高等数学A

第3章 一元函数积分学

3.2 定积分

3.2.7 广义积分

中南大学开放式精品示范课堂高等数学建设组

3.2 定积分

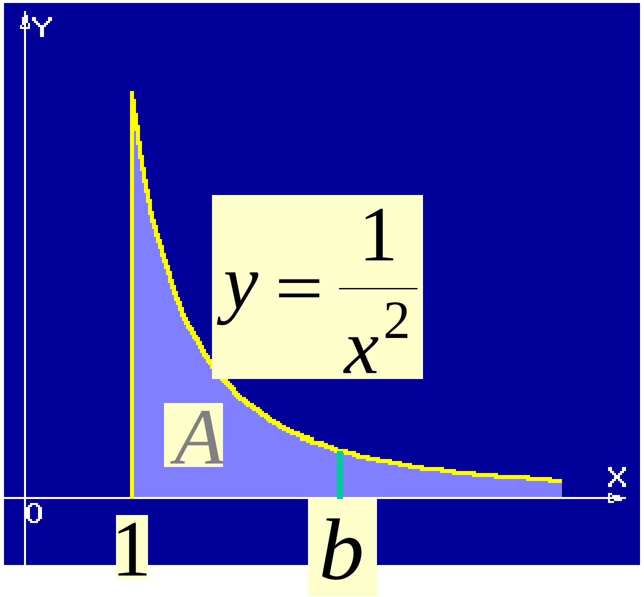
- 广义积分
  - 3.2.7 广义积分
    - 无穷积分
      - 无穷积分及敛散性
      - 无穷积分计算习例1-5
    - 无界函数的积分
      - 无界函数积分及敛散性
      - 无界函数积分计算习例6-10
  - 内容小结

我们前面讨论的积分是在有限区间上的有界函数的积分．在科学技术和工程中，往往需要计算无穷区间上的积分或者计算不满足有界条件的函数的积分，有时还需计算不满足有界条件的函数在无穷区间上的积分．这就需要我们将定积分的概念及其计算方法进行推广．

我们将运用极限的方法来完成这个工作．

引例1. 曲线 $y=\dfrac{1}{x^2}$ 和直线 $x=1$ 及 x 轴所围成的开口曲边梯形的面积 可记作

$$A=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$



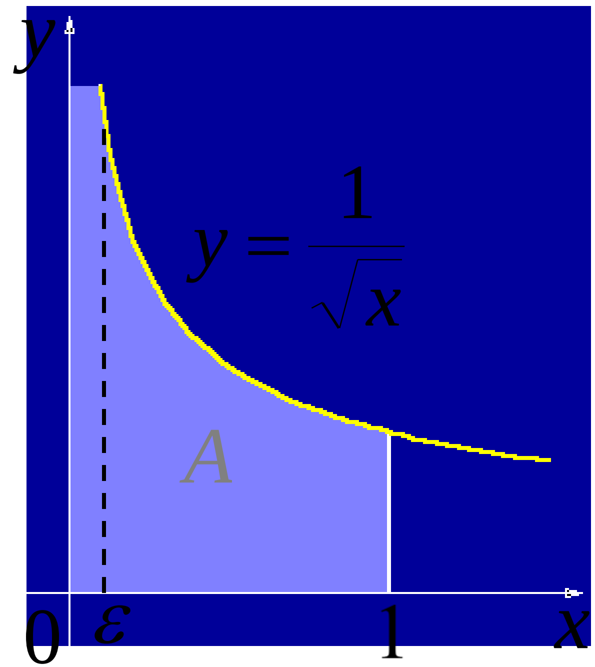
其含义可理解为

$$A=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^b$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(1-\frac{1}{b}\right)=1$$

引例2: 曲线 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 与 x 轴, y 轴和直线 $x=1$ 所围成的开口曲边梯形的面积可记作

$$A=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$$



其含义可理解为

$$A=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}2\sqrt{x}\,\Big|_\varepsilon^1$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}2(1-\sqrt{\varepsilon})=2$$

一、无穷积分

其形式有：$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$,

定义 1： 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，取 $b>a$，如果极限 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx$ 存在，则称此极限为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $[a,+\infty)$ 上的积分，记作 $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$.

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx$$

当极限存在时，称无穷积分收敛；当极限不存在时，称无穷积分发散.

