高等数学A

第4章 无穷级数

4.4 函数展开成幂级数

4.4.1 Taylor级数
4.4.2 函数展开成幂级数
4.4.3 函数展开成幂级数的应用

中南大学开放式精品示范课堂高等数学建设组

4.4 函数展开成幂级数

函数展开成幂级数

- 4.4.1 Taylor级数
  - Taylor(泰勒)级数的形式
  - Taylor(泰勒)级数的存在性
- 4.4.2 函数展开成幂级数
  - 直接法
  - 习例1-3
  - 间接法
  - 习例4-10
- 思考题

一、Taylor级数

从前面部分我们可知 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$, $x \in (-1,1)$.

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ 是否存在幂级数在其收敛域内以$f(x)$为和函数?

问题: 1.如果能展开, a_n 是什么?

2.展开式是否唯一?

3.在什么条件下才能展开成幂级数?

1. Taylor(泰勒)级数的形式

定理 1 如果函数 $f(x)$在$U_\delta(x_0)$内具有任意阶导数，且在$U_\delta(x_0)$内能展开成$(x-x_0)$的幂级数，

即 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$

则其系数 $a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0) \qquad (n=0,1,2,\cdots)$

且展开式是唯一的.

证 $\because \sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$在$U_\delta(x_0)$内收敛于$f(x)$,即

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots$$

逐项求导任意次,得

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + \cdots + na_n(x-x_0)^{n-1} + \cdots$$

$$\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(x) = n!a_n + (n+1)n\cdots 3\cdot 2a_{n+1}(x-x_0) + \cdots$$

令 $x = x_0$, 即得

$$a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0) \qquad (n = 0,1,2,\cdots)$$ 泰勒系数

泰勒系数是唯一的,

$\therefore f(x)$的展开式是唯一的.

定义 如果 $f(x)$ 在点 x_0 处任意阶可导, 则幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$ 称为 $f(x)$ 在点 x_0 的 Taylor 级数.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$ 称为 $f(x)$ 在点 x_0 的 Maclaurin 级数.

问题 $$f(x)\overset{?}{=\!=}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

泰勒级数在收敛区间是否收敛于$f(x)$? 不一定.

例如 $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

在$x=0$点任意阶可导, 且 $f^{(n)}(0)=0 \quad (n=0,1,2,\cdots)$

$\therefore f(x)$的麦克劳林级数为$\sum\limits_{n=0}^{\infty} 0\cdot x^n$

该级数在$(-\infty,+\infty)$内和函数$s(x)\equiv 0$. 可见

除$x=0$外, $f(x)$的Maclaurin级数处处不收敛于$f(x)$.

2. Taylor(泰勒)级数的存在性

定理 2. $f(x)$在点x_0的 Taylor 级数在$U_\delta(x_0)$内收敛于 $f(x)$ $\Leftrightarrow$ 在$U_\delta(x_0)$内$\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$.

证 必要性 设$f(x)$能展开为泰勒级数,

$$\because\ f(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i+R_n(x)$$

$$\therefore R_n(x)=f(x)-s_{n+1}(x),\quad \because \lim_{n\to\infty} s_{n+1}(x)=f(x)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} R_n(x)=\lim_{n\to\infty}[f(x)-s_{n+1}(x)]=0;$$

充分性 $\because f(x)-s_{n+1}(x)=R_n(x),$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}[f(x)-s_{n+1}(x)]=\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}s_{n+1}(x)=f(x),$

$\therefore f(x)$的泰勒级数收敛于$f(x)$.

注意:

定理1告诉我们：若$f(x)$能展成x的幂级数，则此幂级数就是Maclaurin级数；但反过来，若$f(x)$的Maclaurin级数在$x=0$的某邻域内收敛，却不一定收敛于$f(x)$.其敛散性应进一步考虑.

二、函数展开成幂级数

1. 直接法

步骤：(1)求出$f(x)$的各阶导数$f'(x), f''(x), \cdots$

(2)求出$f(x_0), f'(x_0), f''(x_0), \cdots$

(若在x_0处某阶导数不存在，则不能展成$(x-x_0)$的幂级数.)

(3)写出幂级数(并求其收敛区间)

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

(4)考虑 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$,

若 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$，则(3)中的幂级数为$f(x)$的展开式.

用直接法展开函数成幂级数习例

例 1　将$f(x)=e^x$展开成x的幂级数.

例 2　将$f(x)=\sin x$在$x_0=0$处展开.

例 3　将$f(x)=(1+x)^\alpha(\alpha\in R)$展开成Maclaurin级数.

例 1　将$f(x)=e^x$展开成x的幂级数.

解　(1) $f^{(n)}(x)=e^x \quad (n=0,1,2,\cdots)$

(2) $f^{(n)}(0)=1 \quad (n=0,1,2,\cdots)$

(3) $1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots \quad \therefore e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=0, \therefore R=+\infty. \quad (-\infty<x<+\infty)$$

(4) $0\le|R_n(x)|=\left|\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}\right|<e^{|x|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$

而$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$收敛, $\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}=0. \quad \therefore \lim_{n\to\infty}R_n(x)=0.$

例 2　将$f(x)=\sin x$在$x_0=0$处展开.

