高等数学A

第5章 空间解析几何

5.4 平面与空间直线

5.4.6 两直线的夹角
5.4.7 直线与平面的夹角
5.4.8 平面束

中南大学开放式精品示范课堂高等数学建设组

5. 4 平面与空间直线

平面与空间直线

- 空间直线及其方程
  - 两直线的夹角　习例1-2
  - 直线与平面的夹角及习例3
  - 补充内容1---点到直线的距离
  - 补充内容2---异面直线的距离
  - 补充内容3---平面束方程　习例4-5
- 小结与思考题1-2

习题课
- 内容小结
- 题型小结
- 典型习例

一、两直线的夹角

定义　两直线的方向向量的夹角（锐角）称之为两直线的夹角.

直线 L_1： $\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$,

直线 L_2： $\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$,

$$\cos(L_1\widehat{,}L_2)=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$$

两直线的夹角公式

两直线的位置关系：

$$(1)\quad L_1 \perp L_2 \Longleftrightarrow m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0,$$

$$(2)\quad L_1 \,//\, L_2 \Longleftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2},$$

例如，直线 L_1： $\vec{s}_1 = \{1, -4, 0\},$

直线 L_2： $\vec{s}_2 = \{0, 0, 1\},$

$\therefore \vec{s}_1 \perp \vec{s}_2$， 即 $L_1 \perp L_2$.

习例

例 1　求过点$(-3,2,5)$且与两平面$x-4z=3$和$2x-y-5z=1$的交线平行的直线方程.

例 2　求过点$M(2,1,3)$且与直线$\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$垂直相交的直线方程.

例 1　求过点$(-3,2,5)$且与两平面$x-4z=3$和$2x-y-5z=1$的交线平行的直线方程.

解　设所求直线的方向向量为 $\vec{s}=\{m,n,p\}$,

根据题意知　$\vec{s}\perp\vec{n}_1$，　$\vec{s}\perp\vec{n}_2$，

取　　$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\{-4,-3,-1\}$,

所求直线的方程　$$\frac{x+3}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-5}{1}.$$

例 2 求过点 $M(2,1,3)$ 且与直线 $\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线方程.

解 先作一过点 M 且与已知直线垂直的平面 Π

$$3(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0$$

再求已知直线与该平面的交点 N,

令 $\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}=t \quad \Rightarrow \begin{cases} x=3t-1 \\ y=2t+1. \\ z=-t \end{cases}$

代入平面方程得 $t=\frac{3}{7}$， 交点 $N(\frac{2}{7},\frac{13}{7},-\frac{3}{7})$

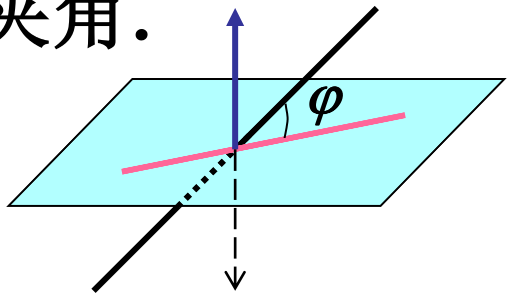
取所求直线的方向向量为 $\overrightarrow{MN}$

$$\overrightarrow{MN}=\{\frac{2}{7}-2,\frac{13}{7}-1,-\frac{3}{7}-3\}=\{-\frac{12}{7},\frac{6}{7},-\frac{24}{7}\},$$

所求直线方程为 $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-3}{4}.$

二、直线与平面的夹角

定义　直线和它在平面上的投影直线的夹角 φ 称为直线与平面的夹角.



$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$$

$$L: \quad \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}, \quad \vec{s} = \{m, n, p\},$$

$$\Pi: \quad Ax + By + Cz + D = 0, \quad \vec{n} = \{A, B, C\},$$

$$(\vec{s}, \hat{\ } \vec{n}) = \frac{\pi}{2} - \varphi \qquad (\vec{s}, \hat{\ } \vec{n}) = \frac{\pi}{2} + \varphi$$

$$\sin\varphi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \left|\cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)\right|.$$

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

直线与平面的夹角公式

直线与平面的位置关系：

(1) $L \perp \Pi \iff \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.$

(2) $L // \Pi \iff Am + Bn + Cp = 0.$

例 3 设直线 $L:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$，平面 $\Pi: x-y+2z=3$，求直线与平面的夹角.

