

第一章 质点运动学	(1)
§ 1.1 参照系与质点	(1)
§ 1.2 时间和长度的计量	(1)
§ 1.3 直线运动	(1)
§ 1.4 曲线运动	(4)
§ 1.5 切向加速度和法向加速度	(7)
§ 1.6 圆周运动 角位移、角速度和角加速度.....	(9)
§ 1.7 相对运动.....	(10)
本章综合例题	(11)
本章习题	(18)
第二章 静力学	(21)
§ 2.1 力和力矩.....	(21)
§ 2.2 质点和质点系的平衡 平衡的稳定性.....	(23)
§ 2.3 刚体和质心.....	(25)
§ 2.4 刚体的平衡.....	(26)
§ 2.5 静止流体的压强.....	(28)
§ 2.6 浮体平衡的稳定性.....	(29)
本章综合例题	(30)
本章习题	(38)
第三章 牛顿运动定律	(42)
§ 3.1 牛顿运动定律.....	(42)
§ 3.2 牛顿运动定律的应用.....	(43)
§ 3.3 伽利略相对性原理.....	(45)
§ 3.4 非惯性系中的惯性力.....	(46)
本章综合例题	(48)
本章习题	(56)
第四章 动量与角动量	(59)
§ 4.1 动量、冲量和动量定理.....	(59)
§ 4.2 动量守恒定律.....	(62)
§ 4.3 质心运动定律.....	(63)
§ 4.4 质点和质点系的角动量.....	(65)
§ 4.5 角动量定理和角动量守恒定律.....	(65)
§ 4.6 变质量体系的运动方程 火箭.....	(69)
本章综合例题	(71)
本章习题	(76)
第五章 功与能	(80)
§ 5.1 功和功率.....	(80)
§ 5.2 几种力的功 势能.....	(81)
§ 5.3 动能和动能定理.....	(87)
§ 5.4 机械能守恒定律.....	(88)

§ 5.5 碰撞	(91)
§ 5.6 开普勒定律	(93)
本章综合例题	(94)
本章习题	(101)
第六章 振动与波	(104)
§ 6.1 简谐振动	(104)
§ 6.2 阻尼振动	(109)
§ 6.3 受迫振动 共振	(110)
§ 6.4 简谐振动的合成	(110)
§ 6.5 机械波的形成与传播	(112)
§ 6.6 波动的描述方法	(112)
§ 6.7 简谐平面波的波动方程	(115)
§ 6.8 波的能量	(116)
§ 6.9 惠更斯原理 波的反射、折射和衍射	(117)
§ 6.10 波的叠加 波的干涉	(119)
§ 6.11 驻波	(120)
§ 6.12 多普勒效应	(121)
本章综合例题	(123)
本章习题	(129)
第七章 气体定律与分子动理论	(133)
一、气体定律	(133)
§ 7.1 平衡态与状态参量	(133)
§ 7.2 气体三条实验定律	(133)
§ 7.3 理想气体状态方程	(136)
§ 7.4 混合理想气体 道尔顿分压定律	(139)
二、分子动理论	(141)
§ 7.5 分子运动的基本概念	(141)
§ 7.6 气体分子热运动的图景和特征	(141)
§ 7.7 理想气体的压强公式	(142)
§ 7.8 温度的微观意义	(143)
§ 7.9 理想气体的内能	(144)
§ 7.10 分子平均碰撞数与平均自由程	(145)
三、液体的表面性质	(145)
§ 7.11 表面张力	(145)
§ 7.12 毛细现象	(146)
四、相变	(149)
§ 7.13 气液相变	(149)
§ 7.14 固液相变	(149)
§ 7.15 固气相变	(150)
§ 7.16 三相点	(150)
本章综合例题	(150)
本章习题	(159)
第八章 热力学定律	(162)

§ 8.1 热力学第零定律	(162)
§ 8.2 热力学第一定律	(162)
§ 8.3 热力学第一定律对理想气体热力学过程的应用	(164)
§ 8.4 循环过程	(168)
§ 8.5 热力学第二定律	(171)
§ 8.6 可逆过程和不可逆过程	(172)
本章综合例题	(172)
本章习题	(179)
第九章 静电场	(182)
§ 9.1 库仑定律	(182)
§ 9.2 电场与电场强度	(183)
§ 9.3 静电场的高斯定理	(185)
§ 9.4 电势	(187)
§ 9.5 静电场中的导体	(189)
§ 9.6 静电能	(193)
本章综合例题	(195)
本章习题	(217)
第十章 稳恒电流	(222)
§ 10.1 电流强度、电流密度与电流的连续性方程	(222)
§ 10.2 欧姆定律	(223)
§ 10.3 简单电路	(225)
§ 10.4 复杂电路 基尔霍夫方程组及电路定理	(226)
本章综合例题	(233)
本章习题	(245)
第十一章 磁场	(248)
§ 11.1 磁场与磁感应强度	(248)
§ 11.2 磁场对电流的作用 磁矩	(251)
§ 11.3 磁场的高斯定理和安培环路定理	(252)
§ 11.4 带电粒子在磁场中的运动	(255)
本章综合例题	(260)
本章习题	(266)
第十二章 电磁感应	(270)
§ 12.1 电磁感应定律	(270)
§ 12.2 动生电动势和感生电动势	(273)
§ 12.3 自感与互感	(276)
§ 12.4 交流电	(279)
本章综合例题	(285)
本章习题	(290)
第十三章 光的反射与折射	(294)
§ 13.1 光的直进性	(294)
§ 13.2 光的反射与折射	(295)
§ 13.3 费马原理	(298)

本章综合例题	(300)
本章习题	(305)
第十四章 透镜成像	(307)
§ 14.1 单球面折射	(307)
§ 14.2 薄透镜	(310)
§ 14.3 光学仪器	(314)
本章综合例题	(317)
本章习题	(321)
第十五章 狭义相对论	(324)
§ 15.1 牛顿时空观与力学相对性原理	(324)
§ 15.2 光速不变原理与狭义相对性原理	(325)
§ 15.3 时间膨胀与长度收缩	(326)
§ 15.4 洛仑兹变换	(328)
§ 15.5 相对论的动量和能量	(331)
本章综合例题	(336)
本章习题	(339)
第十六章 原子和原子核	(342)
§ 16.1 原子的核式结构	(342)
§ 16.2 氢原子的玻尔理论	(344)
§ 16.3 量子力学简介	(348)
§ 16.4 原子核	(354)
§ 16.5 放射性与核反应	(356)
§ 16.6 衰变方式和衰变能	(358)
§ 16.7 基本粒子	(362)
本章综合例题	(363)
本章习题	(367)
第十七章 实验误差与数据处理	(369)
§ 17.1 实验误差分析	(369)
§ 17.2 实验不确定度的评定	(370)
§ 17.3 实验数据的作图与拟合	(373)
本章习题	(375)
第十八章 力学实验	(377)
§ 18.1 力学实验的基本仪器及使用注意事项	(377)
§ 18.2 典型的力学实验和基本实验方法	(378)
§ 18.3 力学综合实验	(389)
第十九章 热学实验	(395)
§ 19.1 温度计的特性测量与校准	(395)
§ 19.2 量热器及其正确使用	(398)
§ 19.3 用比重瓶法测量液体的热膨胀系数	(400)
§ 19.4 冷却规律的研究和冷却法测量金属比热容	(401)
§ 19.5 热学综合实验	(403)

第二十章 电磁学实验	(407)
§ 20.1 电磁学实验基本操作要点	(407)
§ 20.2 基本电学实验	(407)
§ 20.3 电学和磁学综合实验	(418)
第二十一章 光学实验	(426)
§ 21.1 基本光学仪器结构及使用要点	(426)
§ 21.2 光学实验仪器调整的基本方法	(427)
§ 21.3 光学仪器和光学元件使用中的注意事项	(428)
§ 21.4 基本光学实验	(428)
§ 21.5 光学综合实验	(435)
附录	(439)
物理常数	(439)
太阳系	(439)
物理性质 (空气、水)	(440)
微积分公式	(440)
近似公式	(441)
希腊字母	(441)
习题提示	(443)
习题答案	(477)

质点运动学

力学研究机械运动,即物体位置随时间变动的规律.通常把力学分为运动学、动力学和静力学几部分.运动学只涉及对物体运动的描述,而不去探究引起运动和改变运动状态的原因;动力学则研究物体的运动与物体间相互作用的内在联系;静力学研究物体在相互作用下的平衡问题.

§ 1.1 参照系与质点

任一物体的运动总是相对于另一个选定的参照物体而言的.例如观察汽车的运动,常以房屋或路旁的电线杆作参照物.这种被选作物体运动依据的物体称为参照系.对同一个物体的运动过程,选择不同的参照系就有不同的描述.例如,在地面附近自由下落的物体,以地球为参照系,它作直线运动;以匀速行驶的火车为参照系,它作曲线运动.在运动学中,参照系的选择是任意的,一般可以视描述的方便来选择参照系.但是在研究动力学问题时,参照系的选择要受到限制.例如牛顿第一定律和第二定律只对惯性参照系成立.参照系选定后,为了定量地表示物体相对参照系的位置,还必须在参照系上建立适当的坐标系.坐标系是固定在参照系上的一组坐标轴和用来确定物体位置的一组坐标.常用的坐标系是直角坐标系.

实际的物体都有一定的大小、形状和内部结构.在运动过程中,物体各部分的运动状况可能不同,为了抓住问题的主要性质,人们提出了各种物理模型来处理不同的问题.若在所研究的问题中,物体的形状和大小对研究该物体的运动影响不大,或者物体本身的大小比所考察的运动线度小得多,就可以把物体看成是只有质量而没有大小和形状的点,称为质点.质点是力学中一个重要的理想模型.例如,作平动(物体上任意两点的连线在运动过程中始终保持平行的一种运动)的物体,由于其上任一点的运动情况都相同,所以不论其大小和运动线度如何,总可以把它看成质点;又如在研究地球绕太阳的公转运动时,可以把地球看成质点,而研究地球的自转运动时则不能把它看成质点.

若在我们所研究的问题中,物体的形状和大小不可忽略时,虽不能把整个物体看成质点,但可以把物体看成是由许多质点组成,在解决质点运动问题的基础上来研究这些物体的运动.

§ 1.2 时间和长度的计量

要定量描述物体的运动状态,必须进行时间和长度的测量.时间表征物体运动的持续性,空间长度反映物体运动的广延性.

目前国际通用的时间单位是秒.1967年第十三届国际计量大会决定采用铯原子钟作为时间计量基准,定义1秒等于铯133原子基态中两个超精细能级之间跃迁辐射周期的9192631770倍.这样的时间标准称为原子时.国际通用的长度单位是米.1983年第十七届国际计量大会正式通过了“米”的定义:米是光在真空中 $1/299792458$ 秒的时间内运行路程的长度.

§ 1.3 直线运动

质点轨迹是直线的运动称为直线运动.直线运动可以用一维坐标来描述.如图1.3-1所示,取 x

轴为坐标轴, O 为坐标原点, 质点在任一时刻 t 所处的位置可用函数 $x(t)$ 描述. 这就是质点的运动方程.

如果在时刻 t 质点位于 A 点, 过了一段时间 Δt , 即在时刻 $t + \Delta t$, 质点到达 B 点, 则称

$$\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$$

为质点在该 Δt 时间内的位移. 位移和路程不同, 路程是质点运动所经过的路径的长度, 它总是正的, 位移则可正可负. 如图 1.3-1 中, 质点若从 A 到 C 再回到 B , 路程为 $AC + CB$, 而位移则是 $AB = AC - CB$.

表示质点运动快慢的物理量是速度. 质点在 Δt 时间内的平均速度为

$$\bar{v} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{(t + \Delta t) - t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (1.3-1)$$

当质点作匀速直线运动时, 其平均速度是常量; 当质点作变速直线运动时, 平均速度与 t 和 Δt 的取值有关. 在 Δt 取得比较小的时候, 可以粗略反映质点在时刻 t 的运动状态, 只有当 Δt 趋于零 (记作 $\Delta t \rightarrow 0$) 时, 其极限 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$ 才能精确反映质点在 t 时刻的运动状态, 此极限称为质点在时刻 t 的瞬时速度, 简称速度. 可表达为

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \quad (1.3-2)$$

上式中 $\frac{dx}{dt}$ 表示函数 $x(t)$ 的增量 Δx 与自变量的增量 Δt 之比, 当后者趋于零时的极限, 它表示函数的变化率, 在数学上称为“导数”.

可以用图 1.3-2 所示的 $x-t$ 图来说明平均速度和瞬时速度的不同. 曲线 AB 表示函数 $x(t)$, 由图可见, $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ 就是直线 AB 的斜率, 因此, 质点在 $t \rightarrow t + \Delta t$ 时间间隔内的平均速度 \bar{v} 在数值上就等于直线 AB 的斜率. 当 Δt 逐渐减小时, B 点应沿曲线 AB 向 A 点靠拢, 直线 AB 的斜率就随之逐渐减小, 当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, B 点无限趋近于 A 点, AB 直线的极限就是曲线 AB 在 A 点的切线 AT , AT 和水平方向的夹角为 α , 则

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \tan \alpha \quad (1.3-3)$$

说明质点在 t 时刻的瞬时速度 v 等于 $x(t)$ 曲线在 A 点的切线的斜率.

为了研究变速直线运动中速度变化的快慢, 我们引进加速度的概念. 在某时间间隔 Δt 内, 若质点速度的增量为 $\Delta v = v(t + \Delta t) - v(t)$, 速度的平均变化率就称为质点在该时间间隔内的平均加速度, 用 \bar{a} 表示

$$\bar{a} = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (1.3-4)$$

类似地, 在 $\Delta t \rightarrow 0$ 时的平均加速度的极限称为质点在时刻 t 的瞬时加速度, 简称加速度. 加速度是速度对时间的导数:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \quad (1.3-5)$$

在匀变速直线运动中, 速度均匀变化, 加速度是常量, 设 $t=0$ 时速度为 v_0 , 时刻 t 的速度为 v , 则由 (1.3-4) 式得

$$a = \frac{v - v_0}{t} \quad \text{或} \quad v = v_0 + at \quad (1.3-6)$$

这就是我们常见的匀变速直线运动的速度公式.

计算质点作直线运动的位移可借助 $v-t$ 图. 图 1.3-3 表示从 $t=0$ 开始质点以速度 v_0 作匀速直

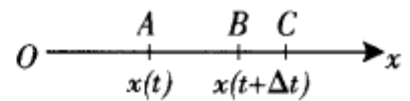


图 1.3-1 直线运动

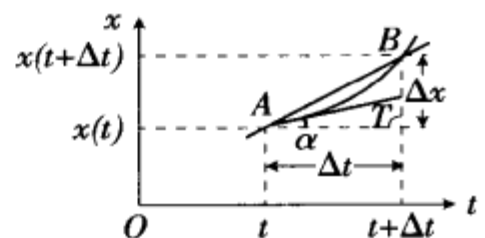


图 1.3-2 平均速度和瞬时速度

线运动的 $v-t$ 关系,位移是 $x = v_0 t$,在数值上正好等于图中 $v(t)$ 下面阴影部分的面积.

计算变速直线运动的位移则要引入极限的概念.如图 1.3-4 所示,把 $0 \rightarrow t$ 这段时间分成 n 等分,第 i 段时间间隔为 $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$,只要 Δt_i 取得充分小,这段时间内的速度就可近似看成是常量,这段时间内质点的位移为

$$\Delta x_i \approx v_i \cdot \Delta t_i$$

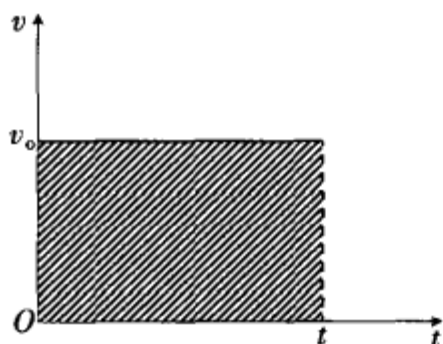


图 1.3-3 由匀速
直线运动的 $v-t$ 图求位移

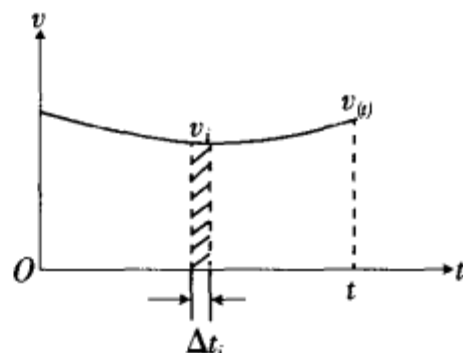


图 1.3-4 由变速
直线运动的 $v-t$ 图求位移

Δx_i 的数值等于图中阴影部分的小矩形面积,在整个 t 时间内质点运动的位移是每小段时间内位移的总和.用 x_0 表示 $t=0$ 时刻的 x 值,则

$$\begin{aligned} x(t) - x_0 &= \Delta x_1 + \Delta x_2 + \cdots + \Delta x_i + \cdots + \Delta x_n \\ &= \sum_{i=1}^n \Delta x_i \approx \sum_{i=1}^n v_i \cdot \Delta t_i \end{aligned}$$

其数值相当于 n 个小矩形面积的总和.如果令 $\Delta t_i \rightarrow 0$,即 $n \rightarrow \infty$,在此极限情况下,曲线 $v(t)$ 下的面积在数值上就可精确表示质点在 t 时间内的总位移,即

$$x(t) - x_0 = \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n v_i \cdot \Delta t_i \quad (1.3-7)$$

在数学上可用一个简单的符号表示上述累加求和的极限,称为积分,上式用积分式表示为

$$x(t) - x_0 = \int_0^t v dt \quad (1.3-8)$$

式中“ \int ”为积分符号,0 和 t 分别表示时间的起点和终点,称为积分的下限和上限, v 为被积函数, dt 是积分变量 t 的微分.

例如,在匀加速直线运动中,设 $t=0$ 时, $x = x_0$, $v = v_0$,加速度为 a ,则图 1.3-5 中 $v(t)$ 为直线,直线下的阴影面积在数值上就等于这段时间 t 内质点的位移

$$x - x_0 = \frac{1}{2} [v_0 + v(t)] \cdot t$$

或

$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

由(1.3-6)和(1.3-9)式,我们又可导出常用的公式

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) \quad (1.3-10)$$

其中 $v = v(t)$.

例 1.3-1 有一质点沿 x 轴作直线运动, t 时刻的坐标为 $x = 4.5t^2 - 2t^3$,上式中 t 以秒计, x 以米计.试求:

- (1)质点在第 2 秒内的位移.
- (2)第 2 秒内的平均速度.

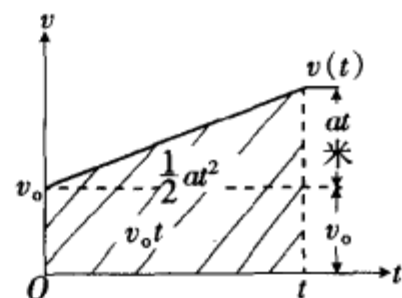


图 1.3-5

求匀加速直线运动的路程

(3)第2秒末的瞬时速度 .

(4)质点在第2秒内通过的路程 .

解:(1)质点在第2秒内的位移为

$$\Delta x = x_2 - x_1 = (4.5 \times 2^2 - 2 \times 2^3) - (4.5 - 2) = -0.5(\text{m})$$

(2)第2秒内的平均速度为

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-0.5}{2-1} = -0.5(\text{m/s})$$

(3)质点的瞬时速度为

$$v = \frac{dx}{dt} = 9t - 6t^2$$

把 $t=2$ 代入上式,可得第2秒末的速度为

$$v_2 = 9 \times 2 - 6 \times 2^2 = -6(\text{m/s})$$

(4)当 $v=0$ 时,质点瞬时静止,以后改变运动方向,由 $v=9t-6t^2=0$,得 $t=1.5$ 秒,质点第2秒内运动的路程为

$$\begin{aligned} s &= |x_{1.5} - x_1| + |x_2 - x_{1.5}| \\ &= |(4.5 \times 1.5^2 - 2 \times 1.5^3) - (4.5 - 2)| + |(4.5 \times 2^2 - 2 \times 2^3) - (4.5 \times 1.5^2 - 2 \times 1.5^3)| \\ &= 2.25(\text{m}) \end{aligned}$$

例 1.3-2 一个物体在由静止开始下落过程的最后一秒钟内,经过全部路程的一半.试求物体下落的时间和高度 .

解:设物体下落的时间为 t ,已知物体下落的加速度为重力加速度 g ,由题意有

$$\frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{2}g(t-1)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}gt^2\right)$$

$$\text{即 } t^2 - 4t + 2 = 0$$

$$\text{得 } t_1 = 3.4(\text{s}), t_2 = 0.6(\text{s})(\text{舍去})$$

因整个下落过程的时间大于1秒,故 $t_2=0.6$ 秒不合理.物体下落的高度为

$$h = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2} \times 9.8 \times 3.4^2 = 57(\text{m})$$

§ 1.4 曲线运动

当质点运动轨迹为曲线时,称其作曲线运动.在直角坐标系中,质点的位置可以用三个坐标 x, y, z 来表示,当质点运动时,它的坐标随时间而变,可表示为时间 t 的函数

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t) \quad (1.4-1)$$

此即质点的运动方程.例如已知 $x=3t, y=4t, z=2$,只要确定某时刻 t 的数值,就可知质点的位置.

质点的位置也可以用一个特殊的矢量 r 表示,如图 1.4-1 所示,以选定的原点 O 为起点,作有向线段 \overrightarrow{OP} ,方向指向质点所在的 P 点,线段的长度为 r ,则矢量 r 就可表示质点的位置,称为位置矢量,简称位矢.用 i, j, k 分别表示沿 x, y, z 正方向的单位矢量(即长度为1个单位,方向为其所表示的坐标轴的正方向),位矢可表示为

$$r = xi + yj + zk \quad (1.4-2)$$

位矢与坐标原点的选择有关.

图 1.4-2 表示曲线运动中位移和路程的区别.设时刻 t 质点在 A 点,位矢为 r_1 ,在时刻 $t + \Delta t$,质点到达 B 点,位矢为 r_2 ,质点运动的轨迹是图中 A 到 B 的虚线,其长度为实际运动的路程.而质点位置的变动是用位移来表示的,位移是从 A 点指向 B 点的矢量,用 Δr 表示,则

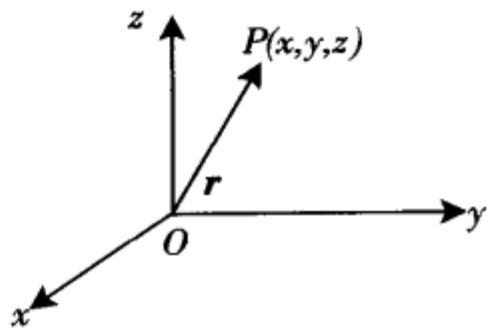


图 1.4-1 位矢 r

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \quad (1.4-3)$$

位移的大小表示该矢量的长度,记作 $|\Delta \mathbf{r}|$. 一般情况下, $|\Delta \mathbf{r}| \neq \Delta r$, 因为 $\Delta r = r_2 - r_1 = |r_2| - |r_1|$, 是两个位矢的大小之差.

(1.4-3)式在直角坐标系中的具体表示式为

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{r} &= (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k} \\ &= \Delta x \mathbf{i} + \Delta y \mathbf{j} + \Delta z \mathbf{k} \end{aligned} \quad (1.4-4)$$

$$|\Delta \mathbf{r}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} \quad (1.4-5)$$

把 1.3 节中关于速度和加速度的概念推广到三维空间中,平均速度为

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \quad (1.4-6)$$

速度是矢量,有大小和方向,并满足矢量的相加法则. 在直线运动中可用正和负表示速度的方向,而在三维空间中,应该用矢量符号表示其方向. 质点运动的平均速度的方向和位移 $\Delta \mathbf{r}$ 的方向一致. 质点的瞬时速度为

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (1.4-7)$$

速度的方向由位移的极限方向决定,当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时,位移趋于运动轨道的切线方向. 如图 1.4-3 所示,质点沿 \widehat{AB} 弧运动,在 $\Delta t \rightarrow 0$ 的情况下, \mathbf{v} 沿轨道在 A 点的切线方向,且弧长 $\widehat{\Delta s}$ 和 $|\Delta \mathbf{r}|$ 相等,所以速度的大小(也称为速率)为

$$v = |\mathbf{v}| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\widehat{\Delta s}}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \quad (1.4-8)$$

在曲线运动中,速度的改变包括速度的大小和方向两方面的变化,可以用加速度描述. 如图 1.4-4 所示,在时刻 t 和 $t + \Delta t$,质点分别位于 A 点和 B 点,速度分别为 \mathbf{v}_A 和 \mathbf{v}_B ,速度的增量为

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A$$

平均加速度为

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$

平均加速度的方向与 $\Delta \mathbf{v}$ 一致. 在 $\Delta t \rightarrow 0$ 的极限情况下,上式的极限即质点在 t 时刻的瞬时加速度

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (1.4-9)$$

由(1.4-2),(1.4-7)和(1.4-9)式,我们可以把速度和加速度分别用直角坐标系的分量式表示:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{dy}{dt}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{dz}{dt}\right)\mathbf{k} \\ &= v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k} \end{aligned} \quad (1.4-10)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left(\frac{dv_x}{dt}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{dv_y}{dt}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{dv_z}{dt}\right)\mathbf{k} \\ &= a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} \end{aligned} \quad (1.4-11)$$

速度和加速度的大小分别为

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (1.4-12)$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (1.4-13)$$

由(1.4-2),(1.4-10)和(1.4-11)式可见,质点的实际运动是各个分运动的矢量合成,这种关系称为运动的叠加.

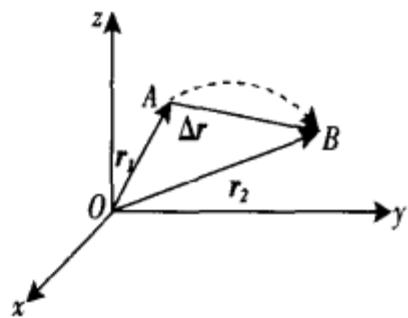


图 1.4-2 位移和路程

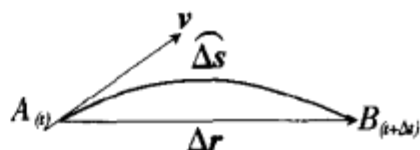


图 1.4-3 瞬时速度

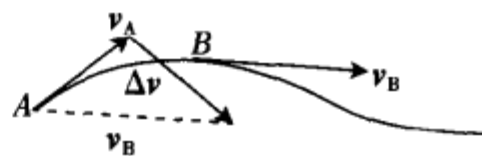


图 1.4-4 曲线运动的加速度

例 1.4-1 质点在光滑的水平面上运动,已知它的速度分量 v_x 和 v_y 随时间的变化规律如图 1.4-5 所示.

(1) 写出质点的速度和加速度在时刻 t 的分量表达式.

(2) 求第 2 秒内质点的位移.

(3) 求质点在第 2 秒内的平均速度和第 2 秒末的瞬时速度.

解:(1) 由 1.4-5 图可写出速度的两个分量与 t 的关系

$$v_x = 0.3 - 0.1t, v_y = 0.4$$

质点在 y 方向作匀速运动,因此 $a_y = 0$. 质点在 x 方向作匀减速运动, $v_x(t)$ 的斜率即 a_x ,所以 $a_x = -0.1$

(2) 质点在 x 和 y 方向的运动方程为

$$x = v_{ax}t + \frac{1}{2}a_x t^2 = 0.3t - \frac{1}{2} \times 0.1t^2 = 0.3t - 0.05t^2$$

$$y = v_{ay}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = 0.4t$$

位矢为 $r = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = (0.3t - 0.05t^2)\mathbf{i} + 0.4t\mathbf{j}$

第 1 秒末和第 2 秒末的位矢分别为

$$r_1 = 0.25\mathbf{i} + 0.4\mathbf{j}$$

$$r_2 = 0.4\mathbf{i} + 0.8\mathbf{j}$$

质点在第 2 秒内的位移

$$\Delta r = r_2 - r_1 = 0.15\mathbf{i} + 0.4\mathbf{j}$$

(3) 质点在第 2 秒内的平均速度

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{0.15\mathbf{i} + 0.4\mathbf{j}}{2-1} = 0.15\mathbf{i} + 0.4\mathbf{j}$$

平均速度的大小为 $|\bar{\mathbf{v}}| = \sqrt{0.15^2 + 0.4^2} = 0.43(\text{m/s})$

平均速度的方向与 x 轴的夹角为 $\alpha = \tan^{-1} \frac{0.4}{0.15} = 69.44^\circ$

质点在第 2 秒末的瞬时速度为

$$\mathbf{v}_2 = v_{x2}\mathbf{i} + v_{y2}\mathbf{j} = (0.3 - 0.1 \times 2)\mathbf{i} + 0.4\mathbf{j} = 0.1\mathbf{i} + 0.4\mathbf{j}$$

其大小为 $|\mathbf{v}_2| = \sqrt{0.1^2 + 0.4^2} = 0.41(\text{m/s})$,

速度与 x 轴的夹角为 $\theta = \tan^{-1} \frac{v_{y2}}{v_{x2}} = 75.96^\circ$

曲线运动的一个重要特例是抛体运动,抛体运动具有恒定的重力加速度 g . 由运动的叠加原理,抛体运动可看成是两个直线运动的叠加,常用的有两种叠加形式.

(1) 矢量形式. 初速度为 v_0 的抛体运动可看成是速度为 v_0 的匀速直线运动和沿竖直方向的自由下落运动的叠加,如图 1.4-6 所示. 质点的位矢可写成这两项的矢量和,即

$$\mathbf{r} = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \quad (1.4-14)$$

(2) 分量形式. 把抛体运动看成是沿 x 方向的速度为 $v_0 \cos \theta$ 的匀速直线运动和沿 y 方向初速为 $v_0 \sin \theta$, 加速度为 $-g$ 的匀变速直线运动的叠加.

$$x = v_0 \cos \theta \cdot t \quad (1.4-15)$$

$$y = v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2} g t^2$$

由以上二式消去 t , 得到抛体运动的轨道方程

$$y = x \cdot \tan \theta - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \theta} \quad (1.4-16)$$

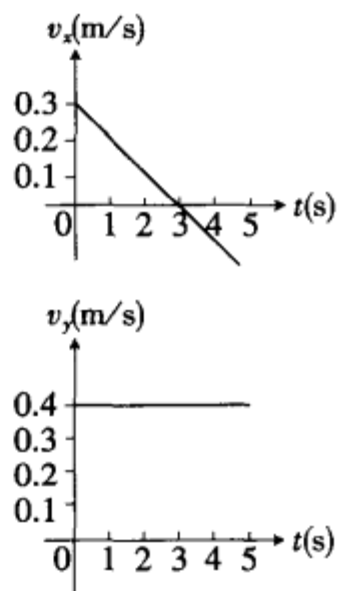


图 1.4-5

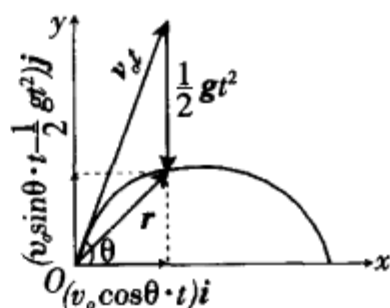


图 1.4-6 运动的叠加

这就是抛物线方程. 令上式中 $y=0$, 求得抛物线与 x 轴的交点坐标为

$$x_1=0, x_2=v_0^2 \sin 2\theta / g$$

x_1 为抛出点, x_2 为质点落地点, $x_2 - x_1$ 称为抛射体的射程. 当 v_0 不变时, $\theta = 45^\circ$ 的射程最大. 当 y 方向速度为零时, 物体达最大高度 h , 称为射高. y 方向的速度和位移分别为

$$v_y = v_0 \sin \theta - gt, y = v_0 \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2} gt^2$$

$v_y = 0$ 时, $t = v_0 \sin \theta / g$,

$$\text{则 } h = v_0 \sin \theta \cdot v_0 \sin \theta / g - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin \theta}{g} \right)^2 = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g} \quad (1.4-17)$$

例 1.4-2 一个小球从楼梯顶上以 3m/s 的水平速度滚下, 如图 1.4-7 所示, 每级阶梯高度 $h = 0.2\text{m}$, 宽 $l = 0.25\text{m}$, 问球首先撞在哪一级阶梯上?

解: 取 x 轴为水平向右, y 轴竖直向下, 小球抛出点为坐标原点, 初速度为 v_0 , 则小球的运动方程为

$$x = v_0 t, y = \frac{1}{2} gt^2$$

上面两式消去 t , 得小球运动轨迹方程为

$$y = \frac{gx^2}{2v_0^2} \quad (1)$$

设球首先碰到第 n 级阶梯上, 其边缘的坐标为

$$x = nl, y = nh$$

由已知条件 $\frac{x}{y} = \frac{l}{h} = \frac{0.25}{0.2} = \frac{5}{4}$

②式代入①式, 得

$$y = \frac{g}{2v_0^2} \left(\frac{5}{4} y \right)^2$$

$$y = \frac{32v_0^2}{25g}$$

$$n = \frac{y}{h} = \frac{32v_0^2}{25gh} = \frac{32 \times 3^2}{25 \times 9.8 \times 0.2} \approx 5.9$$

故小球必先撞在 $n = 6$ 的阶梯上.

