高等数学A

第3章 一元函数积分学

3.2 定积分

3.2.1 曲边梯形的面积•变速直线运动的路程
3.2.2 定积分的概念
3.2.3 定积分的简单性质•中值定理

中南大学开放式精品示范课堂高等数学建设组

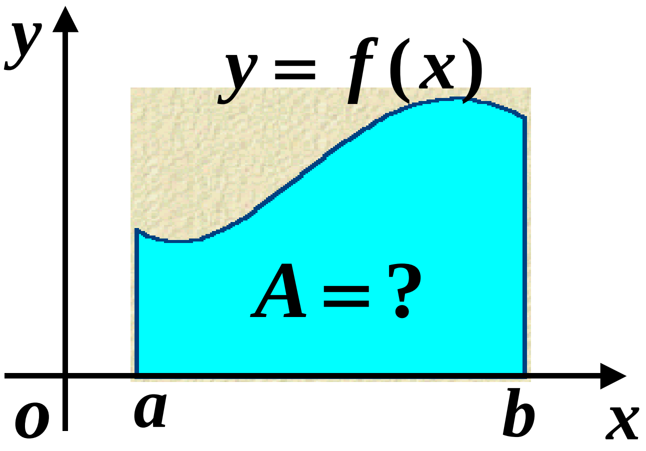
3. 2 定积分

定积分的概念与性质

一、曲边梯形的面积•变速直线运动的路程

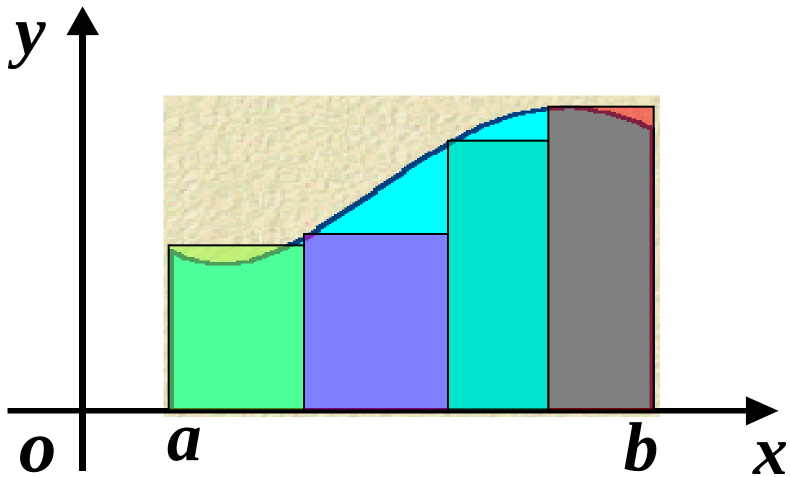
实例1 （求曲边梯形的面积）

曲边梯形由连续曲线 $y = f(x)(f(x) \geq 0)$、x轴与两条直线 $x = a$、$x = b$ 所围成.

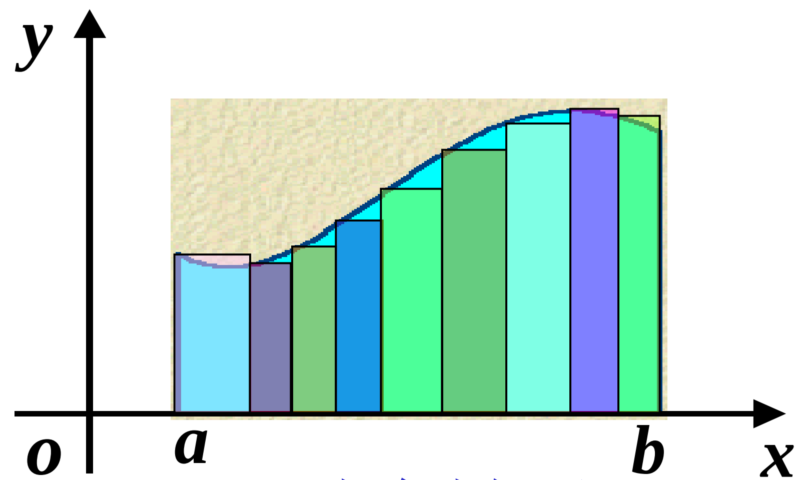


思考方法: 利用"矩形面积=底×高".