解 $\vec{n}=\{1,-1,2\}$, $\vec{s}=\{2,-1,2\}$,

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

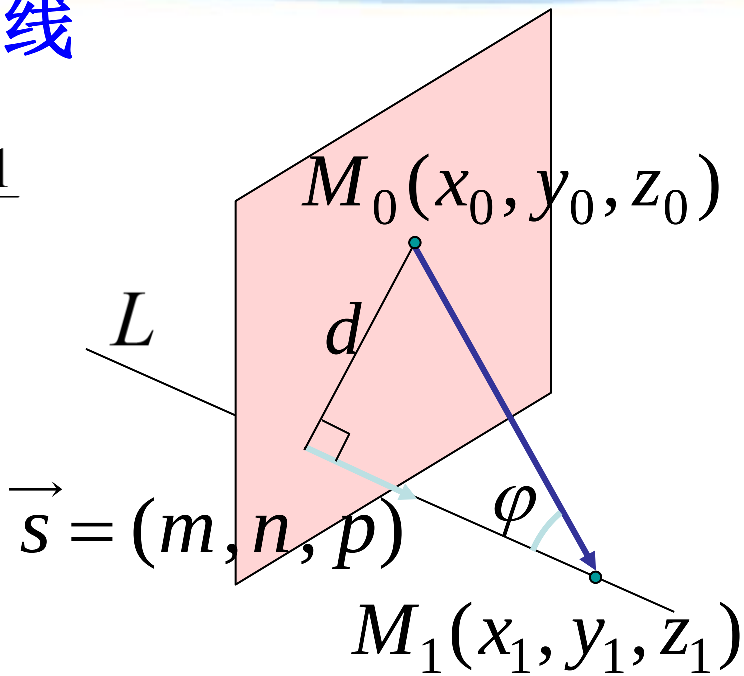
$$=\frac{|1\times 2+(-1)\times(-1)+2\times 2|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{9}}=\frac{7}{3\sqrt{6}}.$$

$\therefore\quad \varphi=\arcsin\dfrac{7}{3\sqrt{6}}$ 为所求夹角.

补充1点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 到直线

$$L: \frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p}$$

的距离为

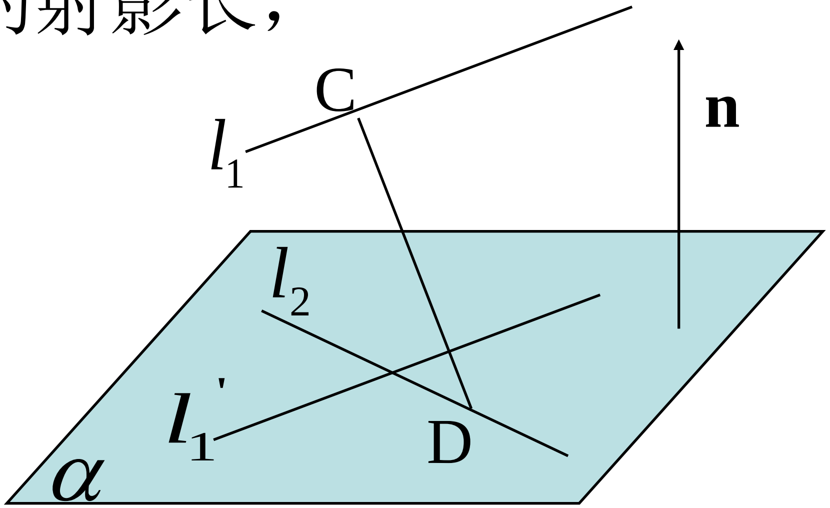


$$d = \frac{|\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{s}|}{|\vec{s}|}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}} \left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ m & n & p \end{vmatrix} \right\|$$

补充2 空间两异面直线的距离

设 l_1, l_2 为两异面直线，其公共法向量为 **n**, C、D分别是 l_1, l_2 上任一点，则 l_1, l_2 间的距离可转化为向量 $\overrightarrow{CD}$ 在 **n** 上的射影长，



故

$$d = \frac{|\overrightarrow{CD} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|\overrightarrow{CD} \cdot (\vec{s_1} \times \vec{s_2})|}{|\vec{s_1} \times \vec{s_2}|}$$

$$= \frac{|(\vec{s_1}, \vec{s_2}, \overrightarrow{CD})|}{|\vec{s_1} \times \vec{s_2}|}$$

即两异面直线间的距离等于两异面直线上分别任取两点的向量和公垂线方向向量的数量积的绝对值与公垂线的方向向量模的比值.