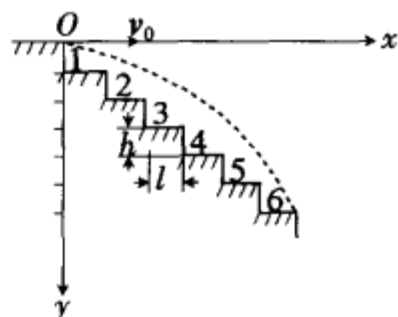


图 1.4-7

§ 1.5 切向加速度和法向加速度

在曲线运动中, 还可以把质点的运动加速度分解为沿着轨道的切向和垂直于轨道切线的法向两部分, 这种分解法可加深我们对曲线运动矢量特征的理解. 当质点运动时, 速度总是沿着轨道的切线方向, 可写成

$$\mathbf{v} = v \boldsymbol{\tau} \quad (1.5-1)$$

式中 $\boldsymbol{\tau}$ 是沿着轨道切向, 指向运动方向的单位矢量. 如图 1.5-1 所示, 设质点在 t 和 $t + \Delta t$ 时刻分别位于 P 点和 Q 点, 速度分别为 $\mathbf{v}(t)$ 和 $\mathbf{v}(t + \Delta t)$, 速度的增量 $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)$. 图中, $\overrightarrow{PP_1}$ 、 $\overrightarrow{PP_2}$ 和 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 分别表示 $\mathbf{v}(t)$ 、 $\mathbf{v}(t + \Delta t)$ 和 $\Delta \mathbf{v}$, 在 $\overrightarrow{PP_2}$ 上取 $|\overrightarrow{PP_3}| = |\mathbf{v}(t)|$, 自 P_1 到 P_3 画一矢量 $\Delta \mathbf{v}_1$, 由矢量相加法则可知

$$\Delta \mathbf{v} = \Delta \mathbf{v}_1 + \Delta \mathbf{v}_2$$

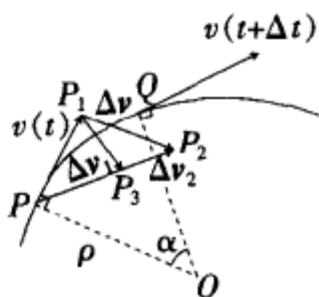


图 1.5-1 切向加速度和法向加速度

式中 $\Delta v_2 = \overrightarrow{P_3P_2}$, 然后, 对上式取 $\Delta t \rightarrow 0$ 时的极限

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_1}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_2}{\Delta t} \quad (1.5-2)$$

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, Δv_2 的极限与 $v(t)$ 平行, 所以沿轨道的切向, $\Delta v_2 = [v(t + \Delta t) - v(t)]\tau = \Delta v \cdot \tau$
 Δv_2 反映了在 Δt 时间内速度大小的变化. 由上式可得

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v \cdot \tau}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \tau$$

此即加速度的切向分量, 称为切向加速度, 用 a_τ 表示

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} \tau \quad (1.5-3)$$

a_τ 反映了速度大小的变化率.

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, Δv_1 的极限与 $v(t)$ 垂直, 因而沿着法向, \widehat{PQ} 可以看成是某个圆上的一段弧, 该圆称为密切圆(或曲率圆), 设其半径为 ρ , ρ 称为曲线在 P 点的曲率半径, 由几何关系知, \widehat{PQ} 所对的圆心角 α 应等于 $v(t + \Delta t)$ 和 $v(t)$ 的夹角, 即 $\angle p_1 p p_3 = \alpha$, 由 $\Delta p_1 p p_3$ 可知

$$|\Delta v_1| = v(t) \cdot \alpha = v(t) \cdot \frac{PQ}{\rho} = v(t) \cdot \frac{v(t)\Delta t}{\rho}$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_1}{\Delta t} = \frac{[v(t)]^2}{\rho} n$$

这就是法向加速度, 一般写成

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} n \quad (1.5-4)$$

上式中 n 是曲线在 P 点处的法向单位矢量, 方向指向该密切圆的曲率中心 O . 法向加速度反映了质点运动方向变化的快慢. 综合以上结果, 可得

$$a = a_\tau + a_n = \frac{dv}{dt} \tau + \frac{v^2}{\rho} n \quad (1.5-5)$$

由于 a_n 总是和 a_τ 垂直, 所以总加速度的大小为

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \quad (1.5-6)$$

质点作匀速圆周运动时, 速率不变, 所以切向加速度为零; 质点的方向不断变化, 曲线上任一点的曲率半径都是圆半径 R , 因此法向加速度为 $a_n = \frac{v^2}{R}$, 这就是我们熟知的向心加速度. 如果质点作变速直线运动, 速度只改变大小而不改变方向, 因而只有切向加速度而无法向加速度.

例 1.5-1 由高楼窗口以初速 v_0 水平射出一发子弹, 取 $t=0$ 为发射时刻, 试求子弹在 t 时刻的速度, 切向加速度和法向加速度.

解: 子弹在水平方向作匀速运动, 竖直方向作匀加速运动, 加速度为 g , 取图 1.5-2 所示坐标轴, 设子弹速度为 v , 则

$$v_x = v_0, v_y = gt$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{v_y}{v_x} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{gt}{v_0} \right)$$

θ 为速度 v 与 x 轴的夹角. 法向加速度为 $a_n = g \cos \theta = g \cdot \frac{v_0}{v} =$

$$\frac{g v_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}$$

因为法向加速度 a_n 和切向加速度 a_τ 是加速度 g 在法向和切向的分量, 且 a_n 和 a_τ 垂直, 因此可得切向加速度为

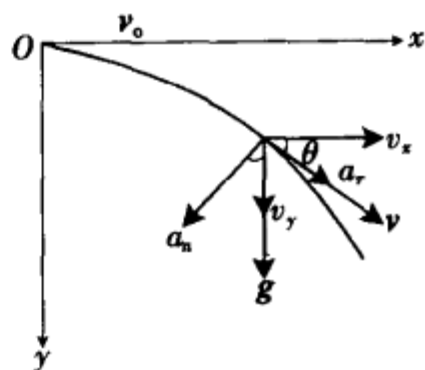


图 1.5-2

$$a_r = \sqrt{g^2 - a_n^2} = \sqrt{g^2 - \frac{g^2 v_0^2}{v_0^2 + g^2 t^2}} = \frac{g^2 t}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}$$

切向加速度亦可由速率 v 对 t 的导数求得, 即

$$a_r = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2g^2 t}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}} = \frac{g^2 t}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}$$

§ 1.6 圆周运动 角位移、角速度和角加速度

设质点在 xoy 平面上作圆周运动, 以圆心 o 为坐标原点, ox 轴为参考轴, 质点的位矢和 x 轴的夹角为 θ , 如图 1.6-1 所示. 质点的位矢 r 的大小等于圆半径 R , 要确定任一时刻质点的位置只需要一个角量 θ , θ 称为角位置, 单位为弧度(rad). 若质点在 $t \rightarrow t + \Delta t$ 的时间内角位置由 θ 变到 $\theta + \Delta\theta$, $\Delta\theta$ 就是在该时间间隔 Δt 内质点对 o 点的角位移. 为进一步描述质点绕 o 点转动的快慢, 引进角速度. 质点在 Δt 时间内的平均角速度的大小为

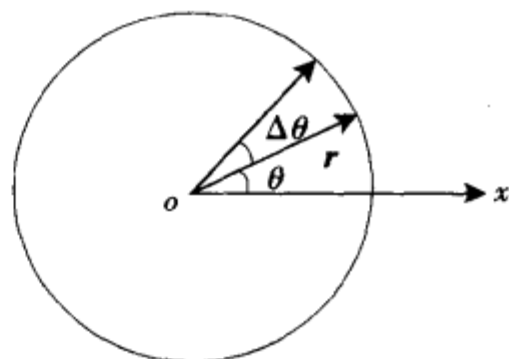


图 1.6-1 圆周运动

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad (1.6-1)$$

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, 上式的极限为质点在时刻 t 的瞬时角速度, 简称角速度, 用 ω 表示

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

角速度的单位是弧度每秒(rad/s). 因角位移有正、负之分, 角速度也有正、负之分. 角速度可看成矢量. 角速度矢量的方向由右手螺旋法则确定: 右手四指弯曲的方向沿着质点转动的方向, 伸直的拇指所指的方向即为角速度 ω 的方向, 如图 1.6-2 所示.

在 $t \rightarrow t + \Delta t$ 时间内质点角速度由 ω 变到 $\omega + \Delta\omega$, 平均角加速度为

$$\bar{\beta} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad (1.6-3)$$

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, 平均角加速度的极限称为瞬时角加速度, 简称角加速度, 单位是弧度/秒²(rad/s²), 用 β 表示

$$\beta = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \quad (1.6-4)$$

角加速度也有正、负之分.

质点沿圆周运动时的速率通常称为线速度. 若以 s 表示弧长, 则线速度为

$$v = \frac{ds}{dt} \quad (1.6-5)$$

以 θ 表示这段弧长对应的圆心角; 则 $s = R\theta$, R 为圆半径, 是常量, 代入上式, 得

$$v = \frac{d(R\theta)}{dt} = R \frac{d\theta}{dt} = R\omega \quad (1.6-6)$$

由图 1.6-2 看 v , ω 和 R 三者之间的方向, 又可将(1.6-6)式写成矢量的矢积形式

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} \quad (1.6-7)$$

(注: 两个矢量的矢积用 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 表示, 所以又常称为叉积. 图 1.6-3 说明了叉积的几何意义. 把 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 两矢量的起点叠放在

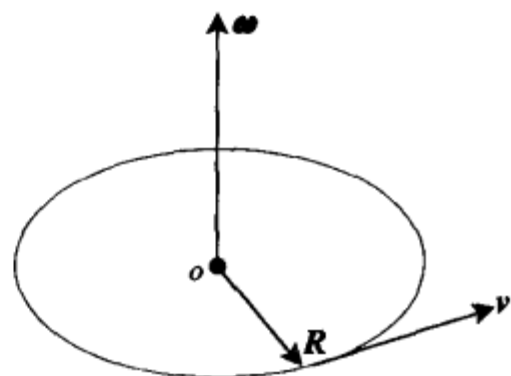


图 1.6-2 角速度矢量

一起,二者决定一个平面,右手四指弯曲的方向代表从矢量 A 沿小于 180° 的角度转向矢量 B 的方向,则伸直的拇指指向它们的矢积 C ,即 C 和 A 与 B 组成的平面垂直, C 的大小为

$|C| = |A \times B| = A \cdot B \cdot \sin\theta$ 式中 θ 为 A 和 B 之间小于 180° 的夹角.)

质点的切向加速度和角加速度的关系如下:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d(R\omega)}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R\beta \quad (1.6-8)$$

法向加速度和角速度的关系为

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(\omega R)^2}{R} = \omega^2 Rn \quad (1.6-9)$$

因为描写圆周运动只需要一个角量 $\theta = \theta(t)$,由 $\theta(t)$ 就可知其他变量,和直线运动中只需要知道 $x = x(t)$ 一样,所以匀变速圆周运动中的角位置、角速度和角加速度间的关系,与匀变速直线运动中的位置、速度和加速度间的关系在形式上完全类似,可表达为

$$\omega = \omega_0 + \beta t \quad (1.6-10a)$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \beta t^2 \quad (1.6-10b)$$

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\beta(\theta - \theta_0) \quad (1.6-10c)$$

式中 θ_0, ω_0 分别表示 $t=0$ 时质点的初始角位置和角速度.

例 1.6-1 试计算地球自转时地面上各点的速度和加速度.

解:如图 1.6-4 所示,地球自转轴为 z 轴,地球自转的周期为 1 天:

$$T = 24 \times 60 \times 60$$

自转角速度为

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24 \times 60 \times 60} = 7.27 \times 10^{-5} \text{ (rad/s)}$$

设地面上某点 P 的纬度为 φ ,已知地球半径为 $R = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$, P 点绕 Z 轴转动的半径为 $R \cos\varphi$,转动平面与赤道平面平行, P 点的速度和(法向)加速度分别为

$$v = \omega R \cos\varphi = 7.27 \times 10^{-5} \times 6.37 \times 10^6 \cos\varphi = 4.65 \times 10^2 \cos\varphi \text{ (m/s)}$$

$$a_n = \omega^2 R \cos\varphi = (7.27 \times 10^{-5})^2 \times 6.37 \times 10^6 \cos\varphi = 3.37 \times 10^{-2} \cos\varphi \text{ (m/s}^2\text{)}$$

只要知道某地的纬度 φ ,即可得出 v 和 a_n 的值.

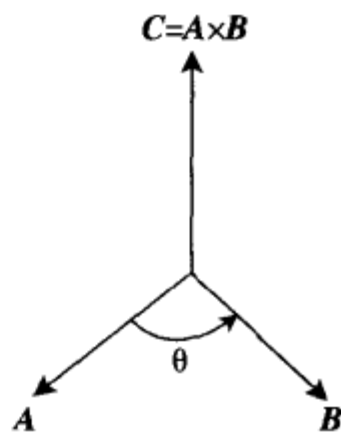


图 1.6-3 矢积

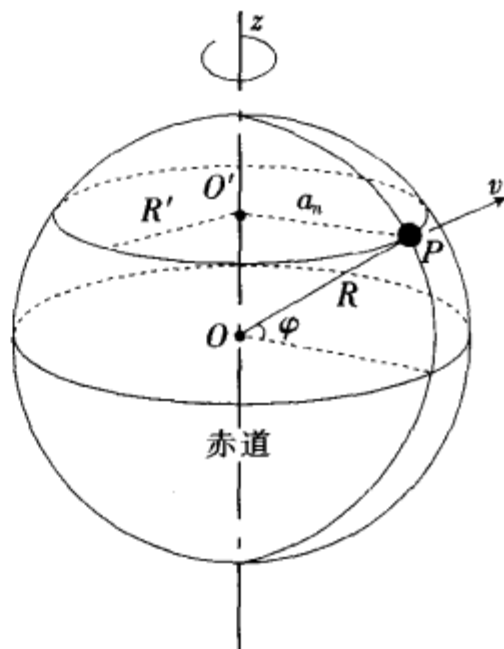


图 1.6-4

§ 1.7 相对运动

前面已指出,物体的运动都是相对于一定的参照系而言的,同一物体的运动,在行驶的船上观察与在岸上观察有不同的表现.我们在这里只讨论一种简单的情况,即当我们选定基本参照系(也称静参照系) S 后,所选的另一个参照系 S' 相对于 S 系只作平动而不转动的情况.如图 1.7-1 所示,质点在 S 和 S' 系中的位矢 r 和 r' 以及 S' 系的原点相对于 S 系的原点的位矢 R 有如下关系:

$$r = r' + R \quad (1.7-1)$$

上式对时间求导数,得到 S 和 S' 系中观察到的物体的速度 v 、 v' 以及 S 系相对于 S' 系的速度 v 三者之间的关系

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr'}{dt} + \frac{dR}{dt}$$

即
$$v = v' + u \quad (1.7-2)$$

通常把质点相对于 S 系的速度 v 称为绝对速度,相对于 S' 系的速度 v' 称为相对速度, S' 系相对于静参照系 S 的速度 u 称为牵连速度. 上式再对时间求导,即可得

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv'}{dt} + \frac{du}{dt}$$

或
$$a = a' + a_0 \quad (1.7-3)$$

上式说明,质点相对于 S 系的加速度 a (绝对加速度) 等于它相对于 S' 系的加速度 a' (相对加速度) 与 S' 系相对于 S 系的牵连加速度 a_0 之矢量和.

当 S' 系相对于 S 系作匀速直线运动时, $a = a'$.

例 1.7-1 地面上的枪口对准挂在高墙上的靶心,在子弹离开枪口的瞬间靶恰好自由下落,试问子弹能否击中靶心? 设靶在落地以前子弹能打到墙上.

解法一: 子弹离开枪口后作斜抛运动,初速度为 v_0 ,任一时刻 t ,子弹相对于地面的速度为

$$v_1 = v_0 + gt$$

靶作自由落体运动,速度为

$$v_2 = gt$$

取地面为 S 系,靶心为动参照系 S',则 v_1 、 v_2 分别为绝对速度和牵连速度,子弹相对于靶心的相对速度为

$$v' = v_1 - v_2 = v_0$$

因此,子弹相对于靶心作速度为 v_0 的匀速直线运动,只要子弹在离开枪口时是对准靶心的,就一定能击中靶心.

解法二: 子弹离开枪口后作斜抛运动,加速度 $a_1 = g$,靶心作自由落体运动,加速度 $a_2 = g$, a_1 和 a_2 分别为绝对加速度和牵连加速度,因此子弹相对于靶心的相对加速度

$$a' = a_1 - a_2 = 0$$

说明子弹相对于靶心作匀速直线运动,子弹离开枪口时的速度为 v_0 ,这时靶心速度为 0,子弹相对于靶心的速度为 v_0 ,所以该匀速直线运动的速度就是 v_0 ,只要 v_0 的方向是指向靶心的,子弹就一定能击中靶心.

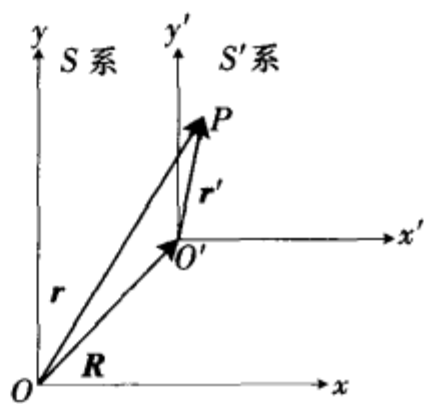


图 1.7-1 相对运动

本章综合例题

例 1-1 小船从 A 点出发向河对岸划去,如图例 1-1a 所示,如果保持与岸垂直的方向划行,10 分钟以后到达对岸 C 点,如果要使小船正好到达 B 点,则小船必须向着 D 点方向划行,这时需要 12.5 分钟才能到达对岸, AB 垂直于河岸,已知 $BC = 120\text{m}$,试求小船划行的速率 v' ,河面的宽度 L ,水流速度 u , AD 和 AB 之间的夹角 α .

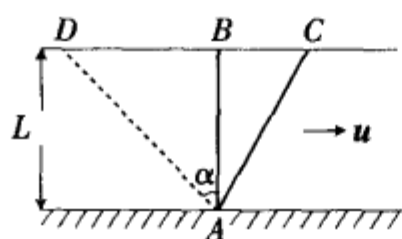
解: 设小船垂直向对岸划去时相对于水的速度为 v'_1 ,相对于岸的速度为 v_1 ;小船向 D 点的方向划行时相对于水的速度为 v'_2 ,相对于岸的速度为 v_2 ,小船的划行速率不变,即 $|v'_1| = |v'_2| = v'$,水相对于岸的速度为 u ,平行于岸边. 根据相对运动的速度关系,可得

$$v_1 = v'_1 + u$$

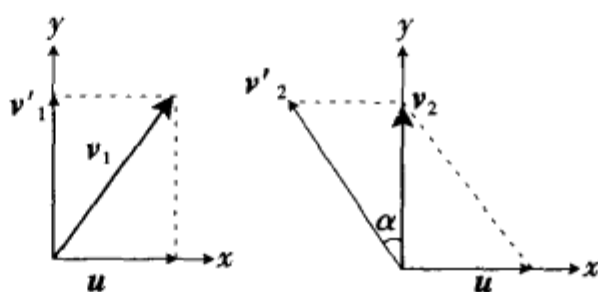
$$v_2 = v'_2 + u$$

取如图例 1-1b 所示的坐标轴,并根据以上两式中各矢量的方向写出分量式,由图中速度的矢量关

系可知



图例 1-1a



图例 1-1b

$$v_{1x} = u \quad \text{①}$$

$$v_{1y} = v' \quad \text{②}$$

$$0 = -v' \sin \alpha + u \quad \text{③}$$

$$v_2 = v' \cos \alpha \quad \text{④}$$

设小船二种划行方法所用的时间分别为 t_1 和 t_2 ,

$$BC = v_{1x} t_1 = u t_1 \quad \text{⑤}$$

$$L = v_{1y} t_1 = v' t_1 \quad \text{⑥}$$

$$L = v_2 t_2 = v' \cos \alpha \cdot t_2 \quad \text{⑦}$$

由⑥、⑦两式得

$$v' t_1 = v' \cos \alpha \cdot t_2$$

$$\cos \alpha = \frac{t_1}{t_2} = \frac{10}{12.5} = 0.8, \alpha = 36^\circ 52'$$

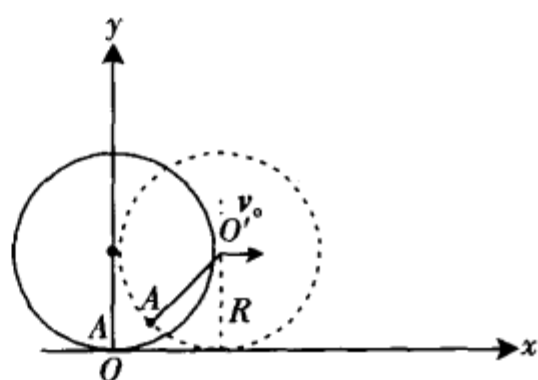
由⑤、③、⑥式分别得水流的速率 u , 小船速率 v' 和河宽 L :

$$u = \frac{BC}{t_1} = \frac{120}{10 \times 60} = 0.2 (\text{m/s})$$

$$v' = \frac{u}{\sin \alpha} = \frac{0.2}{\sin 36^\circ 52'} = 0.3 (\text{m/s})$$

$$L = u t_1 = 0.2 \times 10 \times 60 = 120 (\text{m})$$

例 1-2 一轮胎在水平地面上沿着一直线无滑动地滚动 (这种情况下, 轮胎边缘一点相对于轮胎中心的线速度等于轮胎中心对地的速率), 轮胎中心以恒定的速率 v_0 向前移动, 轮胎的半径为 R , 在 $t=0$ 时, 轮胎边缘上的一点 A 正好和地面上的 O 点接触, 试以 O 为坐标原点, 在图例 1-2 的直角坐标系中写出轮胎上 A 点的位矢、速度、加速度和时间的函数关系.



图例 1-2

解: 以轮胎中心 O' 为原点建立动参照系 $x'O'y'$, 以 A 点和地面接触时为时间起点, 并以此接触点 O 为静坐标系的原点, x', y' 分别与 x, y 轴平行, $t=0$ 时 y 和 y' 轴重合. 动参照系是以速度 v_0 作匀速直线运动的平动参照系, 在该参照系中, A 点作匀速圆周运动, 线速度 $v = v_0 = \omega R$, 可得 $\omega = \frac{v_0}{R}$, 在时刻 t , A 点相对于 y' 轴的负方向转过的角度 $\theta = \omega t$, 由相对运动位矢之间的关系, 有

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{OO'}$$

式中 \vec{r}, \vec{r}' 分别是 A 点在静参照系和动参照系中的位矢, $\vec{OO'}$ 是动参照系坐标原点相对于静参照系的位矢, 化为分量式

$$x = x' + v_0 t$$

$$y = y' + R$$

在动参照系中, A 点坐标为

$$x' = -R \sin \theta = -R \sin \omega t = -R \sin \left(\frac{v_0}{R} t \right)$$

$$y' = -R \cos \theta = -R \cos \omega t = -R \cos \left(\frac{v_0}{R} t \right)$$

代入上式,得

$$x = v_0 t - R \sin \left(\frac{v_0}{R} t \right)$$

$$y = R \left[1 - \cos \left(\frac{v_0}{R} t \right) \right]$$

速度和加速度的分量式分别由上式得到

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_0 - v_0 \cos \left(\frac{v_0}{R} t \right)$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = v_0 \sin \left(\frac{v_0}{R} t \right)$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{v_0^2}{R} \sin \left(\frac{v_0}{R} t \right)$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{v_0^2}{R} \cos \left(\frac{v_0}{R} t \right)$$

由以上关系可得 A 点的位矢、速度、加速度与时间的关系式如下:

$$\mathbf{r} = \left[v_0 t - R \sin \left(\frac{v_0}{R} t \right) \right] \mathbf{i} + R \left[1 - \cos \left(\frac{v_0}{R} t \right) \right] \mathbf{j}$$

$$\mathbf{v} = v_0 \left[1 - \cos \left(\frac{v_0}{R} t \right) \right] \mathbf{i} + v_0 \sin \left(\frac{v_0}{R} t \right) \mathbf{j}$$

$$\mathbf{a} = \frac{v_0^2}{R} \left[\sin \left(\frac{v_0}{R} t \right) \mathbf{i} + \cos \left(\frac{v_0}{R} t \right) \mathbf{j} \right]$$

由上式可得 $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{v_0^2}{R}$

可见在地面参照系中和在动参照系中加速度的大小一样。

例 1-3 一小山坡与地平面成一角度 α , 一人站在山坡上以初速度 v_0 向山脚下扔小石头, 假设石头仍落在山坡上, 问抛射角 θ 为多大时, 沿斜坡方向有最大射程, 并求此最大射程。

解法一: 如图例 1-3a 所示, 设沿斜坡方向和垂直于斜坡方向分别为 x 和 y 轴的方向, 斜抛运动可分解为这两个方向的匀变速直线运动, 加速度 g 沿 x, y 轴的分量分别为

$$a_x = g \sin \alpha, a_y = -g \cos \alpha$$

在时刻 t 两位移的表达式为

$$x = v_0 \cos(\theta + \alpha) t + \frac{1}{2} g \sin \alpha \cdot t^2$$

$$y = v_0 \sin(\theta + \alpha) t - \frac{1}{2} g \cos \alpha \cdot t^2$$

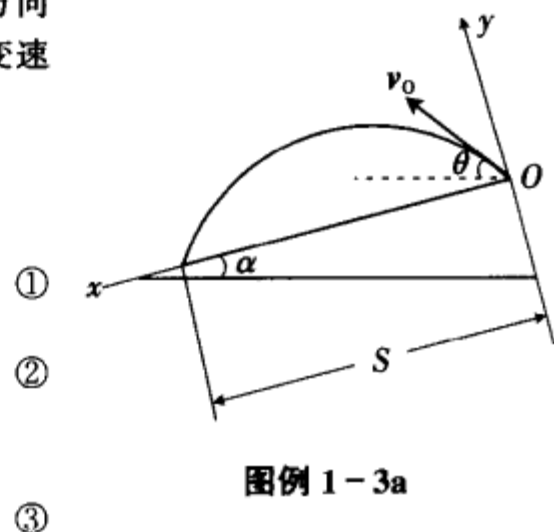
石子落在山坡上时, $y=0$ 时, 由②式得

$$t = \frac{2v_0 \sin(\theta + \alpha)}{g \cos \alpha}$$

③式代入①式, 得到射程

$$s = \frac{2v_0^2 \sin(\theta + \alpha) \cdot \cos \theta}{g \cos^2 \alpha}$$

利用三角公式, 上式化为



图例 1-3a

$$s = \frac{v_0^2 [\sin(2\theta + \alpha) + \sin\alpha]}{g \cos^2 \alpha} \quad (4)$$

由上式可见, 当 $2\theta + \alpha = \frac{\pi}{2}$, 即 $\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$ 时, 有最大射程 s_{\max} , 此时 $\sin(2\theta + \alpha) = 1$.

$$s_{\max} = \frac{v_0^2 (1 + \sin\alpha)}{g \cos^2 \alpha} \quad (5)$$

解法二: 如图例 1-3b 所示, 把斜抛运动看成是沿 v_0 方向的匀速直线运动和沿竖直方向的初速为零的自由落体运动叠加而成, 以抛出点为坐标原点, 由这两个运动产生的位移和时间有如下关系

$$r_1 = v_0 t$$

$$r_2 = \frac{1}{2} g t^2$$

当石头落在山坡上时, $|r| = s$, 由图中几何关系得

$$v_0 t \sin\theta + s \sin\alpha = \frac{1}{2} g t^2 \quad (6)$$

$$v_0 t \cos\theta = s \cos\alpha \quad (7)$$

由⑦式得 $s = \frac{v_0 \cos\theta t}{\cos\alpha}$, 代入⑥式, 得

$$v_0 t \sin\theta + \frac{v_0 \cos\theta t}{\cos\alpha} \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} g t^2$$

$$t = \frac{2v_0 (\sin\theta \cos\alpha + \cos\theta \sin\alpha)}{g \cos\alpha} = \frac{2v_0 \sin(\theta + \alpha)}{g \cos\alpha}$$

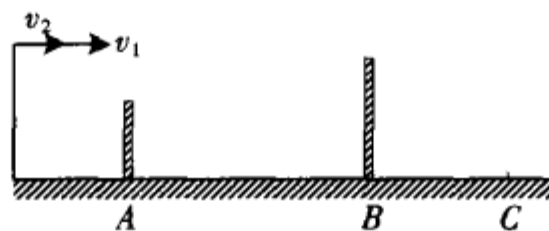
上式代入 S 表达式, 得

$$s = \frac{2v_0^2 \cos\theta \sin(\theta + \alpha)}{g \cos^2 \alpha} = \frac{v_0^2 [\sin(2\theta + \alpha) + \sin\alpha]}{g \cos^2 \alpha}$$

同样可得 $\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$ 时有最大射程

$$s_{\max} = \frac{v_0^2 (1 + \sin\alpha)}{g \cos^2 \alpha}$$

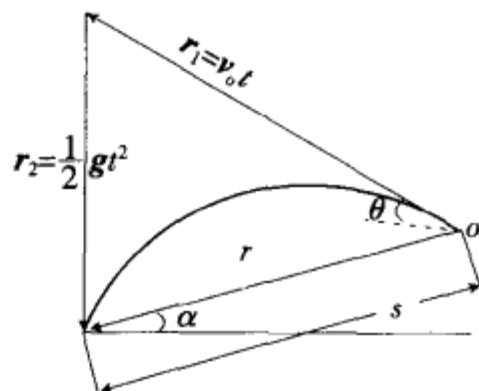
例 1-4 如图例 1-4a 所示, 在离水平地面高 5m 的平台上水平抛出两个小球 1 和 2. 两球的初速度分别为 v_1 和 v_2 ($v_1 > v_2$), 球 1 抛出后刚好能越过位于 A 点的竖直面 A 的顶端, 然后落地与地面作弹性碰撞, 反弹后又刚好越过位于 B 处的墙面 B, 然后落到地面上 C 点处, C 点到平台的水平距离为 9m. 球 2 抛出后先与地面作弹性碰撞, 反弹后也刚好越过墙面 A, 然后与地面作第二次弹性碰撞, 再次反弹后又刚好越过墙面 B, 然后也落到地面上 C 点处. 试求:



图例 1-4a

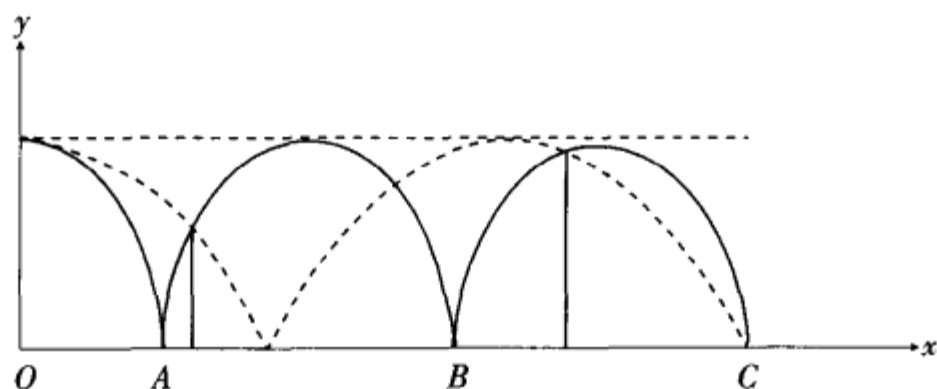
- (1) v_1 和 v_2 ;
- (2) 墙 A 和 B 离开平台的水平距离;
- (3) 两墙面的高度.

解: (1) 如图例 1-4b 所示, 取平面直角坐标 oxy , 设平台高为 H , 从 O 点到 C 点的距离为 s . 球 1 抛出后和到达 C 点以前只与地面作一次弹性碰撞, 碰后无机械能损失, 因而反弹后速度的水平分量和射



图例 1-3b

高不变,所以球 1 的抛物线运动轨迹如图中虚线所示,由对称性可知,小球 1 第一次落地点应位于 $x = \frac{s}{3}$ 处,反弹后在 $x = \frac{2s}{3}$ 处达到与地面相距 H 的最高点.同理,球 2 第一次和第二次的落地点分别为 $x = \frac{1}{5}s$ 和 $x = \frac{3}{5}s$,轨迹最高点对应于 $x = \frac{2}{5}s$ 和 $\frac{4}{5}s$ 处.



