高等数学A

第1章 函数与极限

1.6 无穷小与无穷大

中南大学开放式精品示范课堂高等数学建设组

1.6 无穷小与无穷大

无穷小与无穷大

- **1.6.1** 无穷小
  - 无穷小的定义
  - 无穷小与函数极限的关系
- **1.6.2** 无穷大
  - 无穷大的定义
  - 无穷大与无穷小的关系
- **1.6.3** 无穷小与无穷大的运算
  - 有限个无穷小的代数运算
  - 有界函数与无穷小的乘积
  - 有限个无穷小的乘积
  - 无穷大的简单运算
- **1.6.4** 无穷小的比较
  - 无穷小阶的定义
  - 等价无穷小及性质
- 习例1-12

一、无穷小

1. 无穷小的定义

定义1 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$，则称$f(x)$当 $x \to x_0$时为无穷小.

$(\varepsilon-\delta)$定义: 若$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，当$0 < |x - x_0| < \delta$时$|f(x)| < \varepsilon$，

则称$f(x)$当 $x \to x_0$时为无穷小.

若 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$，则称$f(x)$当 $x \to \infty$时为无穷小.

比如 $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} 0 = 0$ $\lim\limits_{x \to 1}(x-1) = 0$

注意: (1)无穷小并不是一个很小的数.

(2)数 “0”是无穷小量.

(3)无穷小是一类特殊函数, 是在某一变化过程中极限为0的函数, 并且在一个过程中为无穷小的量在另一过程中可能不是无穷小量.

2. 无穷小与函数极限的关系

(以下定理中"lim"表示$x \to x_0$或$x \to \infty$等都成立)

定理1 $\lim f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$,其中$\lim \alpha(x) = 0$.

证明: 仅证明$x \to x_0$的情况.

必要性: 设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$,则对

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$,当$0 < |x - x_0| < \delta$时有$|f(x) - A| < \varepsilon$成立,

于是令$\alpha(x) = f(x) - A$,则$\alpha(x)$是$x \to x_0$时的无穷小。

即 $f(x) = A + \alpha(x)$,其中$\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

充分性: 设 $f(x) = A + \alpha(x)$,且$\lim \alpha(x) = 0$;则$f(x) - A = \alpha(x)$.

于是对$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$,当$0 < |x - x_0| < \delta$时,

有$|f(x) - A| = |\alpha(x)| < \varepsilon$成立.

即 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

二、无穷大

1. 无穷大的定义

定义2　若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$,则称$f(x)$当 $x\to x_0$时为无穷大.

$(M-\delta)$定义: 若$\forall M>0,\exists\delta>0,$当$0<|x-x_0|<\delta$时

$|f(x)|>M,$则称$f(x)$当 $x\to x_0$时为无穷大.

若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$,则称$f(x)$当 $x\to\infty$时为无穷大.

注意: (1)无穷大是变量,不能与很大的数混淆.

(2)切勿将 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$认为极限存在.

(3) 无穷大是一种特殊的无界变量,但是无界变量未必是无穷大. 如: $1,2,\cdots,n,\cdots;$与$0,1,0,2,\cdots,0,n,\cdots.$

例1.证明$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$和$\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=\infty.$

2. 无穷大与无穷小的关系

定理2 在自变量的同一变化过程中，如果$f(x)$为无穷大，则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷小.

反之，如果$f(x)$为无穷小，且$f(x)\neq 0$，则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷大.

证明: 设$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$,则$\forall\varepsilon>0$,根据无穷大的定义，对于$M=\dfrac{1}{\varepsilon}$,

$\exists\delta>0$,当$0<|x-x_0|<\delta$时,有$|f(x)|>M=\dfrac{1}{\varepsilon}$,即$\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|<\varepsilon$成立.

所以$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0$，即$\dfrac{1}{f(x)}$为当$x\to x_0$时的无穷小.

反之，如果$f(x)$为无穷小，且$f(x)\neq 0$. $\forall M>0$,根据无穷小的定义，

对于$\varepsilon=\dfrac{1}{M}$，$\exists\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，有

$$|f(x)|<\varepsilon=\frac{1}{M}\quad \text{即}\quad \left|\frac{1}{f(x)}\right|>M$$

所以$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=\infty$，即$\dfrac{1}{f(x)}$为当$x\to x_0$时的无穷大.

定理2也可以叙述为:

(1)若 $\lim f(x)=\infty$, 则 $\lim \dfrac{1}{f(x)}=0$;

(2)若 $\lim f(x)=0$, 且 $f(x)\neq 0$, 则 $\lim \dfrac{1}{f(x)}=\infty$.