补充3 过直线L的平面束方程

设直线L：$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=L_1(x, y, z)=0, & \pi_1 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=L_2(x, y, z)=0, & \pi_2 \end{cases}$

A_1, B_1, C_1与A_2, B_2, C_2不成比例，所以对于任意一个实数λ，方程

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0,$$

称为过直线L的平面束方程.

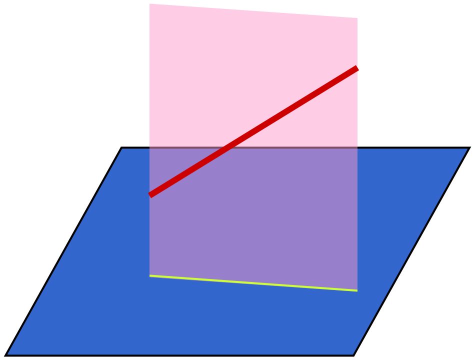
习例

例4. 求直线$\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$在平面 $x+y+z=0$ 上的投影直线方程.

例5. 求过直线***L*:**$\begin{cases} x+5y+z=0 \\ x-z+4=0 \end{cases}$ 且与平面 $x-4y-8z+12=0$夹成 $\dfrac{\pi}{4}$角的平面方程.

例4. 求直线$\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$在平面 $x+y+z=0$

上的投影直线方程.



提示：过已知直线的平面束方程

$$x+y-z-1+\lambda(x-y+z+1)=0$$

即 $(1+\lambda)x+(1-\lambda)y+(-1+\lambda)z+(-1+\lambda)=0$

从中选择 λ 使其与已知平面垂直：

$$(1+\lambda)\cdot 1+(1-\lambda)\cdot 1+(-1+\lambda)\cdot 1=0$$

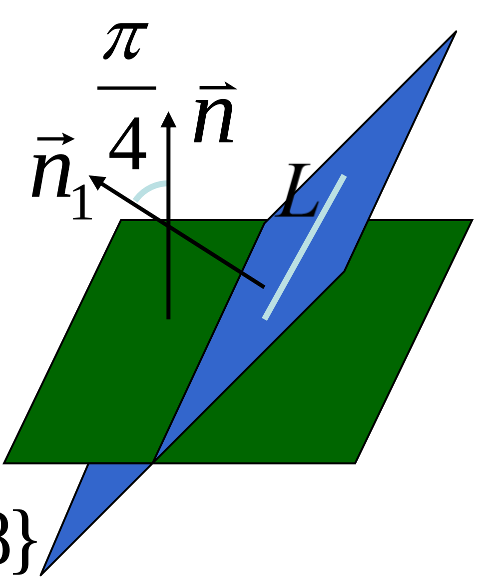
得 $\lambda=-1$, 从而得投影直线方程

$$\begin{cases} y-z-1=0 \longleftarrow \text{这是投影平面} \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

例5. 求过直线L: $\begin{cases} x+5y+z=0 \\ x-z+4=0 \end{cases}$ 且与平面 $x-4y-8z+12=0$ 夹成 $\dfrac{\pi}{4}$ 角的平面方程.

提示: 过直线 L 的平面束方程

$$(1+\lambda)x+5y+(1-\lambda)z+4\lambda=0$$



其法向量为 $\vec{n}_1=\{1+\lambda,5,1-\lambda\}$.

题中所给平面的法向量为 $\vec{n}=\{1,-4,-8\}$

选择 λ 使 $\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{|\vec{n}\cdot\vec{n}_1|}{|\vec{n}||\vec{n}_1|} \Longrightarrow \lambda=-\dfrac{3}{4}$

从而得所求平面方程 $x+20y+7z-12=0$.

三、小结

$$\text{平面的方程}\begin{cases}\text{点法式方程.}\\ \text{一般方程.}\\ \text{截距式方程.}\end{cases}$$

（熟记平面的几种特殊位置的方程）

两平面的夹角．（注意两平面的位置特征）

点到平面的距离公式.

空间直线的一般方程.

空间直线的对称式方程与参数方程.

两直线的夹角. （注意两直线的位置关系）

直线与平面的夹角.