图例 1-4b

球 1 和 2 的轨迹方程在第一次反弹前分别为

$$y_1 = H - \frac{g}{2v_1^2}x^2 \quad ①$$

$$y_2 = H - \frac{g}{2v_2^2}x^2 \quad ②$$

球 1 落地点坐标为 $x_1 = \frac{s}{3}$, $y_1 = 0$, 球 2 落地点坐标为 $x_2 = \frac{s}{5}$, $y_2 = 0$, 分别代入①和②式, 解出 v_1 和 v_2 的值.

$$0 = H - \frac{g}{2v_1^2} \left(\frac{s}{3} \right)^2$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{g}{2H} \cdot \frac{s}{3}} = \sqrt{\frac{10}{2 \times 5} \cdot \frac{9}{3}} = 3(\text{m/s})$$

$$0 = H - \frac{g}{2v_2^2} \left(\frac{s}{5} \right)^2$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{g}{2H} \cdot \frac{s}{5}} = \sqrt{\frac{10}{2 \times 5} \cdot \frac{9}{5}} = 1.8(\text{m/s})$$

(2) 球 2 反弹后轨迹的最高点移到 $x = \frac{2}{5}s$ 处, 所以球 2 反弹后的轨迹方程为

$$y = H - \frac{g}{2v_2^2} \left(x - \frac{2}{5}s \right)^2 \quad ③$$

墙面 A 的顶端是球 1 反弹前和球 2 反弹后轨迹相交的地方, 交点的坐标应满足①式和③式

$$H - \frac{g}{2v_1^2}x^2 = H - \frac{g}{2v_2^2} \left(x - \frac{2}{5}s \right)^2 \quad ④$$

$$x^2 = \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^2 \left(x - \frac{2}{5}s \right)^2 = \left(\frac{3}{1.8} \right)^2 \left(x - \frac{2}{5}s \right)^2 = \left(\frac{5}{3}x - \frac{2}{3}s \right)^2$$

$$\frac{5}{3}x - \frac{2}{3}s = \pm x$$

$$x = s \text{ 或 } x = \frac{s}{4}$$

$x = s$ 为球的公共落地点, 与所求位置无关, 舍去, 所以得到墙 A 的位置为

$$x_A = \frac{s}{4} = \frac{9}{4} = 2.25(\text{m})$$

同样分析墙 B 的位置,球 1 反弹后轨迹最高点移到 $x = \frac{2}{3}s$ 处,球 2 第二次反弹后轨迹的最高点移到 $x = \frac{4}{5}s$,墙 B 的顶点是上述两球轨迹的相交处,因此

$$y = H - \frac{g}{2v_1^2} \left(x - \frac{2}{3}s\right)^2 = H - \frac{g}{2v_2^2} \left(x - \frac{4}{5}s\right)^2 \quad (5)$$

代入 v_1, v_2 的值,得

$$x - \frac{2}{3}s = \pm \left(\frac{5}{3}x - \frac{4}{3}s\right)$$

得 $x = s$ (舍去), $x = \frac{3}{4}s = \frac{3}{4} \times 9 = 6.75(\text{m})$

墙 B 的位置在 $x_B = 6.75\text{m}$ 处

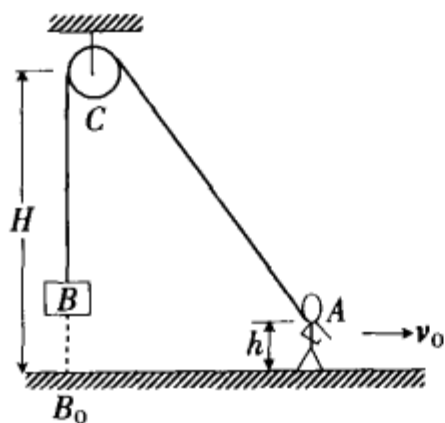
(3) 把 x_A 代入①式,得墙 A 的高度

$$h_A = H - \frac{g}{2v_1^2} \times x_A^2 = 5 - \frac{10}{2 \times 3^2} (2.25)^2 = 2.19(\text{m})$$

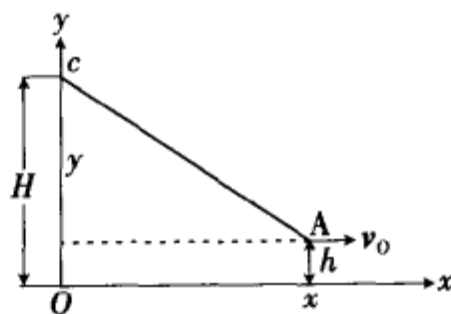
把 x_B 的值代入⑤式,得墙 B 的高度

$$h_B = H - \frac{g}{2v_1^2} \left(x_B - \frac{2}{3}s\right)^2 = 5 - \frac{10}{2 \times 3^2} \left(6.75 - \frac{2}{3} \times 9\right)^2 = 4.69(\text{m})$$

例 1-5 如图例 1-5a 所示,跨过滑轮 C 的绳子一端挂有重物 B,另一端 A 被人拉着沿水平方向匀速运动,速率 $v_0 = 1.0\text{m/s}$. A 点离地的距离保持 $h = 1\text{m}$,运动开始时,重物在地面上 B_0 处,绳两侧都是竖直伸长状态,且滑轮离地面 $H = 10\text{m}$,滑轮半径不计. 求:(1)重物离地面的高度 y 和时间 t 的函数关系.(2)重物到达滑轮前任意时刻 t 的速度.(3)到达滑轮处所需的时间.



图例 1-5a



图例 1-5b

解:(1) 如图例 1-5b 所选的坐标系,绳总长为 l ,时刻 t 重物位于 y 处,人在 x 处,因绳长不变,由几何关系得

$$l = H - y + \sqrt{(H-h)^2 + x^2} \quad (1)$$

$$l = 2H - h \quad (2)$$

而 $x = v_0 t \quad (3)$

把②③式代入①式,并把 $H = 10\text{m}$, $h = 1\text{m}$, $v_0 = 1.0\text{m/s}$ 代入,得物的高度为

$$y = \sqrt{t^2 + 81} - 9 \quad (4)$$

(2) 物的瞬时速度为

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2} (t^2 + 81)^{-\frac{1}{2}} (2t) = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 81}}$$

对本题来说,如果不直接用求导数的公式,亦可由导数的定义解出.

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(t+\Delta t)^2 + 81} - \sqrt{t^2 + 81}}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[(t+\Delta t)^2 + 81] - (t^2 + 81)}{\Delta t [\sqrt{(t+\Delta t)^2 + 81} + \sqrt{t^2 + 81}]} \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2t\Delta t + \Delta t^2}{\Delta t [\sqrt{(t+\Delta t)^2 + 81} + \sqrt{t^2 + 81}]}
\end{aligned}$$

上式分子和分母消去 Δt , 由于 $\Delta t \rightarrow 0$, 上式化为

$$v = \frac{2t}{2\sqrt{t^2 + 81}} = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 81}} \quad \text{⑤}$$

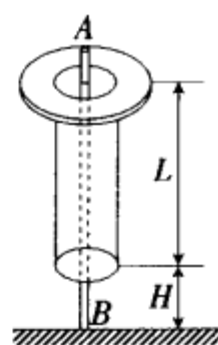
(3) 到达滑轮时 $y = H = 10$ 米, 代入④式, 得

$$10 = \sqrt{t^2 + 81} - 9$$

解得

$$t = 16.7\text{s}$$

例 1-6 如图例 1-6a 所示, 厚度可不计的圆环套在粗细均匀、长度为 L 的圆柱棒上端. 圆环和圆柱棒的质量均为 m , 圆环可在棒上滑动, 它们之间滑动摩擦力和最大静摩擦力相等, 大小为 kmg , (k 为大于 1 的常数). 棒能沿光滑的竖直细杆 AB 上下滑动. 设棒与地相碰时无动能损耗且碰撞时间极短. 已知棒自由下落时其下端距地为 H , 与地经过 n 次碰撞后, 圆环从棒的下端滑脱.



图例 1-6a

(1) 描述在第二次碰地前环与棒的运动情况, 求出环沿棒的滑动停止时棒的高度 H' .

(2) 求出 n, H, L, k 四量应满足的关系.

(全国中学生物理竞赛试题)

解: (1) 与第一次碰撞有关的速度、加速度、位移等物理量的值(取竖直向下为正)见下表.

物理量	棒	环	环相对于棒
碰撞前瞬间的速度	$\sqrt{2gH}$	$\sqrt{2gH}$	0
碰撞后瞬间的速度	$v = -\sqrt{2gH}$	$\sqrt{2gH}$	$v' = 2\sqrt{2gH}$
碰撞后的加速度	$a = (k+1)g$	$-(k-1)g$	$a' = -2kg$

棒碰地后, 如果环一直沿棒滑动, 棒到达最高点的时间为

$$t = -\frac{v}{a} = \frac{\sqrt{2gH}}{(k+1)g} = \frac{1}{k+1} \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

环相对于棒静止所需的时间为

$$t' = -\frac{v'}{a'} = \frac{2\sqrt{2gH}}{2kg} = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

显然 $t' > t$, 即在计算 t 时所用的条件是满足的. 当棒从最高点下落时, 环还要滑一段时间, 直至棒与环下落速度相同, 然后两者一起以加速度 g 下落. 这一次反跳过程中环在棒上滑动的距离为

$$s_1 = \frac{-(v')^2}{2a'} = \frac{2H}{k}$$

在 $t = t'$ 时, 棒下端的高度为

$$H' = -[vt' + \frac{1}{2}a(t')^2] = \frac{H}{k} \cdot \frac{k-1}{k}$$

如图例 1-6b 所示, 此时棒和环的速度是

$$v' = v + at' = \frac{1}{k} \sqrt{2gH}$$

这相当于两物体从棒的下端离地 H_2 处自由下落,

$$H_2 = \frac{(v')^2}{2g} + H = \frac{H}{k}$$

也就是说,对第二次碰撞来说,它相当于棒和环从棒下端离地 $H_2 = H/k$ 处自由下落,因而求第二次反跳中环滑动距离的公式时,只要用 H/k 代替第一次反跳时滑动距离公式中的 H 即可. 只要环不从棒上滑脱,这个关系对任意两个相连的反跳都是适用的,因此环在棒上下滑的距离依次为

$$s_1 = \frac{2}{k}H$$

$$s_2 = \frac{2}{k} \cdot \frac{H}{k} = \frac{2H}{k^2}$$

$$s_3 = \frac{2}{k^2} \cdot \frac{H}{k} = \frac{2H}{k^3}$$

.....

(2)在整个过程的前 $n-1$ 次反跳中,环沿棒滑行的总距离为

$$s = s_1 + s_2 + \dots + s_{n-1} = \frac{2H}{k} \cdot \frac{1 - \frac{1}{k^{n-1}}}{1 - \frac{1}{k}}$$

环在 n 次碰撞后滑脱的条件是

$$s < L \leq s + \frac{2H}{k^n}$$

即

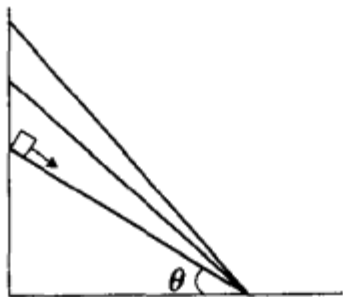
$$\frac{2H}{k} \cdot \frac{1 - \frac{1}{k^{n-1}}}{1 - \frac{1}{k}} < L \leq \frac{2H}{k} \cdot \frac{1 - \frac{1}{k^n}}{1 - \frac{1}{k}}$$

本章习题

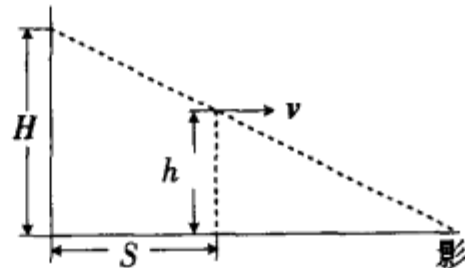
1.1 一自由落体在它运动的最后一秒内所通过的路程等于全程的 $\frac{1}{3}$. 求:(1)通过全程所需的时间;(2)物体下落的高度.

1.2 如图习 1.2 所示,物体从具有共同底边、但倾角不同的若干光滑斜面顶端由静止开始自由滑下,问当倾角为何值时,才能使物体滑至底端所需的时间最短?

1.3 如图习 1.3 所示,路灯距地面高度为 H ,行人身高为 h ,若人以匀速 v 背向路灯行走,则人头的影子移动的速度为多少?



图习 1.2



图习 1.3

1.4 在河面上一船以速度 v 作匀速直线运动,在船上一人相对船以 v_0 向前方空中斜抛一物体,

v_0 和水平面的夹角为 θ . (1) 以地球为参照系, 求物体的轨迹方程. (2) 以船为参照系, 求物体的轨迹方程

1.5 一质点在 oxy 平面内运动, 运动方程为 $x = 3t, y = 8 - t^2$, 式中 x, y 以米为单位, t 以秒为单位.

- (1) 写出质点在时刻 t 的位矢和质点的运动轨迹;
- (2) 计算第二秒内质点的平均速度;
- (3) 计算质点在 1 秒末和 2 秒末的瞬时速度和瞬时加速度. 在什么时候质点有最小的速度?
- (4) 在什么时刻 t 质点离原点最近? 算出这一距离.

1.6 一物体以初速 $v_0 = 20\text{m/s}$ 抛出, 抛射角(仰角)为 $\alpha = 60^\circ$, 略去空气阻力, 试问:

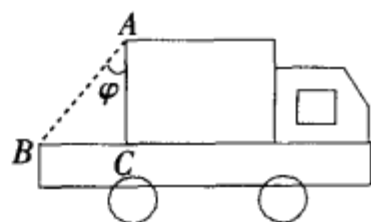
- (1) 物体开始运动后的 1.5 秒末, 运动方向与水平面的夹角 θ 是多少?
- (2) 物体抛出后经过多少时间, 其运动方向与水平面成 45° 角, 这时物体所在高度是多少?
- (3) 在物体轨迹最高点处和落地点处, 轨迹的曲率半径各为多大?

1.7 一物体从静止出发沿半径为 $R = 3.0\text{m}$ 的圆周运动, 切向加速度为 $a_t = 3.0\text{m/s}^2$. 试问:

- (1) 经过多少时间它的总加速度 a 与半径成 30° 角?
- (2) 在上述时间内物体所通过的路程 s 等于多少?

1.8 在空气中以相同的速率 v_0 向各个方向把若干小球同时抛出, 证明: 在略去空气阻力的情况下, 任意时刻 t , 所有小球都位于一个球面上, 这球面的中心则作自由落体运动, 球面半径等于 $v_0 t$. [提示]

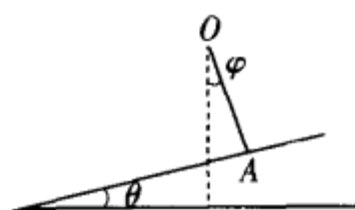
1.9 有一汽车的顶篷只能盖到 A 处, 如图习 1.9 所示, 乘客可坐到车尾 B 处, AB 连线与竖直方向成 $\varphi = 30^\circ$ 角, 这汽车正在平直的公路上冒雨行驶, 当它的速度为 $u_1 = 6\text{km/h}$ 时, C 点刚好不被雨点打着, 若它的速度为 $u_2 = 18\text{km/h}$ 时, 则 B 点刚好不被雨点打着, 求雨点的速度 v .



图习 1.9

1.10 下雨时, 设雨点相对于地面作匀速直线运动, 速度是 v , 一人坐在加速度为 a , 向 x 方向行驶的车中观察雨点的运动轨迹, 设在时刻 $t = 0$ 开始观察, 此时车速为 u_0 , 雨点在 y_0 处, 写出雨点相对于车的轨迹方程. [提示]

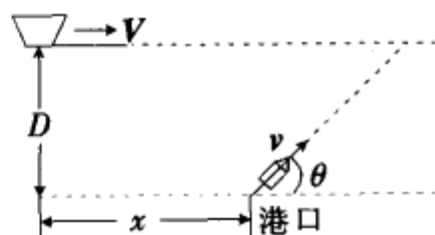
1.11 如图所示, 一小球自倾角为 θ 的斜面的上方 O 点沿一光滑斜槽 OA 由静止开始滑下, 若要使该小球滑至斜面所需的时间最短, 则 OA 与铅垂线之间的夹角 φ 应取何值? [提示]



图习 1.11

1.12 一架飞机在无风时以匀速 v 相对地面飞行, 能飞出的最远距离为 R (包括飞出和飞回), 现飞机在风速为 u , 方向为北偏东 α 度的风中飞行, 而飞行的实际航向为北偏东 β 度, 求这种情况下飞机能飞出的最远距离. [提示]

1.13 如图所示, 一条船平行于平直的海岸线航行, 离岸的距离为 D , 速率为 V , 一艘速率为 v ($v < V$) 的快艇从一港口出发去拦截这条船. (1) 试证快艇必须在这条船驶过海岸线的某一点之前出发, 这一点在快艇后边距离 x 处, $x = \frac{D(V^2 - v^2)^{1/2}}{v}$ (2) 如果快艇在尽可能最迟的时刻出发, 问它在什么地方和什么时间截住这条船? [提示]



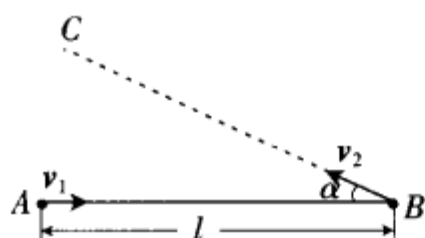
图习 1.13

1.14 如图所示, 质点 A 和 B 同时从 A、B 两点出发, 分别以速度 v_1 沿 AB 和以速度 v_2 沿 BC 作匀速直线运动, BC 和 AB 的夹角为 α . 开始时质点 A 和质点 B 相距为 l , 试求两质点之间的最短距离. [提示]

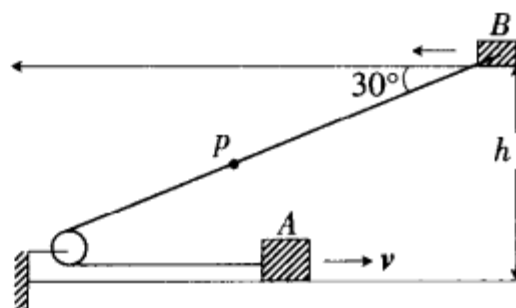
1.15 如图所示, 有两条位于同一竖直平面内的水平轨道, 相距为 h . 轨道上有两个物体 A 和 B, 它们通过一根绕过定滑轮 O 的不可伸长的轻绳相连接. 物体 A 在下面的轨道上以匀速率 v 运动. 在

轨道间的绳子与轨道成 30° 的角的瞬间, 绳子 B 段的中点处有一与绳相对静止的小水滴 P 与绳子分离, 设绳长 BO 远大于滑轮直径, 求:

- (1) 小水滴 P 脱离绳子时速度的大小和方向;
 - (2) 小水滴 P 离开绳子落到下面轨道所需要的时间. [提示]
- (第 15 届全国中学生物理竞赛复赛试题)

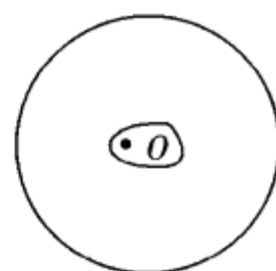


图习 1.14



图习 1.15

1.16 一半径为 $R = 1.00\text{m}$ 的水平光滑圆桌面, 圆心为 O , 有一竖直的立柱固定在桌面上的圆心附近, 立柱与桌面的交线是一条凸的平滑的封闭曲线 C , 如图所示. 一根不可伸长的柔软的细轻绳, 一端固定在封闭曲线上的某一点, 另一端系一质量为 $m = 7.5 \times 10^{-2}\text{kg}$ 的小物块. 将小物块放在桌面上并把绳拉直, 再给小物块一个方向与绳垂直、大小为 $v_0 = 4.0\text{m/s}$ 的初速度. 物块在桌面上运动时, 绳将缠绕在立柱上, 已知当绳的张力为 $T_0 = 2.0\text{N}$ 时, 绳即断开, 在绳断开前物块始终在桌面上运动.



图习 1.16

- (1) 问绳刚要断开时, 绳的伸直部分的长度为多少?

(2) 若绳刚要断开时, 桌面圆心 O 到绳的伸直部分与封闭曲线的接触点的连线正好与绳的伸直部分垂直, 问物块的落地点到桌面圆心 O 的水平距离为多少? 已知桌面高度 $H = 0.80\text{m}$, 物块在桌面上运动时未与立柱相碰, 取重力加速度大小为 10m/s^2 [提示]

- (第 17 届全国中学生物理竞赛预赛题)

静力学

静力学讨论在某个参照系中处于静止状态的物体的受力情况,达到平衡(静止)的条件及平衡的性质. 流体静力学则讨论静止流体内的压强分布及流体与固体之间的相互作用.

§ 2.1 力和力矩

力是物体之间的相互作用. 力是矢量,符合矢量的相加法则. 在国际单位制中,力的单位是牛顿(N). 这里我们只讨论日常生活中常见的力. 这些力可归属两大范畴:万有引力和电磁力. 这两种力都能在很远的距离上产生作用. 万有引力只有相互吸引力,而电磁相互作用既有吸引力又有排斥力,它们常常互相削弱,所以在宏观层次上较少直接显示其作用. 特别在天体的范围内,万有引力是大质量的天体之间起支配作用的力. 但是深入到原子和分子层次,构成原子和分子的带电粒子之间的电磁力与它们之间的万有引力相比要强得多. 例如氢原子中电子、质子之间的静电引力约为万有引力的 2×10^{39} 倍. 因而在这个层次,起支配作用的是电磁力. 电磁力不仅决定了固体、液体等形式的物质结构,而且在宏观上还表现为性质不同的多种接触力,如绳子中的张力、桌面对物体的支承力、两物体的接触表面之间的摩擦力和运动流体中的粘滞力等. 从微观上看,这些力都是由构成固体、液体的微观粒子之间的相互作用力所引起的,本质上是电磁相互作用的结果. 下面介绍力学中几种常见的力.

1. 万有引力

牛顿在开普勒关于行星运动的三定律基础上建立了万有引力定律. 质量为 m_1 的质点受到质量为 m_2 的质点的万有引力为

$$\mathbf{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \mathbf{r}_{12}^{\circ} \quad (2.1-1)$$

式中 r_{12} 为两质点的距离, \mathbf{r}_{12}° 为从质点 2 指向质点 1 的单位矢量, 如图 2.1-1 所示. G 称为万有引力常数. $G = 6.6720 \times 10^{-11}$ 牛顿·米²/千克². 万有引力定律只适用于质点之间的相互作用,但可以证明,对于两个质量均匀分布的球体,它们之间的万有引力也可以用此式,只要将(2.1-1)式中的 r_{12} 理解为两球心之间的距离即可.

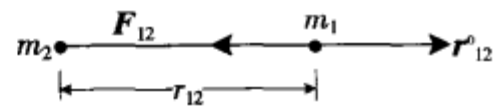


图 2.1-1 万有引力

重力是地球与物体之间的万有引力. 在地球表面,质量为 m 的物体所受到的引力即重力

$$F = G \frac{mM_e}{R_e^2}$$

式中 M_e 为地球质量, R_e 为地球半径. 由上式又可得重力加速度为

$$g = G \frac{M_e}{R_e^2} \quad (2.1-2)$$

在地球上实际测得的物体的重力因受到其所在高度、地球密度分布不均匀和地球自转等因素的影响而有差异,但相差不大,因而近似把重力看成恒力,重力加速度看作恒量,其值为 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

2. 弹性力

当相互接触的物体发生形变时所产生的恢复力称为弹性力. 当物体形变不太大时,弹性力与形变成正比,这就是胡克定律. 例如弹簧的弹性力 F 与弹簧相对于原长的形变(拉伸或压缩) x 成正比,方向指向平衡位置,即

$$F = -kx \quad (2.1-3)$$

k 称为弹簧的劲度系数,或倔强系数,负号表示弹性力与形变反方向.

当物体与一表面相接触时,该表面作用于物体的与表面垂直的分力通常称为支承力或正压力,这是弹性力,由于相应的 k 很大,因而形变很小,因此正压力并非由(2.1-3)式求解,而是由求解物体的运动或平衡方程来确定的.

绳子的张力也属于弹性力,绳子上任一横截面的两边互施作用力,这力就称为绳子的张力,它也是由求解力学问题来确定的.

3. 摩擦力

当两物体的接触面有相对滑动或有相对滑动趋势时,会产生一种阻碍相对滑动的切向力,这种力称为摩擦力,前者称为动摩擦力,后者称为静摩擦力.两块干燥固体之间的摩擦力服从以下规律:当相对速度不很大时,动摩擦力与速度无关,与两物体的表观接触面积无关,动摩擦力与正压力成正比;静摩擦力的大小由外力的大小决定,可随外力在零与一个最大值(称为最大静摩擦力)之间变化,最大静摩擦力也与正压力成正比,一般情况下,它大于动摩擦力.上面的规律可分别表示为

$$f_k = \mu_k N \quad (2.1-4)$$

$$0 \leq f_s \leq \mu_s N \quad (2.1-5)$$

上式中 μ_k 、 μ_s 分别称为动摩擦系数和静摩擦系数.一般情况下, μ_k 和 μ_s 相差不大,也常看作近似相等,统称为摩擦系数.

下面我们来研究质点相对于某根指定的直线的运动,将这根直线称为“轴线”.在讨论这类问题时,力矩是很重要的概念.

在日常生活中,我们决不会用平行于门轴的力试图打开或关闭一扇门,亦不会将门的把手安装在靠近门轴的地方.经验告诉我们,要改变物体绕轴转动的运动状态,除了考虑作用力的大小和方向外,还必须考虑力的作用点的位置.设想直线 AB 是一根轴,竖直(设为 z 方向)放置,用一根轻(质量可忽略)杆将质点 P 与轴 AB 联结起来,交于 O 点, OP 长为 r ,轻杆与轴垂直,质点可以在垂直于轴 AB 的平面 S 内转动.如图 2.1-2 所示.当外力 F 作用在质点 P 上时,先将力 F 分解为平行于轴的力 $F_{//}$ 和垂直于轴的力 F_{\perp} ,分力 $F_{//}$ 对质点绕轴的转动不起作用,另一个分力 F_{\perp} 在平面 S 上,力的作用线与 OP 的夹角为 θ ,再将 F_{\perp} 分解为沿 OP 方向的分量 $F_{\perp} \cos\theta$ 和垂直于 OP 的分量 $F_{\perp} \sin\theta$, $F_{\perp} \cos\theta$ 对质点的转动也不起作用,所以只需要考虑垂直于 OP 的力的分量 $F_{\perp} \sin\theta$,它对 O 轴的力矩为

$$M = rF_{\perp} \sin\theta \quad (2.1-6)$$

图 2.1-3 所示为平面 S , F_{\perp} 和 r 都在该平面上, O 点到力 F_{\perp} 的作用线的垂直距离为 d , d 称为力对 O 轴的力臂, $d = r \sin\theta$,因此,(2.1-6)式可写成

$$M = F_{\perp} d \quad (2.1-7)$$

以上讨论的是一个特例,一般情况下,质点并非固结于轴线,轴线也不必是实体的轴,也就是说,质点并不一定围绕轴线转动,只是在某些情况下需要研究质点相对于固定参考轴(或参考点)的运动.

可将上述对轴的力矩的概念推广到对点的力矩.如图 2.1-4 所示. O 为参考点,从参考点 O 指向力的作用点 P 的矢量为 r ,作用力 F 对于参考点 O 的力矩用矢量 M 表示,力矩的大小等于 r 和 F 两矢量为邻边所构成的平行四边形的面积,即

$$|M| = |r| \cdot |F| \cdot \sin\theta$$

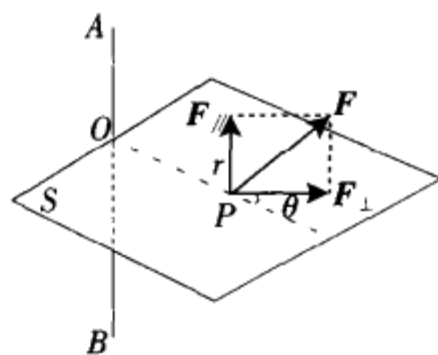


图 2.1-2 任意方向的力对 O 轴的力矩

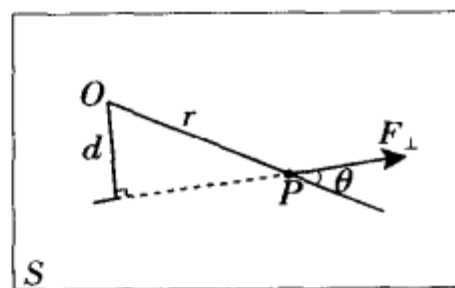


图 2.1-3 平面上的力和力臂

上式中 θ 为 r 和 F 的夹角, ($\theta < \pi$); 力矩的方向垂直于 r 和 F 所决定的平面, 指向由右手螺旋法则确定: 以弯曲的四指表示从 r 以小于 π 的角度转到 F 的转向时, 伸直的拇指即 M 的方向. 可将力矩表式写成下面的形式:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (2.1-8)$$

上式右边称为矢量 r 与矢量 F 的矢积.

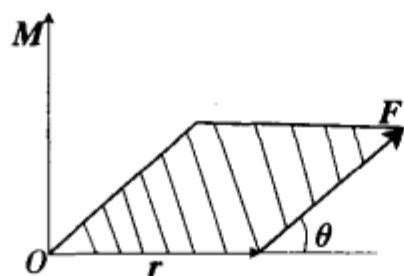


图 2.1-4 力矩矢量

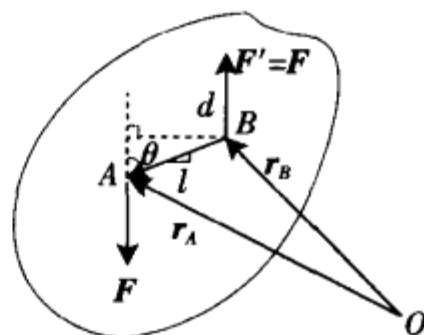


图 2.1-5 力偶矩

在国际单位制中, 力矩的单位是米·牛顿 ($\text{m} \cdot \text{N}$).

例 2.1-1 两个大小相等, 方向相反, 但力的作用线不在同一直线上的力称为力偶. 如图 2.1-5 所示, 设从力 F' 的作用点 B 指向力偶中另一个力 F 的作用点 A 的矢量为 l , 试证此两力对于两力所在平面内任一参考点的力矩为 $M = l \times F$

证: 设 O 为力 F 和 F' 所在平面上的一点, 力 F 和 F' 对于参考点 O (即相当于转轴) 的力矩分别为

$$M_1 = \mathbf{r}_A \times \mathbf{F}$$

$$M_2 = \mathbf{r}_B \times \mathbf{F}'$$

由题意可知 $F' = -F$

两力对 O 点的合力矩为

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 = \mathbf{r}_A \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_B \times \mathbf{F}' = \mathbf{r}_A \times \mathbf{F} - \mathbf{r}_B \times \mathbf{F} = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F}$$

由 OAB 矢量三角形可知

$$\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B = \mathbf{l}$$

所以

$$\mathbf{M} = \mathbf{l} \times \mathbf{F}$$

由于 l 是由 B 指向 A 的矢量, 与参考点 O 的选择无关, 所以力偶 F 和 F' 对于 O 点的合力矩 M (又称力偶矩) 也与参考点的选择无关, 它的大小为

$$M = lF \sin \theta = Fd \quad (2.1-9)$$

式中 $d = l \sin \theta$ 是这一对力的作用线之间的距离.

§ 2.2 质点和质点系的平衡 平衡的稳定性

作用于同一质点上的诸力的矢量和称为作用在质点上的合力. 受到多个力作用的质点若处于力平衡 (静止) 状态, 这些力的合力必为零, 即

$$\sum_i \mathbf{F}_i = 0 \quad (2.2-1)$$

力在各方向上的分量亦为零, 即

$$\sum_i F_{ix} = 0, \quad \sum_i F_{iy} = 0, \quad \sum_i F_{iz} = 0 \quad (2.2-2)$$

作用于一个质点系 (由多个质点组成的体系) 上的诸力的作用线或其延长线若交于一点, 这些力就称为共点力, 其合力的作用点即上述交点. 若每个质点都处于力平衡状态, 则质点系处于力平衡状态.

例 2.2-1 如图 2.2-1 所示,三个完全相同的半径为 r 的光滑小圆柱紧密接触叠放在光滑的大圆筒中,处于平衡状态,试求大圆筒的最大半径 R .

解:图 2.2-1 为垂直于圆柱轴线的截面图,下面两个小圆柱对上面小圆柱的作用力的大小均为 N_1 ,与垂直线的夹角均为 $\theta = 30^\circ$,设小圆柱的质量均为 m ,对上面的小圆柱有

$$\begin{aligned} 2N_1 \cos 30^\circ &= mg \\ N_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}} mg \end{aligned} \quad \textcircled{1}$$

下面两个小圆柱的受力情况是对称的,我们只需要分析左端小圆柱的受力情况,大圆筒对左下端小圆柱的作用力 N_2 必通过圆筒和圆柱的相切点、圆柱的轴 O_2 和圆筒的轴心 O ,设 N_2' 和竖直线的夹角为 α ,则圆筒的半径为

$$R = r + \frac{r}{\sin \alpha} \quad \textcircled{2}$$

左下端小圆柱还受到上端小圆柱的作用力 N_1' ,重力 mg ,当 α 很小使左下端小圆柱受到的水平分力 $N_2 \sin \alpha < N_1' \sin \theta = N_1 \sin 30^\circ$ 时,右下端小圆柱对左下端小圆柱无作用力,左下端圆柱将向左运动而不可能平衡,因此至少应满足

$$N_2 \sin \alpha = N_1 \sin 30^\circ = \frac{1}{2} N_1 \quad \textcircled{3}$$

三个圆柱平衡时可看成一个整体,在竖直方向上力平衡,

$$2N_2 \cos \alpha = 3mg \quad \textcircled{4}$$

由①~④式可解得

$$N_2 = \sqrt{\frac{7}{3}} mg, \sin \alpha = \frac{1}{2\sqrt{7}}$$

代入②式,得

$$R = (2\sqrt{7} + 1)r = 6.3r$$

此即圆筒的最大半径值.

处于平衡状态的质点,当受到外界的扰动时,会稍微偏离平衡位置.对于受一定几何约束(如限制在某曲线或曲面上)的质点,这种偏离是指在约束允许范围内的偏离.这时,如果质点所受的外力会引起一个回复力,该力有把它拉回到原平衡位置的倾向,则称质点的平衡是稳定的;如果这时质点所受的外力会引起一个排斥力,该力有把质点推离原平衡位置的倾向,则称质点的平衡是不稳定的;如果这时质点所受合外力仍为零,则称质点处于随遇平衡状态.例如位于光滑球形碗底的质点处于稳定平衡状态;位于光滑球顶的质点处于不稳定平衡状态;位于光滑水平面上的质点则处于随遇平衡状态.