用矩形面积近似取代曲边梯形面积



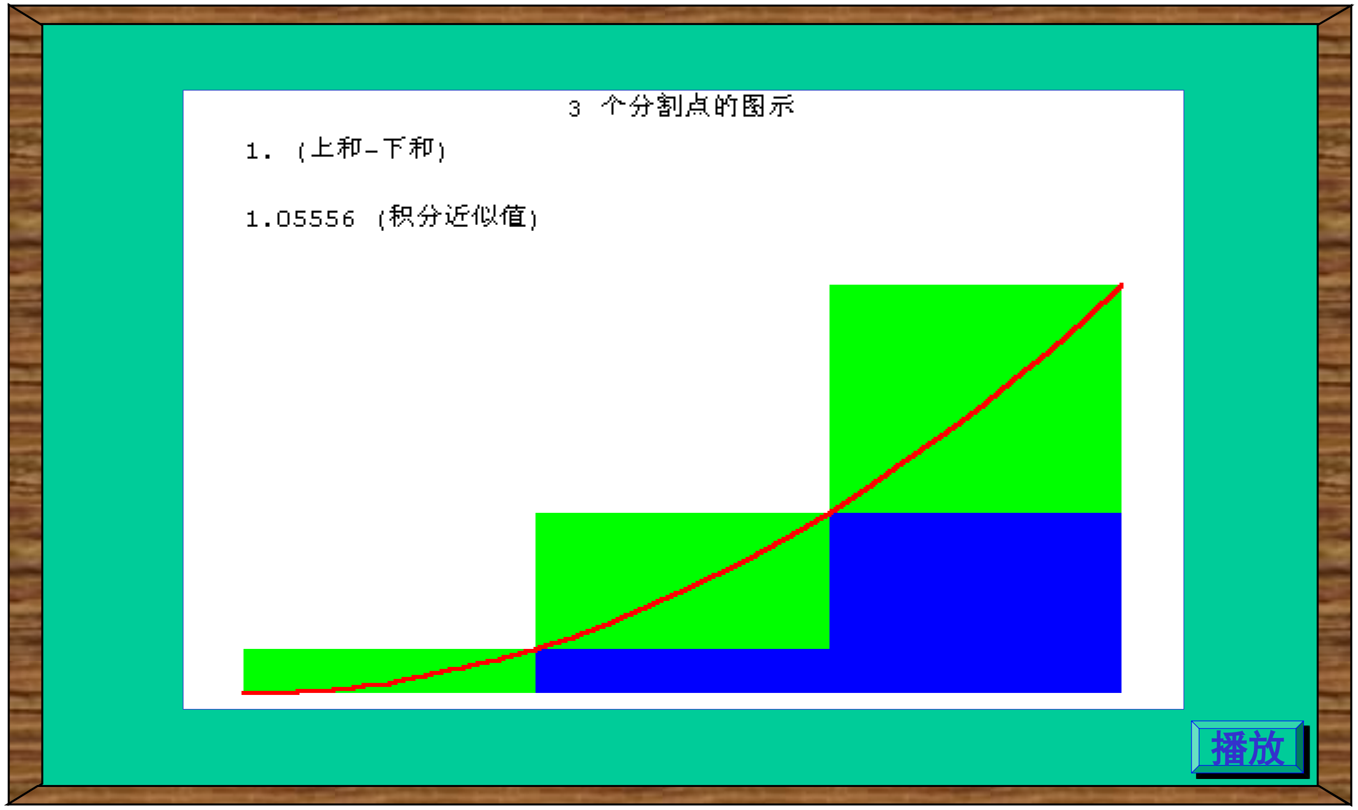
（四个小矩形）



（九个小矩形）

显然，小矩形越多，矩形总面积越接近曲边梯形面积.

观察下列演示过程，注意当分割加细时，矩形面积和与曲边三角形面积的关系.