解　(1) $f^{(n)}(x)=\sin(x+n\frac{\pi}{2})\quad (n=0,1,2,\cdots)$

(2) $f^{(n)}(0)=\begin{cases}0 & n\text{为偶数}\\ 1 or -1 & n\text{为奇数}\end{cases},\quad f(0)=0$

(3) $x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots$　　易得$R=+\infty$.

(4) $0\le |R_n(x)|=\left|\frac{\sin[\xi+\frac{(n+1)\pi}{2}]}{(n+1)!}x^{n+1}\right|<\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\to 0\ \ (n\to\infty)$

$$\therefore \sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\quad(-\infty<x<+\infty)$$

例 3　将$f(x)=(1+x)^{\alpha}(\alpha\in R)$展开成Maclaurin级数.

解　(1) $f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}$,

$$f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2},\cdots$$

$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},\cdots$$

(2) $f(0)=1,\ f'(0)=\alpha,\ f''(0)=\alpha(\alpha-1),\cdots$

$$f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1),\cdots$$

(3) $1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right|=1,\qquad \therefore R=1.$$

在(−1,1)内,若

$$s(x)=1+\alpha x+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

$$s'(x)=\alpha+\alpha(\alpha-1)x+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1}+\cdots$$

$$xs'(x)=\alpha x+\alpha(\alpha-1)x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^n+\cdots$$

利用 $\frac{(m-1)\cdots(m-n+1)}{(n-1)!}+\frac{(m-1)\cdots(m-n)}{n!}=\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}$

$$\therefore (1+x)s'(x)$$

$$=\alpha+\alpha^2x+\frac{\alpha^2(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha^2(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n-1}+\cdots$$

$$=\alpha s(x)$$

令$\varphi(x)=\dfrac{s(x)}{(1+x)^{\alpha}}$，　　$\varphi(0)=s(0)=1$,

且$$\varphi'(x)=\frac{(1+x)^{\alpha}s'(x)-\alpha(1+x)^{\alpha-1}s(x)}{(1+x)^{2\alpha}}$$

$$=\frac{(1+x)^{\alpha-1}[(1+x)s'(x)-\alpha s(x)]}{(1+x)^{2\alpha}}=0.$$

$\therefore \varphi(x)=C$,　又$\varphi(0)=1$,　$\therefore \varphi(x)=1$,

$\therefore s(x)=(1+x)^{\alpha}$,　$x\in(-1,1)$

$\therefore\quad (1+x)^{\alpha}$

$$=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

$x\in(-1,1)$

牛顿二项展开式.

注意： 在$x=\pm1$处收敛性与α的取值有关.

$\alpha\le -1$ 收敛域为$(-1,1)$;

$-1<\alpha<1$ 收敛域为$(-1,1]$;

$\alpha\ge 1$ 收敛域为$[-1,1]$.

2. 间接法

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \quad (-1<x<1)$$

(1)利用已知幂级数展式.

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \quad (-\infty<x<+\infty)$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (-\infty<x<+\infty)$$

(2)利用求导求积恒等变形等运算转化为已知幂级数展式来展开.

(3)端点情况的收敛性重新考虑.

用间接法展开函数成幂级数习例

例 4 将下列函数展开成x的幂级数：

(1) $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$; (2) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$; (3) $f(x)=\cos x$;

(4) $f(x)=\ln(1+x)$; (5) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$; (6) $f(x)=\arcsin x$.

例 5. 将$f(x)=(1+x)\ln(1+x)$展开成x的幂级数.

例 6 将$f(x)=\dfrac{1}{x}$展开成$(x-3)$的幂级数.

例 7 将$f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+3}$展开成$(x-1)$的幂级数.

例 8 将$f(x)=\int_0^x \dfrac{\sin t}{t}dt$展开成$x$的幂级数.

例 9 将$f(x)=\cos x$展开成$(x-\dfrac{\pi}{3})$的幂级数.

例 10 求函数$G(x)=\dfrac{d}{dx}(\dfrac{\cos x-1}{x})$关于$x$的幂级数展开式，指出该级数的收敛范围,并利用此展开式求出级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n-1}{(2n)!}(\frac{\pi}{2})^{2n}$$的和.

例 4　将下列函数展开成x的幂级数：

解 (1) $\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{1}{1-(-x)}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-x)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$

$(-1<x<1)$

(2) $\dfrac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$　$(-1<x<1)$

(3) $\cos x=(\sin x)'=[\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}]'$

$=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$　$(-\infty<x<+\infty)$

$$(4)\ \ln(1+x)=\int_0^x \frac{dx}{1+x}=\int_0^x[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n]dx$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad (-1<x\le 1)$$

$$(5)\ \frac{1}{\sqrt{1+x}}=(1+x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=1-\frac{x}{2}+\frac{1\cdot 3x^2}{2\cdot 4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5x^3}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots+(-1)^n\frac{(2n-1)!!\,x^n}{(2n)!!}+\cdots$$

$$(-1<x\le 1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{x^2}{2}+\frac{1\cdot 3x^4}{2\cdot 4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5x^6}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots$$

$$(6)\ \arcsin x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \int_0^x \left[1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1\cdot 3x^4}{2\cdot 4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5x^6}{2\cdot 4\cdot 6} + \cdots\right] dx$$

$$= x + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3x^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \cdots$$

例 5　将$f(x)=(1+x)\ln(1+x)$展开成x的幂级数.