若一个光滑曲面在相互垂直的两个方向上有不同的曲率半径,则处于该表面上的质点可以在这两个相互垂直的方向上处于不同的平衡状态,如位于光滑水平直管底部的质点,对于平行于管轴方向的扰动处于随遇平衡状态,而对于与之垂直的扰动则处于稳定平衡状态.

例 2.2-2 质量分别为 M_1 和 M_2 的两个大质量质点相距为 L 并被固定,一质量为 m ($m \ll M_1, M_2$) 的质点位于 M_1 和 M_2 的连线上,求质点 m 的平衡位置,并分别讨论对质点 m 进行沿连线方向的扰动和垂直连线方向的扰动时其平衡的稳定性.

解:如图 2.2-2 所示,设质点 m 的平衡位置离 M_1 的距离为 a ,它受 M_1 的万有引力应等于它受 M_2 的万有引力,即

$$G \frac{M_1 m}{a^2} = G \frac{M_2 m}{(L-a)^2} \quad \textcircled{1}$$

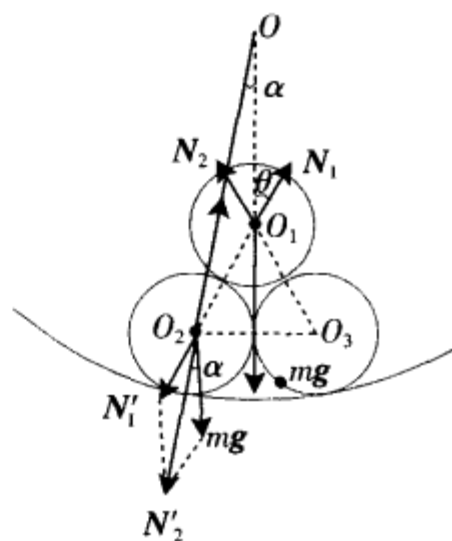


图 2.2-1

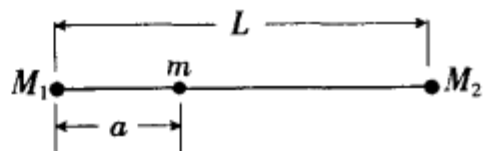


图 2.2-2

得
$$a = \frac{\sqrt{M_1/M_2}}{1 + \sqrt{M_1/M_2}} L \quad (2)$$

当质点 m 从平衡位置向右移动一小位移 x 时, 它所受的合力(以向右为正)为

$$F = Gm \left[\frac{M_2}{(L-a-x)^2} - \frac{M_1}{(a+x)^2} \right]$$

$$= Gm \left[\frac{M_2}{(L-a)^2 \left(1 - \frac{x}{L-a}\right)^2} - \frac{M_1}{a^2 \left(1 + \frac{x}{a}\right)^2} \right] \quad (3)$$

由①式 $M_2/(L-a)^2 = M_1/a^2 = C$
代入③式, 得

$$F = GmC \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{x}{L-a}\right)^2} - \frac{1}{\left(1 + \frac{x}{a}\right)^2} \right] > 0 \quad (4)$$

即当 m 受到扰动向右位移时, 它所受到的合力也向右, 使它进一步向右运动; 同样, 当 m 受到向左的扰动有一小位移 x 时, 将④式的 x 代之以 $-x$, 则得 $F < 0$, 使 m 进一步向左移动, 因而平衡是不稳定的。

当质点 m 从平衡位置沿垂直于连线方向有一小位移时, 它将同时受到 M_1 、 M_2 的引力作用, 两引力大小几乎相等, 方向间夹一钝角, 合力指向平衡位置, 因而平衡是稳定的。

§ 2.3 刚体和质心

刚体是指形状和大小均保持不变的物体, 也就是各质点(或质元)间的距离均保持不变的质点系。刚体也是一个抽象模型, 只要物体的形状和大小变化对所讨论的问题影响不大而可以忽略时, 就可以把它看成刚体。

当我们讨论一个刚体(或刚性质点组)的运动时, 刚体上各部分的运动是很复杂的, 且各不相同, 但我们发现, 在刚体内存在一个特殊的点, 这个点是刚体的质量中心, 称为质心。质心的运动可代表刚体的平动状态。例如一个质量不对称分布的哑铃在重力场中被抛出, 其质心作抛体运动, 哑铃则绕质心转动。

以两个质点组成的体系为例, 设两质点质量分别为 m_1 和 m_2 , 它们的位矢分别为 r_1 和 r_2 , 该质点系的质心 C 的位矢为 r_c 。

$$r_c = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2} \quad (2.3-1)$$

质心的质量是两质点的质量之和, 质心的位置是两质点位置的“平均”值。当然, 这两质点不应同等看待, 质量越大的质点应当具有越大的重要性, 所以(2.3-1)式的 r_c 并非简单的平均 $\frac{1}{2}(r_1 + r_2)$, 而是所谓带“权”平均, “权”是标志重要性的, 这里即以质量为“权”。例如, 对两质点体系, 质心的位置应靠近质量大的质点。上式不难推广至多个质点的体系

$$r_c = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2 + \dots + m_i r_i + \dots}{m_1 + m_2 + \dots + m_i + \dots} = \frac{\sum_i m_i r_i}{\sum_i m_i} \quad (2.3-2)$$

上式中 $\sum_i m_i = M$ 为质点系的总质量。将上式写成直角坐标系中的分量式, 为

$$x_c = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}, y_c = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i}, z_c = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i} \quad (2.3-3)$$

一般而言, 质量均匀分布且形状规则的刚体, 其几何中心就是质心的位置。

例 2.3-1 如图 2.3-1 所示, 三个质点的质量分别为 $m_1 = 1.0\text{kg}$, $m_2 = 2.0\text{kg}$, $m_3 = 3.0\text{kg}$ 。它们

位于边长为 1.0m 的等边三角形的三个角的顶点上,试确定它们的质心.

解:取 x 轴沿着这等边三角形的一边,并取 m_1 所在处为坐标原点,则质心坐标为

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{1.0 \times 0 + 2.0 \times 1 + 3.0 \times \frac{1}{2}}{1.0 + 2.0 + 3.0} = \frac{7}{12} (\text{m})$$

$$y_c = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{1.0 \times 0 + 2.0 \times 0 + 3.0 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{1.0 + 2.0 + 3.0} = \frac{\sqrt{3}}{4} (\text{m})$$

质心 C 的位置在图中已标明.

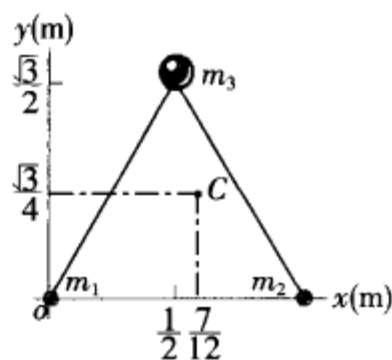


图 2.3-1

§ 2.4 刚体的平衡

处于静止状态的刚体既不平动也不转动,因此,刚体平衡的充分必要条件是它所受的合外力为零;对任意一个参考点的合外力矩为零,即

$$\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i = 0 \quad (2.4-1)$$

$$\mathbf{M} = \sum_i \mathbf{M}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = 0 \quad (2.4-2)$$

我们在本章的讨论只限于共面力系(即作用力都在同一个平面上).设此平面为 xy 平面,则(2.4-1)式简化为

$$\sum_i F_{ix} = 0, \sum_i F_{iy} = 0 \quad (2.4-3)$$

(2.4-2)式简化为

$$M_z = \sum_i M_{iz} = 0 \quad (2.4-4)$$

式中 M_{iz} 是指对任一 z 方向的固定轴的力矩.在具体问题中,可以视具体情况选择最方便的轴计算力矩.

例 2.4-1 质量为 m 、长为 l 的均质杆 AB 由系于两端的长也是 l 的两细线悬挂于 O 点.在 B 端悬挂质量为 m 的重物,求平衡时杆与水平方向的夹角 θ 及每根线中的张力 T_A 和 T_B .(图 2.4-1)

解:在杆与悬点所在面上取 x 轴沿水平方向, y 轴竖直向上,杆 AB 的重力作用于其质心上,即杆的中点处,平衡时,杆在 x 和 y 方向的合力均为零,可得两个方程

$$x \text{ 方向: } T_A \cos(60^\circ - \theta) - T_B \sin(30^\circ - \theta) = 0 \quad (1)$$

$$y \text{ 方向: } T_A \sin(60^\circ - \theta) + T_B \cos(30^\circ - \theta) - 2mg = 0 \quad (2)$$

选取 B 点为力矩的参考点,则对 B 点的合力矩为零,得

$$mg \cdot \frac{l}{2} \cos \theta = T_A l \sin 60^\circ \quad (3)$$

将① $\times \cos(30^\circ - \theta) + (2) \times \sin(30^\circ - \theta)$ 得

$$T_A \cos 30^\circ = 2mg \sin(30^\circ - \theta) \quad (4)$$

④/③,得

$$4 \sin(30^\circ - \theta) = \cos \theta$$

可解得

$$\tan \theta = \frac{1}{2\sqrt{3}}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{1}{2\sqrt{3}} = 16^\circ 6'$$

代入④、①式得

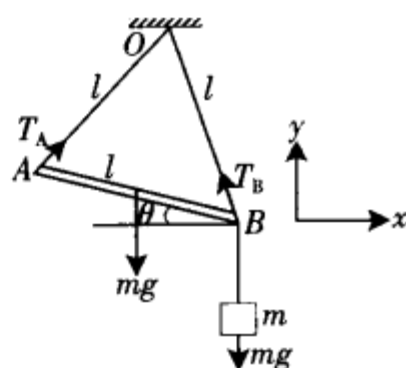


图 2.4-1

$$T_A = \frac{2mg}{\sqrt{13}} \quad T_B = \frac{6mg}{\sqrt{13}}$$

例 2.4-2 如图 2.4-2a 所示,两根轻绳把质量为 m_1 的不均匀棒悬挂起来,在棒的左端上方有一质量为 m_2 的物块和棒绑在一起,棒呈水平静止状态,二根绳子同竖直方向的夹角分别为 θ 和 φ . 棒长为 l ,求棒的重心离棒左端的距离 x .

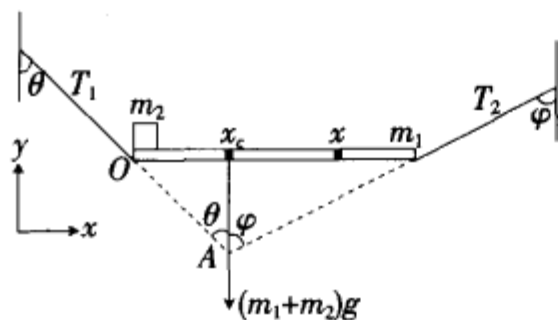


图 2.4-2(a)

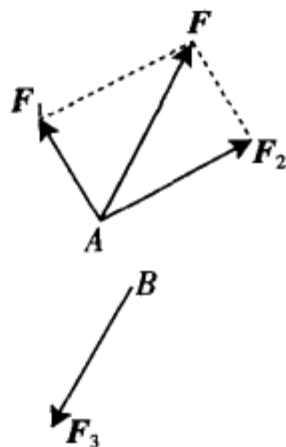


图 2.4-2(b)

解法一:取水平方向为 x 轴,竖直方向为 y 轴,原点取在棒的左端,设绳中张力分别为 T_1 和 T_2 . 由力的平衡式有

$$-T_1 \sin \theta + T_2 \sin \varphi = 0 \quad (1)$$

$$T_1 \cos \theta + T_2 \cos \varphi - (m_1 + m_2)g = 0 \quad (2)$$

取过棒左端的垂直图面的水平轴为转轴,则 T_1 和 m_2g 都通过转轴,对轴不产生力矩,因此力矩平衡方程为

$$T_2 l \cos \varphi - m_1 g x = 0 \quad (3)$$

由 (1) 式得
$$T_1 = T_2 \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \quad (4)$$

(4) 式代入 (2) 式,得

$$T_2 = \frac{(m_1 + m_2)g \sin \theta}{\sin(\theta + \varphi)}$$

上式再代入 (3) 式,得到棒的重心离棒左端的距离 x 为

$$x = \frac{(m_1 + m_2)l \sin \theta \cos \varphi}{m_1 \sin(\theta + \varphi)} \quad (5)$$

解法二:当物体受三个共面力作用而处于静止状态时,此三力的作用线(或其延长线)必交于一点. 此结论不难用反证法证明. 如图 2.4-2b 所示,设物体受 F_1, F_2, F_3 三个力作用而处于静止状态,则有

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = \mathbf{0}$$

先求出 F_1 与 F_2 的合力 $F, F = F_1 + F_2 = -F_3$,若 F_3 不共线,则 F 与 F_3 构成为力偶,物体不可能处于静止状态. 所以 F 与 F_3 必共线,即 F_1, F_2, F_3 的作用线或其延长线必交于一点. 当物体受四个或更多的共面力作用而处于静止状态时,只要先逐一求出某两个力的合力,最后得到的三个力的作用线或其延长线也必交于一点.

利用这一结论,本题共有四个力,其中 m_1g 和 m_2g 为平行力,可先求出这两个物体的等效力. 先求这两个物体的质心位置,因 m_2 的 $x_2 = 0$,所以 m_1 和 m_2 的质心坐标为

$$x_c = \frac{m_1 x}{m_1 + m_2} \quad (6)$$

即棒和物块等效为质量为 $(m_1 + m_2)$,坐标为 x_c 的质点. 设两根绳子的延长线(即力的作用线)的交点为 A ,过 A 作竖直线与棒相交,交点即为棒和物的质心位置 x_c ,由图可得

$$\frac{x_c}{\tan\theta} = \frac{l - x_c}{\tan\varphi} \quad (7)$$

由此得

$$x_c = \frac{l \tan\theta}{\tan\varphi + \tan\theta}$$

利用三角公式

$$\tan\varphi + \tan\theta = \frac{\sin(\varphi + \theta)}{\cos\theta \cos\varphi}$$

得

$$x_c = \frac{l \sin\theta \cos\varphi}{\sin(\varphi + \theta)} \quad (8)$$

⑧式代入⑥式,得

$$x = \frac{(m_1 + m_2) l \sin\theta \cos\varphi}{m_1 \sin(\varphi + \theta)} \quad (9)$$

结果与⑤式相同。

§ 2.5 静止流体的压强

流体是液体和气体的统称,它们最显著的特点是具有流动性。实验证明,在静止流体中不存在静摩擦力,通常存在压应力。流体内任一点的应力与所取的截面相垂直,应力的大小与截面的取向无关。单位面积的截面上的流体压力称为压强,用 p 表示

$$p = \frac{\Delta f}{\Delta s} \quad (2.5-1)$$

为了证明流体中的压强 p 与面元 Δs 的取向无关,在流体中取如图 2.5-1 所示的直角三角柱体元,其体积为 $\Delta V = \frac{1}{2} \Delta x \Delta y \Delta z$, Δz 为垂直纸面方向的厚度。斜面的法线设为 n ,直角三角柱受表面压力和重力作用而处于平衡状态,重力沿 $-y$ 方向,压力均与表面垂直。由 x 方向力的平衡条件可得

$$p_x \cdot \Delta y \Delta z = p_n \Delta n \Delta z \sin\alpha$$

式中 p_x 和 p_n 分别表示作用在 $\Delta y \Delta z$ 面元和 $\Delta n \Delta z$ 面元上的压强,且

$$\Delta y = \Delta n \sin\alpha$$

代入上式得

$$p_x = p_n \quad (2.5-1)$$

由 y 方向力的平衡条件,有

$$p_y \Delta x \Delta z = p_n \Delta n \Delta z \cos\alpha + \rho \Delta v \cdot g \quad (2.5-2)$$

式中 p_y 表示作用在面元 $\Delta x \Delta z$ 上的压强, ρ 为流体的密度,又有

$$\Delta x = \Delta n \cos\alpha$$

由此(2.5-2)式为

$$p_y \Delta x \Delta z = p_n \cdot \Delta x \Delta z + \frac{1}{2} \rho \Delta x \Delta y \Delta z \cdot g$$

$$p_y = p_n + \frac{1}{2} \rho \Delta y \cdot g$$

当 $\Delta y \rightarrow 0$ 时, $p_y = p_n$ 。

$$(2.5-3)$$

由(2.5-1)和(2.5-3)式得

$$p = p_x = p_y = p_n \quad (2.5-4)$$

p 为 $\Delta x, \Delta y, \Delta n$ 均趋于零时该点的压强,它仅与考察点在流体中的位置有关。在静止流体中压强的分布有如下特点:(1)等高的地方压强相等。如图 2.5-2a 所示,设 A、B 两点等高,作以 AB 连线为轴、底

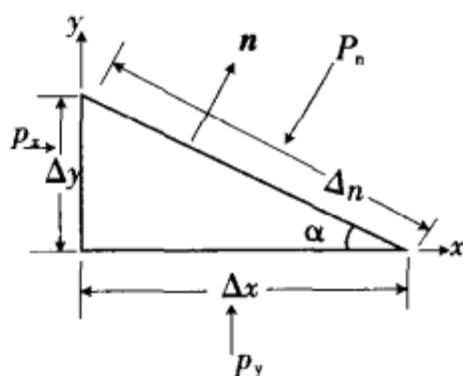


图 2.5-1

面积为 ΔS 的小柱体,该柱体水平方向的平衡条件为

$$p_A \cdot \Delta S - p_B \Delta S = 0$$

因此

$$p_A = p_B \quad (2.5-5)$$

因为 A, B 是任意选取的,所以上面证明了静止流体中等高的地方压强都相等.

(2)高度相差 h 的两点间的压强差为 ρgh . 如图 2.5-2b 所示,设 B, C 两点在同一铅垂线上,作以 BC 连线为轴、底面积为 ΔS 的小柱体,该柱体在铅垂方向的力平衡条件为

$$p_C \cdot \Delta S - p_B \cdot \Delta S = \rho gh \cdot \Delta S$$

即

$$p_C - p_B = \rho gh \quad (2.5-6)$$

由(2.5-5)式可知,(2.5-6)式对于不在同一铅垂线上的两点也适用.

例 2.5-1 如图 2.5-3 所示,物体的一部分浸在密度为 ρ 的液体中,为简单计,假设液体上面没有大气压,已知物体浸在液体中的这部分的体积为 V ,试求物体所受到的浮力.

解:物体与液体接触的表面受到液体的压力,液体对物体表面压力的铅直分量之和即为浮力. 如图所示,设物体浸在液体中的某表面面元为 ΔS ,其所在位置到液面的高度为 h ,此处压强为 $p = \rho gh$, ΔS 受到的压力为

$$\Delta f = p \Delta S = \rho gh \Delta S$$

该压力的铅直分量为 $\Delta f \cos \theta = \rho gh \cos \theta \Delta S$

$\cos \theta \Delta S$ 为 ΔS 在水平面上的投影,因而 $h \cos \theta \Delta S$ 相当于长度为 h ,底面积为 $\Delta S \cos \theta$ 的柱体的小体积元,即

$$\Delta V = h \Delta S \cdot \cos \theta$$

当 $\Delta S \rightarrow 0$ 时,液体对物体表面压力的铅直分量之总和为浮力 $f_{\text{浮}}$,即

$$f_{\text{浮}} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \sum \Delta f \cos \theta = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \sum \rho gh \cos \theta \Delta S = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \sum \rho g \Delta V = \rho g V$$

上式表明,物体在液体中所受的浮力等于该物体排开同体积液体的重量. 显然,当物体全部浸入液体中时,此结论也成立. 此即阿基米德原理. 不难证明,上述结论即阿基米德原理在液体上方有大气压时也成立.

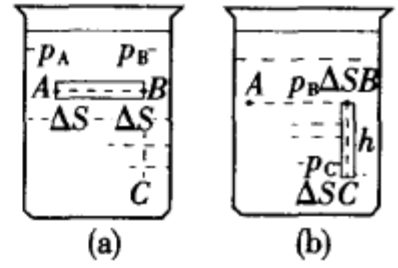


图 2.5-2

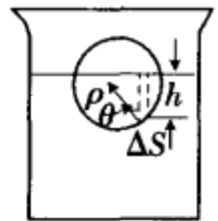


图 2.5-3

§ 2.6 浮体平衡的稳定性

浮在液体表面的物体称为浮体. 浮力的作用点称为浮心. 浮心位于与浸入液体那部分物体同体积、同形状的液体的重心上,它并不是物体的重心. 浮在液面上的物体(如船舶)的稳定度与浮体的重心及浮心的位置密切相关. 图 2.6-1a 为浮在水面上的船舶的截面图,这时船舶处于平正状态,重心 G 和浮心 B 位于同一铅垂线上. 图 2.6-1b 为船舶倾斜时的情况,船的重心 G 的位置不变,浮心 B 的位置向一侧偏离,浮力作用线与船舶截面对称线的交点 D 称为定倾中心, DG 称为定倾中心高度,由图可见,定倾中心高度越高,使船舶回复的力矩也越大,因而船舶的稳定度也越大. 图 2.6-1c 是定倾中心在重心以下的状况,这时重力和浮力的力偶矩将使船舶倾覆.

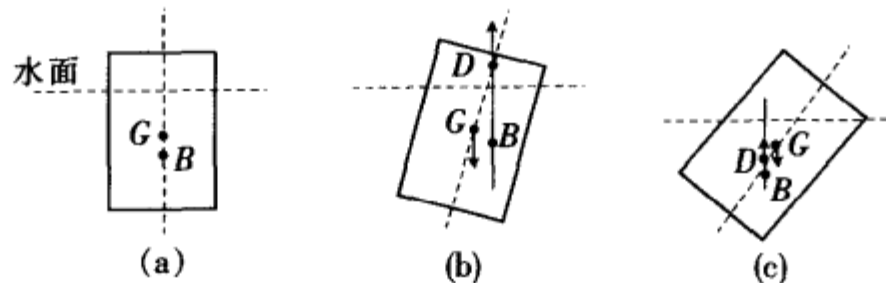


图 2.6-1

例 2.6-1 如图 2.6-2 所示,浮子是半径为 R 的球冠,质量为 m_1 ,质心到球冠底的距离为 h . 另有一根长为 l ,质量为 m_2 的均匀细杆从浮子中心垂直插到底,细杆上插一不计质量的小旗,试讨论该体系平衡的稳定性.

解:设浮子的质心为 C_1 ,细杆的质心为 C_2 , O 为球冠的球心,当浮子受到扰动而倾斜时,由于球冠状的浮子浸入水中的部分总是球冠的一部分,所以浮力的作用线总是通过 O 点. 以 O 为参考点,则浮力通过 O 点,不产生力矩, m_1 对 O 点的力矩为

$$M_1 = m_1 g (R - h) \cdot \sin \alpha$$

m_2 对 O 点的力矩为

$$M_2 = - m_2 g \left(\frac{l}{2} - R \right) \sin \alpha$$

合力矩为

$$M = M_1 + M_2 = (m_1 + m_2) g \sin \alpha \cdot \left[R - \frac{m_1 h + \frac{1}{2} m_2 l}{m_1 + m_2} \right]$$

当 $M > 0$ 时,总力矩为恢复力矩,系统为稳定平衡状态,这时应满足条件

$$R > \frac{m_1 h + \frac{1}{2} m_2 l}{m_1 + m_2}$$

当 $M < 0$ 时,总力矩使浮子倾倒,故为不稳定平衡,这时

$$R < \frac{m_1 h + \frac{m_2 l}{2}}{m_1 + m_2}$$

当 $M = 0$ 时,总力矩为 O ,系统为随遇平衡状态.

此时

$$R = \frac{m_1 h + \frac{m_2 l}{2}}{m_1 + m_2}$$

当球冠变为球体时, h 达最大,即 $h = R$,这时可得稳定平衡条件为 $R > \frac{l}{2}$,或 $l < 2R$ 表明细杆的长度比球的直径小,即细杆必须埋在球内,否则必倾覆.

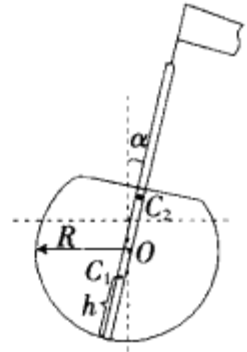


图 2.6-2

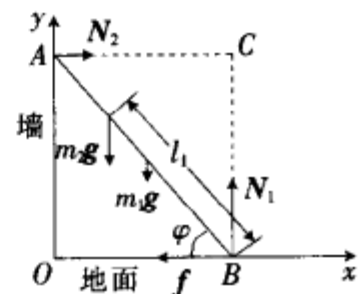
本章综合例题

例 2-1 一架均匀的梯子,质量为 m_1 ,长为 $2l$,上端靠在光滑的墙上,下端置于粗糙地面上,梯与地面的摩擦系数为 μ . 有一质量为 m_2 的人攀登到距梯下端为 l_1 的地方,如图例 2-1 所示,试求:

- (1) 梯不滑动的条件;
- (2) 对于一定的倾角 φ ,人所能攀登的高度 l_1 是多少?
- (3) 如要求攀登到一定的 l_1 ,则梯的倾角是多少?

解:(1) 设梯与地面之间的正压力为 N_1 ,摩擦力为 f ,墙和梯之间的正压力为 N_2 ,则 N_2 垂直于墙,梯不滑动所要求的摩擦力 f 应不超过最大静摩擦力. 梯所受重力为 $m_1 g_1$,施于梯的中点,竖直向下. 人施于梯的力为 $m_2 g$,竖直向下. 取如图例 2.1 所示的坐标系,规定使 φ 角增大的转动方向为正的转动方向. 由力的平衡方程 $\sum F_x = 0$ 和 $\sum F_y = 0$ 得

$$N_2 - f = 0 \quad \text{①}$$



图例 2-1

$$N_1 - m_1g - m_2g = 0 \quad (2)$$

由力矩的平衡方程, $\Sigma M_z = 0$, 取 N_1 和 N_2 延长线的交点 C 为参考点, 则 N_1 和 N_2 对该点的力矩均为零, 可使计算简单些.

$$f \cdot 2l \sin \varphi - m_1gl \cos \varphi - m_2gl_1 \cos \varphi = 0 \quad (3)$$

由 (2) 式得

$$N_1 = (m_1 + m_2)g \quad (4)$$

由 (3) 式得

$$f = \frac{(m_1l + m_2l_1)g \cot \varphi}{2l} \quad (5)$$

代入 (1) 式得

$$N_2 = f = \frac{(m_1l + m_2l_1)g \cot \varphi}{2l} \quad (6)$$

梯不滑动的条件是

$$f < \mu N_1 \quad (7)$$

由 (4), (5) 和 (7) 式得梯不滑动的条件为

$$\frac{(m_1l + m_2l_1) \cot \varphi}{2l} < \mu(m_1 + m_2) \quad (8)$$

(2) 由 (8) 式可得到, 对于一定的倾角 φ , 人所能达到的高度为

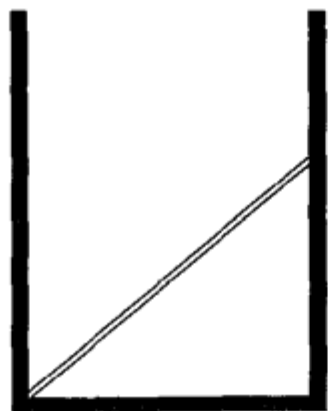
$$l_1 < \frac{2l\mu(m_1 + m_2)}{m_2} \tan \varphi - \frac{m_1l}{m_2} \quad (9)$$

由上式可见, φ 角越大, 允许人攀得越高; μ 越大, 人也攀得越高.

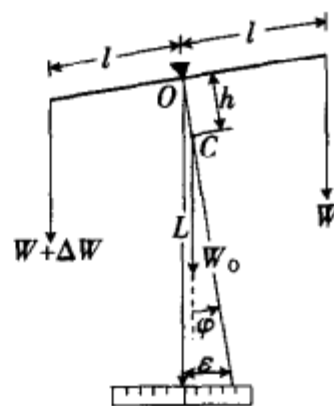
(3) 如要求人攀到一定的 l_1 , 则梯的倾角

$$\varphi > \tan^{-1} \left[\frac{m_1l + m_2l_1}{2l\mu(m_1 + m_2)} \right] \quad (10)$$

例 2-2 图例 2-2a 所示为天平的结构图. 天平的主要结构是通过刀口架在立柱上的一根横梁, 横梁下方固联一根摆动指针, 针上装有螺丝, 用来调节重心的高低. 如图例 2-2b, 设刀口在 O 处, 横梁臂长为 l , 重量为 W_0 , 重心在 C 点, $OC = h$, 当天平两边的重量稍有不等, 分别为 W 和 $W + \Delta W$ 时, 横梁的倾斜角为 φ . 天平下方有一刻度板, L 为刀口到刻度板中心的距离. 天平的灵敏度定义为 $S = \frac{\epsilon}{\Delta W}$, 式中 ϵ 为刻度板上从中心到指针所指位置的水平距离的读数, 试求天平的灵敏度 S , 并指出提高灵敏度的方法.



图例 2-2a



图例 2-2b

解: 如图例 2-2b, 当天平两端有一微小重量差 ΔW 时, 以 O 为参考点, 力矩平衡方程为

$$(W + \Delta W)l \cos \varphi - Wl \cos \varphi - W_0h \sin \varphi = 0$$

解得

$$\tan\varphi = \frac{\Delta W \cdot l}{W_h} \quad ①$$

由图的几何关系得

$$\varepsilon = L \tan\varphi = \frac{lL\Delta W}{W_h} \quad ②$$

天平的灵敏度

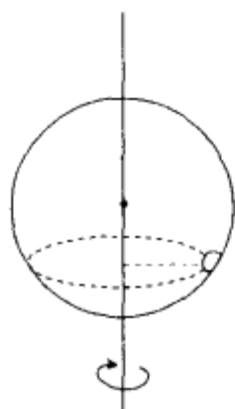
$$S = \frac{\varepsilon}{\Delta W} = \frac{lL}{W_h} \quad ③$$

要提高灵敏度,可以减小 h ,即把螺丝向上旋.但是, h 不能减小到零,因为两端重量不可能绝对相等,在 $h=0$ 的情况下,只要两端不是绝对相等,较重的一方将一直下沉,使横梁转向竖直方向,最终从刀口上掉下来,因此,天平过于灵敏就不稳定了.

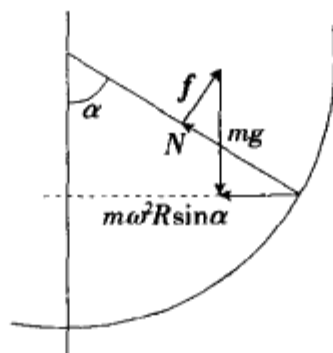
要增加天平灵敏度还可以增加横梁的臂长与指针长 L ,但这两者过分长则机械强度不够,容易弯曲,使结果不可靠.若是将臂或指针做得粗壮些,以此加强机械强度,但随之而来的是使横梁的重量 W_0 增大,又降低了灵敏度.所以这些量都要在一定的范围中综合考虑.

例 2-3 半径 $R=0.5\text{cm}$ 的空心球以角速度 $\omega=5\text{rad/s}$ 绕其竖直直径旋转,如图例 2-3a 所示,在球内侧高度为 $R/2$ 处有一小木块同球一起旋转, ($g=10\text{m/s}^2$)

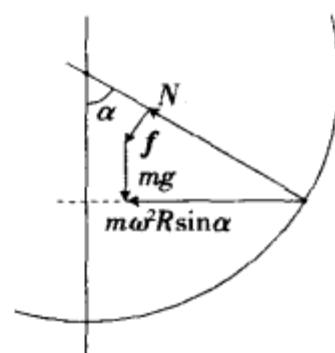
- (1) 实现这一情况所需的最小摩擦系数是多少?
- (2) 求 $\omega=8\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ 时实现这一情况的条件
- (3) 就以下两种情况研究运动的稳定性.
 - (i) 木块位置有微小变动
 - (ii) 球的角速度有微小变动. (第 9 届国际物理奥林匹克竞赛题)



图例 2-3a



图例 2-3b



图例 2-3c

解: 图例 2-3b 为小木块受力图. 木块在半径为 $R\sin\alpha$ 的水平圆周上运动, $\alpha=60^\circ$. 对于水平方向的圆运动, 处于稳定状态的条件是没有切向力. 在竖直平面内, 球壁施加的法向力 N 、摩擦力 f 、重力 mg 的矢量和应在水平方向, 其大小为 $m\omega^2 R\sin\alpha$, 设摩擦力的方向沿切线向上, 则有

$$m\omega^2 R\sin\alpha = N\sin\alpha - f\cos\alpha \quad ①$$

$$mg = N\cos\alpha + f\sin\alpha \quad ②$$

上面方程组的解为

$$f = mg\sin\alpha(1 - \omega^2 R\cos\alpha/g) \quad ③$$

$$N = mg(\cos\alpha + \omega^2 R\sin^2\alpha/g) \quad ④$$

若

$$\mu \geq \frac{f}{N} \quad ⑤$$

则木块不会下滑.

