overset{u=\frac{\pi}{2}-x}{=\!=\!=\!=} 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos x|)dx ,$$

所以，$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos x|)dx = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} f(|\cos x|)dx$.

八、（8 分）设 $f(x)$在$[a,b]$上二阶导数连续，且 $f''(x)\le 0$，试证明：

$$\int_a^b f(x)dx \le (b-a)f(\frac{a+b}{2}).$$

证：设 $F(x)=\int_a^x f(t)dt-(x-a)f(\frac{a+x}{2}),(a\le x\le b)$，则 $F(a)=0$.

$$F'(x)=f(x)-f(\frac{a+x}{2})-(x-a)\frac{1}{2}f'(\frac{a+x}{2})$$

$$=\int_{\frac{a+x}{2}}^x f'(t)dt-\int_{\frac{a+x}{2}}^x f'(\frac{a+x}{2})dt=\int_{\frac{a+x}{2}}^x [f'(t)-f'(\frac{a+x}{2})]dt.$$

因为 $f''(x)\le 0$，所以 $f'(x)$ 单减，故当 $t>\dfrac{a+x}{2}$时， $f'(t)\le f'(\dfrac{a+x}{2})$.

从而 $F'(x)\le 0$，即有 $F(x)$ 单减. 故 $F(b)\le F(a)$，即 $\int_a^b f(t)dt-(b-a)f(\dfrac{a+b}{2})\le 0$，

结论成立.

九、(6 分) 证明：$2-\frac{\pi}{2} \le \int_{-1}^{1} \frac{x^2 + x\cos x}{1+\sin^2 x} dx \le \frac{2}{3}$.

证：因为 $\int_{-1}^{1} \frac{x\cos x}{1+\sin^2 x} dx = 0$，$\frac{x^2}{1+x^2} \le \frac{x^2}{1+\sin^2 x} \le x^2$，$-1 \le x \le 1$，所以，

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{1+x^2} dx \le \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{1+\sin^2 x} dx \le \int_{-1}^{1} x^2 dx,$$

而 $\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}$，$\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int_{-1}^{1} (1-\frac{1}{1+x^2}) dx = -\frac{\pi}{2}$，

故有 $2-\frac{\pi}{2} \le \int_{-1}^{1} \frac{x^2 + x\cos x}{1+\sin^2 x} dx \le \frac{2}{3}$.