曲边梯形如图所示，

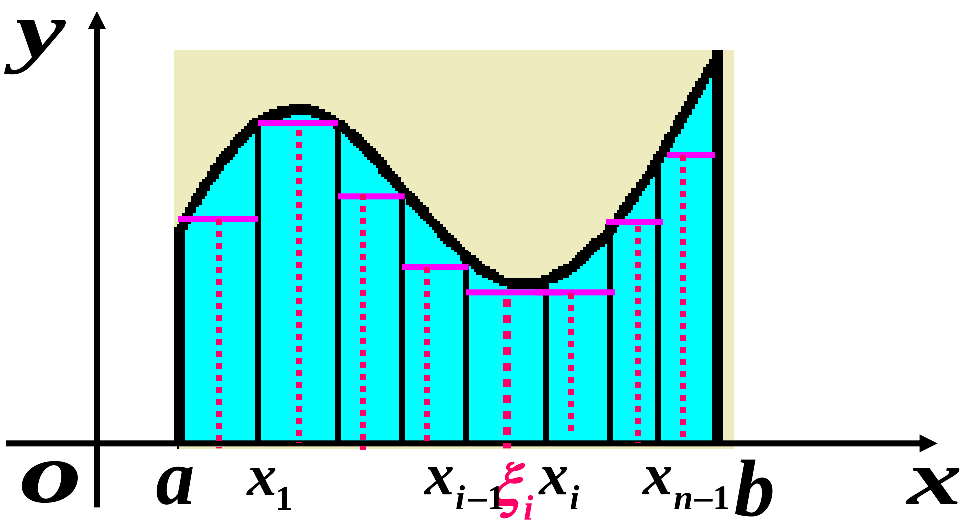
(1)在区间$[a,b]$内插入若干个分点，

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

把区间$[a,b]$分成n

个小区间$[x_{i-1}, x_i]$，

长度为$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$；



(2)在每个小区间$[x_{i-1}, x_i]$

上任取一点ξ_i，以$[x_{i-1}, x_i]$为底，$f(\xi_i)$为高的小矩形面积为

$$f(\xi_i)\Delta x_i \approx A_i$$

曲边梯形面积的近似值为

$$A=\sum_{i=1}^{n}A_i\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

(3)当分割无限加细,即小区间的最大长度

$\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots\Delta x_n\}$趋近于零$(\lambda\to 0)$时,

曲边梯形面积为 $A=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$

全过程为:分割、近似、求和、取极限.

实例2 （求变速直线运动的路程）

设某物体作直线运动,已知速度$v=v(t)$是时间间隔$[T_1,T_2]$上t的一个连续函数,且$v(t)\geq 0$,求物体在这段时间内所经过的路程.

思路：把整段时间分割成若干小段，每小段上速度看作不变，求出各小段的路程再相加，便得到路程的近似值，最后通过对时间的无限细分过程求得路程的精确值.

（1）分割 $T_1 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = T_2$

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1} \qquad \Delta s_i \approx v(\tau_i)\Delta t_i$$

部分路程值　　某时刻的速度

（2）求和 $s \approx \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i$

（3）取极限 $\lambda = \max\{\Delta t_1, \Delta t_2, \cdots, \Delta t_n\}$

路程的精确值 $s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i$

注意: 上述两例的共同点

(1) 所求量与一个函数及区间有关.

面积$A-----f(x)$与$[a,b]$

路程$S-----v(t)$与$[T_1,T_2]$

(2) 变与不变的矛盾.

(3) 处理方法一样: 分割、近似求和、取极限.

(4) 结果一样: 都是同一形式的和式的极限.

二、 定积分的概念、定积分的几何意义

1.定义 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，

(1) 在 $[a,b]$ 中任意插入若干个分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

把区间 $[a,b]$ 分成 n 个小区间，各小区间的长度依次为

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad (i = 1, 2, \cdots),$$

(2)在各小区间上任取 一点 ξ_i（$\xi_i \in \Delta x_i$），

作乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i \quad (i = 1, 2, \cdots)$

并作和 $S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$，

(3) 记 $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$，如果不论对 $[a,b]$

怎样的分法，也不论在小区间$[x_{i-1}, x_i]$上点ξ_i怎样的取法，

只要当$\lambda \to 0$时，和S总趋于确定的极限I，

我们称这个极限I为函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的**定积分**，

记为

积分上限

$$\int_a^b \boxed{f(x)dx} = I = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

积分和

积分下限

被积函数

被积表达式

积分变量

$[a,b]$积分区间

注意：(1) 积分值仅与被积函数及积分区间有关，

而与积分变量的字母无关.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$$

如果存在, 它就是一个确定的数值!