(1) 在已知 $R=0.5\text{m}$, $\omega=5\text{rad/s}$, $\alpha=60^\circ$ 的条件下

$$\mu_A \geq \sin\alpha \cdot \frac{1 - \omega^2 R\cos\alpha/g}{\cos\alpha + \omega^2 R\sin^2\alpha/g} = \frac{3\sqrt{3}}{23} \approx 0.23 \quad ⑥$$

最小摩擦系数为 0.23

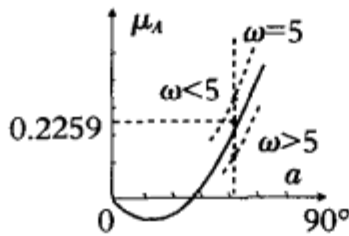
(2) 当 $\omega = 8 \text{ rad/s}$ 时, $\omega^2 R \cos \alpha / g > 1, f < 0$, 这表示摩擦力的方向应是沿切线向下的, 它阻止木块向上滑动. 因此, 只要把 f 改为 $-f$, 上面的方程全部可用. 图例 2-3c 是这种情况下 N, f 和 mg 的矢量合成图. 在 $\omega = 8 \text{ rad/s}, \alpha = 60^\circ$ 时, 摩擦系数应满足的条件为

$$\mu_B \geq \sin \alpha \cdot \frac{(\omega^2 R \cos \alpha / g) - 1}{\cos \alpha + \omega^2 R \sin^2 \alpha / g} = \frac{3\sqrt{3}}{29} \approx 0.18 \quad (7)$$

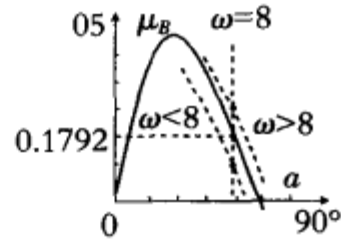
(3) 对运动稳定性的讨论:

(i) 如果 ω 不变而木块位置有微小的变化, 则在情形(1)中, 当木块上滑时, α 角增大, f 也增大, 这表示需要较大的向上的摩擦力才能稳定. 现在的 μ_A 不够大, 不能维持木块在较大的 α 处, 故木块将下滑, 回到原来的 α 处; 当木块下滑时, α 角减小, f 也减小, 说明只需较小的向上的摩擦力便可维持稳定. 现在的 μ_A 已足够大了, 故木块将维持在较小的 α 处, 不能再返回原处. 在情形(2)中, 可进行类似的讨论, 由于摩擦力的方向与(1)中相反, 因此如果木块向上滑动, 它将停留在较大的 α 处; 如果木块向下滑动, 它将返回原来的 α 处.

(ii) 如果 α 不变, ω 有微小变化, 则在情形(1)中, 当 ω 增大时 μ 将减小, 这表明所需向上的摩擦力减小, 现在的 μ_A 已足够, 木块将保持平衡. 当 ω 减小时, μ 将增大, 说明所需向上的摩擦力增大, 现在的 μ_A 不足以维持平衡, 故木块将下滑, 以便因 α 的减小使所需的 μ 减小, 才能保持平衡. 在情形(2)中, 可进行类似的讨论, 得到的结论是若 ω 增大, 木块将向上滑动; 若 ω 减小, 木块保持平衡. 如果把(1)和(2)中的 μ_A 和 μ_B 作为 α 和 ω 的函数, 画出函数图[图例 2-3(d)、(e)]则可以很明显得到上述结论.

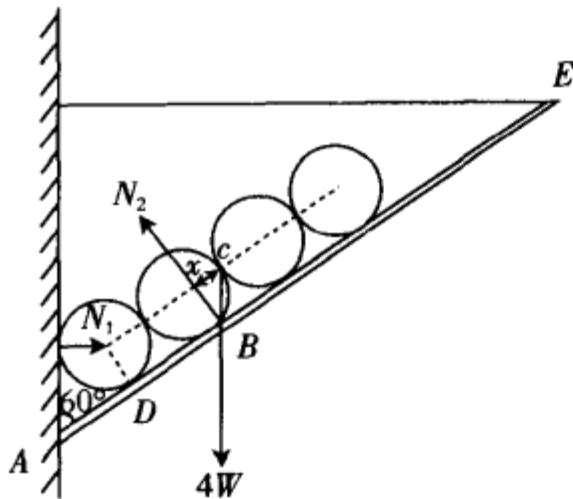


图例 2-3d

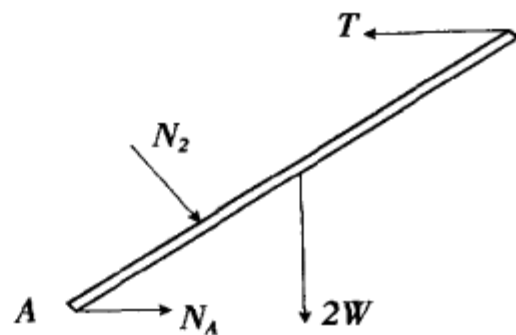


图例 2-3e

例 2-4 如图例 2-4a 所示, 均匀木板 AE 长 $L = 50 \text{ cm}$, 重 2 kg , 一端用铰链固定于墙上, 另一端用水平线拉住, 木板与竖直墙之间的夹角为 60° . 四个完全相同的小球按图中位置放在木板上, 球半径均为 $R = 5 \text{ cm}$, 重量均为 1 kg , 设球与墙、木板, 球与球之间的摩擦力均可忽略, 试求水平绳的拉力 T .



图例 2-4a



图例 2-4b

解: 根据题意, 求水平绳对木板的拉力, 应以木板为考察对象, 如图例 2-4b 所示, 木板受到重力, 墙给它的正压力及四个小球给它的压力, 绳子的拉力诸力作用. 其中四个小球给板的压力怎么求? 若分别以四球为考察对象, 先求它们所受木板的支持力, 这就牵涉到四球之间的相互作用, 方程数大大增加,

比较麻烦.为了简化运算,可以把四球看成一个整体.如图例 2-4a 所示,设四个小球重力总和为 $4W$,其质心应在四球的连心线上,即在第二和第三个小球相接触的点 C 上,因此重力的作用线和木板的交点 B 是木板对四球的等效正压力 N_2 的作用点, N_2 垂直于板面,设 N_2 与 C 的垂直距离为 x ,另外,竖直墙对球有正压力 N_1 ,垂直于墙并指向第一个小球的球心.根据力的平衡方程,水平方向和竖直方向的合力分别为零

$$N_1 = N_2 \cos 60^\circ \quad (1)$$

$$N_2 \cos 30^\circ = 4W \quad (2)$$

解得
$$N_1 = \frac{4}{\sqrt{3}}W, N_2 = \frac{8}{\sqrt{3}}W \quad (3)$$

四球所受合力矩为零,取质心 C 为参考点,则重力无力矩,

$$N_1 \cdot 3R \cos 60^\circ - N_2 x = 0 \quad (4)$$

解得
$$x = \frac{3}{4}R \quad (5)$$

由此,四个小球对木板的正压力等效为 N_2 ,对木板列力矩的平衡方程,取 A 点为参考点,

$$N_2 \cdot \overline{AB} + 2W \cdot \frac{L}{2} \sin 60^\circ - TL \sin 30^\circ = 0 \quad (6)$$

由几何关系

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \overline{AD} + \overline{DB} = R \operatorname{ctg} 30^\circ + (3R - x) \\ &= \sqrt{3}R + 3R - \frac{3}{4}R = \left(\sqrt{3} + \frac{9}{4}\right)R \end{aligned}$$

由题给的数据知 $L = 10R$,

这些代入 (6) 式,得

$$\frac{8W}{\sqrt{3}} \cdot \left(\sqrt{3} + \frac{9}{4}\right)R + 2W \cdot \frac{10R}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - T \cdot 10R \times \frac{1}{2} = 0$$

解得

$$T = \frac{1}{5}(8 + 11\sqrt{3})W = 5.41W$$

已知 $W = 1\text{kg}$,代入上式得

$$T = 5.41\text{kg}$$

例 2-5 有 7 根长度相等的轻钢杆在端点铆接起来,组成图例 2-5 的结构, A 端固定在水平面上, E 端搁在水平光滑轨道上,可在水平方向自由滑动,水平方向用 x 轴表示.杆所承受的应力远大于杆的自重,所以可忽略杆的重量.在 C 点加一竖直向下的压力 N ,试求各杆所受的力.

解: 设装置的 A 点所受力的水平分量为 F_2 , 竖直分量为 F_1 ; E 点只受水平面给予它的竖直向上的力 F_3 , 杆的各交接点受到汇交于该点各钢杆的力如图所标,假定各杆都受到拉力作用,则各杆对结点的作用力也全是拉力.每根杆两端结点受该杆的拉力应相等,图中用一个符号代表其大小,于是对结构的整体可列出力的平衡式:

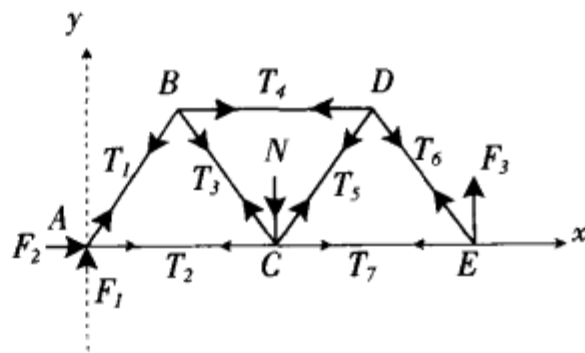
$$F_2 = 0 \quad (1)$$

$$F_1 + F_3 - N = 0 \quad (2)$$

取 z 轴通过 A 点,由 $M_z = 0$,得

$$F_3 \cdot 2l - N \cdot l = 0 \quad (3)$$

式中 l 为杆长,由 (1)、(2) 和 (3) 式解得



图例 2-5

$$F_2 = 0, F_1 = \frac{1}{2}N, F_3 = \frac{1}{2}N \quad ④$$

考察 A 点的平衡,力平衡方程分别为

$$T_2 + T_1 \cos 60^\circ = 0 \quad ⑤$$

$$T_1 \sin 60^\circ + F_1 = 0 \quad ⑥$$

解得 $T_1 = -\frac{N}{\sqrt{3}}, T_2 = \frac{N}{2\sqrt{3}} \quad ⑦$

再考察结点 B 的力平衡,

$$T_4 - T_1 \cos 60^\circ + T_3 \cos 60^\circ = 0 \quad ⑧$$

$$T_1 \sin 60^\circ + T_3 \sin 60^\circ = 0 \quad ⑨$$

解得 $T_3 = \frac{N}{\sqrt{3}}, T_4 = -\frac{N}{\sqrt{3}}$

接下去可考察结点 C 和 D 的平衡方程,但由于对称性,不必一一计算,可直接写出

$$T_5 = T_3 = \frac{N}{\sqrt{3}}, T_6 = T_1 = -\frac{N}{\sqrt{3}}, T_7 = T_2 = \frac{N}{2\sqrt{3}}$$

从所得的符号,可知 AB、BD、DE 三根杆中所受力是压力,因为计算出力是负值,与所设相反.其余各杆受力都为拉力.

例 2-6 有一木板可绕其下端的水平轴转动,转轴位于一竖直墙面上,如图例 2-6a 所示.开始时木板与墙面的夹角为 15° ,在夹角中放一正圆柱形木棍,截面半径为 r .在木板外侧加一力 F 使其保持平衡.在木棍端面上画一竖直向上的箭头.已知木棍与墙面和木棍与木板之间的静摩擦系数分别为 $\mu_1 = 1.00, \mu_2 = 1/\sqrt{3} \approx 0.577$.若极缓慢地减小所加的力 F ,使夹角慢慢张开,木棍下落.问当夹角张到 60° 时,木棍端面上的箭头指向什么方向?

(第 11 届全国中学生竞赛预赛题)

解:为使木板与墙面的夹角 θ 不变,木棍不动,所加的外力 F 可有一定范围,此时木棍所受木板及墙面两方的正压力及摩擦力亦不确定.外力 F 加大到一定程度, θ 有减小倾向,木棍有向上运动倾向;而外力减小到一定程度则有相反倾向.

当外力 F 渐渐减小时,木棍所受各力均在变化,两个摩擦力变为方向向上,大小逐渐增加.当其中一方增加到最大摩擦力后,再减小外力 F 时,平衡开始破坏,木棍将在这一方开始向下滑动, θ 角张大,而另一方则保持无滑滚动.问题在于确定哪一方首先开始滑动.

设木棍的质量为 m ,所受墙面的正压力与摩擦力(向上)为 N_1, F_1 ;所受木板的正压力与摩擦力(向上)为 N_2, F_2 ,设木板与墙面的夹角为 θ ,如图例 2-6b 所示,则木棍的力平衡方程为

$$\text{竖直方向: } F_1 + N_2 \sin \theta + F_2 \cos \theta = mg \quad ①$$

$$\text{水平方向: } N_1 = N_2 \cos \theta - F_2 \sin \theta \quad ②$$

以木棍中心为参考点,力矩平衡式为

$$F_1 R - F_2 R = 0 \quad ③$$

当木棍即将在墙面上滑动(左滑)时,满足条件

$$F_1 = F_{1\max} = \mu_1 N_1 \quad ④$$

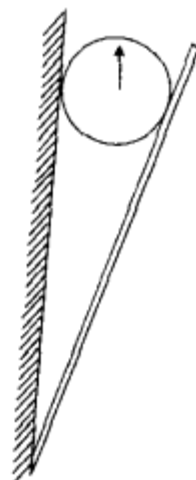
$$F_2 = F_{2\max} = \mu_2 N_2 \quad ⑤$$

根据③式, $F_1 = F_2$,代入④、⑤式得

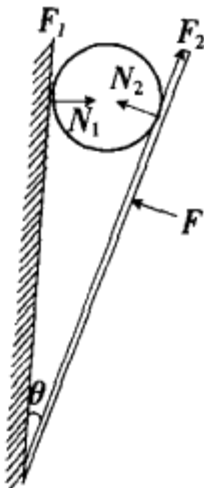
$$\mu_1 N_1 \leq \mu_2 N_2 \quad ⑥$$

由②、③、④式得

$$N_1(1 + \mu_1 \sin \theta) = N_2 \cos \theta \quad ⑦$$



图例 2-6a



图例 2-6b

由⑥、⑦两式得

$$(1/\mu_2)\cos\theta \leq (1/\mu_1) + \sin\theta \quad (8)$$

将 $\mu_1 = 1, \mu_2 = 1/\sqrt{3}$ 代入⑧式,得

$$\sqrt{3}\cos\theta \leq 1 + \sin\theta \quad (9)$$

这就是左滑时 θ 所应满足的条件. 由此式可以看出, 当 θ 小时此式无法满足, 可见左滑在 θ 大于临界角 θ_0 时发生, θ_0 满足

$$\sqrt{3}\cos\theta_0 = 1 + \sin\theta_0 \quad (10)$$

⑩式即⑨式取等号的情况. 也即⑤式取等号的情况. 由此可知这时 F_1 与 F_2 同时处于最大静摩擦力的临界状态.

当 θ 小于 θ_0 时则发生右滑, 即木棍在墙面上无滑滚动而在木板上滑动.

讨论木棍右滑的条件, 有

$$F_2 = F_{2\max} = \mu_2 N_2 \quad (4')$$

$$F_1 \leq F_{1\max} = \mu_1 N_1 \quad (5')$$

右滑条件为

$$\mu_1 N_1 \geq \mu_2 N_2 \quad (6')$$

由②、③、④'式得

$$N_1 = N_2(\cos\theta - \mu_2 \sin\theta) \quad (7')$$

由⑥'、⑦'式得

$$(1/\mu_2)\cos\theta \geq (1/\mu_1) + \sin\theta \quad (8')$$

此式正好与⑧式相反, 即右滑在 θ 小于⑩式的 θ_0 时发生.

结论: 当 $\theta < \theta_0$ 时右滑, 即在木板上滑动;

当 $\theta > \theta_0$ 时左滑, 即在墙面上滑动.

解⑩式以求临界角, 将⑩式两边平方并消去 $\cos\theta_0$, 得

$$2\sin^2\theta_0 + \sin\theta_0 - 1 = 0 \quad (11)$$

其解为 $\sin\theta = \begin{cases} 1/2, & \theta_0 = 30^\circ \\ -1, & \theta_0 = -90^\circ \end{cases} \quad (12)$

$\theta_0 = 30^\circ$ 满足⑩式, 是所求的解; 而另一解 $\theta_0 = -90^\circ$ 不满足⑩式, 是增根, 应舍去.

结果: 当 $\theta = 15^\circ \sim 30^\circ$ 时右滑(在木板上滑动)

当 $\theta = 30^\circ \sim 60^\circ$ 时左滑(在墙面上滑动)

下面计算箭头的转动角度. 如图例 2-6c 所示, 设张角在 15° 、 30° 和 60° 时木棍中心的高度(从转轴算起)为 h_1 、 h_2 和 h_3 , 由于 $r/h = \tan(\theta/2)$, 于是

由图知

$$AO = A'O = h_1 = r \cot(15^\circ/2) = 7.57r$$

$$BO = B'O = h_2 = r \cot(30^\circ/2) = 3.73r$$

$$CO = C'O = h_3 = r \cot(60^\circ/2) = 1.73r$$

当木棍由 A 下落至 B 时, 箭头顺时针转了 φ_1 角

$$\varphi_1 = (h_1 - h_2)/r = 3.84\text{rad} = 220^\circ$$

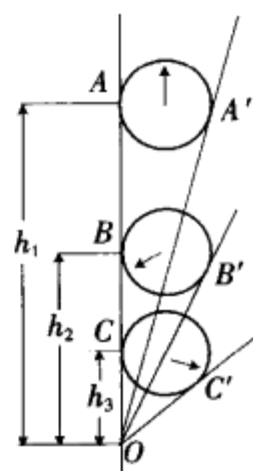
由 B 下落至 C 时, 木棍逆时针转 φ_2 角

$$\varphi_2 = (h_2 - h_3)/r = 2.00\text{rad} = 115^\circ$$

而在这一过程中, 木板本身顺时针转了 30° , 因此箭头的最后指向为

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 + 30^\circ = 135^\circ$$

例 2-7 在海边用起重机吊起一根浮在海水中的木材, 如图例 2-7 所示. 设木材为重量均匀分



图例 2-6c

布的圆柱体,长为 $l=10$ 米,密度为 $\rho=8.5 \times 10^2$ 千克/米³,已知海水密度 $\rho_0=1.03 \times 10^3$ 千克/米³. 当吊索把木材吊起,静止于离水面 $h=3.0$ 米时,木材与水面所成的角 α 为多少? 当 h 高于多少时木材与水面垂直?

解:当木材被吊起静止于离水面为 h 高度时,木棒受重力 mg ,浮力 $f_{浮}$ 和绳的张力三力作用. 以绳端的 O 点为参考点,平衡时,浮力的力矩等于重力力矩. 设木材截面积为 ΔS ,重力 $mg = \rho \Delta S g$,浮力 $f_{浮} = \rho_0 x \cdot \Delta S g$, x 为木材浸没在水中部分的长度,力矩平衡方程为

$$mg \cdot \frac{l}{2} \cos \alpha = f_{浮} \left(l - \frac{x}{2} \right) \cos \alpha \quad (1)$$

式中 l 为木材总长度. 上式化为

$$\rho \Delta S g \cdot \frac{l}{2} \cos \alpha = \rho_0 x \cdot \Delta S g \left(l - \frac{x}{2} \right) \cos \alpha$$

即

$$\rho_0 x^2 - 2\rho_0 l x + \rho l^2 = 0$$

解得

$$x = l \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{\rho}{\rho_0}} \right)$$

其中 $x = l \left(1 + \sqrt{1 - \frac{\rho}{\rho_0}} \right)$ 不符合题意,舍去,得

$$x = l \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\rho}{\rho_0}} \right) \quad (2)$$

当高度为 h 时

$$\sin \alpha = \frac{h}{l-x} = \frac{h}{l \sqrt{1 - \frac{\rho}{\rho_0}}} \quad (3)$$

代入 $h=3.0\text{m}$, $l=10\text{m}$, $\rho=8.5 \times 10^2 \text{kg/m}^3$, $\rho_0=1.03 \times 10^3 \text{kg/m}^3$

$$\text{得} \quad \sin \alpha = \frac{3}{4.18} \quad \alpha = 45.9^\circ \quad (4)$$

当 h 增高时,浮力减小,浮力对 O 轴的力矩也减小,重力不变,但重力矩也减小,当浮力矩略小于重力矩时,棒在合力矩作用下将转向垂直的位置,因此 $\alpha=90^\circ$ 的位置是木材开始与水面垂直的位置,由③式

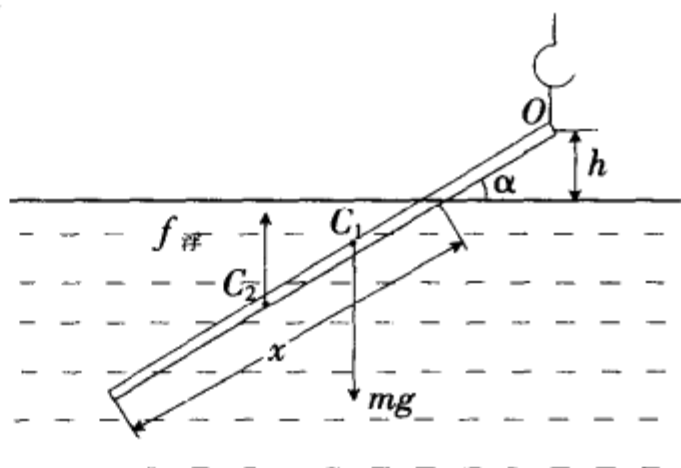
$$\sin \alpha = \sin 90^\circ = 1 = \frac{h}{l \sqrt{1 - \frac{\rho}{\rho_0}}}$$

$$\text{得} \quad h = l \sqrt{1 - \frac{\rho}{\rho_0}} = 10 \sqrt{1 - \frac{8.5}{10.3}} = 4.18(\text{m})$$

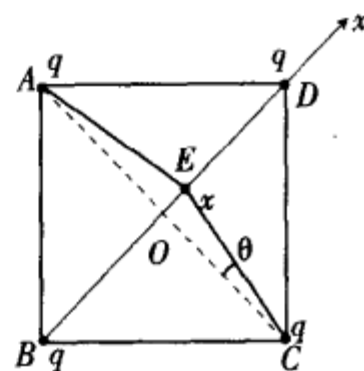
例 2-8 如图例 2-8 所示,在边长为 a 的正方形的四个顶点各固定一个正点电荷 q ,在正方形中心放一负点电荷 Q ,此时所有的电荷均处于平衡状态. 现在负点电荷 Q 受到外界扰动由中心沿 OD 方向偏离一微小的距离 x ,试问负点电荷是否为稳定平衡? (两电荷之间的作用力为 $F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$)

解:取正方形中心 O 处为坐标原点,沿 OD 方向为 X 轴正方向,当负点电荷位于 x 处时, q_D 和 q_B 对 Q 的吸引力的合力为

$$\begin{aligned} F_1 &= k \left[\frac{qQ}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a - x\right)^2} - \frac{qQ}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a + x\right)^2} \right] \\ &= kqQ \cdot \frac{2\sqrt{2}ax}{\left(\frac{a^2}{2} - x^2\right)^2} \end{aligned}$$



图例 2-7



图例 2-8

q_A 和 q_C 对 Q 的吸引力沿 EA 和 EC , 大小相等, 在 X 方向的分量相同, 两力之和为

$$F_2 = kqQ \cdot \frac{1}{x^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2} \cdot 2\sin\theta = kqQ \cdot \frac{1}{x^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2} \cdot \frac{2x}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2}}$$

$$= kqQ \frac{2x}{\left(x^2 + \frac{a^2}{2}\right)^{3/2}}$$

方向指向负 x 方向

四力在 x 方向的合力为

$$F = F_1 - F_2 = 2x \cdot kqQ \left[\frac{\sqrt{2}a}{\left(\frac{a^2}{2} - x^2\right)^2} - \frac{1}{\left(x^2 + \frac{a^2}{2}\right)^{3/2}} \right]$$

$$= 2xkgQ \frac{\sqrt{2}a \left(x^2 + \frac{a^2}{2}\right)^{3/2} - \left(\frac{a^2}{2} - x^2\right)^2}{\left(x^2 + \frac{a^2}{2}\right)^{3/2} \cdot \left(\frac{a^2}{2} - x^2\right)^2}$$

上式分母恒为正, 所以只需要讨论分子的正负, 设其为 $f(x)$

$$f(x) = \sqrt{2}a \left(x^2 + \frac{a^2}{2}\right)^{3/2} - \left(\frac{a^2}{2} - x^2\right)^2$$

$$= \frac{a^4}{2} \left(1 + \frac{2x^2}{a^2}\right)^{3/2} - \frac{a^4}{4} \left(1 - \frac{2x^2}{a^2}\right)^2$$

为使计算简便, 采用近似计算, 因 x 为小量, $x \ll a$, 可用二项式定理 $(1+x)^n \approx 1+nx$ 计算, 则上式为

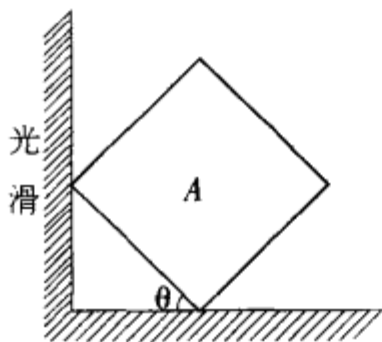
$$f(x) \approx \frac{a^4}{2} \left(1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{2x^2}{a^2}\right) - \frac{a^4}{4} \left(1 - \frac{4x^2}{a^2}\right)$$

$$= \frac{a^4}{4} \left(1 + \frac{10x^2}{a^2}\right) > 0$$

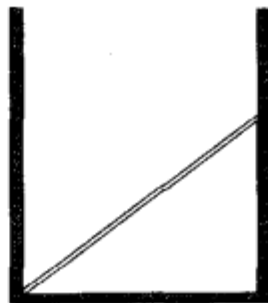
即当负点电荷向 x 方向偏离以后, 所受到的作用力的合力沿 x 方向, 使 Q 更偏离原点, 因而不是不稳定平衡。

本章习题

2.1 一质量为 M 的均匀正立方体 A 斜靠在光滑的竖直墙上. A 与地面之间的摩擦力刚好足以阻止它滑动. A 与地面之间的静摩擦系数为 μ , A 的一边与水平面的夹角为 θ , 如图所示, 设 $0 < \theta < 45^\circ$, 写出 θ 与 μ 的函数关系. [提示]



图习 2.1

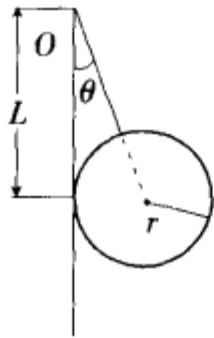


图习 2.2

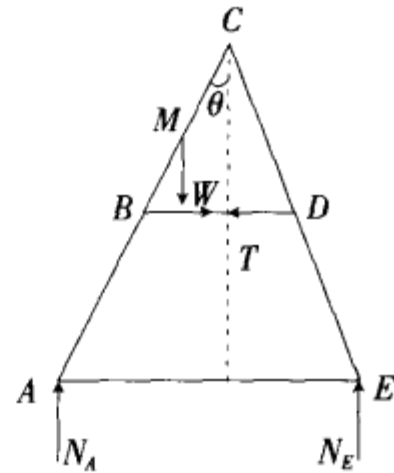
2.2 如图所示, 一根均匀的细木棒 AB 放在光滑的圆柱形玻璃杯中, 杯的直径为 10cm , 棒长 15cm , 质量为 m , 求杯壁对木棒的作用力。

2.3 质量为 m , 半径为 r 的圆球用轻绳悬挂在光滑的墙上, 悬挂点与球和墙的接触点间的距离为 L , 求球对墙的压力. (图习 2.3)

2.4 在如图所示的活动折梯中, AC 与 CE 均为 2.0m , 用铰链在 C 点连接起来. BD 是一根长 0.5m 的连杆, 连接当中两点. 一个重 70kg 的人沿梯向上爬到 1.5m 处, 假设地板是很光滑的, 并忽略梯的重量. 试求连杆中的张力与地板对梯所施的力. [提示]

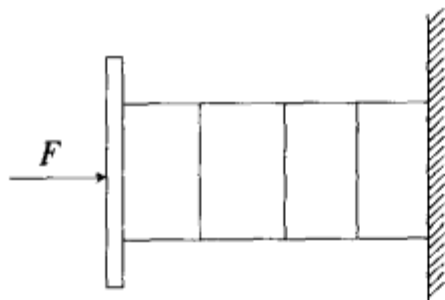


图习 2.3

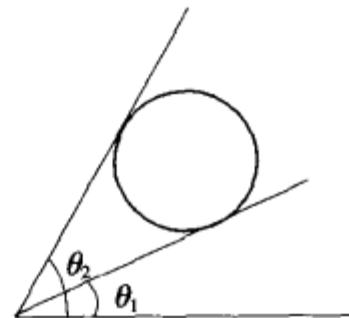


图习 2.4

2.5 在竖直墙与轻质木板之间有四块相同的砖, 用力 F 压木板可使砖都不掉下. 若每块砖的质量均为 m , 试问第 2 块砖与第 3 块砖之间的摩擦力多大? 方向如何? 最小的力 F_{\min} 为多大? 设木板与砖之间是光滑的.



图习 2.5



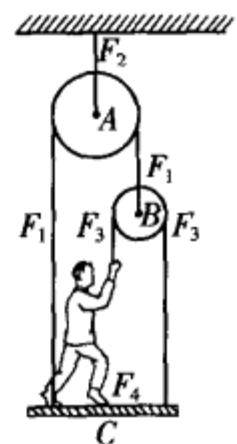
图习 2.6

2.6 一个重为 W 的均质球静止于倾角分别为 θ_1 和 θ_2 的两个固定斜面之间, 如图所示, 试求两斜面作用于球上的作用力.

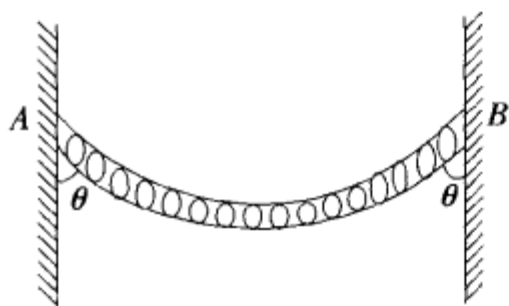
2.7 在图示的升降机中, 工人重 $P_1 = 588\text{N}$, 升降机重 $P_2 = 294\text{N}$. 若滑轮质量、轴处摩擦、绳子质量都可以忽略不计. 试求:

- (1) 站在升降机上的人若要拉住升降机, 必须以多大的力作用在绳子上?
- (2) 平衡时人给于升降机的压力是多少? [提示]

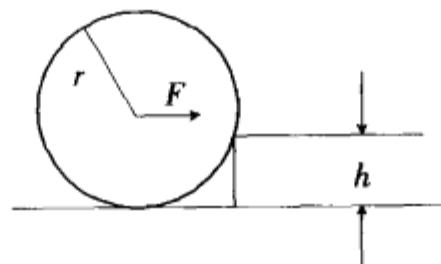
2.8 一根重为 W 的柔软链条悬挂于同一高度的两个固定点 A 、 B 之间, 链条在 A 、 B 两点的切线与竖直线的夹角均为 θ . 试求: (1) 链条对两固定点所施的力; (2) 链条最低点的张力. (图习 2.8) [提示]



图习 2.7



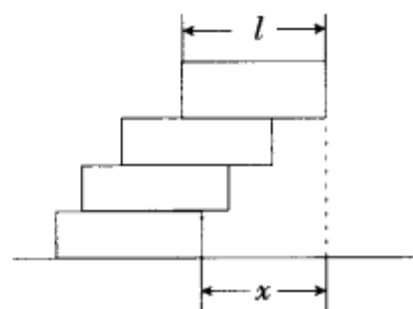
图习 2.8



图习 2.9

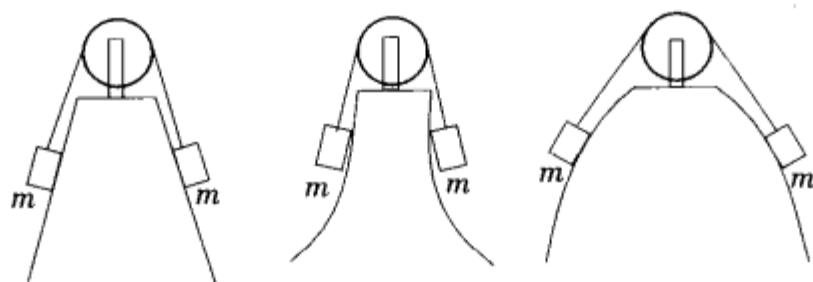
2.9 在图习 2.9 中,在一重量为 W ,半径为 r 的均质轮子的轴上施加一水平力 F ,可使轮子越上高为 h 的台阶,试问 F 至少为多大? 如果力的方向任选,则 F 至少多大? 方向如何? (设轮缘与台阶接触点不打滑.)

2.10 将四块长都为 l 的相同的砖互相叠放起来,使每块砖比下面的一块砖伸出一些,试问为使伸出的长度最大,应该怎样叠放? 最大伸出长度 x 为多大? [提示]



图习 2.10

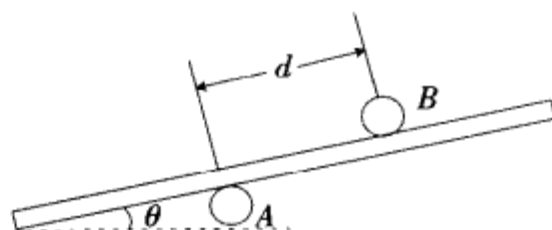
2.11 有一水果店,所用的秤是吊盘式杆秤,量程为 10kg . 现有一较大的西瓜,超过此秤的量程,店员 A 找到另一秤砣,与此秤砣完全相同,把它与原秤砣结在一起作为秤砣进行称量. 平衡时,双砣位于 6.5kg 刻度处. 他将此读数乘以 2 得 13kg ,作为此西瓜的重量卖给顾客. 店员 B 对这种称量结果表示怀疑. 为了检验,他取另一西瓜,用单砣正常称量得 8kg ,用店员 A 的双砣法称量,得读数为 3kg ,乘以 2 后得 6kg ,这证明了店员 A 的办法是不可靠的. 试问,店员 A 卖给顾客的那个西瓜的实际重量是多大? (第 9 届全国中学生物理竞赛预赛题)[提示]



图习 2.12

2.12 图 2.12 所示为三种不同形状的曲面,滑轮固定在曲面顶端,有两个相同的物块,质量均为 m ,用绳连结跨过滑轮置于对称形曲面的两边,设绳子的质量和所有的摩擦力均可不计,试问三种情况各是哪种平衡状态(稳定平衡、不稳定平衡还是随遇平衡)?