（注意直线与平面的位置关系）

思考题1 若平面 $x+ky-2z=0$ 与平面

$2x-3y+z=0$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$，求 $k=?$

解

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1\times 2+k\times(-3)-2\times 1}{\sqrt{1^2+k^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{-3k}{\sqrt{5+k^2}\cdot\sqrt{14}},\quad \Rightarrow k=\pm\frac{\sqrt{70}}{2}.$$

思考题2 在直线方程$\dfrac{x-4}{2m}=\dfrac{y}{n}=\dfrac{z-2}{6+p}$中，$m$、$n$、$p$各怎样取值时，直线与坐标面$xoy$、$yoz$都平行.

解 $\vec{s}=\{2m,n,6+p\}$, 且有$\vec{s}\neq\vec{0}$.

$$\because \vec{s}\cdot\vec{k}=0,\qquad \vec{s}\cdot\vec{i}=0,$$

$$\Rightarrow\begin{cases}6+p=0\\2m=0\end{cases}\qquad \therefore\ p=-6,\quad m=0,$$

$$\because \vec{s}\neq\vec{0},\qquad \therefore n\neq 0,$$

故当$m=0$，$n\neq 0$，$p=-6$ 时结论成立.

1.4 平面及其方程

一、填空:

1. 过点 $(3,2,-7)$ 且与 xoz 面平行的平面方程为___   __.

2. 过 z 轴及点 $(1,1,-1)$ 的平面方程为__   _____.

3. 过点 $A(4,0,-2)$ 和 $B(5,1,7)$ 且平行于 z 轴的平面方程为__   ___.

4. 点 $(-2,4,-3)$ 到平面 $2x-y+2z-1=0$ 的距离为____   ____.

5. 两平面 $x-2y-2z-12=0$ 与 $x-2y-2z-6=0$ 之间的距离为

6. 过点$(4,3,2)$，且在各坐标轴上有相同截距的平面方程为__   ____.

二、求过点 $M_1(2,3,0)$、 $M_2(-2,-3,4)$ 和 $M_3(0,2,0)$ 的平面方程.

三、过点(1,0,1)作一平面与平面 $x-2y+3z+2=0$ 和平面 $x+2y-3z-2=0$ 都垂直，求此平面方程.

四、 求过 x 轴且与平面 $\sqrt{5}x+2y+z+6=0$ 成 $\dfrac{\pi}{3}$ 角的平面方程

五、 求过点 $M_1(1,-1,2)$ 和 $M_2(2,1,3)$，且与平面 $x+y-z+1=0$ 垂直的平面.

1.5 空间直线及其方程

一、填空:

1. 过两点 $M_1(3,-2,1)$ 和 $M_2(-1,0,2)$ 的直线方程为________________________________.

2. 过点 $P(-2,-3,1)$ 且平行于 y 轴的直线方程为

3. 直线 $\dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y+3}{-2}=\dfrac{z-1}{3}$ 与平面 $x+2y-5z-12=0$ 的交点为

4. 过点 $(2,4,-1)$ 且与直线 $L_1:\begin{cases}x+2z-1=0\\ y-3z-2=0\end{cases}$ 平行的直线方程是

5.过点 $M_0(0,4,2)$，且与平面 $\pi_1: x+y-2z-1=0$，$\pi_2: x+2y-z+1=0$ 都平行的直线方程为

二、试求空间直线$\begin{cases} x-y+z+5=0 \\ 3x-8y+4z+4=0 \end{cases}$的对称式方程和参数方程.

三、求过点$(1,1,4)$平行于平面$3x-4y+z-10=0$，又与直线$\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{2}$相交的直线方程.

四、一平面垂直于平面 $z=0$，并且通过从点 $(-1,-2,1)$ 到直线 $\begin{cases} y-z+1=0 \\ x=0 \end{cases}$ 的垂线，

求此平面方程.

五 求点$P(3,1,3)$到直线$L:\begin{cases} x+y-z+1=0 \\ 2x-y+z-4=0 \end{cases}$的距离.

解法 2：直线 L 的对称式方程为 $\frac{x-1}{0}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-0}{1}$， $\vec{s}=(0,1,1)$

一、内容小结

1. 向量代数
- 向量的概念
- 向量的线性运算
- 向量的表示法
- 数量积
- 向量积
- 混合积

2. 空间解析几何
- 直线及方程
- 平面及方程
- 直线方程的转化
- 距离
- 平面直线的关系
- 投影及公垂线

二、题型及方法

1. 向量的运算及应用

2. 求空间直线方程

3. 求平面方程

4. 求距离

5. 求投影

三、典型习例

例1 化简下列各式：

(1) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$

(2) $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$

例2 在xoy平面上已知三点$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3)$，

试证ΔABC的面积$S=\pm\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$.