（2） 当函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上的定积分存在时，

称 $f(x)$在区间$[a,b]$上可积.

(3) 规定：当$a>b$时，$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$，

当$a=b$时，$\int_a^b f(x)dx = \int_a^a f(x)dx = 0$.

(4)当$\lambda \to 0$时, $n \to \infty$; 但$n \to \infty$时不一定有$\lambda \to 0$.

(5)曲边梯形的面积 $A = \int_a^b f(x)dx$, 路程 $S = \int_{T_1}^{T_2} v(t)dt$.

(6) 定义中区间的分法和ξ_i 的取法是任意的.

若对区间的不同的分法与ξ_i的不同的取法所得到的积分和的极限不同或不存在,则$f(x)$在区间上不可积.

如Dirichlet函数的讨论.

若定积分存在, 则可用特殊的区间分法和点的取法来计算定积分.

(7)定积分的存在性有以下两个定理(不加证明)

定理1 若$f(x)$在$[a,b]$上可积,则$f(x)$在$[a,b]$上有界.

定理2 若$f(x)$在$[a,b]$上满足下列条件之一,
则$f(x)$在$[a,b]$上可积:

(1) $f(x)$在$[a,b]$上连续;

(2) $f(x)$在$[a,b]$上只有有限个第一类间断点;

(3) $f(x)$在$[a,b]$上单调.

(8)定积分是一个构造性的定义,可利用定义求一些简单函数的定积分;同时可利用定义求n项和的极限.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f[a+\frac{i(b-a)}{n}]\cdot\frac{b-a}{n}$$

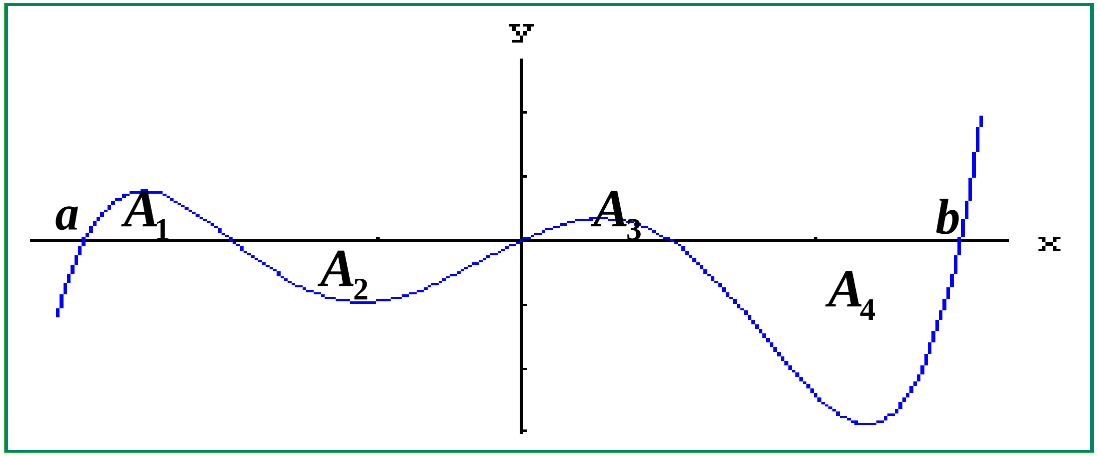
$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n})\cdot\frac{1}{n}$$

2.定积分的几何意义

$$f(x)>0,\ \int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=A \quad \text{曲边梯形的面积}$$

$$f(x)<0,\ \int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=-\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left|f(\xi_i)\right|\Delta x_i=-A$$