定义 2: 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, b]$ 上连续，取 $a < b$，如果极限 $\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$ 存在，则称此极限为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $(-\infty, b]$ 上的积分，记作 $\int_{-\infty}^b f(x)dx$.

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

当极限存在时，称无穷积分收敛；当极限不存在时，称无穷积分发散.

定义 3: 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 如果无穷积分 $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ 和 $\int_{0}^{+\infty} f(x)dx$ 都收敛，则称上述两无穷积分之和为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的无穷积分，记作 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} f(x)dx$$

极限存在称无穷积分收敛；否则称无穷积分发散.

按无穷积分的定义：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{b\to+\infty}\int_{c}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

等号右边的两项的极限过程是相互独立的，即 a 与 b 的变化不要求一致.

在数学物理问题中，经常遇到要求 a 与 b 变化一致的情形，即需要考虑 $b=-a$ 的特殊情形.

无穷积分的柯西主值

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义.

$\forall\, a\in R$， $a>0$， $f(x)\in R(\,[-a,a]\,)$． 记

$$V.P.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

称之为 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的无穷积分的柯西主值.

若式中的极限存在，则称此无穷积分在柯西主值意义下收敛，极限值即为柯西主值意义下的无穷积分值；若式中极限不存在，则称该无穷积分在柯西主值意义下发散.

例1　讨论无穷积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x \, \mathrm{d} x$ 的敛散性

和柯西主值意义下的敛散性.

解　因为 $\int_0^{+\infty} \sin x \, \mathrm{d} x = \lim\limits_{b \to +\infty} \int_0^b \sin x \, \mathrm{d} x = \lim\limits_{b \to +\infty} (-\cos x) \Big|_0^b = 1 - \lim\limits_{b \to +\infty} \cos b$,

而 $\lim\limits_{b \to +\infty} \cos b$ 不存在，故积分 $\int_0^{+\infty} \sin x \, \mathrm{d} x$ 发散.

从而，无穷积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x \, \mathrm{d} x$ 发散.

又　$V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x \, \mathrm{d} x = \lim\limits_{A \to +\infty} \int_{-A}^{A} \sin x \, \mathrm{d} x = 0$,　奇函数

故无穷积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x \, \mathrm{d} x$ 在柯西主值意义下收敛.

由此例想到一点什么没有?

该例说明:

无穷积分在柯西主值意义下收敛时, 它本身不一定收敛.

由 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 与 $V.P.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 的定义可知:

若 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则 $V.P.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 必收敛.

注意: 对反常积分, 只有在收敛的条件下才能使用“偶倍奇零” 的性质,否则会出现错误 .

无穷积分计算习例

例2 计算$\int_5^{+\infty}\frac{dx}{x(x+15)}$.

例3 证明$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$,当$p>1$时收敛,当$p\le 1$时发散.

例4 计算无穷积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

例5 证明无穷积分$\int_a^{+\infty}e^{-px}dx$当$p>0$时收敛，当$p<0$时发散.

例6 计算$\int_0^{+\infty}x^n e^{-x}dx$ (n为自然数).

例2 计算$\int_5^{+\infty}\frac{dx}{x(x+15)}$.

解 $$\int_5^{+\infty}\frac{dx}{x(x+15)}=\lim_{b\to+\infty}\int_5^{b}\frac{dx}{x(x+15)}$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\int_5^{b}\frac{1}{15}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+15}\right)dx$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{15}[\ln x-\ln(x+15)]_5^b$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{15}\left(\ln\frac{b}{b+15}-\ln\frac{5}{20}\right)=\frac{2}{15}\ln 2$$

例3 证明$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$，当$p>1$时收敛，当$p\le 1$时发散.

证 当$p=1$时，$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x}=\lim\limits_{b\to+\infty}\ln x\Big|_1^b$

$$=\lim_{b\to+\infty}\ln b=+\infty$$

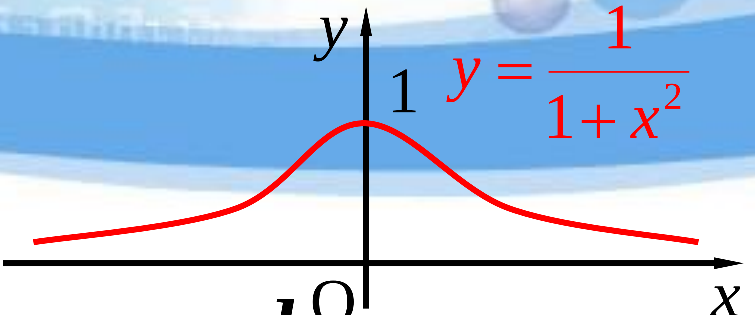
当$p\neq 1$时，$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x^p}=\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_1^b$

$$=\lim_{b\to+\infty}\frac{b^{1-p}-1}{1-p}=\frac{1}{p-1}+\lim_{b\to+\infty}\frac{b^{1-p}}{1-p}$$

当$p>1$时，$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\frac{1}{p-1}$，　当$p<1$时，$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=+\infty$

∴当$p>1$时，原积分收敛；当$p\leqslant 1$时，原积分发散.