三、无穷小与无穷大的运算

定理 3 (1)有限个无穷小的代数和仍为无穷小.

即若$\lim\alpha(x)=0,\lim\beta(x)=0$,则$\lim[\alpha(x)\pm\beta(x)]=0$.

证明: 不妨设 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0,\ \lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0.$

$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta_1>0,$ 当$0<|x-x_0|<\delta_1$时,有 $|\alpha(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$;

$\exists\delta_2>0,$ 当$0<|x-x_0|<\delta_2$时,有 $|\beta(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 当$0<|x-x_0|<\delta$时,

有 $|\alpha(x)\pm\beta(x)|\le|\alpha(x)|+|\beta(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to x_0}[\alpha(x)\pm\beta(x)]=0.$

注意：无穷多个无穷小的代数和未必是无穷小.

例如, $n\to\infty$时, $\dfrac{1}{n}$是无穷小, 但n个$\dfrac{1}{n}$之和为1不是无穷小.

定理4 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

即若 $|u(x)| \le M, \lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} u(x) \cdot \alpha(x) = 0.$

证明: $\because \lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0.$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|\alpha(x)| < \dfrac{\varepsilon}{M};$

则 $|u(x) \cdot \alpha(x)| = |u(x)| \cdot |\alpha(x)| < M \cdot \dfrac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$

$\therefore \lim_{x \to x_0} u(x) \cdot \alpha(x) = 0.$

例如. 计算下列极限

$$(1)\lim_{x\to 0} x\cdot\sin\frac{1}{x} = 0;$$

$$(2)\lim_{x\to\infty} x\cdot\sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1;$$

$$(3)\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1;$$

$$(4)\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\sin x = 0.$$

Back

推论1. 在同一过程中,有极限的变量与无穷小的乘积是无穷小.

推论2. 常数与无穷小的乘积是无穷小.

推论3. 有限个无穷小的乘积也是无穷小.

证明: 不妨设 $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} \beta(x) = 0$.

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_1 > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时, 有 $|\alpha(x)| < \sqrt{\varepsilon}$;

$\exists \delta_2 > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 时, 有 $|\beta(x)| < \sqrt{\varepsilon}$.

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

有 $|\alpha(x) \cdot \beta(x)| = |\alpha(x)| \cdot |\beta(x)| < \sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{\varepsilon} = \varepsilon$.

$\therefore \lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) \cdot \beta(x) = 0$.

定理5 对于自变量相同变化趋势下的无穷大有如下性质:

（1）有限个无穷大的乘积是无穷大;

（2）无穷大与有界量之和是无穷大.

证（1）设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$，下证 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]=\infty$.

$\forall M>0$，因 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，$\exists\delta_1>0$ 当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时，有 $|f(x)|>\sqrt{M}$，

又 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$，$\exists\delta_2>0$ 当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时，有 $|g(x)|>\sqrt{M}$.

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)g(x)|>\sqrt{M}\cdot\sqrt{M}=M.$$

这就证明了 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]=\infty$，即两个无穷大的乘积是无穷大.

注意: 两个无穷大的和与差不一定是无穷大; $\infty-\infty$

无穷大与有界函数的乘积也不一定是无穷大. $0\cdot\infty$

四、无穷小的比较

1.无穷小阶的定义

例如,当$x \to 0$时, $x, 3x, x^2, \sin x, x^2\sin\frac{1}{x}$都是无穷小.

观察各极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x} = 0,$$

x^2比$3x$要快得多;

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{3x} = \frac{1}{3},$$

$\sin x$与$3x$大致相同;

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$$

不存在. 不可比.

极限不同，反映了趋向于零的“快慢”程度不同.

定义3 设$\lim\alpha=0,\lim\beta=0$,且$\alpha\neq0$.

(1) 如果$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$,就说$\beta$是比$\alpha$高阶的无穷小,记作$\beta=o(\alpha)$;

(2) 如果$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$,就说$\beta$是比$\alpha$低阶的无穷小;

(3) 如果$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=C(C\neq0)$,就说$\beta$与$\alpha$是同阶的无穷小,记作$\beta=O(\alpha)$;

(4) 如果$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$,则称$\beta$与$\alpha$是等价的无穷小;记作$\alpha\sim\beta$;

(5) 如果$\lim\dfrac{\beta}{\alpha^k}=C(C\neq0,k>0)$,就说$\beta$是$\alpha$的$k$阶无穷小.