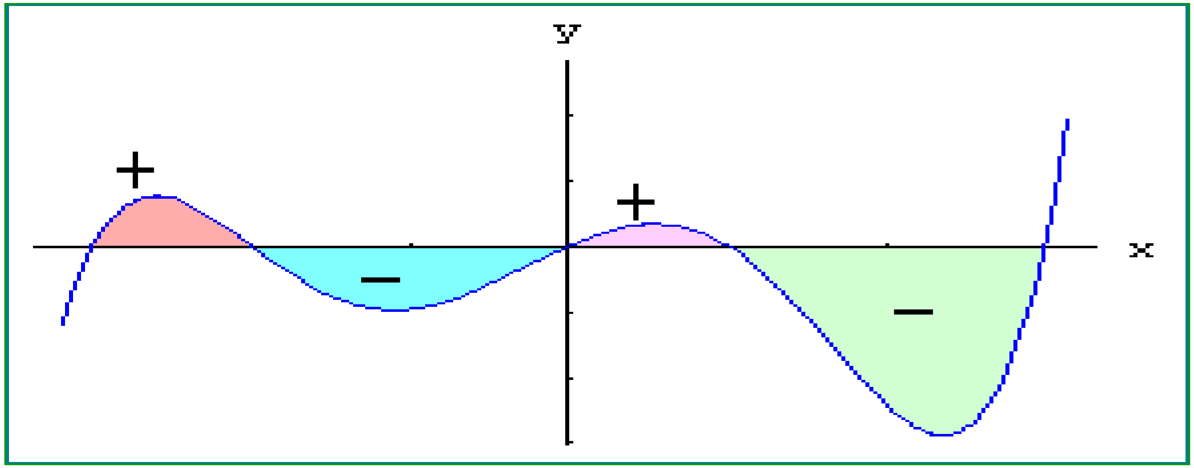
曲边梯形的面积的负值



$$\int_a^b f(x)dx=A_1-A_2+A_3-A_4$$

几何意义：

它是介于 x 轴、函数 $f(x)$ 的图形及两条直线 $x=a, x=b$ 之间的各部分面积的代数和．在 x 轴上方的面积取正号；在 x 轴下方的面积取负号．



3.定积分的概念习例

例1　利用定义计算定积分$\int_a^b e^x dx$.

例2　已知$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx=\frac{\pi}{6}$,求

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right).$$

例3　利用定积分的定义计算 $y=x+1, x=1,$ $x=2, y=0$所围成的图形的面积.

例 1　利用定义计算定积分$\int_a^b e^x dx$.

解　(1)将$[a,b]$分成n等分,各小区间长度为$\Delta x_i = \dfrac{b-a}{n}$,

分点为$x_i = a + \dfrac{i(b-a)}{n}, (i = 1,2,\cdots,n)$;

(2)取ξ_i为区间的右端点,即$\xi_i = x_i = a + \dfrac{i(b-a)}{n}$,则

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} e^{\xi_i}\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} e^{a+\frac{i(b-a)}{n}} \cdot \frac{b-a}{n}$$

$$= \frac{b-a}{n} \cdot e^a \cdot \sum_{i=1}^{n} e^{\frac{i(b-a)}{n}} = \frac{b-a}{n} \cdot e^a \cdot \frac{e^{\frac{b-a}{n}}(1-e^{b-a})}{1-e^{\frac{b-a}{n}}}$$

$$\therefore \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\cdot e^a\cdot\frac{e^{\frac{b-a}{n}}(e^{b-a}-1)}{e^{\frac{b-a}{n}}-1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\cdot e^a\cdot\frac{(e^{b-a}-1)}{\frac{b-a}{n}}$$

$$=e^b-e^a$$

$$\therefore \int_a^b e^x dx = e^b - e^a.$$

例2 已知$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx = \frac{\pi}{6}$,求

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right).$$

解

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4n^2-i^2}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{i}{n}\right)^2}}\cdot\frac{1}{n}$$