解　$\because f'(x)=1+\ln(1+x)=1+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$

$$f(x)=f(x)-f(0)=\int_0^x f'(x)dx=\int_0^x[1+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}]dx$$

$$=x+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$$

当$x=1$时有$1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}$收敛,

当$x=-1$时有$-1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$收敛,

$\therefore$收敛域为$[-1,1]$.

例 6 将$f(x)=\dfrac{1}{x}$展开成$(x-3)$的幂级数.

解 $$f(x)=\frac{1}{x}=\frac{1}{(x-3)+3}=\frac{1}{3}\frac{1}{1+\dfrac{x-3}{3}}$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-3}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(x-3)^n$$

由$-1<\dfrac{x-3}{3}<1$得$0<x<6$

当$x=0$时有$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{3}$发散, 当$x=6$时有$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3}$发散.

$\therefore$收敛域为$(0,6)$.

例 7 将$f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+3}$展开成$(x-1)$的幂级数.

解 $\because f(x)=\dfrac{1}{(x+1)(x+3)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+3}\right)$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2+(x-1)}-\frac{1}{4+(x-1)}\right]=\frac{1}{4}\frac{1}{1+\frac{x-1}{2}}-\frac{1}{8}\frac{1}{1+\frac{x-1}{4}}$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-1}{2}\right)^n-\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-1}{4}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{2^{2n+3}}\right](x-1)^n$$

令$x-1=y$,则得$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n[\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{2^{2n+3}}]y^n$

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{2^{n+3}}-\frac{1}{2^{2n+5}}}{\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{2^{2n+3}}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^{n+5}}}{\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^{n+3}}}\right|=\frac{1}{2}$$

$\therefore R=2$

当$y=-2$时有$\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{4}-\frac{1}{2^{n+3}})$,发散;

当$y=2$时有$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{4}-\frac{1}{2^{n+3}})$,发散

$\therefore -2<y<2$, 从而$-2<x-1<2$, 得$-1<x<3$.

$\therefore$收敛域为$(-1,3)$.

或者 且$\begin{cases} -1 < \dfrac{x-1}{2} < 1 \\ -1 < \dfrac{x-1}{4} < 1 \end{cases}$，得$-1 < x < 3.$

当$x = -1$时有$\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{4} - \frac{1}{2^{n+3}})$,发散;

当$x = 3$时有$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{4} - \frac{1}{2^{n+3}})$,发散

$\therefore$收敛域为$(-1,3)$.

例 8　将$f(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$展开成$x$的幂级数.

解　$\because \sin t=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}\quad(-\infty<x<+\infty)$

$$\therefore f(x)=\int_0^x \frac{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}}{t}dt=\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n+1)!}dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$$

收敛域为$(-\infty,+\infty)$.

例 9　将$f(x)=\cos x$展开成$(x-\frac{\pi}{3})$的幂级数.

解　$f(x)=\cos[(x-\frac{\pi}{3})+\frac{\pi}{3}]$

$$=\frac{1}{2}\cos(x-\frac{\pi}{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x-\frac{\pi}{3})$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-\frac{\pi}{3})^{2n}}{(2n)!}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-\frac{\pi}{3})^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{(x-\frac{\pi}{3})^{2n}}{(2n)!}-\sqrt{3}\frac{(x-\frac{\pi}{3})^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]$$

收敛域为$(-\infty,+\infty)$.

例 10　求函数$G(x)=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\cos x-1}{x}\right)$关于$x$的幂级数展开式,指出该级数的收敛范围,并利用此展开式求出级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2n-1}{(2n)!}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{2n}$的和.

解　$\because \cos x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$　　$\dfrac{\cos x-1}{x}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n-1}}{(2n)!}$

$$\therefore G(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x-1}{x}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n-1}{(2n)!}x^{2n-2}$$

$$(-\infty<x<+\infty)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2n-1}{(2n)!}(\frac{\pi}{2})^{2n} = \frac{\pi^2}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2n-1}{(2n)!}(\frac{\pi}{2})^{2n-2}$$

$$= \frac{\pi^2}{4} G(\frac{\pi}{2})$$

$$= \frac{\pi^2}{4}(\frac{\cos x - 1}{x})'\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi^2}{4}(\frac{-x\sin x - \cos x + 1}{x^2})\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}$$

$$= 1 - \frac{\pi}{2}.$$

思 考 题

1. 函数 $f(x)$ 在 x_0 处 “有泰勒级数” 与 “能展成泰勒级数” 有何不同 ?

勒级

提示: 后者必需证明 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$, 前者无此要求.

2. 如何求 $y=\sin^2 x$ 的幂级数 ?

提示: $y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}(2x)^{2n}$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n}{(2n)!}x^{2n}, \qquad x\in(-\infty,+\infty)$$