例1 证明: 当 $x \to 0$ 时, $\sqrt[n]{1+x}-1 \sim \frac{1}{n}x$

例2 证明: 当 $x \to 0$ 时, $\ln(1+x) \sim x$

例3 证明当 $x \to 0$ 时, $e^x - 1 \sim x$

例1 证明: 当$x\to 0$时, $\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x$

证 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{\frac{1}{n}x}$

$a^n-b^n=(a-b)\,(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1})$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[n]{1+x}\right)^n-1}{\frac{1}{n}x\cdot\left[\left(\sqrt[n]{1+x}\right)^{n-1}+\left(\sqrt[n]{1+x}\right)^{n-2}+\cdots+1\right]}=1$$

$\therefore$ 当$x\to 0$时, $\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x$

Back

例2 证明: 当$x \to 0$时, $\ln(1+x) \sim x$

证 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$

$= \ln e = 1.$

所以，当$x \to 0$ 时, $\ln(1+x) \sim x$

Back

例3 证明当$x \to 0$时, $e^x - 1 \sim x$

解 令 $e^x - 1 = y$, 则 $x = \ln(1+y)$,

当$x \to 0$时, $y \to 0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}} = 1.$$

同理可得

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln a, 则 a^x - 1 \sim x\ln a \quad ,(x \to 0时).}$$

Back

2.等价无穷小的性质

定理6 设α,β为无穷小,则$\alpha\sim\beta\Leftrightarrow\beta-\alpha=o(\alpha)$.

证明: $\Rightarrow$ 若$\alpha\sim\beta$,

$$\text{则}\lim\frac{\beta-\alpha}{\alpha}=\lim(\frac{\beta}{\alpha}-1)=\lim\frac{\beta}{\alpha}-1=1-1=0$$

$$\therefore\beta-\alpha=o(\alpha).$$

$\Leftarrow$ 若$\beta-\alpha=o(\alpha)$, 则$\beta=\alpha+o(\alpha)$,

$$\text{则}\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\alpha+o(\alpha)}{\alpha}=\lim[1+\frac{o(\alpha)}{\alpha}]=1$$

$$\therefore\alpha\sim\beta.$$

定理7 等价无穷小替换定理

设 $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$, 且 $\lim \frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在, 则 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}$.

证明: $\because \alpha(x) \sim \alpha'(x), \quad \beta(x) \sim \beta'(x),$

$$\therefore \lim \frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)} = 1, \quad \lim \frac{\beta'(x)}{\beta(x)} = 1.$$

$$\therefore \lim \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim\left(\frac{\beta(x)}{\beta'(x)} \frac{\beta'(x)}{\alpha'(x)} \frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)}\right)$$

$$= \lim \frac{\beta(x)}{\beta'(x)} \lim \frac{\beta'(x)}{\alpha'(x)} \lim \frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)} = \lim \frac{\beta'(x)}{\alpha'(x)}.$$

例. 证明: 当 $x \to 0$ 时, $4x\tan^3 x$ 为 x 的四阶无穷小.

证明: $\because \lim\limits_{x\to 0} \frac{4x\tan^3 x}{x^4} = 4\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^3 = 4,$

故当 $x \to 0$ 时, $4x\tan^3 x$ 为 x 的四阶无穷小.

注意:

(1)任何无穷小与其本身是等价无穷小.

(2)等价无穷小代换只适用于乘积中;
对于代数和或复合函数中各无穷小不能分别替换.

(3)熟记一些常用的等价无穷小 (当$x \to 0$时)

$$\sin x \sim x, \qquad \tan x \sim x,$$

$$\arcsin x \sim x, \qquad \arctan x \sim x,$$

$$\ln(1+x) \sim x, \qquad e^{x}-1 \sim x,$$

$$1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}, \qquad \sqrt[n]{1+x}-1 \sim \frac{x}{n}.$$

因为 $\beta \sim \alpha \Leftrightarrow \beta = \alpha + o(\alpha)$ 所以有：

$$\sin x = x + o(x), \qquad \tan x = x + o(x),$$

$$\arcsin x = x + o(x), \qquad \arctan x = x + o(x),$$

$$\ln(1 + x) = x + o(x), \qquad e^x - 1 = x + o(x),$$

$$1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + o(x^2), \qquad \sqrt[n]{1 + x} - 1 = \frac{x}{n} + o(x).$$

五、无穷小与无穷大例题分析

例1. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x^2}-1}{\arcsin\dfrac{x}{2}\arctan\dfrac{x}{3}}$.

例2. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-1}{\arcsin\dfrac{x}{2}}$.

例3. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\arccos\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sin x}$.

例4. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$.

例5. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$.