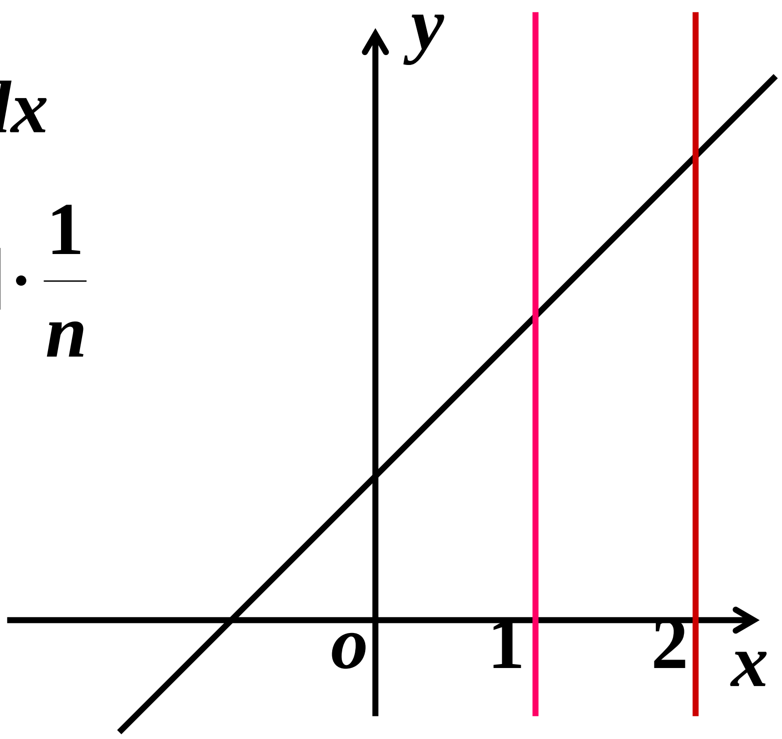
$$=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx=\frac{\pi}{6}.$$

例3 利用定积分的定义计算 $y = x + 1, x = 1, x = 2, y = 0$所围成的图形的面积.

解 依题意$S = \int_1^2 (x+1)dx$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[(1+\frac{i}{n})+1]\cdot\frac{1}{n}$$

$$= \frac{5}{2}.$$



三、定积分的简单性质•中值定理

性质1 $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$

证 $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)]\Delta x_i$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \pm \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i$$

$$= \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

(此性质可以推广到有限多个函数作和的情况)

(定积分对积分区间具有可加性)

性质2 $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ (k 为常数).

证 $\int_a^b kf(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} kf(\xi_i)\Delta x_i$

$= \lim_{\lambda\to 0} k\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = k\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

$= k\int_a^b f(x)dx.$

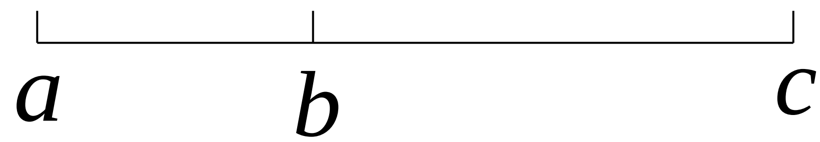
性质3　　假设$a<c<b$

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

补充：不论 a,b,c 的相对位置如何，上式总成立.

当 a,b,c 的相对位置任意时，例如 $a<b<c$，

则有



$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_b^c f(x)\mathrm{d}x$$

$$\therefore\quad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x-\int_b^c f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

性质4 $\int_a^b 1\cdot dx = \int_a^b dx = b-a.$ $\int_a^b c dx = c(b-a)$

性质5 如果在区间$[a,b]$上$f(x)\geq 0$,

则$\int_a^b f(x)dx \geq 0.\quad (a<b)$

证 $\because\ f(x)\geq 0,\ \therefore\ f(\xi_i)\geq 0,\quad (i=1,2,\cdots,n)$

$\because\ \Delta x_i \geq 0,\qquad \therefore\ \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \geq 0,$

$\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$

$\therefore\ \int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \geq 0.$

性质5的推论1：

（1）如果在区间$[a,b]$上$f(x) \le g(x)$，

则$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$. $\quad (a < b)$

证 $\because f(x) \le g(x)$, $\therefore g(x) - f(x) \ge 0$,

$$\therefore \int_a^b [g(x) - f(x)]dx \ge 0,$$

$$\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \ge 0,$$

于是 $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

性质5的推论2：

（2） $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx. \quad (a<b)$

证 $\because -|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|,$

$\therefore -\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx,$

即 $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$

说明：$|f(x)|$在区间$[a,b]$上的可积性是显然的.