例3 求点$P_1(3,1,-4)$关于直线$l:\begin{cases} x-y-4z+9=0 \\ 2x+y-2z=0 \end{cases}$

的对称点P_2的坐标.

例4 证明直线$l_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-5}{4}$与

$l_2:\dfrac{x-7}{3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-1}{-2}$位于同一平面内，

并求这平面方程以及两直线之间的夹角.

例5 已知直线l_1与l_2的方程分别为

$$l_1:\begin{cases}x+y+z+1=0\\2x-y+3z+4=0\end{cases}\text{和}\ l_2:\begin{cases}x=-1+2t\\y=-t\\z=2-2t\end{cases}$$

(1)证明l_1与l_2是异面直线;(2)求l_1与l_2间的距离;

(3)求l_1与l_2的公垂线方程.

例1 化简下列各式：

(1) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$

(2) $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$

解 (1) 原式 $=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2$

$$=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\sin^2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\cos^2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2.$$

(2) 原式 $=2\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}$

$$=2\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$$

$$=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}.$$

例2 在xoy平面上已知三点$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3)$,

试证ΔABC的面积$S=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$.

证 $$\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{AC}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}\boldsymbol{k},$$

从而$S=\frac{1}{2}|\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{AC}|=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}$

$$=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

例3 求点$P_1(3,1,-4)$关于直线$l:\begin{cases} x-y-4z+9=0 \\ 2x+y-2z=0 \end{cases}$的对称点$P_2$的坐标.

解　直线l的方向向量是$s=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}=6i-6j+3k,$

过点$P_1(3,1,-4)$作垂直于直线l的平面π，其方程为

$$6(x-3)-6(y-1)+3(z+4)=0,$$

即$2x-2y+z=0.$

P_1在直线l上的垂足P即为平面π与直线l的交点，

联立方程组$\begin{cases} 2x-2y+z=0 \\ x-y-4z+9=0 \\ 2x+y-2z=0 \end{cases}$，求得$P$的坐标为$(1,2,2)$.

因P是线段P_1P_2的中点，设$P_2(x_2,y_2,z_2)$，由中点公式得

$$\frac{3+x_2}{2}=1, \frac{1+y_2}{2}=2, \frac{-4+z_2}{2}=2,$$

解得$x_2=-1, y_2=3, z_2=8$,

所以P_1关于直线l的对称点为$P_2(-1,3,8)$.

例4 证明直线$l_1: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-5}{4}$与

$l_2: \dfrac{x-7}{3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-1}{-2}$位于同一平面内,

并求这平面方程以及两直线之间的夹角.

解 记$M_1(1,-2,5), M_2(7,2,1), s_1=\{2,-3,4\}, s_2=\{3,2,-2\}$,则

$$(\overrightarrow{M_1M_2}, s_1, s_2)=\begin{vmatrix} 6 & 4 & -4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}=0,$$

故$\overrightarrow{M_1M_2}, s_1, s_2$三向量共面,

从而直线l_1与l_2位于同一平面π.

$$\pi\text{的法向量可取}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{s}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -2\boldsymbol{i} + 16\boldsymbol{j} + 13\boldsymbol{k},$$

$$\text{则平面}\pi\text{的方程为：} -2(x-1) + 16(y+2) + 13(z-5) = 0,$$

$$\text{即} \quad 2x - 16y - 13z + 31 = 0.$$

$$\text{两直线}l_1\text{与}l_2\text{的夹角余弦}\cos(\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2) = \frac{|\boldsymbol{s}_1 \cdot \boldsymbol{s}_2|}{|\boldsymbol{s}_1||\boldsymbol{s}_2|} = \frac{8}{\sqrt{29}\sqrt{17}} = \frac{8}{\sqrt{493}},$$

$$\text{则两直线间的夹角为}\arccos\frac{8}{\sqrt{493}}.$$

例5 已知直线l_1与l_2的方程分别为

$$l_1:\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y+3z+4=0 \end{cases} \text{和} l_2:\begin{cases} x=-1+2t \\ y=-t \\ z=2-2t \end{cases}$$

(1)证明l_1与l_2是异面直线;(2)求l_1与l_2间的距离;

(3)求l_1与l_2的公垂线方程.