例6. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$.

例7. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right)}{a^x-1}=A(a>0,a\neq 1)$, 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

例8. 当 $x\to 0$ 时, $e^{x^2}-(ax^2+bx+c)$ 是比 x^2 高阶的无穷小,

求 a,b,c.

例9. $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x^5+7x^4+2)^c-x]$ 存在且不为零, 求 c 及极限.

例1. 计算极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x^2}-1}{\arcsin\dfrac{x}{2}\arctan\dfrac{x}{3}}$.

解： $\because \sqrt{1+2x^2}-1 \sim \dfrac{1}{2}\cdot 2x^2 = x^2$

$$\arcsin\frac{x}{2}\sim\frac{x}{2},\quad \arctan\frac{x}{3}\sim\frac{x}{3},$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x^2}-1}{\arcsin\frac{x}{2}\arctan\frac{x}{3}} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{3}} = 6.$$

Back

例2. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-1}{\arcsin\frac{x}{2}}$.

解: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-1}{\arcsin\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\frac{x}{2}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\frac{x}{2}}=4.$

Back

例3. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\arccos\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sin x}$.

解: $\lim\limits_{x\to 0}\arccos\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sin x}=\arccos(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sin x})$

$$=\arccos(\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{2}}{\sin x})$$

$$=\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$$

Back

例4. 计算极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$.

解:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}(e^{x-\sin x}-1)}{x-\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}(x-\sin x)}{x-\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}e^{\sin x}=1.$$

Back

例5. 计算极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$.

解: 当$x\to 0$时，$\sin x\sim x$，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$.

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3\cos x}=\frac{1}{2}.$$

问：下列推导是否正确？

错解 $\because$ 当$x \to 0$时，$\tan x \sim x$, $\sin x \sim x$.

$\therefore$ 原式 $\cancel{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - x}{x^3} = 0.$

错误原因： $\because \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{0}{\tan x - \sin x} = 0 \neq 1$

$\therefore \quad \tan x - \sin x \not\sim x - x = 0$

注　不能滥用等价无穷小代换. 在用等价无穷小代换时，要用与分子或分母整体等价的无穷小代换.

1° 对于代数和中各无穷小，一般不能分别代换. 即遇无穷小 “+”, “–”时，一般不能代换；

2° 遇无穷小乘积时，可用各无穷小的等价无穷小进行代换.

例6. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$.

解: $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos x}{x(1-\cos\sqrt{x})(1+\sqrt{\cos x})}$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x^2}{2}}{x\cdot\frac{x}{2}\cdot(1+\sqrt{\cos x})}=\frac{1}{2}.$$

Back

例7. 设$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right)}{a^x-1}=A(a>0,a\neq 1)$, 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

解: $\because \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sin x}=0, \quad \therefore \lim\limits_{x\to 0} f(x)=0.$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right)}{a^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{f(x)}{\sin x}}{e^{x\ln a}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x\ln a\cdot\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2\ln a}=\frac{1}{\ln a}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=A, \quad \therefore \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=A\ln a.$$

Back

例8. 当$x \to 0$时，$e^{x^2}-(ax^2+bx+c)$是比x^2高阶的无穷小，求a,b,c.

解:

$$\because \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-(ax^2+bx+c)}{x^2}=0,$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}[e^{x^2}-(ax^2+bx+c)]=0, \qquad \therefore c=1.$$

$$\text{又} \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{e^{x^2}-1}{x}-\frac{ax^2}{x}-b\right)=0,$$

$$\text{则} \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{x^2}-1}{x}-\frac{ax^2}{x}-b\right)=0, \qquad \therefore b=0.$$

$$\text{从而} \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{x^2}-1}{x^2}-a\right)=0, \qquad \therefore a=1.$$

$$\therefore a=1, b=0, c=1.$$

Back

例9. $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x^5+7x^4+2)^c-x]$存在且不为零,求$c$及极限.

解: $\because \lim\limits_{x\to+\infty}[(x^5+7x^4+2)^c-x]$

$$=\lim_{x\to+\infty}[x^{5c}(1+\frac{7}{x}+\frac{2}{x^5})^c-x]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x[x^{5c-1}(1+\frac{7}{x}+\frac{2}{x^5})^c-1],$$

则 $\lim\limits_{x\to+\infty}[x^{5c-1}(1+\frac{7}{x}+\frac{2}{x^5})^c-1]=0.$

又由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{7}{x}+\frac{2}{x^5})^c=1,$ 必有$5c-1=0.$

否则 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{5c-1}(1+\frac{7}{x}+\frac{2}{x^5})^c\neq 1.$ $\therefore c=\frac{1}{5}.$

$$原式 = \lim_{x\to+\infty} x[(1+\frac{7}{x}+\frac{2}{x^5})^{\frac{1}{5}}-1]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[5]{1+\frac{7}{x}+\frac{2}{x^5}}-1}{\frac{1}{x}}$$

$$\because \sqrt[n]{1+x}-1 \sim \frac{x}{n} (x\to 0)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{5}(\frac{7}{x}+\frac{2}{x^5})}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{5}(7+\frac{2}{x^4}) = \frac{7}{5}.$$

Back

思考题 任何两个无穷小都可以比较吗?