性质6 设M及m分别是函数

$f(x)$在区间$[a,b]$上的最大值及最小值，

则 $$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

证 $\because m \le f(x) \le M,$

$$\therefore \int_a^b m dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M dx,$$

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

（此性质可用于估计积分值的大致范围）

性质7（定积分中值定理）

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，

则在积分区间 $[a,b]$ 上至少存在一个点 ξ，

使 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$. $(a \le \xi \le b)$

积分中值公式

证 $\because\ m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

$$\therefore\ m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$$

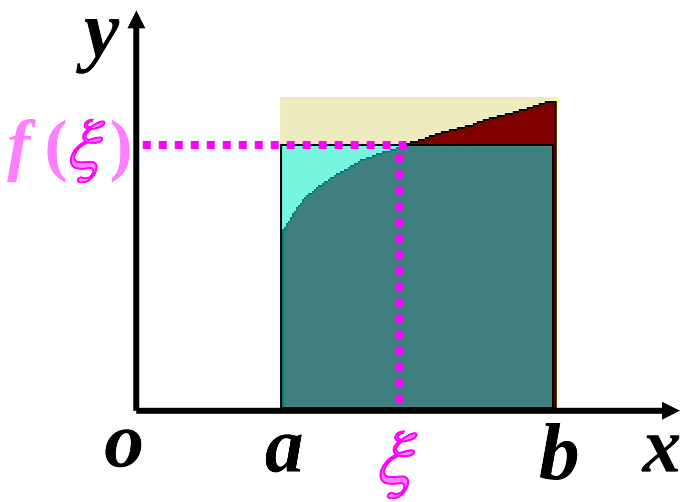
由闭区间上连续函数的介值定理知

在区间$[a,b]$上至少存在一个点ξ，

使 $$f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx,$$

即 $$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a). \quad (a\le\xi\le b)$$

积分中值公式的几何解释：

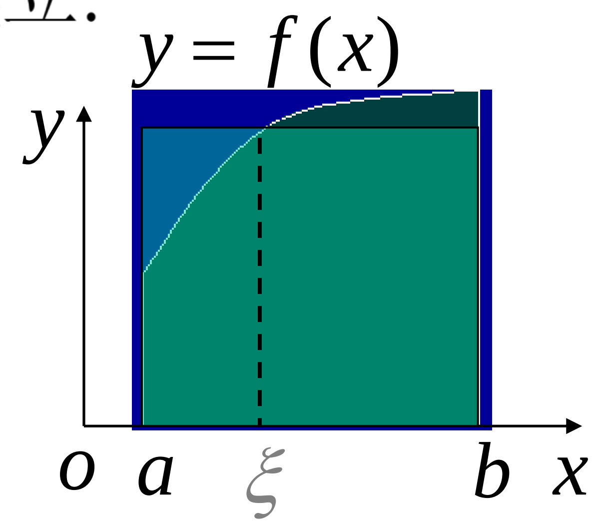


在区间$[a,b]$上至少存在一个点ξ，使得以区间$[a,b]$为底边，以曲线$y=f(x)$为曲边的曲边梯形的面积等于同一底边而高为$f(\xi)$的一个矩形的面积。

说明:

- 积分中值定理对 $a<b$ 或 $a>b$ 都成立.

- 可把 $\dfrac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a}=f(\xi)$



理解为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的平均值. 因

$$\frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a}=\frac{1}{b-a}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\frac{b-a}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)$$

故它是有限个数的平均值概念的推广.

定积分的性质习例

例 4 比较积分值$\int_0^{-2} e^x dx$和$\int_0^{-2} x dx$的大小.

例 5 估计积分$\int_0^{\pi} \frac{1}{3+\sin^3 x} dx$的值.

例 6 不通过计算能否得出下面积分的值：$\int_{-1}^{1} x^3 dx$.

例 7 设$f(x)$可导，且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$，

求$\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+2} t\sin\frac{3}{t} f(t)dt$.

例 4 比较积分值 $\int_0^{-2} e^x dx$ 和 $\int_0^{-2} x dx$ 的大小.