例4 计算无穷积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.



解 $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{1}{1+x^2}dx+\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\left[\arctan x\right]_a^0+\lim_{b\to+\infty}\left[\arctan x\right]_0^b$$

$$=-\lim_{a\to-\infty}\arctan a+\lim_{b\to+\infty}\arctan b$$

$$=-\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

例5 证明无穷积分$\int_a^{+\infty} e^{-px}dx$当$p>0$时收敛，当$p<0$时发散.

证

$$\int_a^{+\infty} e^{-px}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b e^{-px}dx = \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{e^{-px}}{p}\right]_a^b$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{e^{-pa}}{p} - \frac{e^{-pb}}{p}\right) = \begin{cases} \dfrac{e^{-ap}}{p}, & p>0 \\ \infty, & p<0 \end{cases}$$

即当$p>0$时收敛，当$p<0$时发散.

例6 计算$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx$ (n为自然数).

解

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b x^n d(-e^{-x})$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left[-e^{-x}x^n\Big|_0^b + n\int_0^b e^{-x}x^{n-1}dx\right]$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{b^n}{e^b} + n\int_0^b x^{n-1}d(-e^{-x})\right) = \cdots\cdots$$

$$= \lim_{b\to+\infty} n(n-1)\cdots\cdots 1\int_0^b d(-e^{-x})$$

$$= \lim_{b\to+\infty} n(n-1)\cdots\cdots 1(-e^{-x})\Big|_0^b = n!$$

注意: (1) $\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) - F(a)$

(2) $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{b} = F(b) - \lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$

Γ函数： $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx \quad (\alpha > 0)$

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$$

$$\Gamma(n+1) = n!$$

$$\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

二、无界函数的积分

定义 1. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上连续，而在点 a 的右邻域内无界. 取 $\varepsilon>0$，如果极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b}f(x)dx$ 存在，则称此极限为函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上的瑕积分，记作 $\int_a^b f(x)dx$.

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b}f(x)dx$$

当极限存在时，称瑕积分收敛；当极限不存在时，称瑕积分发散.

定义 2. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b)$ 上连续, 而在点 b 的左邻域内无界. 取 $\varepsilon>0$, 如果极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)dx$ 存在, 则称此极限为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b)$ 上的瑕积分, 记作 $\int_a^b f(x)dx$

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)dx$$

当极限存在时，称瑕积分收敛；当极限不存在时，称瑕积分发散.

定义 3. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上除点 $c\ (a<c<b)$ 外连续，而在点 c 的邻域内无界. 如果两个瑕积分 $\int_a^c f(x)dx$ 和 $\int_c^b f(x)dx$ 都收敛，则定义

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \to 0^+} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0^+} \int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx$$

否则，就称瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 发散.

(3) 瑕积分的柯西主值

设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上有定义，$x=c \ (a<c<b)$ 为其瑕点.

记

$$V.P.\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0^+}\Big[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{c-\varepsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x\Big],$$

称之为$f(x)$在$[a,b]$上的瑕积分(瑕点为c)的柯西主值.

若式中的极限存在, 则称此瑕积分在柯西主值意义下收敛. 极限值即为柯西主值意义下的瑕积分值; 若式中极限不存在, 则称该瑕积分在柯西主值意义下发散.

无界函数的积分习例

例7 计算瑕积分$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ $(a>0)$.

例8 计算$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$.

例9 判别反常积分$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}dx$的敛散性.

例10 判别$\int_0^1 \frac{dx}{x^q}$的敛散性.

例11 计算广义积分$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$.

例7 计算瑕积分 $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad (a>0).$

解 $\because \lim_{x\to a^-} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = +\infty,$

$\therefore x=a$ 为被积函数的无穷间断点.