解 先将l_1化为标准方程,

解联立方程组:$\begin{cases} x+y=-z-1 \\ 2x-y=-3z-4 \end{cases}$,得

$$x=-\frac{4z+5}{3},\ y=\frac{z+2}{3},$$

令$z=1$得点$M_1(-3,1,1)$在l_1上,

$$l_1\text{的方向向量为}s_1=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=4i-j-3k,$$

故l_1的标准方程为: $\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{-3}$.

l_2的标准方程为: $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-2}{-2}$,

记$M_2(-1,0,2)$, $s_2=\{2,-1,-2\}$.

(1)因为$(\overrightarrow{M_1M_2}, s_1, s_2) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0,$

所以$\overrightarrow{M_1M_2}, s_1, s_2$不共面，$l_1$与$l_2$是异面直线.

(2)l_1与l_2的公垂线方向向量可取

$$s = s_1 \times s_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -i + 2j - 2k.$$

下面求公垂线的长度,即l_1与l_2之间的距离.

方法一

$$d=\left|\Pr j_{s}M_1M_2\right|=\frac{\left|M_1M_2\cdot s\right|}{|s|}=\frac{|2\cdot(-1)-1\cdot 2+1\cdot(-2)|}{\left|\sqrt{(-1)^2+2^2+(-2)^2}\right|}=2.$$

方法二

过l_1作平行于l_2的平面π,

则s为π的法向量,于是π的方程为

$$-(x+3)+2(y-1)-2(z-1)=0,$$

即$\pi: x-2y+2z+3=0.$

所求距离d等于M_2到平面π的距离,于是

$$d=\frac{|-1-2\cdot 0+2\cdot 2+3|}{\left|\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}\right|}=2.$$

(3)方法一

公垂线l的方向向量$s=\{-1,2,-2\}$,

过l_1与l的平面π_1的法向量可取

$$n_1=s_1\times s=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix}=8i+11j+7k,$$

则π_1的方程为$8(x+3)+11(y-1)+7(z-1)=0$,

即$8x+11y+7z+6=0$.

过l_2与l的平面π_2的法向量可取

$$n_2 = s_2 \times s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 6i + 6j + 3k,$$

则π_2的方程为$6(x+1)+6(y-0)+3(z-2)=0$,

即$2x+2y+z=0$.

于是公垂线l为π_1与π_2的交线,

其方程为$\begin{cases} 8x+11y+7z+6=0 \\ 2x+2y+z=0 \end{cases}$.

方法二

要求公垂线方程,需求出公垂线上的两点,

设$O_1(x_1,y_1,z_1)$,$O_2(x_2,y_2,z_2)$分别是公垂线l与l_1,l_2的交点(即垂足).

设公垂线l的参数方程为$\begin{cases} x=x_2-t \\ y=y_2+2t, \\ z=z_2-2t \end{cases}$

又因为$O_1(x_1,y_1,z_1)$在l上,其对应的参数设为t_1,

$$\text{则}\begin{cases} x_1 = x_2 - t_1 \\ y_1 = y_2 + 2t_1, \\ z_1 = z_2 - 2t_1 \end{cases}$$

又因为$O_2(x_2,y_2,z_2)$在l_2上,其对应的参数设为t_2,

$$\text{则}\begin{cases} x_2 = -1 + 2t_2 \\ y_2 = -t_2 \\ z_2 = 2 - 2t_2 \end{cases},$$

从而有$\begin{cases} x_1 = -1 + 2t_2 - t_1 \\ y_1 = -t_2 + 2t_1 \\ z_1 = 2 - 2t_2 - 2t_1 \end{cases}$，

代入l_1的方程$\begin{cases} x = -3 + 4t_1 \\ y = 1 - t_1 \\ z = 1 - 3t_1 \end{cases}$，　解得$t_1 = \dfrac{2}{3}, t_2 = \dfrac{4}{3}$.

所以$O_1(1,0,-2), O_2(\dfrac{5}{3},-\dfrac{4}{3},-\dfrac{2}{3})$,

于是公垂线l的方程为$\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+2}{-2}$.

并且利用两点间的距离求得公垂线的长$d = |O_1O_2| = 2$.