解　令 $f(x) = e^x - x, \quad x \in [-2, 0]$

$\because \ f(x) > 0, \qquad \therefore \ \int_{-2}^{0} (e^x - x) dx > 0,$

$\therefore \ \int_{-2}^{0} e^x dx > \int_{-2}^{0} x dx,$

于是 $\int_0^{-2} e^x dx < \int_0^{-2} x dx.$

例 5 估计积分 $\int_0^{\pi} \frac{1}{3+\sin^3 x} dx$ 的值.

解

$$f(x) = \frac{1}{3+\sin^3 x}, \qquad \forall\, x \in [0, \pi],$$

$$0 \le \sin^3 x \le 1, \qquad \frac{1}{4} \le \frac{1}{3+\sin^3 x} \le \frac{1}{3},$$

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{4} dx \le \int_0^{\pi} \frac{1}{3+\sin^3 x} dx \le \int_0^{\pi} \frac{1}{3} dx,$$

$$\therefore \frac{\pi}{4} \le \int_0^{\pi} \frac{1}{3+\sin^3 x} dx \le \frac{\pi}{3}.$$

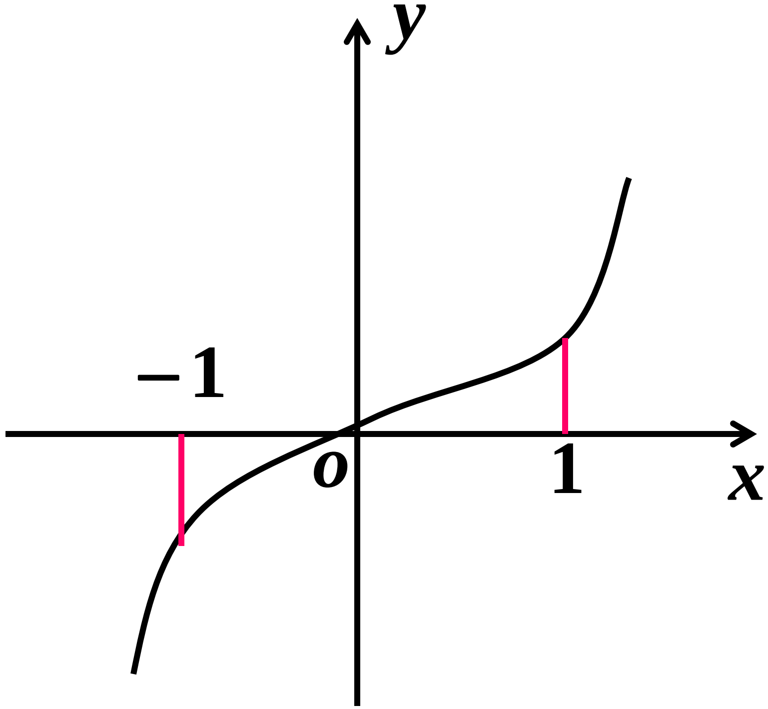
例 6 不通过计算能否得出下面积分的值：$\int_{-1}^{1} x^3 dx$.

解 能！ 如图.

$$\int_{-1}^{0} x^3 dx = -\int_{0}^{1} x^3 dx,$$

$$\therefore \int_{-1}^{0} x^3 dx + \int_{0}^{1} x^3 dx = 0$$

即 $\int_{-1}^{1} x^3 dx = 0.$



例 7 设 $f(x)$可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$，

求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+2} t\sin\frac{3}{t} f(t)dt.$

解 由积分中值定理知有$\xi\in[x, x+2]$，

使 $\int_x^{x+2} t\sin\frac{3}{t} f(t)dt=\xi\sin\frac{3}{\xi} f(\xi)(x+2-x)$，

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+2} t\sin\frac{3}{t} f(t)dt=2\lim_{\xi\to+\infty}\xi\sin\frac{3}{\xi} f(\xi)$$

$$=2\lim_{\xi\to+\infty}3f(\xi)=6.$$

内　容　小　结

1. 定积分的实质：特殊和式的极限.

2. 定积分的思想和方法：

分割 → 化整为零

⇓　　　　⇓ 求近似以直（不变）代曲（变）

求和 → 积零为整

⇓　　　　⇓ 取极限

取极限 → 精确值——定积分

3. 定积分的性质