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^{a-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\arcsin\frac{x}{a}\right]_0^{a-\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\arcsin\frac{a-\varepsilon}{a} - 0\right] = \frac{\pi}{2}.$$

例8 计算$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$.

解

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_1^{e-\varepsilon} \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_1^{e-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-(\ln x)^2}}\,d\ln x$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \arcsin\ln x \Big|_1^{e-\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}[\arcsin\ln(e-\varepsilon)-0] = \frac{\pi}{2}.$$

例9 判别反常积分$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx$的敛散性.

解 $\because \int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx=\int_{-1}^{0}\frac{1}{x^2}dx+\int_{0}^{1}\frac{1}{x^2}dx$

而$\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{-1}^{-\varepsilon}$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)=+\infty$$

即$\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2}$发散, $\therefore \int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx$发散.

例10 判别 $\int_0^1 \frac{dx}{x^q}$ 的敛散性.

解 当 $q=1$ 时, $\int_0^1 \frac{dx}{x^q} = \int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x}$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \ln x \Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0^+} (-\ln\varepsilon) = +\infty$$

当 $q \neq 1$ 时, $\int_0^1 \frac{dx}{x^q} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^q} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{x^{1-q}}{1-q}\Big|_\varepsilon^1$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\frac{1}{1-q} - \frac{\varepsilon^{1-q}}{1-q}\right) = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & q<1 \\ +\infty & q>1 \end{cases}$$

$$\therefore \int_0^1 \frac{dx}{x^q} = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & q<1 \\ +\infty & q\geq 1 \end{cases}.$$

例11 计算广义积分 $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$. $x=1$瑕点

解 $$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} + \int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{\varepsilon_1 \to 0^+} \int_0^{1-\varepsilon_1} \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = 3$$

$$\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{\varepsilon_2 \to 0^+} \int_{1+\varepsilon_2}^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = 3 \cdot \sqrt[3]{2},$$

$$\therefore \int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = 3(1+\sqrt[3]{2}).$$

注意：(1) $x=a$为瑕点时，$\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\delta\to a^+} F(x)\Big|_a^b$

(2) $x=b$为瑕点时，$\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\eta\to b^-} F(x)\Big|_a^b$

(3) 瑕点有时可用换元公式将其消去.

例如 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t \quad$ （令 $x=\sin t$）

例12 计算 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(x-2)}$.

这是无穷积分与瑕积分混合在一起的广义积分，应设分开.

解 易知，$x=0$，$x=2$ 为被积函数的瑕点，故

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(x-2)}=\left(\int_0^1+\int_1^2+\int_2^3+\int_3^{+\infty}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x(x-2)}$$

$$=\left(\int_0^1+\int_1^2+\int_2^3+\int_3^{+\infty}\right)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x}\right)\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|\Big|_{0^+}^{1}+\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|\Big|_{1}^{2^-}+\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|\Big|_{2^+}^{3}+\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|\Big|_{3}^{+\infty}\right\}$$

不存在

由于 $\frac{1}{2}\int_{1}^{2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$ 与 $\frac{1}{2}\int_{2}^{3}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$ 不存在,

故原积分 $\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(x-2)}$ 发散.

内容小结

1. 反常积分 $\left\{\begin{matrix}\text{积分区间无限} \\ \text{被积函数无界}\end{matrix}\right\}$ —— 常义积分的极限

2. 两个重要的反常积分

$$\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=\begin{cases}+\infty, & p\le 1 \\ \dfrac{1}{(p-1)a^{p-1}}, & p>1\end{cases}\qquad (a>0)$$

$$\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^q}=\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^q}=\begin{cases}\dfrac{(b-a)^{1-q}}{1-q}, & q<1 \\ +\infty, & q\ge 1\end{cases}$$

说明: (1) 有时通过换元, 反常积分和常义积分可以互相转化.

例如, $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t \quad$ (令 $x = \sin t$)

$$\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2}$$

$$= \int_{-\infty}^0 \frac{\mathrm{d}t}{2+t^2} \quad (\text{令 } t = x - \frac{1}{x})$$

(2) 当一题同时含两类反常积分时, 应划分积分区间, 分别讨论每一区间上的反常积分.

(3) 有时需考虑主值意义下的反常积分. 其定义为

$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\text{v.p.}\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \quad (c\text{为瑕点}, a<c<b)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to0^+}\left[\int_{a}^{c-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x\right]$$

注意: 主值意义下反常积分存在不等于一般意义下反常积分收敛 .