2.13 一块均匀木板,以倾角 θ 静止地放在两根水平的固定木棒 A 和 B 上. 两棒之间的距离为 d ,棒和木板之间的静摩擦系数为 μ . 当木板不滑动时,求木板重心离 A 棒之距离. [提示]



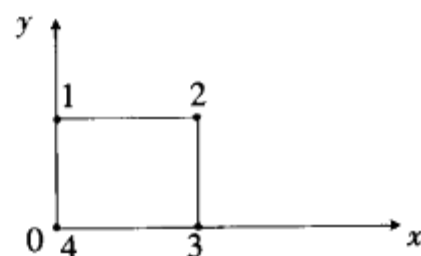
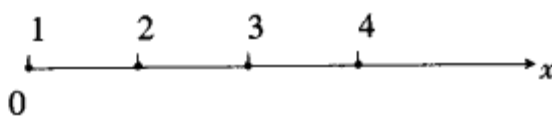
图习 2.13

2.14 一质点组由质量各为 $1, 2, 3, 4$ 克的四个小球组成如图习 2.14. 试求在下列二种情况下,质点组的质心位置.

(1)四个小球等距离地排列在一条直线上,二邻球间的距离为 10cm ;

(2)四个小球分布在一个正方形的四个角顶上,正方形的边长为 10cm .

2.15 一根塑料吸管放在无摩擦的水平桌面上,吸管与桌面的一边垂直并有一半突出在桌子外,一只蜘蛛在桌内吸管的末端 A 上开始沿吸管慢慢地爬到另一端点 B,当蜘蛛到达端点 B 时,吸管并没有倾倒,这时有一滴松香液滴,正巧轻轻地滴在蜘蛛身上,吸管仍未倾倒,已知吸管和蜘蛛的质量分别为 m_1 和 m_2 ,试问松香液滴的最大质量 m' 是多少? [提示]



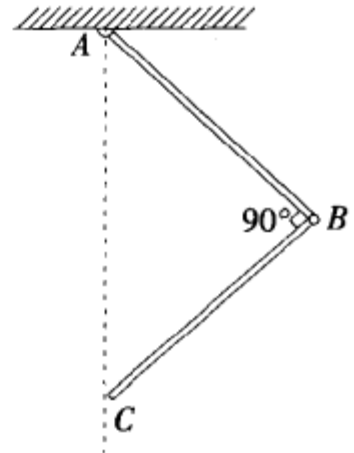
图习 2.14

2.16 半径为 r ,质量为 m 的三个相同的球放在水平桌面上,两两互相接触. 用一个高为 $1.5r$ 的圆柱形圆筒(上下均无底)将此三球套在筒内,圆筒的内半径取适当值,使得各球间以及球与筒壁之间均保持无形变接触. 现取一质量亦为 m ,半径

为 R 的第四个球,放在三球的上方正中,设四个球的表面、圆筒的内壁表面均由相同物质构成,其相互之间的最大静摩擦系数均为 $\mu = 3/\sqrt{15}$ (约等于 0.775),问 R 取何值时,用手轻轻竖直向上提起圆筒即将四个球一起提起来?

(第 8 届全国中学生物理竞赛预赛题)[提示]

2.17 两根长度相等的细棒 AB 和 BC 在 B 处用光滑铰链相连, A 端也用光滑铰链与顶板相连. 两棒限于在图示平面内运动. 当在 C 端加一适当的外力(在纸面内)可使两棒平衡在图示位置,即两棒之间的夹角为 90° ,且 C 点位于 A 点的正下方. 设两棒都是均质的, AB 棒的质量为 m_1 , BC 棒的质量为 m_2 .



图习 2.17

(1)求所加外力的大小和方向(以力和垂直线之间的角 θ 表示);

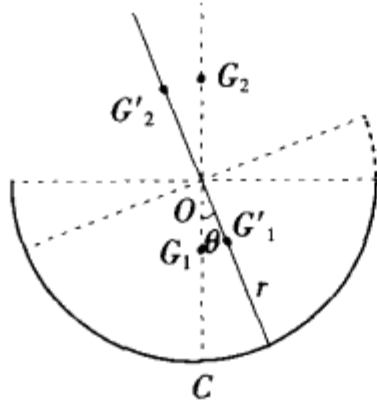
(2)若 $m_1 = 2.0\text{kg}$, $m_2 = 3.0\text{kg}$,计算外力的大小和方向.[提示]

2.18 一个具有曲率半径 r 的碗静止于粗糙水平桌上,如图所示. 试证,仅当碗中所堆放的物质的质心高度不大于 r 时,碗底中心点才是稳定平衡位置.

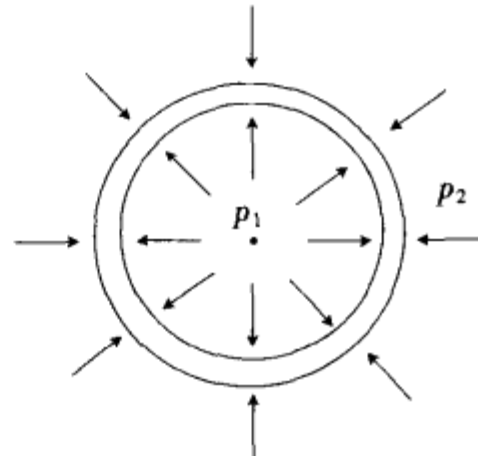
2.19 当脉搏波沿动脉血管传播时,脉搏波到达之处,血液压力与流速将发生变化,同时,由于动脉管壁是弹性的,血管半径 r 也将发生相应的变化. 假设一段动脉血管是相当长的圆柱管,血管壁厚度为 h ($h \ll r$,其形变可忽略不计),图习 2.19 表示血管的横截面,血液均匀地作用在管壁上,其压强为 P_1 ,血管外组织对它的均匀压强为 P_2 ,血管壁的杨氏模量为 E ,已知血管壁的周向应力与周向应变之间满足胡克定律,取单位长度的血管计算,求:

(1)血管壁的张力与内外压强差的关系;

(2)设自然状态下的血管半径为 r_0 ,求血管半径与内外压强差的关系.[提示]



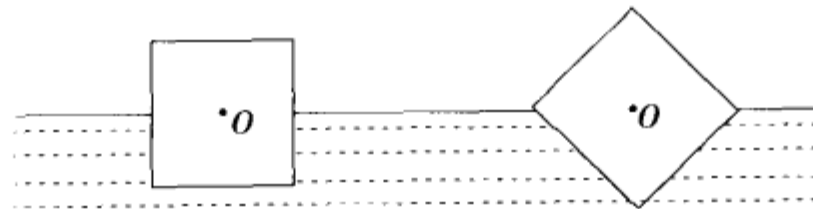
图习 2.18



图习 2.19

2.20 设质量为 M 的不可压缩流体仅在自身的万有引力作用下凝聚成半径为 R 的球.(1)求球内压强的分布;(2)若地球内部也可看成流体,已知地球半径 $R_e = 6.37 \times 10^6\text{m}$,地球质量 $M = 5.98 \times 10^{24}\text{kg}$,万有引力常数 $G = 6.67 \times 10^{-11}\text{m}^3/\text{s}^2 \cdot \text{kg}$,试计算地球中心处的压强.[提示]

2.21 横截面显正方形的均质木棒浮在水面上,平衡时,正好有一半体积浸在水中,当横截面分别是图(a)、(b)两种情况时,讨论其平衡的稳定性.[提示]



图习 2.21

牛顿运动定律

§ 3.1 牛顿运动定律

运动学只对物体的运动进行描述,而动力学则进一步研究物体为何会做这样的运动,以及物体在其他物体的作用下将如何运动.牛顿的三个运动定律深刻阐明了物体运动的本质及运动的内在规律,是动力学的基本定律.

1. 牛顿第一定律

任何物体都保持其静止或匀速直线运动状态,除非有力作用其上迫使它改变这种状态.

2. 牛顿第二定律

物体所获得的加速度的大小与合外力的大小成正比,与物体的质量成反比,加速度的方向与合外力的方向相同.其数学表述为

$$F = ma \quad (3.1-1)$$

3. 牛顿第三定律

两物体间的相互作用力总是大小相等、方向相反并沿着同一直线.

下面对牛顿三定律中有关的概念作些说明.

牛顿第一定律并不是用实验严格验证的,它是由抽象思维和科学推理方法得出的.早期人们对运动的观察受到直觉的误导,认为物体的运动是外力作用(拉或推等)的结果,一旦外力消失,物体便很快静止下来.伽利略是最早注意到上述错误的科学家.他发现,当小球沿斜面滚下时,其速度增大,而沿斜面往上滚动时,速度减小,他认为当球沿水平面滚动时,速度应不变,但实际上球总是越滚越慢,最后停止;他还观察到,小球在越是光滑的表面上运动,球就滚得越远,于是他领悟到,若没有摩擦力,球将永远滚下去.伽利略设计了一个实验,如图 3.1-1 所示,两个尽可能光滑的斜面彼此相对放置,左边斜面保持不动,右边的斜面可调节斜率,小球每次在左边斜面相同的高度滚下,右边的斜面则逐渐降低斜率,他发现,小球在不同斜率的右边斜面往上滚动时,几乎都达同一高度,但随着斜面的倾斜,小球运动的路程变长,于是他推论,若将斜面放平,小球将永远滚下去.他的推论后来由牛顿总结成牛顿第一定律.

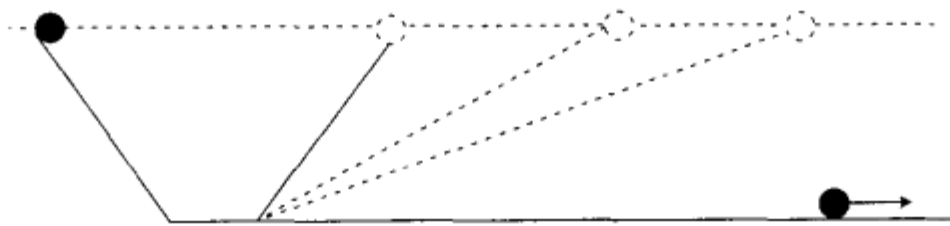


图 3.1-1 伽利略的斜面实验

第一定律指出,每个物体在不受外力时都有“保持其静止或沿一直线作匀速运动的状态”的属性,这就是惯性.因此第一定律又称惯性定律.

牛顿第一定律隐含了一个重要的概念,就是我们讨论的运动只有相对于特定的参照系才有意义,如果已知某物体不受到力的作用,并观察到物体在参照系 S 中作匀速直线运动,那么,在相对于 S 参照系作加速运动的参照系 S' 中看,物体并非作匀速直线运动,即在 S' 参照系中,牛顿第一定律不成立.我们

把牛顿定律在其中成立的参照系称为惯性系；第一定律在其中不成立的参照系称为非惯性系。

如果物体是孤立体，不受到其他物体的作用力，就可构成一个惯性系；相对于惯性系作惯性运动的参照系也是惯性系。地球是常用的惯性系，但不是严格的惯性系，因为地球绕太阳有公转，地球还有自转，这些运动都产生加速度，但对于地面上大多数实验来说，地球的加速度可以忽略，仍能看成是一个很好的惯性系。

质量是描述物体惯性大小的量。在外力作用下物体获得的加速度的大小反映了物体运动状态改变的难易程度，这也就是物体惯性的大小，当外力相同时，加速度大的物体惯性小，加速度小的物体惯性大。如果选取物体 1 的质量作为标准质量，记为 m_1 ，则物体 2 的质量为

$$m_2 = \frac{a_1}{a_2} m_1 \quad (3.1-2)$$

任何物体的质量都可用上述方法与物体 1 的质量作比较而获得，这种用惯性大小定义的质量称为惯性质量。实验证明，这样定义的质量符合代数相加法则，是标量。质量的单位称千克(kg)。1889 年，第一届国际计量大会决定，1 千克质量的实物标准是保存在法国巴黎国际计量局中的一个特制的、直径为 3.9 厘米的铂圆柱体，称为国际千克原器。将这标准质量的千分之一定义为克(g)。

第 2 章(2.2-1)式中的质量与牛顿运动定律中的质量含意不同，(2.2-1)式中的质量是引力作用的量度，作为引力大小的量度的质量称为引力质量。实验发现，同一个物体的引力质量总是等于惯性质量，可以说这是同一质量的两种表现，可不必区分。

牛顿第二定律是力的量度的基础。规定使单位质量的物体获得单位加速度的力为 1 牛顿，符号为 N，即

$$1 \text{ 牛顿(N)} = 1 \text{ 千克} \cdot \text{米/秒}^2 (\text{kg} \cdot \text{m/s}^2)$$

由于质量是标量，加速度和力都是矢量，所以力和在该力作用下物体的加速度是同方向的。同时，牛顿第二定律又反映了力和加速度之间是瞬时关系，同时存在，同时消失。由于第二定律和物体运动状态的改变有关，因而牛顿第二定律只有在惯性系中才成立。

牛顿第三定律揭示了力必定是两个物体之间的相互作用，力总是成对出现的。说明物体运动状态的变化不会孤立地发生，总是互相联系的。由于第三定律不涉及运动，所以对参照系没有限制。但是第三定律的成立是有条件的，作用与反作用力相等而反向是以力的传递不需要时间，即传递速度为无限大为前提的。例如一对运动着的带电质点之间的相互作用力并非等值而反向，因为电磁力要通过电磁场的传递，因而需要时间。

牛顿运动定律是以牛顿力学的时空观为基础的，有广泛的适用性，可是在速度接近真空中的光速 C 时，要考虑相对论的时空性质，要用相对论讨论物体的运动；另外，在微观领域里牛顿力学也存在局限性，用量子力学才能解决这类问题。

§ 3.2 牛顿运动定律的应用

在实际问题中，常会遇到有两个或两个以上相互作用的物体同时运动，而运动又各不相同的情况，我们应对物体作逐个分析，每次确定一个物体为对象，把该物体与周围其他物体隔离开来研究，这种方法称为隔离法。用隔离法解题大致可分几个步骤：

1. 取隔离体，即划分研究对象。
2. 选参照系，分析隔离体所受的力和画受力图。
3. 在选定的参照系上建立适当的坐标系，根据牛顿运动定律列出各隔离体的运动方程分量式。
4. 若物体的运动受到限制(如限制在一平面或曲面上运动)或两物体的运动之间存在某种联系，这种限制条件称为约束。每个约束条件可用一个运动方程描写，称为约束方程。
5. 求解方程，有时还要对所得结果作分析和讨论。

例 3.2-1 飞机做特技表演,在竖直平面内以匀速率 v 作圆周运动,圆半径为 R ,飞机驾驶员的质量为 m ,如图 3.2-1 所示, OA 为竖直方向, O 为圆心. 当驾驶员在 B 点时他的“视重”是多少? 写出“视重” F 与 θ 角的函数关系, θ 是 OB 与 OA 的夹角.

解:“视重”是“看”起来的体重,即驾驶员施于坐垫上的压力. 驾驶员施于坐垫上的力与坐垫施于驾驶员的力是一对作用力和反作用力. 因为研究驾驶员的运动比较方便,所以先求坐垫给予飞行员的作用力. 以地面为参照系,设坐垫给驾驶员的支承力为 F , F 和 OB 间的夹角为 φ ,驾驶员还受到重力 mg , 竖直向下. F 和 mg 的合力提供他作圆周运动,因飞机作匀速圆周运动,所以此合力即向心力. 把驾驶员所受的力分解为运动轨道的切向和法向,如图 3.2-1 所示的坐标系,这种坐标系随驾驶员的运动而改变方向,称自然坐标系. 列出两个方向的运动方程:

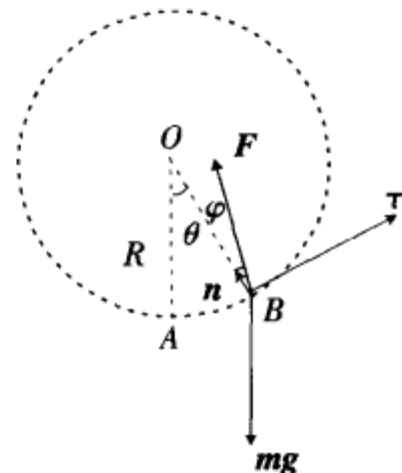


图 3.2-1

$$\text{切向: } F \sin \varphi - mg \sin \theta = 0 \quad (1)$$

$$\text{法向: } F \cos \varphi - mg \cos \theta = m \cdot \frac{v^2}{R} \quad (2)$$

由 ①、② 消去 φ , 得

$$F = \sqrt{m^2 g^2 + 2m^2 \frac{v^2}{R} g \cos \theta + m^2 v^4 / R^2} \quad (3)$$

①、② 消去 F , 得

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{g \sin \theta}{g \cos \theta + v^2 / R} \right) \quad (4)$$

所求的力 F 即视重的数值. 视重大于真实体重时称为“超重”, 视重小于真实体重时称为“失重”. 讨论:

$$\theta = 0 \text{ 时, } F \text{ 最大, } F = mg + m \frac{v^2}{R} \text{ (在底端)}$$

$$\theta = \pi \text{ 时, } F \text{ 最小, } F = m \frac{v^2}{R} - mg \text{ (在最高点)}$$

若 v 太小使 $F < 0$, 则驾驶员达不到圆周的顶点, 要掉下来.

例 3.2-2 汽车以匀加速度 a_0 行驶, 在车中用线悬挂一小球, 如图 3.2-2 所示, 当小球稳定时, 悬线与竖直方向偏离多大的角度?

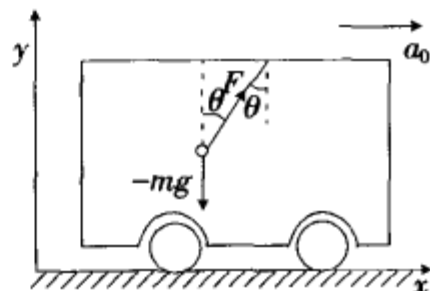


图 3.2-2

解:将小球隔离出来. 小球受重力 mg 作用, 指向竖直向下, 小球还受到悬线的张力 F 的作用, 设 F 的方向与竖直方向的夹角为 θ . 以地面为参照系, 当小球稳定时, 小球的加速度即汽车的加速度, 其大小为 a_0 , 水平向前. 取坐标系固定于地面, x 轴水平而指向汽车的前方, y 轴竖直向上. 列出小球的运动方程:

$$F \sin \theta = ma_0 \quad (1)$$

$$-mg + F \cos \theta = 0 \quad (2)$$

由 ① 和 ② 式消去 F , 得

$$\tan \theta = \frac{a_0}{g} \quad \theta = \tan^{-1} \frac{a_0}{g}$$

例 3.2-3 质量为 m 、长为 l 的均匀绳索在光滑的水平面上以角速度 ω 绕其一端匀速旋转, 在其自由端系有一质量为 M 的小球, 求绳子中各点的张力(图 3.2-3).

解:由于绳索各部分的运动情况不同, 不能把绳索看成是一个质点, 但只要把绳索分割成许多小段, 使每段的长度 Δr 都很小, 可作质点处理. 对于连续分布的系统, 这种方法是常用的. 小球仍可作为质点看待.

考察离中心距离为 r 到 $r + \Delta r$ 的一小段绳索, 如图下半部分涂黑的一小段. 它受左、右两边张力

的作用,左边的张力为 $T(r)$,右边的张力设为 $T(r + \Delta r)$,对该段绳索列运动方程,有

$$T(r) - T(r + \Delta r) = \frac{m}{l} \Delta r \cdot \omega^2 r \quad (1)$$

上式中 $\frac{m}{l}$ 为绳子的质量密度,因此 $\frac{m}{l} \Delta r$ 即为这小段绳索的质量.

在数学上,函数的增量和导数有如下关系

$$T(r) - T(r + \Delta r) = - \frac{dT}{dr} \Delta r$$

因此①式改写为

$$\frac{dT}{dr} = - \frac{m}{l} \omega^2 r \quad \text{即} \quad dT = - \frac{m}{l} \omega^2 r dr \quad (2)$$

两边积分

$$\int_{T(r)}^{T(l)} dT = - \frac{m}{l} \omega^2 \int_r^l r dr$$

$$\text{得} \quad T(l) - T(r) = - \frac{m\omega^2}{2l} (l^2 - r^2) \quad (3)$$

在 $r = l$ 处,即小球所在处, $T(l) = M\omega^2 l$,代入③式得

$$T(r) = \frac{m\omega^2}{2l} (l^2 - r^2) + M\omega^2 l \quad (4)$$

上式表明张力 T 是 r 的函数,越接近固定端点的张力越大.

在本题中,由于绳索的质量不可忽略,因此当绳索作加速运动时,张力在各处并不相等,若忽略绳索的质量,认为 $m = 0$,则由④式可得

$$T = M\omega^2 l$$

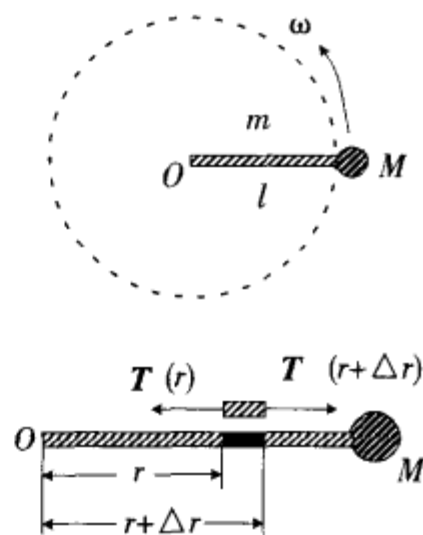


图 3.2-3

§ 3.3 伽利略相对性原理

牛顿运动定律适用于所有的惯性系,同一物体的运动在不同的参照系中表现为不同的形式,但从动力学来看,在各个惯性参照系之间是相同的.

设参照系 S' 相对于参照系 S 以匀速 v 沿 x 轴方向运动,在 S 系中,一质点 P 于时刻 t 在直角坐标系中的坐标为 x, y, z ,而在 S' 系中, P 点的坐标为 x', y', z' .按牛顿力学中的时空性质,在两个参照系中时间是相同的,现在使这两个坐标系在 $t = 0$ 时刻坐标原点正好重合,则根据相对运动关系,两个惯性系间坐标变换关系如下:

$$\begin{aligned} x &= x' + vt' \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= t' \end{aligned} \quad (3.3-1)$$

这组公式称为伽利略变换.显然,在 S 系和 S' 系中,质点的加速度 a 和 a' 是相同的,而 x 方向的速度分量 v_x, v_x' 不同,即

$$v_x = v_x' + v, a = a' \quad (3.3-2)$$

从惯性系 S 变换到惯性系 S' ,加速度 a 不变,又因为力和质量都不随参照系而变化,所以牛顿第二定律 $F = ma$ 在伽利略变换下保持不变.牛顿运动定律是动力学的基础,牛顿运动定律不变,动力学中的各种规律也不会变.因此要想通过在车厢中做力学实验来判断车在地面上是静止不动还是匀速行驶,是完全不可能的.

牛顿运动定律(包括从它导出的各种力学定理)在所有的惯性参照系中都有相同的形式,这规律称为力学相对性原理.

这里要注意的是,当物体的速度 $v \rightarrow C$ (光速)时,要用相对论讨论物体的运动,伽利略变换要用洛伦兹变换来代替.

* § 3.4 非惯性系中的惯性力

牛顿第二定律只有在惯性系中成立,但是在实际情况中我们常碰到在非惯性系中讨论物体的运动,例如讨论火车或电梯中物体的运动,或在转动的参照系中物体的运动.为了在非惯性系中研究动力学问题,可以引进惯性力.

1. 平动加速参照系中的惯性力

若在惯性参照系中观察到某物体的加速度为 a ,而在相对于惯性系以加速度 a_0 运动的非惯性系中观察到该物体的加速度为 a' ,则由相对运动可知

$$a = a' + a_0$$

设物体的质量为 m ,受到作用力为 F ,在惯性系中牛顿第二定律为

$$F = ma$$

而在非惯性系中,力不变,改用 a' 表示,则

$$F = m(a' + a_0)$$

现在上式中 $F \neq ma'$,在非惯性系中第二定律不成立,若改为

$$F - ma_0 = ma' \quad (3.4-1)$$

上式方程左端的 $(-ma_0)$ 相当于一个附加的力,称为惯性力,用 f^* 表示惯性力,即

$$f^* = -ma_0 \quad (3.4-2)$$

(3.4-1)式就改为

$$F' = F + f^* = ma' \quad (3.4-3)$$

上式中 F' 是物体在非惯性系 S' 中受到的总有效力,它是“真实的”力 F 与“假想的”惯性力 f^* 的合成,这里的 f^* 不是由物体的相互作用引起的,不存在施加此力的物体,从而也就不存在反作用力.(3.4-3)式说明,引进惯性力以后,该式具有 $\Sigma F' = ma'$ 的形式,仍可用牛顿第二定律解决问题.

由(3.4-2)式可知,惯性力的大小与物体本身的质量和该非惯性系的加速度大小成正比,惯性力的方向与非惯性系加速度的方向相反.

例 3.4-1 一光滑的劈,质量为 M ,斜面倾角为 α ,并位于光滑的水平面上,另一质量为 m 的小物块沿劈的斜面无摩擦地滑下,求劈的加速度.(图 3.4-1)

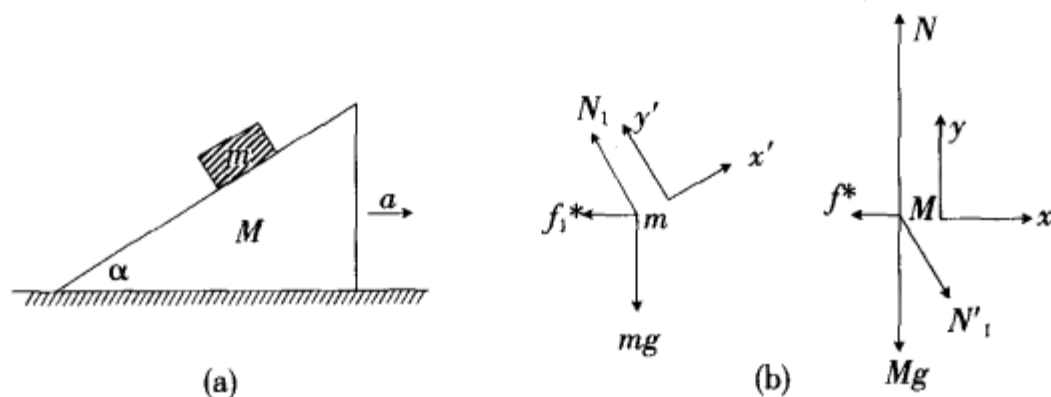


图 3.4-1

解:设劈对地的加速度为 a ,以劈为非惯性参照系,物块 m 和劈 M 所受的力如图 3.4-1b 所示,图

中 N 为水平面对 M 的支承力, N_1 为 M 对 m 的正压力, $N'_1 = -N_1$ 为 m 对 M 的正压力, 此外 M 和 m 受到的惯性力分别为 $f^* = -Ma$, $f_1^* = -ma$, a_1 表示 m 对 M 的加速度, 方向沿斜面向下, m 和 M 的运动方程分别为

$$mg + N_1 + f_1^* = ma_1$$

$$Mg + N + N'_1 + f^* = 0$$

将上面矢量式改为在如图所示的坐标系中的分量式.

$$-mg\sin\alpha - f_1^* \cos\alpha = -ma_1 \quad \text{①}$$

$$-mg\cos\alpha + N_1 + f_1^* \sin\alpha = 0 \quad \text{②}$$

$$N'_1 \sin\alpha - f^* = 0 \quad \text{③}$$

$$-Mg + N - N'_1 \cos\alpha = 0 \quad \text{④}$$

由于 N_1 和 N'_1 是一对作用力和反作用力, $N'_1 = N_1$, 又知 $f^* = Ma$, $f_1^* = ma$, 代入②、③式, 得

$$N_1 = mg\cos\alpha - ma\sin\alpha \quad \text{⑤}$$

$$N_1 \sin\alpha = Ma \quad \text{⑥}$$

消去 N_1 , 得

$$a = \frac{mg\sin\alpha\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha}$$

2. 匀速转动参照系中的惯性离心力

在一个绕竖直轴旋转的水平圆盘上, 沿半径方向开一条光滑的直槽, 槽中有一质量为 m 的小球和弹簧相连, 弹簧的另一端与转轴相连. 当圆盘以匀角速度 ω 旋转时, 小球将同时沿直槽向外运动一定的距离, 于是弹簧被拉长, 最后小球在一定位置上随圆盘一起转动. 从地面参照系看, 小球在水平面上做匀速圆周运动, 其向心力由弹簧伸长的弹性力提供, 如图 3.4-2 所示(小球在竖直方向所受的重力 mg 和圆盘的支承力 N 相互抵消), 由牛顿第二定律

$$F_{\text{弹}} = ma_r = -m\omega^2 r r^0 \quad (3.4-4) \quad \text{图 3.4-2 惯性离心力}$$

式中 r 表示小球与转轴的距离, r^0 表示沿半径方向指向外侧的单位矢量. 如果以圆盘为参照系, 小球仍受弹性力的作用, 但小球相对于圆盘静止不动, 即加速度为零. 所以牛顿第二定律在旋转的圆盘参照系中不成立. 这时, 可同样引进一个惯性力.

$$f^* = -ma_r = m\omega^2 r r^0 \quad (3.4-5)$$

此力沿半径向外, 所以称为惯性离心力, 这样, 可以认为在旋转参照系中小球除了受到“真实力” $F_{\text{弹}} = -m\omega^2 r r^0$ 的作用外, 还受到一个惯性离心力 $f^* = m\omega^2 r r^0$ 的作用, 这两力之和为零, 所以在圆盘上看到小球静止.

注意, 以上讨论只适用于非惯性系相对惯性系作平动, 或者非惯性系相对于惯性系作匀速转动, 但物体相对于非惯性系静止的情况, 否则, 惯性力的表达将更复杂, 这里不予讨论.

例 3.4-2 图 3.4-3 所示为一光滑钢丝, 在它上面套有一小环, 钢丝形状以 y 轴为对称, 当它以角速度 ω 绕 y 轴匀速旋转时, 小环可在任何位置上相对钢丝静止, 用方程 $y = y(x)$ 表示出钢丝的形状.

解: 套在钢丝上的小环受重力 mg , 竖直向下, 钢丝对小环的正压力为法向, 以钢丝为旋转参照系, 小环还受到惯性离心力 f^* , 在如图所示的坐标系中, 设小环坐标为 x, y , 则惯性离心力为

$$f^* = m\omega^2 x i \quad \text{①}$$

由题意, 小环应能静止在任何位置, 也即在钢丝上的任一位置, 小环受到的切向力为零, 因此将三力沿切向分解, 设在钢丝上任一点的切线与

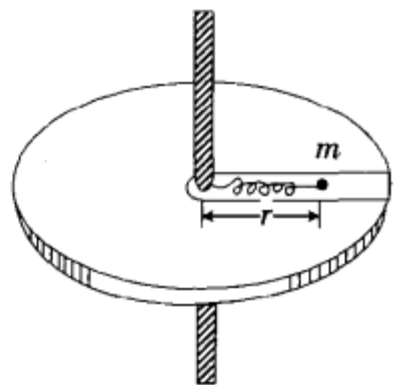


图 3.4-2 惯性离心力

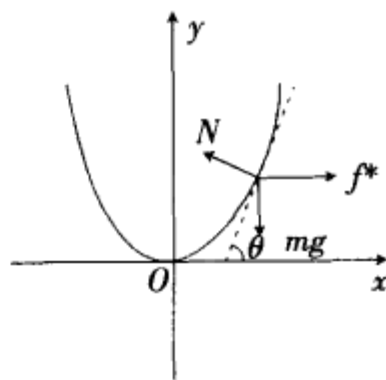


图 3.4-3

x 轴的夹角为 θ , 则

$$mg \sin \theta = m \omega^2 x \cos \theta \quad (2)$$

由 (2) 式得

$$\tan \theta = \frac{\omega^2}{g} x \quad (3)$$

而由几何关系和数学上导数的定义, 有

$$\tan \theta = \frac{dy}{dx} \quad (4)$$

由 (3)、(4) 两式相等, 化为积分式, 得

$$\int_0^y dy = \int_0^x \frac{\omega^2}{g} x dx$$

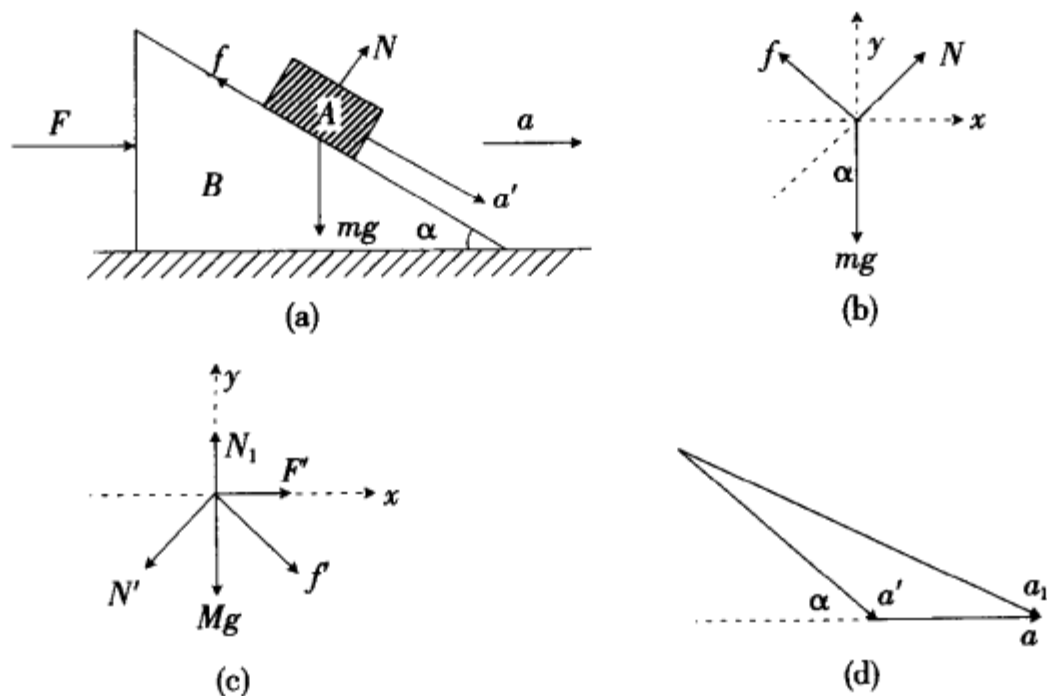
解得

$$y = \frac{\omega^2}{2g} x^2$$

此即为所求钢丝曲线的方程。

本章综合例题

例 3-1 如图例 3-1a 所示, 一质量为 m 的物体 A, 处于质量为 M 的劈形物体 B 的斜面上, B 因受外力 F 的作用沿光滑的水平桌面运动, 物体 A 和 B 之间的滑动摩擦系数为 μ , 试求物体 B 相对于桌面的加速度, 物体 A 相对于物体 B 的加速度, 并分析当力 F 不太大时, 物体 A 和 B 之间的静摩擦系数 μ_0 需多大, 才能保证物体 A 随同物体 B 一起运动而不沿斜面下滑?