解答

不能．例如，当$x \to \infty$时

$$f(x)=\frac{1}{x}, \quad g(x)=\frac{\sin x}{x}$$ 都是无穷小量

但 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\sin x$$

不存在且不为无穷大

故当 $x \to \infty$函数 $f(x)$和$g(x)$不能比较.

1.7 无穷小与无穷大

一. 填空

1. 当$x \to 0$时，$\ln(1+x)$是x的 <u>等价</u> 无穷小量；

2. 当$x \to 0$时，$\arctan x$与$\dfrac{ax}{\cos x}$是等价无穷小，则$a = \underline{1}$

3. $\lim\limits_{x \to 0} x^3 \cos\dfrac{1}{x^3} = \underline{0}$

4. 当$x \to \infty$时，若$f(x) = \dfrac{px^2 - 2}{x^2 + 1} + 3qx + 5$为无穷大量，则$p$为 <u>任意常数，</u> q为 <u>非零常数</u>，若$f(x)$为无穷小量，则$p = \underline{-5}$，$q = \underline{0}$.

5. 当 $x\to\infty$ 时,若 $\dfrac{1}{ax^2+bx+c}\sim\dfrac{1}{x+1}$, 则 $a=\underline{0}$, $b=\underline{1}$, c 为 任意常数.

6. 当 $x\to\infty$ 时,若 $\dfrac{1}{ax^2+bx+c}=o\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$, 则 a 为 $\underline{\neq 0}$, b 为 任意常数, c 为 任意常数.

二. 当 $x\to1$ 时, $f(x)=\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}$ 与 $g(x)=x-1$ 都是无穷小, 问 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的几阶无穷小?

解. 由 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{[g(x)]^k}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}}{(1-x)^k}\overset{1-\sqrt{x}=t^3}{=}\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t}{(2t^3-t^6)^k}$, 可见, 若取 $k=\dfrac{1}{3}$, 则

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{[g(x)]^k}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t}{(2t^3-t^6)^k}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$, 即 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的 $\dfrac{1}{3}$ 阶无穷小.

三．当 $x\to 0$ 时，$\sqrt[3]{1+ax^2}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小，试求常数 a 的值．

解．因当 $x\to 0$ 时，$\sqrt[3]{1+ax^2}-1\sim\frac{1}{3}ax^2$，$\cos x-1\sim-\frac{1}{2}x^2$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+ax^2}-1}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}ax^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-\frac{2}{3}a$$，由已知 $-\frac{2}{3}a=1$，所以 $a=-\frac{3}{2}$．

四．已知 $f(x)=a(x-1)^2+b(x-1)+c-\sqrt{x^2+3}$ 是 x 趋于 1 时 $(x-1)^2$ 的高阶无穷小，求常数 a,b,c．

解．由条件得：$\lim\limits_{x\to1}\left[a(x-1)^2+b(x-1)+c-\sqrt{x^2+3}\right]=0$，$\therefore c=2$．又

$$\lim_{x\to1}\frac{a(x-1)^2+b(x-1)+2-\sqrt{x^2+3}}{(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{a(x-1)+b+\dfrac{1-x^2}{\left(2+\sqrt{x^2+3}\right)(x-1)}}{x-1}=0,$$

$\therefore b=\dfrac{1}{2}$，又

$$\lim_{x\to1}\frac{a(x-1)^2+\frac{1}{2}(x-1)+2-\sqrt{x^2+3}}{(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\left(a+\frac{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1+x}{2+\sqrt{x^2+3}}}{x-1}\right)$$

$$=\lim_{x\to1}\left(a+\frac{\sqrt{x^2+3}-2x}{2\left(2+\sqrt{x^2+3}\right)(x-1)}\right)=\lim_{x\to1}\left(a+\frac{3\left(1-x^2\right)}{2\left(2+\sqrt{x^2+3}\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2x\right)(x-1)}\right)=0$$

$\therefore a=\dfrac{3}{16}$