图例 3-1

解: 分别取 A 和 B 为隔离体, A 受到斜面的支承力 N , 静摩擦力 f 和重力 mg , 假设 F 不太大, 物体 A 将沿物体 B 的斜面下滑, 因此摩擦力 f 的方向沿着斜面向上, 如图例 3-1b 所示为 A 的受力图. 物体 B 的受力如图例 3-1c 所示, 它受到外力 F , 桌面的支承力 N_1 , 物体 A 对它的正压力 N' 和摩擦力 f' , 重力 Mg . 用 a_1 和 a 分别表示物体 A 和 B 相对于桌面的加速度, 两物体的运动方程分别为

$$mg + N + f = ma_1$$

$$Mg + N' + f' + N_1 + F = Ma$$

取直角坐标系的 x 轴为水平方向, y 轴竖直向上, 写出上面两式的分量式:

对 m : $N \sin \alpha - f \cos \alpha = ma_{1x} \quad (1)$

$$-mg + N\cos\alpha + f\sin\alpha = ma_{1y} \quad (2)$$

对 M: $-N'\sin\alpha + f'\cos\alpha + F = Ma_x \quad (3)$

$$-Mg - N'\cos\alpha - f'\sin\alpha + N_1 = Ma_y \quad (4)$$

由于物体 B 被限制在水平桌面上运动,故有约束条件

$$a_y = 0, a_x = a \quad (5)$$

物体 A 被限制在物体 B 的斜面上运动,假设 A 相对于 B 的加速度为 a' ,并考虑到 A 沿斜面下滑,加速度 a' 在 y 方向上的分量 $a'_y < 0$,则

$$\frac{-a'_y}{a'_x} = \tan\alpha \quad (6)$$

由相对运动加速度之间的关系,

$$a_1 = a' + a \quad (7)$$

此矢量关系见图例 3-4d,写成分量式

$$a_{1x} = a'_x + a \quad (8)$$

$$a_{1y} = a'_y = -a'_x \tan\alpha \quad (9)$$

此外, N 和 N' , f 和 f' 是两对作用力和反作用力,根据牛顿第三定律可知

$$N = N', f = f' \quad (10)$$

摩擦力 f 为

$$f = \mu N \quad (11)$$

将 ⑤ ~ ⑪ 式代入 ① ~ ④ 式,可得

$$N\sin\alpha - \mu N\cos\alpha = m(a'_x + a) \quad (12)$$

$$-mg + N\cos\alpha + \mu N\sin\alpha = -ma'_x \tan\alpha \quad (13)$$

$$-N\sin\alpha + \mu N\cos\alpha + F = Ma \quad (14)$$

$$-Mg - N\cos\alpha - \mu N\sin\alpha + N_1 = 0 \quad (15)$$

以上 ⑫ ~ ⑮ 四个方程中有四个未知量 a'_x, a, N, N_1 , 因此可解得

$$a = \frac{F - mg\cos\alpha(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{M + m\sin\alpha(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)} \quad (16)$$

$$a'_x = \frac{(M + m)g\cos\alpha(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - F\cos\alpha(\mu\sin\alpha + \cos\alpha)}{M + m\sin\alpha(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)} \quad (17)$$

物体 A 相对于物体 B 的加速度为

$$a' = \frac{a'_x}{\cos\alpha} = \frac{(M + m)g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - F(\mu\sin\alpha + \cos\alpha)}{M + m\sin\alpha(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)} \quad (18)$$

物体 A 随 B 一起运动而不沿斜面下滑,即 A 相对于 B 的加速度 $a' = 0$,这时需要满足的条件可由 ⑮ 式求得为

$$\mu = \frac{(M + m)g\sin\alpha - F\cos\alpha}{(M + m)g\cos\alpha + F\sin\alpha} \quad (19)$$

注意,上式中的 μ 不是滑动摩擦系数(因为这时物体 A 与 B 没有相对滑动),而应理解为实际需要的静摩擦力 f 与正压力的比值,而 f 必须小于或等于物体 A、B 之间的最大静摩擦力 $f_{\max} = \mu_0 N$,即相当于 $\mu \leq \mu_0$,因此得

$$\mu_0 \geq \frac{(M + m)g\sin\alpha - F\cos\alpha}{(M + m)g\cos\alpha + F\sin\alpha} \quad (20)$$

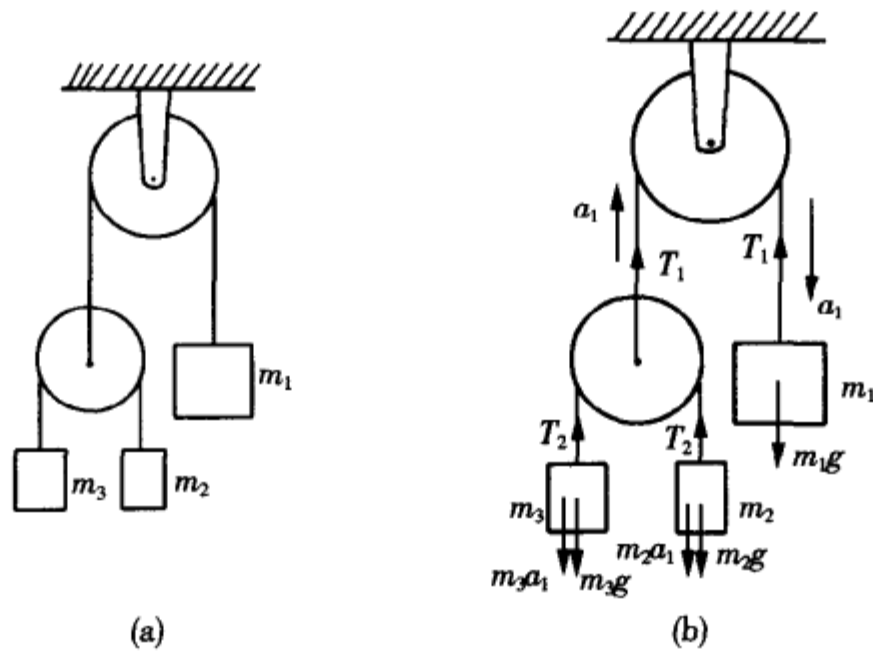
这就是物体 A 随 B 一起运动而不沿斜面下滑的条件.如果外力 $F = 0$,上述条件变为

$$\mu_0 \geq \tan\alpha \quad (21)$$

例 3-2 如图 3-2a 所示,由定滑轮,动滑轮和三个物体 m_1, m_2, m_3 组成的体系中,滑轮和绳子的质量可略去不计, $m_1 = 500\text{g}, m_2 = 200\text{g}, m_3 = 300\text{g}$,试问: m_1 是否有加速度,如果有加速度, m_1 以多大加速度、向什么方向运动? 假设滑轮轴承处都是光滑的,绳子不会伸长.

解法一:以地面为参照系.

m_1 一定有加速度,因为 m_2 和 m_3 不相等,因而相对动滑轮有加速运动,所以动滑轮上面的绳子的张力不等于 m_2 和 m_3 之和, m_1 、 m_2 、 m_3 就不可能静止平衡.



图例 3-2

设 m_1 以加速度 a_1 向下运动, m_2 和 m_3 的加速度分别为 a_2 和 a_3 ,并设 a_2 向上, a_3 向下,取向上为正,列出各物体的运动方程:

$$T_1 - m_1g = -m_1a_1 \quad (1)$$

$$T_2 - m_2g = m_2a_2 \quad (2)$$

$$T_2 - m_3g = -m_3a_3 \quad (3)$$

由动滑轮上三段绳子的力平衡,有

$$T_1 = 2T_2 \quad (4)$$

由相对运动

$$a_2 = a'_{2对1} + a_1 \quad (5)$$

$$a_3 = a'_{3对1} + a_1 \quad (6)$$

⑤、⑥式中 a_1 为动滑轮的加速度, $a'_{2对1}$ 和 $a'_{3对1}$ 分别为 m_2 和 m_3 相对于动滑轮的加速度,化为标量式,得

$$a_2 = a' + a_1 \quad (7)$$

$$-a_3 = -a' + a_1 \quad (8)$$

⑦和⑧式中的 a' 是 m_2 和 m_3 相对于动滑轮的加速度的大小,解①~④,⑦~⑧式,得

$$a_1 = \frac{m_1m_2 + m_1m_3 - 4m_2m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3}g \quad (9)$$

把 $m_1 = 500g$, $m_2 = 200g$, $m_3 = 300g$ 代入⑨式,得

$$a_1 = 0.2(\text{m/s}^2)$$

a_1 为正,说明 m_1 向下运动的假设正确.

解法二:以动滑轮为非惯性参照系,图例 3-2b 为 m_1 , m_2 和 m_3 的受力图,除了真实力外,还要画出惯性力,按图列出运动方程:

$$T_1 - m_1g = -m_1a_1 \quad (10)$$

$$T_2 - m_3a_1 - m_3g = -m_3a' \quad (11)$$

$$T_2 - m_2g - m_2a_1 = m_2a' \quad (12)$$

上面式中 $-m_3 a_1 = f_3^*$, $-m_2 a_1 = f_2^*$ 分别为 m_3 和 m_2 受到的惯性力.

又

$$T_1 = 2T_2 \quad (13)$$

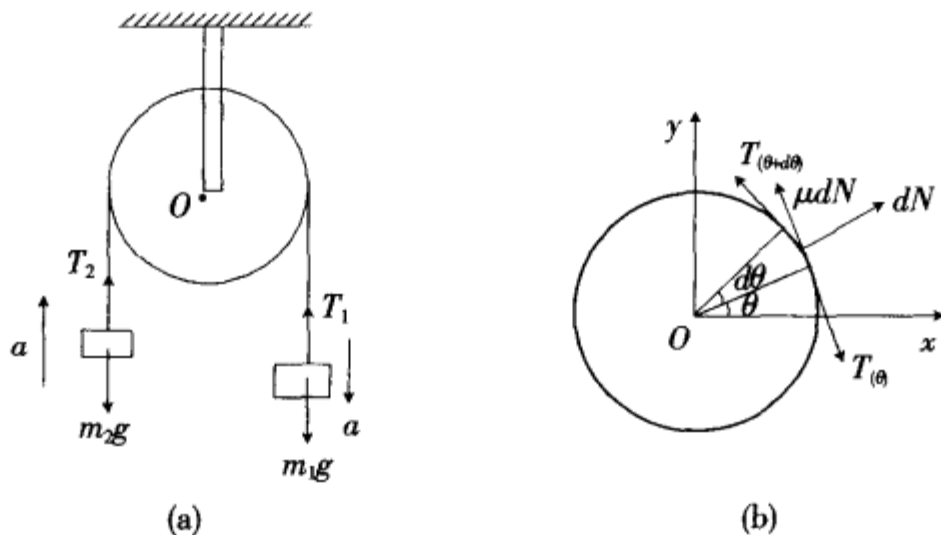
解以上 (10) ~ (13) 式, 得

$$a_1 = \frac{m_1 m_2 + m_1 m_3 - 4m_2 m_3}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4m_2 m_3} g$$

代入数值, 得 $a_1 = 0.2(\text{m/s}^2)$

可见, 用非惯性参照系解题时, 约束关系较简单, 方程数可减少, 较方便.

例 3-3 如图例 3-3a 所示, 质量为 m_1 和 m_2 的两物体, 与不可伸长的细线相连, 挂在滑轮的两边, 设滑轮被卡住不能转动, 细线和滑轮间的摩擦系数为 μ . 试分析当 m_1 下落、 m_2 上升时运动的加速度 a 和两边细线的张力 T_1 和 T_2 , 并讨论其结果.



图例 3-3

解: 当细线在固定的滑轮上滑动时, 细线受到滑轮的切向摩擦力, 因此, 线中各点的张力不相等, 而在不同位置的线段与滑轮的正压力 dN 不同, 摩擦力也不同. 为此, 我们先讨论两物体恰好静止不滑动时线上张力的分布. 如图例 3-3b 所示, 考虑在 θ 处, 对圆心张角为 $d\theta$ 的一段线元, 略去细线质量, 该线元受四个力作用: 线元两端的张力 $T_{(\theta)}$ 、 $T_{(\theta+d\theta)}$, 方向各沿着线元端点的切线方向, dN 为滑轮对细线的正压力, 垂直于细线指向外侧, μdN 为细线受到的最大静摩擦力, 当 m_1 有下滑趋势时摩擦力方向向上, 即沿线元中点的切向向上. 未滑动时, 四力的合力为零, 合力沿切向和法向的分量为

$$(T_{(\theta+d\theta)} - T_{(\theta)}) \cos \frac{d\theta}{2} + \mu dN = 0 \quad (1)$$

$$(T_{(\theta+d\theta)} + T_{(\theta)}) \sin \frac{d\theta}{2} - dN = 0 \quad (2)$$

因为 $d\theta \rightarrow 0$, $\sin \frac{d\theta}{2} \approx \frac{d\theta}{2}$, $\cos \frac{d\theta}{2} \approx 1$, $(T_{(\theta+d\theta)} - T_{(\theta)})$ 为 T 的增量 dT , $(T_{(\theta+d\theta)} + T_{(\theta)}) \approx 2T$, 则上面两式化为

$$dT = -\mu dN \quad (3)$$

$$Td\theta = dN \quad (4)$$

消去 dN , 得

$$\frac{dT}{T} = -\mu d\theta$$

积分

$$\int \frac{dT}{T} = \int -\mu d\theta$$

得

$$\ln T = -\mu\theta + C'$$

或

$$T = Ce^{-\mu\theta} \quad (5)$$

式中 C 为积分待定常数, 在 $\theta=0$ 处, $T=T_1$ (或取 $\theta=\pi$ 处, $T=T_2$), 由此定出 $C=T_1$, 于是 (5) 式改为

$$T = T_1 e^{-\mu\theta} \quad (6)$$

因为只有细线与滑轮相接触处才有摩擦力,所以上式只适用于 $0 \leq \theta \leq \pi$. 上述结果表明,在相接触的半圆范围内,张力 T 随 θ 增大而指数下降,最大值为 T_1 ,最小值为 T_2 . 由⑥式可得

$$T_2 = T_1 e^{-\mu\pi} \quad (7)$$

若细线与滑轮之间是光滑的,即 $\mu = 0$,则有 $T_1 = T_2$,这就是我们熟知的情况.

当细线在滑轮上滑动时,滑动摩擦力为 $f = \mu N$,上面的讨论结果仍成立. 现在分别作 m_1 和 m_2 的受力图,如图 3-2a 所示,每个物体只受自身重力和绳的张力作用,列出两物体的运动方程

$$m_1 g - T_1 = m_1 a \quad (8)$$

$$T_2 - m_2 g = m_2 a \quad (9)$$

⑦ ~ ⑨ 三式联立求解,可得

$$a = \frac{m_1 e^{-\mu\pi} - m_2}{m_1 e^{-\mu\pi} + m_2} g \quad (10)$$

$$T_1 = \frac{2m_1 m_2}{m_1 e^{-\mu\pi} + m_2} g \quad (11)$$

$$T_2 = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2 e^{\mu\pi}} g \quad (12)$$

分析所得结果⑩~⑫式,若摩擦力可忽略,把 $\mu = 0$ 代入此三式,可得

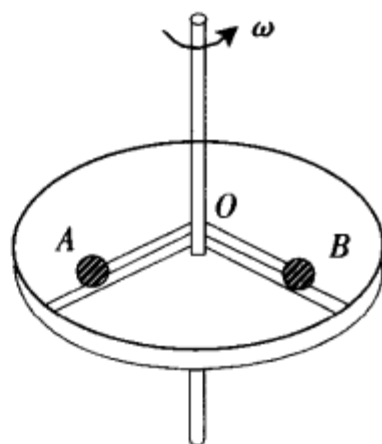
$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

$$T_1 = T_2 = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

这就是忽略摩擦力时常见的结果.

其次,要满足滑动条件,必须有 $a > 0$,因而 $m_1 > m_2 e^{\mu\pi}$,如果此条件不满足,则两物体处于静止,这时 $T_1 = m_1 g$, $T_2 = m_2 g$,细线与滑轮之间的静摩擦力小于最大静摩擦力.

例 3-4 如图例 3-4 所示,在水平面内有一平台可绕竖直的中心轴以角速度 ω 匀角速旋转. 在平台内沿半径方向开有两个沟槽,质量为 m_A 的小球 A 放置在粗糙的沟槽内,球与槽的摩擦系数为 μ ; 质量为 m_B 的小球 B 放置在另一光滑的沟槽内,长度为 l 的细线绕过平台的中心轴,其两端与两球相连. 设平台中心轴是半径可略的细轴,且光滑. 球 A 的位置可用它到中心点 O 的距离 x 表示,试求在稳定情形下 x 的取值范围.



图例 3-4

解: 沟槽的作用是限制两小球只能沿相应的半径方向运动.

先看 B 球,其所在的沟槽是光滑的. B 球在径向只受细线的拉力 T 作用,该力提供 B 球作圆周运动所需的向心力. 因此,在任何角速度下,细线总是拉紧的. 若 AO 长为 x ,则 BO 为 $(l-x)$.

A 球所在的沟槽是粗糙的,在稳定情形, A 球在径向受细线的拉力 T 和沟槽的静摩擦力 f 的作用,静摩擦力的方向由 A 球位置和两球质量比决定, f 的大小受最大静摩擦力 f_{\max} 的限制,因而稳定条件为 $|f| \leq f_{\max}$,由此条件可确定 x 的范围.

设 A 球所受静摩擦力 f 的方向为沿半径向外,设细绳对 A、B 球的拉力均为 T ,对 A、B 球分别运用牛顿第二定律,有

$$T - f = m_A \omega^2 x \quad (1)$$

$$T = m_B \omega^2 (l - x) \quad (2)$$

$$\text{解出} \quad f = [m_B l - (m_A + m_B)x] \omega^2 \quad (3)$$

f 的正负表明了静摩擦力的实际方向,分为以下三种情况:

$$1. \text{ 当 } x < \frac{m_B l}{m_A + m_B} \text{ 时, } f > 0 \quad (4)$$

摩擦力方向与所设方向一致,沿半径向外.

$$2. \text{ 当 } x = \frac{m_B l}{m_A + m_B} \text{ 时, } f = 0 \quad (5)$$

$$3. \text{ 当 } x > \frac{m_B l}{m_A + m_B} \text{ 时, } f < 0 \quad (6)$$

摩擦力为负表明其方向与所设方向相反,为沿半径向内. A 球对沟槽的正压力为

$$N = m_{AG}$$

A 球保持稳定的条件为

$$|f| \leq f_{\max} = \mu N = \mu m_{AG} \quad (7)$$

即

$$-\mu m_{AG} \leq f \leq \mu m_{AG} \quad (7)$$

当 $f > 0$ 时,应满足的条件是

$$f \leq \mu m_{AG} \quad (8)$$

将 ⑧ 式代入 ③ 式,得

$$[m_B l - (m_A + m_B)x]\omega^2 \leq \mu m_{AG} \quad (9)$$

解得

$$x \geq \frac{m_B}{m_A + m_B} l - \frac{\mu m_{AG}}{(m_A + m_B)\omega^2} = x_{\min} \quad (10)$$

x_{\min} 是能维持稳定的 x 的最小值.

当 $f < 0$ 时,应满足的条件是

$$f \geq -\mu m_{AG} \quad (11)$$

将 ⑪ 式代入 ③ 式得

$$[m_B l - (m_A + m_B)x]\omega^2 \geq -\mu m_{AG} \quad (12)$$

由上式解得

$$x \leq \frac{m_B}{m_A + m_B} l + \frac{\mu m_{AG}}{(m_A + m_B)\omega^2} = x_{\max} \quad (13)$$

x_{\max} 是能维持稳定的 x 的最大值.

综合以上讨论, A 球的位置 x 需在下述范围内才能维持稳定

$$\frac{m_B l}{m_A + m_B} - \frac{\mu m_{AG}}{(m_A + m_B)\omega^2} \leq x \leq \frac{m_B l}{m_A + m_B} + \frac{\mu m_{AG}}{(m_A + m_B)\omega^2} \quad (14)$$

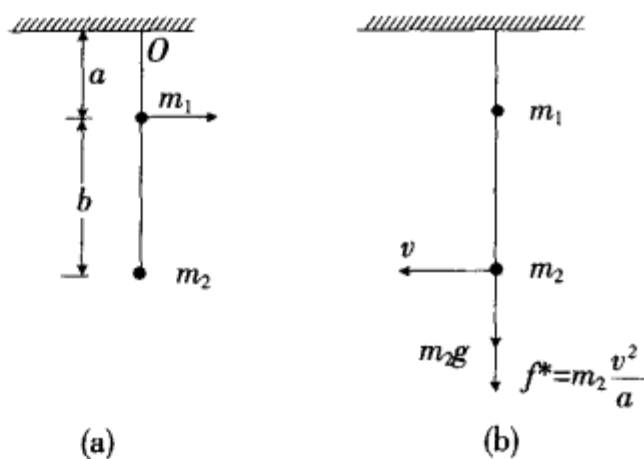
从上面结果 ⑬ 式可知,在任何角速度 ω 下,总存在某个 x_{\max} ,但为使 x_{\min} 有意义,即使 ⑩ 式中 $x_{\min} > 0$,角速度必须满足

$$\omega^2 \geq \frac{\mu m_{AG}}{m_B l} \quad (15)$$

特别是当 $\omega^2 = \frac{\mu m_{AG}}{m_B l}$ 时, $x_{\min} = 0$,当 ω 小于此临界值时,仍有 $x_{\min} = 0$. 因为当 A 球位于 $x = 0$ 时,由 ② 式可得 $T = m_B \omega^2 l$,而 $f_{\max} = \mu m_{AG}$,由上式 $\omega^2 = \frac{\mu m_{AG}}{m_B l}$ 可知, ω 减小时, $\mu m_{AG} > m_B \omega^2 l$,即 $f_{\max} > T$,所以能维持稳定.

例 3-5 如图例 3-5 所示,质量分别为 m_1 和 m_2 的两个小球,分别系于一根细绳中的一点和一端,细绳的另一端悬挂于固定处. 已知上、下两段绳的长度分别为 a 和 b . 开始时,两球静止,细绳处于竖直位置. 现给小球 m_1 一打击,使它突然在水平方向获得一速度. 试求小球 m_1 获得速度前后的瞬时,上、下两段绳子张力改变量的比值.

解: 在小球获得速度前,上、下两段绳的张力分别为



图例 3-5

$$T_{ao} = (m_1 + m_2)g \quad ①$$

$$T_{bo} = m_2g \quad ②$$

设小球 m_1 获得的速度为 v , 则小球 m_1 在获得速度后瞬时的运动状态是, 以 O 为圆心, a 为半径, 速度为 v 的圆周运动. 设该时刻上、下两段绳的张力分别变为 T_a 和 T_b , 则由受力分析, 可得 m_1 的运动方程为

$$T_a - T_b - m_1g = m_1 \frac{v^2}{a} \quad ③$$

下面求 T_b , 在地面参照系中, 当 m_1 获得速度后瞬时, 小球 m_2 的速度仍为零, 但其加速度却不为零. 从地面参照系很难分析, 换一个参照系则可使问题简化. 选与 m_1 相对静止的平动参照系, 其相对地面的加速度为 $\frac{v^2}{a}$, 方向竖直向上. 在该参照系中, m_1 静止, m_2 的速度则为 v , 方向如图例 3-5b 所示, 该瞬时 m_2 的运动状态是以 m_1 为圆心、 b 为半径, 速度为 v 的圆周运动. m_2 的受力情况为, 重力 m_2g 竖直向下, 惯性力 $f^* = m_2 \frac{v^2}{a}$ 竖直向下, 绳的张力 T_b 竖直向上, 由此可得其运动方程为

$$T_b - m_2g - m_2 \frac{v^2}{a} = m_2 \frac{v^2}{b}$$

得
$$T_b = m_2g + m_2 \frac{v^2}{a} + m_2 \frac{v^2}{b} \quad ④$$

④式代入③式,

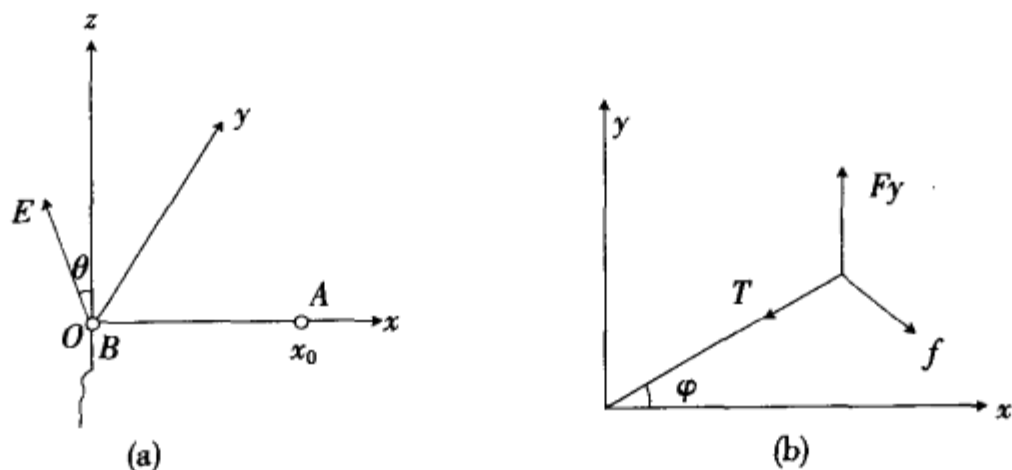
$$\begin{aligned} T_a &= T_b + m_1g + m_1 \frac{v^2}{a} \\ &= (m_2 + m_1)g + (m_1 + m_2) \frac{v^2}{a} + m_2 \frac{v^2}{b} \end{aligned} \quad ⑤$$

由①~⑤式可得结果为

$$\frac{\Delta T_a}{\Delta T_b} = \frac{T_a - T_{ao}}{T_b - T_{bo}} = \frac{m_1 \left(\frac{v^2}{a} \right) + m_2 \left(\frac{v^2}{a} + \frac{v^2}{b} \right)}{m_2 \left(\frac{v^2}{a} + \frac{v^2}{b} \right)} = 1 + \frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{b}{a+b} \quad ⑥$$

例3-6 如图例 3-6a 所示, z 轴竖直向上, xy 平面是一绝缘的、固定的刚性平面. 在 $A(x_0, 0, 0)$ 处放一带电量为 $-q$ ($q > 0$) 的小物块, 该物块与一细线相连, 细线的另一端 B 穿过位于坐标原点 O 的光滑小孔, 可通过它牵引小物块, 现对该系统加一匀强电场, 场强方向垂直于 x 轴, 与 z 轴的夹角为 θ , 设小物块和绝缘平面间的摩擦系数 $\mu = \tan\theta$, 且静摩擦系数和滑动摩擦系数相同. 不计重力作用. 现通过细线来牵引小物块, 使之移动. 在牵引过程中, 我们约定: 细线的 B 端只准沿 z 轴向下缓慢移动, 不得沿 z 轴向上移动; 小物块的移动非常缓慢, 在任何时刻, 都可近似认为小物块处在力平衡状态. 若已知小物块的移动轨迹是一条二次曲线, 试求出此轨迹方程.

(第 16 届全国中学生物理竞赛复赛题)



图例 3-6

解:设所加匀强电场的场强为 E ,它在 y 方向和 z 方向的分量分别为:

$$E_y = -E \sin \theta$$

$$E_z = E \cos \theta$$

由于物块带负电,电场作用于物块的电力的两个分量分别为

$$F_y = -qE_y = qE \sin \theta \quad (1)$$

$$F_z = -qE_z = -qE \cos \theta \quad (2)$$

F_y 在 xy 平面内,方向沿 y 轴正方向, F_z 垂直于 xy 平面,被绝缘平面的支持力所平衡,故物块对绝缘平面的正压力的大小 N 和 F_z 的大小相等,即

$$N = qE \cos \theta$$

绝缘平面作用于物块的摩擦力

$$f = \mu N = \tan \theta qE \cos \theta = qE \sin \theta = F_y \quad (3)$$

f 的方向决定于物块移动的方向.

根据题意,物块在 xy 平面内的运动可看作是一种在力平衡下的缓慢移动,作用于物块的三个力 F_y 、 f 和线的拉力 T 都在 xy 平面内,物块在任一位置达到平衡时的受力情况如图例 3-6b 所示. φ 为细线与 x 轴的夹角.把 T 沿 x 和 y 方向分解,得

$$T_x = -T \cos \varphi, T_y = -T \sin \varphi$$

用 f_x 和 f_y 表示 f 的两个分量,物块平衡时,有

$$F_y - T \sin \varphi + f_y = 0 \quad (4)$$

$$-T \cos \varphi + f_x = 0 \quad (5)$$

由④、⑤式得

$$(F_y - T \sin \varphi)^2 + T^2 \cos^2 \varphi = f^2$$

注意到③式,得

$$T(T - 2F_y \sin \varphi) = 0$$

得

$$T = 0 \text{ 或 } T = 2F_y \sin \varphi \quad (6)$$

因要小物块缓慢移动,需要细线牵引, $T=0$ 不符合题意,应舍去.因 $0 < \varphi < \pi$, $T = 2F_y \sin \varphi > 0$,将 T 代入④、⑤式,有

$$f_y = T \sin \varphi - F_y = -F_y \cos 2\varphi$$

$$f_x = T \cos \varphi = F_y \sin 2\varphi$$

摩擦力方向的斜率

$$k = f_y / f_x = -\cot 2\varphi \quad (7)$$

k 是摩擦力方向与 x 轴夹角的正切,即摩擦力方向的斜率,因摩擦力始终沿轨道的切线方向,故 k 也就是轨道切线的斜率.下面,通过对⑦式的分析来寻找轨道方程.

当 $\varphi = 0$, $k = \infty$,即在起点 A 时,轨道的切线与 x 轴垂直.

当 $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $k = \infty$,一种情况是小物块运动到 y 轴上后,沿 y 轴作直线运动到 O 点,但这与题设轨迹移动是二次曲线不符,因而它一定表示轨道在 O 点的切线与 x 轴垂直.

在二次曲线中,曲线上两点切线相互平行的只有椭圆或圆.又因为 A 、 O 两点的切线与它们的连线相垂直,这连线应为曲线的轴线,且在 OX 轴上,另一轴在它的垂直平分线上且与 y 轴平行,曲线与此轴线的交点的切线的斜率为 0,代入⑦式,得

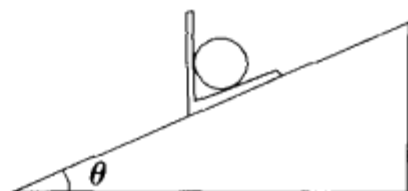
$$0 = -\cot 2\varphi, \varphi = \frac{\pi}{4}$$

故该曲线为圆,其方程为

$$\left(x - \frac{x_0}{2}\right)^2 + y^2 = x_0^2 / 4 \quad (8)$$

本章习题

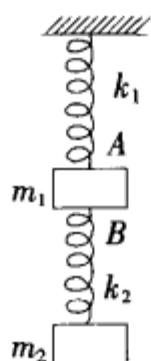
3.1 在倾角为 θ 的斜面上有一个质量为 M 的 L 形槽, 槽内放一质量为 m 的小球, 如图所示, 小球跟随槽一起从长为 s 的斜面顶端滑到底端, 所需时间为 t , 求滑动摩擦系数及滑动过程中小球对槽竖直板的压力.



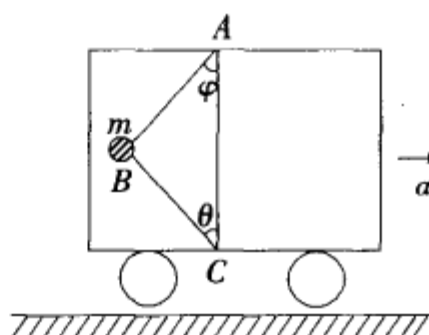
图习 3.1

3.2 如图所示, 两根劲度系数分别为 k_1 和 k_2 的质量不计的弹簧与质量分别为 m_1 和 m_2 的两个物体串吊起来,

- (1) 若 k_1 与 m_1 相连处的 A 点突然断开, 在断开的瞬时, 物体 m_1 和 m_2 的加速度各为多少?
- (2) 若 k_2 与 m_2 的相连处的 B 点突然断开, 在断开的瞬时, m_1 和 m_2 的加速度又各为多少?



图习 3.2

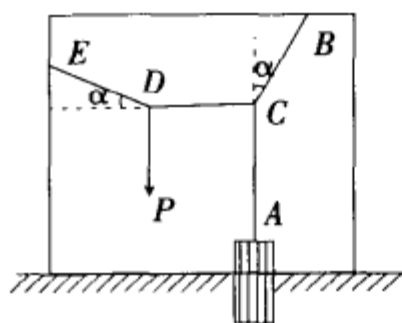


图习 3.3

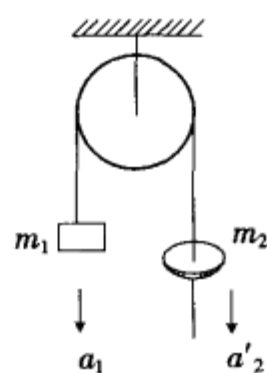
3.3 图示为一小车, 车的上、下两根绳系住一质量为 m 的小球, 小车向右作匀加速运动, 从静止开始经时间 t 后位移为 s , 此时两根绳都受到拉力, 求两根绳所受拉力的大小. 小车的加速度为多大时 BC 绳的拉力变为零?

3.4 图示为一拔桩机的设计示意图, 绳 ACB 的 B 端固定在支架上, A 端系住桩, 另一绳 CDE 的 C 端拉住前绳于 C 点, 另一端拴在钉子 E 上. 今在 D 点施一向下的力 $P = 392$ 牛顿, 若 CD 成水平, ED 与水平的夹角为 $\alpha = 4^\circ$, BC 与竖直线的夹角也是 4° , 试求 CA 绳拔桩的力 F .

3.5 将一根轻绳跨过一个轴处摩擦可忽略的轻滑轮, 在绳的一端吊一个质量为 m_1 的物体, 在绳的另一端有一个质量为 m_2 的环以恒定的加速度 a_2' 相对绳向下滑动. 求物体 m_1 的加速度及环和绳之间的摩擦力. [提示]

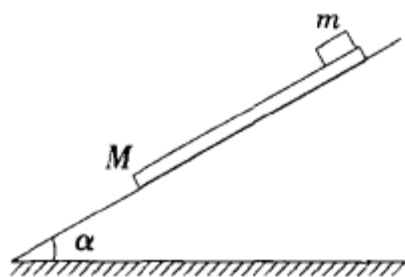


图习 3.4

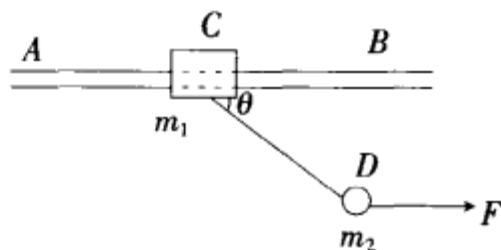


图习 3.5

3.6 在倾角为 $\alpha = 45^\circ$ 的斜面上放一质量 $M = 1\text{kg}$, 长 $l = 1.4\text{m}$ 的板, 板上端放一质量 $m = 0.5\text{kg}$ 的小方块, 如图所示, 设板与斜面间的摩擦系数 μ 等于 (a) 0.7, (b) 0.5, 方块和板间的摩擦忽略不计, 起始时刻方块与板都静止不动, 求方块从板上滑下的时间. [提示]



图习 3.6

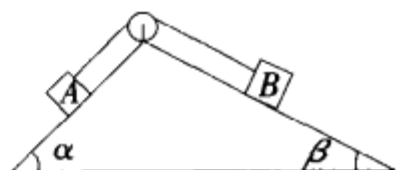


图习 3.7

3.7 如图所示,在一水平放置的导轨 AB 上套一个质量为 m_1 的圆筒 C ,在它下面用细绳连接质量为 m_2 的小球 B ,用水平拉力 F 拉着小球并带动圆筒一起向右作匀加速运动,已知圆筒与导轨之间摩擦系数为 μ ,

- (1)求绳与水平面的夹角 θ ;
- (2) F 至少为多大才能维持圆筒的运动,这时 θ 角为多大.[提示]

3.8 如图所示,一不会伸长的轻绳跨过定滑轮将放置在两边斜面上的物体 A 和 B 连接起来,物体 A 和 B 的质量分别为 m_A 和 m_B ,物体和斜面之间的摩擦系数为 μ ,两个斜面的倾角分别为 α 和 β ,设 A 、 B 的初速度为零,试求 $\frac{m_A}{m_B}$ 在什么范围内体系平衡.[提示]

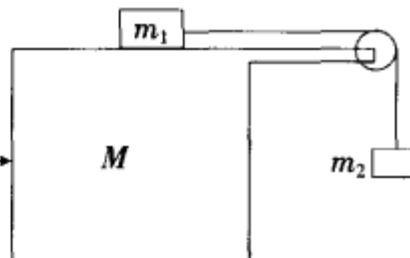


图习 3.8

3.9 如图所示的装置中,忽略滑轮及绳的质量以及各接触面间的摩擦.

- (1)为使 M 不动,推力 F 应为多大?
- (2)为使 M 、 m_1 与 m_2 三者之间相对静止,推力 F 应为多大?

[提示]



图习 3.9

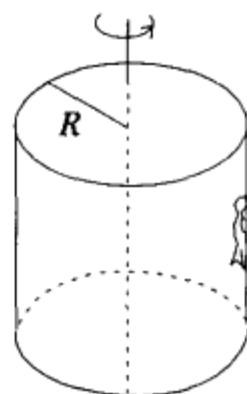
3.10 质量分别为 M 和 m ($M > m$) 的两个人,分别拉住跨在定滑轮上绳子的两边以恒定的相对于绳的加速度往上爬.开始时,两人至定滑轮的距离都是 h .证明:当质量为 m 的人经过时间 t 爬到滑轮处时,质量为 M 的人与滑轮的距离为 $\frac{M-m}{M}(h + \frac{1}{2}gt^2)$ [提示]

3.11 半径为 R 的圆筒以恒定的角速度 ω 绕铅垂轴自转,质量为 m 的杂技演员贴在筒的内壁上,人与筒的摩擦系数为 μ ,为使人不掉下来,则筒转动的角速度至少为多大?

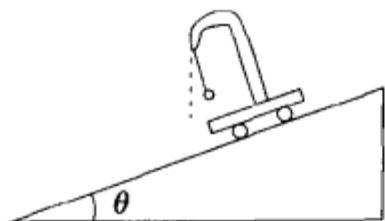
3.12 已知地球半径 $R_e = 6.4 \times 10^6$ 米,试估计地球与月球之间的距离.[提示]

*3.13 一小车沿倾角为 θ 的光滑斜面滑下.车上悬挂一摆绳.当摆锤相对小车静止时,摆线与铅垂线的夹角为多大?[提示]

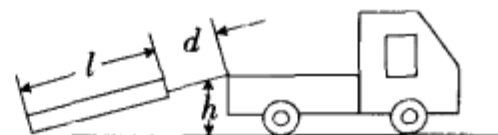
3.14 在卡车的尾部通过一根绳子拖着一根粗细均匀的圆木,绳长为 d ,圆木长为 l ,绳与卡车的连接点距地面高为 h .试问:必须以多大的加速度行驶,才能使圆木与地面脱离?[提示]



图习 3.11

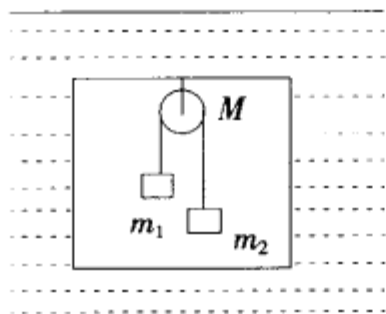


图习 3.13

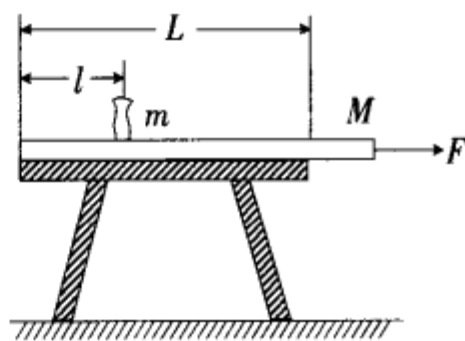


图习 3.14

3.15 在一体积为 V , 质量为 M 的铁盒内置有一轻定滑轮, 一轻绳跨在定滑轮上, 绳的两端各系一物体(这样的装置称为阿特伍德机), 已知两物体的质量分别为 m_1 和 m_2 , 现将此铁盒放入密度为 ρ 的液体中, 试求铁盒在下沉过程中的加速度. 已知铁盒下沉时受到的阻力 $f = -kV$, k 为常数. [提示]



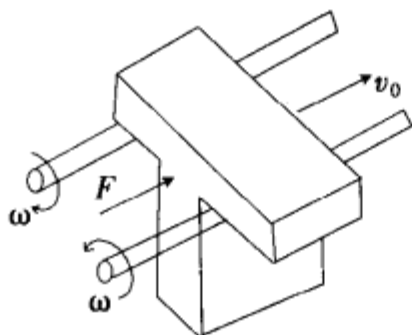
图习 3.15



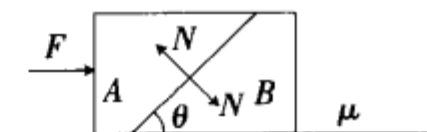
图习 3.16

3.16 质量为 M 厚度可忽略的薄板静置于水平桌面上, 其一端与桌边对齐. 在板上距板端为 l 处放一质量为 m 的小花瓶. 已知桌面长 L , 如图所示. 一水平恒力 F 作用于板上, 将板从花瓶下抽出, 为使板抽出后花瓶不至从桌上掉下, 则 F 至少为多大? 已知各接触面之间的摩擦系数均为 μ , 板在抽出过程中始终保持水平. [提示]

3.17 如图所示, 一质量为 $m = 20\text{kg}$ 的对称钢件, 架在两个完全相同的平行长直滚轴上. 两滚轴在同一水平面内, 滚轴半径为 $r = 0.025\text{m}$, 绕各自的中心轴以相同的角速度 $\omega = 40\text{rad/s}$ 作反向转动. 钢件与滚轴间的摩擦系数为 $\mu = 0.20$. 为使钢体以 $v_0 = 0.050\text{m/s}$ 的速度沿滚轴作匀速直线运动, 需沿滚轴的长度方向对钢件施以水平作用力 F , 试求 F 的大小. [提示]



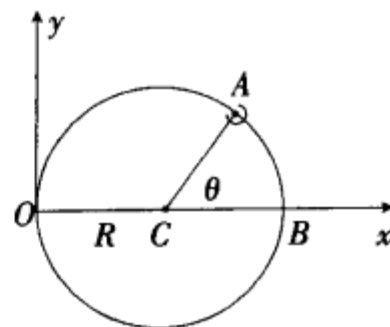
图习 3.17



图习 3.18

* 3.19 半径为 R 的轮子以恒定的速度 v 在水平面上沿直线滚动. 将一质量为 m 的小石子轻轻地放到轮子的顶端. 试问, 经过多少时间小石子与轮子之间发生相对滑动, 已知小石子与轮子之间的摩擦系数为 μ . [提示]

* 3.20 质量为 m 的小环套在半径为 R 的水平大圆环上, 大圆环以匀角速 ω 绕着过其上一一点 O 的竖直轴转动. 如图习 3.20 所示, 小环与大环间的摩擦系数为 μ , 试求小环和大环保持相对静止时小环受到大环的正压力 N 的大小, 摩擦系数至少为多大? 设小环在 A 点, AC 和 x 轴夹角 θ 为已知参量. [提示]



图习 3.20

动量与角动量

§ 4.1 动量、冲量和动量定理

本节我们将讨论力在一段时间内的累积效应和由此产生的物体运动状态的变化。设恒力 F 作用于质量为 m 的质点上,由牛顿第二定律

$$F = ma = m \frac{v - v_0}{t - t_0} = \frac{mv - mv_0}{\Delta t}$$

将上式改写为

$$F \cdot \Delta t = mv - mv_0 \quad (4.1-1)$$

定义

$$p = mv \quad (4.1-2)$$

上式中 p 称为质点的动量,由质量和速度相乘而得。并定义

$$I = F \cdot \Delta t \quad (4.1-3)$$

上式中 I 称为冲量。 I 表示力 F 作用在质点上一段时间 Δt 的累积效应。(4.1-2)和(4.1-3)式代入(4.1-1)式,得

$$I = p - p_0 \quad (4.1-4)$$

注意,(4.1-3)式只是恒力的冲量定义式。对于变力的冲量定理则应写成更普遍的形式

$$I = \int_{t_0}^t F dt = \int_{p_0}^p dp = p - p_0 \quad (4.1-5)$$

(4.1-5)式表明,在一段时间内质点所受合力的冲量等于这段时间内质点动量的增量。这就是质点的动量定理。在国际单位制中,冲量的单位是牛·秒(N·s)。

动量定理使人们认识到,力在一段时间内的累积效果,若要使物体产生同样的动量增量,则力大时所需时间短些,力小则需时间长些。

从(4.1-3)式看,如果力是恒力,则冲量 I 的方向和力的方向一致。从(4.1-5)式看,若 F 是方向和大小都在变化的变力,则冲量 I 的大小和方向要由这段时间内所有微分冲量 Fdt 的矢量和决定,而不能由某一瞬时的 F 来决定。然而,根据动量定理,不管物体在运动过程中外力如何改变,也不管物体在运动过程中动量变化的情况如何,冲量的大小和方向总等于物体始末动量的矢量差,这就是应用动量定理解决问题的优点所在。例如在碰撞或冲击问题中,两物体相互作用的时间极为短促,而在这短短的时间内,作用力迅速增大到很大的量值,然后又急剧下降为零,这种力称冲力,它随时间变化的关系很难确定,所以用牛顿第二定律无法解决问题,但根据动量定理,我们可以从实验测出物体在碰撞或冲击前后的动量,从而由动量的矢量差来求得冲量。

质点的动量定理是矢量式,质点所受的冲量在某方向上的分量等于质点动量在该方向上分量的增量,在直角坐标系中,三个分量式为

$$I_x = \int_{t_0}^t F_x dt = mv_x - mv_{x0} \quad (4.1-6a)$$

$$I_y = \int_{t_0}^t F_y dt = mv_y - mv_{y0} \quad (4.1-6b)$$

$$I_z = \int_{t_0}^t F_z dt = mv_z - mv_{z0} \quad (4.1-6c)$$

质点的动量定理是从牛顿第二定律导出的,因此也只在惯性系中成立.

对于有若干个质点组成的系统,我们把质点系外的物体对质点系内质点的作用力称为外力,用 $F_{\text{外}}$ 表示,质点系内质点之间的相互作用力称为内力,用 $f_{\text{内}}$ 表示,对质点系内的每个质点应用质点的动量定理:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \mathbf{F}_1 dt &= m_1 \mathbf{v}_1 - m_1 \mathbf{v}_{10} \\ \int_{t_0}^t \mathbf{F}_2 dt &= m_2 \mathbf{v}_2 - m_2 \mathbf{v}_{20} \\ &\vdots \\ \int_{t_0}^t \mathbf{F}_i dt &= m_i \mathbf{v}_i - m_i \mathbf{v}_{i0} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (4.1-7)$$

上式中 F_i 表示第 i 个质点所受到的合力:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_{i\text{外}} + \mathbf{f}_{i\text{内}} \quad (4.1-8)$$

把(4.1-8)式代入(4.1-7)式中各式,并将(4.1-7)式中的各式相加得到

$$\sum_i \int_{t_0}^t (\mathbf{F}_{i\text{外}} + \mathbf{f}_{i\text{内}}) dt = \sum_i m_i \mathbf{v}_i - \sum_i m_i \mathbf{v}_{i0}$$

改写成

$$\int_{t_0}^t (\sum_i \mathbf{F}_{i\text{外}} + \sum_i \mathbf{f}_{i\text{内}}) dt = \sum_i m_i \mathbf{v}_i - \sum_i m_i \mathbf{v}_{i0} \quad (4.1-9)$$

上式中 $\sum_i \mathbf{F}_{i\text{外}}$ 是作用在体系中所有质点上的一切外力的矢量和,也就是作用在整个体系上的合外力,用 \mathbf{F} 来表示,即

$$\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_{i\text{外}}$$

(4.1-9)式中的 $\sum_i \mathbf{f}_{i\text{内}}$ 表示作用在体系中所有质点上的一切内力的矢量和,根据牛顿第三定律,对于任何一个内力,必然同时存在另一个与其大小相等、方向相反、作用在同一直线上的内力,虽然这一对内力是作用在不同的两个质点上,它们不能相互抵消,但是它们的矢量和必等于零.因此,体系中所有内力的矢量和等于零,即有

$$\sum_i \mathbf{f}_{i\text{内}} = 0$$

于是(4.1-9)式变为

$$\int_{t_0}^t \mathbf{F} \cdot dt = \sum_i m_i \mathbf{v}_i - \sum_i m_i \mathbf{v}_{i0} \quad (4.1-10)$$

或写成

$$\mathbf{I} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_0 \quad (4.1-11)$$

(4.1-11)式和(4.1-4)式形式完全相同,不过在(4.1-11)式中 \mathbf{I} 表示作用在体系中所有质点上的一切外力的冲量的矢量和,也即合外力的冲量; \mathbf{p}_0 和 \mathbf{p} 则分别表示整个体系在 t_0 时刻和在 t 时刻的总动量.上式表示,体系总动量的增加量等于作用在体系上的合外力的冲量,这称为质点系的动量定理.

特别要注意,对于一个质点系来说,只有外力的冲量才能改变体系的总动量,体系内部各个质点之间的相互作用只能使内部各质点的动量发生交换,而不能改变体系的总动量.换言之,内力只能引起体系内部各质点的动量传递和交换,不影响总动量.

例 4.1-1 有一重锤从高度 $h = 2m$ 处自静止下落,锤与被加工的工件碰撞后末速为零.若打击时间 Δt 分别为 $10^{-1}s$ 、 $10^{-2}s$ 和 $10^{-3}s$,试计算这几种情形下重锤的平均冲击力与其重力的比值.

解:如图 4.1-1 所示,重锤从高度 h 下落到工件上的前夕,速度为 $-y$ 方向,其值为

$$v_{y0} = -\sqrt{2gh}$$

与工件撞击后速度 $v_y = 0$,在撞击时间 Δt 内,重锤给工件的平均冲力为 F ,则重锤受到工件的反冲力大小也是 F ,方向向上,设重锤质量为 m ,以重锤为研究对象,重锤还受到重力 mg 的作用.在打击时间 Δt 内,锤的速度由初速 v_{y0} 变到 $v_y = 0$,根据动量定理,

$$\int_0^{\Delta t} (F - mg) dt = mv_y - mv_{y0} = m\sqrt{2gh}$$

$$(F - mg)\Delta t = m\sqrt{2gh}$$

$$\frac{F}{mg} = 1 + \frac{1}{\Delta t} \sqrt{\frac{2h}{g}} = 1 + \frac{0.64}{\Delta t}$$

以 Δt 各值代入,计算结果如下表:

$\Delta t/s$	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
F/mg	7.4	65	6.4×10^2

计算结果表明,撞击时间越短,平均冲力 F 与重力之比就越大,相比之下重力就微不足道,因此,在许多打击或碰撞问题中,只要持续时间足够短,就可略去重力对冲击力的贡献.

例 4.1-2 如图 4.1-2 所示,用棒打击质量为 0.3kg ,速率为 20m/s 的水平方向飞来的球,击后球飞到竖直上方 10m 的高度,求棒给予球的冲量,设球与棒的接触时间为 0.02s ,求球受到的平均冲力.

解法一:用动量定理的分量关系式,根据已知条件得

$$I_x = 0 - mv_x$$

$$I_y = mv_y - 0$$

而 $v_y = \sqrt{2gh}$, h 为小球竖直上升高度.

所以 $I = \sqrt{I_x^2 + I_y^2} = m\sqrt{v_x^2 + 2gh}$

代入数值,得

$$I = 0.30 \times \sqrt{20^2 + 2 \times 9.8 \times 10} = 7.32(\text{N} \cdot \text{s})$$

I 与 x 轴的夹角设为 α ,

$$\tan \alpha = \frac{I_y}{I_x} = \frac{mv_y}{-mv_x} = \frac{\sqrt{2gh}}{-v_x} = \frac{\sqrt{2 \times 9.8 \times 10}}{-20} = -0.70$$

得

$$\alpha = 145^\circ$$

小球受到的平均冲力为

$$F = \frac{I}{t} = \frac{7.32}{0.02} = 366(\text{N})$$

解法二:直接用矢量式表示,如图 4.1-2b 所示为矢量三角形,

$$\mathbf{I} = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1$$

$$I = m\sqrt{v_1^2 + v_2^2} = m\sqrt{v_1^2 + 2gh} = 7.32(\text{N} \cdot \text{s})$$

$$F = \frac{I}{t} = 366\text{N}$$

F 与 $-X$ 方向的夹角为 φ , $v_2 = \sqrt{2gh} = 14$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{v_2}{v_1} = \tan^{-1} \frac{14}{20} = 35^\circ$$

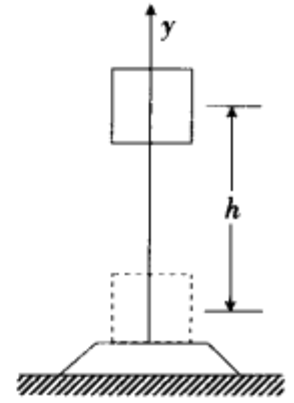


图 4.1-1
重锤对工件的冲力

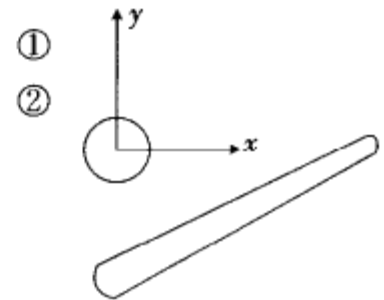


图 4.1-2(a) 冲量

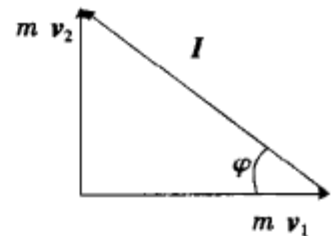


图 4.1-2(b)

§ 4.2 动量守恒定律

在(4.1-10)式中,若作用在体系上的合外力 $F=0$,则质点系的总动量保持不变

$$p = \sum_i m_i v_i = \text{常矢量}$$

上述结论称为动量守恒定律。

动量守恒定律是自然界最基本和最普遍的规律之一,实验和理论都已证明,无论对宏观物体还是微观粒子,作低速运动还是高速运动,动量守恒定律都是适用的。

这里特别要注意的是,动量是矢量,体系的总动量为体系中各物体动量的矢量和,因此,体系的总动量保持不变,并不意味着体系中每个物体的动量都保持不变,也不是指体系中各物体动量的大小之和保持不变。事实上,体系内各个物体之间的相互作用(内力)可以使体系各物体的动量发生变化。

例 4.2-1 设有一原来静止的炸弹,发生爆炸后分裂成三个碎片,质量分别为 m_1, m_2, m_3 , 已知 $m_2=2m_1, m_3=3m_1$, m_1 和 m_2 在水平面内以同样的速率 $v=20\text{m/s}$ 沿着相互垂直的两个方向飞开,求第三个碎片的速度。

解: 将整个炮弹作为一个体系,在爆炸过程中,内力 \gg 外力,所以外力(如重力)不可计,体系的总动量守恒。爆炸前炸弹静止,其总动量为零,所以爆炸后炸弹分裂成三个碎片的总动量也是零,即

$$p = m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3 = 0$$

式中 v_1, v_2, v_3 分别表示三个碎片的速度。由此

$$v_3 = -\frac{1}{m_3}(m_1 v_1 + m_2 v_2)$$

由于 v_1 与 v_2 的方向互相垂直,可取直角坐标使 x 轴与 v_1 的方向一致, y 轴与 v_2 的方向一致,如图 4.2-1 所示,则由上式可知, v_3 的方向必在 xy 平面内。根据上式可写出 v_3 沿 x 方向和 y 方向的分量表示式,即

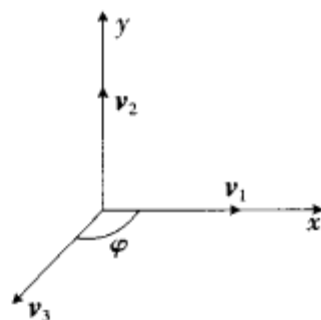


图 4.2-1 动量守恒

$$v_{3x} = -\frac{m_1}{m_3} v_1 = -\frac{m_1}{3m_1} v = -\frac{1}{3} v$$

$$v_{3y} = -\frac{m_2}{m_3} v_2 = -\frac{2m_1}{3m_1} v = -\frac{2}{3} v$$

由此,求得 m_3 的速度大小为

$$v_3 = \sqrt{v_{3x}^2 + v_{3y}^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} v = 0.745v$$

代入数值 $v = 20\text{m/s}$ 得

$$v_3 = 14.9\text{m/s}$$

v_3 的方向与 x 轴的夹角 φ 可由以下关系求得

$$\tan\varphi = \frac{v_{3y}}{v_{3x}} = \frac{-\frac{2}{3}v}{-\frac{1}{3}v} = 2$$

$$\cos\varphi = \frac{v_{3x}}{v_3} = \frac{-\frac{1}{3}v}{0.745v} = -0.447$$

所以得 $\varphi = -116.6^\circ$

例 4.2-2 如图 4.2-2 所示,一炮车以仰角 α 发射炮弹,炮身和炮弹的质量分别为 M 和 m ,炮弹在出口处相对炮身的速率为 u ,试求炮身的反冲速度 v 。设地面摩擦力可以忽略。

解:选取炮身和炮弹为体系.体系在竖直方向受重力和地面支承力作用;水平方向不受外力作用,因此在水平方向体系的动量守恒.取水平为 x 方向,发射炮弹前后体系的动量为零,由于炮弹的速度是相对炮身而言的,必须将它化为相对地面的速度 v_1 ,由相对运动关系可得

$$v_1 = u + v \quad (1)$$

水平方向动量守恒要求:(这里假设炮身的反冲速度为 $-x$ 方向.)

$$mv_{1x} - Mv = 0 \quad (2)$$

由 (1) 式得

$$v_{1x} = u \cos \alpha - v$$

代入 (2) 式得

$$mu \cos \alpha - mv - Mv = 0$$

即得炮身反冲速度为

$$v = \frac{m}{m+M} u \cos \alpha$$

方向与所假设的一致,指向 $-x$ 方向.

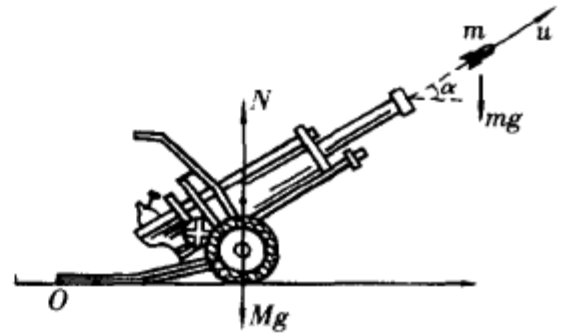


图 4.2 - 2

* § 4.3 质心运动定律

由质心的定义式(2.1-2),可求得质心的运动速度为

$$v_c = \frac{d r_c}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\sum_i m_i r_i}{\sum_i m_i} \right) = \frac{1}{M} \sum_i m_i \frac{d r_i}{dt} = \frac{1}{M} \sum_i m_i v_i \quad (4.3-1)$$

上式可改写为体系总动量 p 与质心速度 v_c 的关系

$$p = \sum_i m_i v_i = M v_c \quad (4.3-2)$$

上式中 M 为体系的总质量.

(4.3-2)式表示体系的总动量可以看作是全部质量集中于质心 C 的一个质点所具有的动量,该质点的速度等于质心速度.因此,质点系的动量定理可写成

$$F dt = dp = d(\sum_i m_i v_i) = d(M v_c) = M d v_c \quad (4.3-3)$$

由上式得

$$F = M \frac{d}{dt} (v_c) = M a_c \quad (4.3-4)$$

式中 $a_c = \frac{d v_c}{dt}$ 是质心加速度.(4.3-4)式表明,质心加速度 a_c 与作用在体系上所有外力的矢量和 F 成正比,与体系的总质量 M 成反比, a_c 的方向与合外力 F 的方向一致.这结论称为质心运动定律.(4.3-4)式与单个质点的运动定律 $F = m a$ 具有完全相同的形式,这表明在外力作用下的体系,其质心的运动等价于一个集中了整个体系质量的质点在相同外力作用下的运动,即质心是质点组的代表点.对于质心的运动来说,系统的内力永远不起作用.

质心运动定律还表明,在合外力 $F=0$ 的情况下, $a_c=0$,与质心相对静止的参照系(称为质心参照系)是个惯性系.

例 4.3-1 光滑水平面上放有一质量为 M 的三棱柱体,其上又放一质量为 m 的小三棱柱体.它们的横截面都是直角三角形, M 的水平直角边的边长为 a , m 的水平直角边的边长为 b ,两者的接触面(倾角为 θ)亦为光滑,设它们由静止开始滑动,求当 m 的下边缘滑到水平面时, M 在水平面上移动的距离

离。(图 4.3-1a)

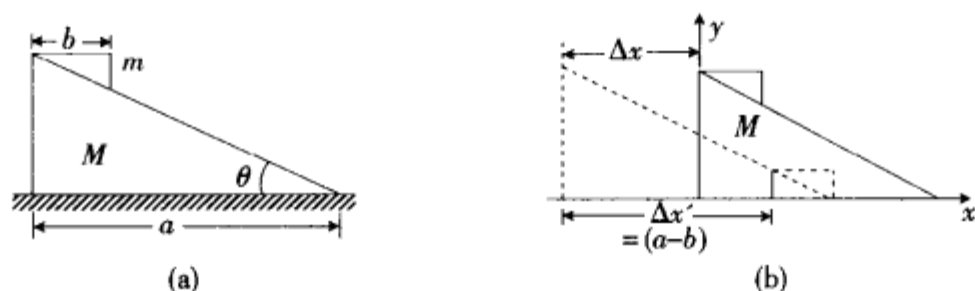


图 4.3-1

解法一:用动量守恒关系求解.由于两个三棱柱体组成的体系在水平方向不受外力作用,因而体系在水平方向动量守恒.设 m 和 M 相对地面的速度分别为 v 和 V , m 相对于 M 的速度为 v' , 则

$$m v_x + M V_x = 0 \quad (1)$$

由相对运动速度关系

$$v_x = v_x' + V_x \quad (2)$$

②式代入①式,化为

$$m v_x' + (m + M) V_x = 0 \quad (3)$$

选地面参照系坐标如图 4.3-1b 所示,设小三棱柱 m 从顶端滑到地面的时间为 t , m 相对于 M 在水平方向的位移为 $(a - b)$, 则

$$a - b = \int_0^t v_x' dt \quad (4)$$

设大三棱柱体 M 在 t 时间内位移为 Δx , 则

$$\Delta x = \int_0^t V_x dt \quad (5)$$

③式化为积分式为

$$m \int_0^t v_x' dt + (m + M) \int_0^t V_x dt = 0 \quad (6)$$

④,⑤式代入⑥式,得

$$m(a - b) + (m + M)\Delta x = 0$$

解得

$$\Delta x = -\frac{m(a - b)}{m + M} \quad (7)$$

负号表示位移 Δx 指向 x 轴负方向,即 M 向 $-x$ 方向运动.

解法二:用质心运动定律解,由于 m 和 M 组成的系统水平方向不受外力作用,所以质心保持静止.设开始时 M 和 m 的质心坐标分别为 x_1 和 x_2 , 当 m 滑到底时,两者的质心坐标分别为 x_1' 和 x_2' , 则有

$$x_c = \frac{Mx_1 + mx_2}{M + m} \quad (8)$$

$$x_c' = \frac{Mx_1' + mx_2'}{M + m} \quad (9)$$

由于质心坐标不变

$$x_c = x_c' \quad (10)$$

所以由上面两式得

$$M(x_1' - x_1) + m(x_2' - x_2) = 0 \quad (11)$$

M 的位移为

$$\Delta x = x_1' - x_1 \quad (12)$$

m 的位移为

$$\Delta x_2 = x_2' - x_2 = (a - b) + \Delta x \quad (13)$$

上式中利用了相对运动位移之间的关系,⑫和⑬式代入⑪式,得

$$\Delta x = -\frac{m(a-b)}{M+m} \quad (14)$$

* § 4.4 质点和质点系的角动量

当我们以某固定点为参考点来考察质点的运动时,相对于参考点而言,除了质点的动量在变化以外,质点的距离和方位也在变化.例如,当太阳系中的行星绕太阳公转时,行星的运动轨迹是以太阳为一个焦点的椭圆,如图 4.4-1 所示,从太阳指向行星的矢量为 r ,行星在椭圆轨道的不同位置上运动的速度不同,在近日点速率最大,因而动量的数值也最大,远日点速率最小,动量的数值也最小.但是,在轨道的任意位置上,行星的动量的大小 P 、位矢 r 及 r 和 p 的夹角 α 的正弦 ($\sin\alpha$) 三者的乘积却总是相等的,如图中 A、B、C 三点有

$$r_1 P_1 \sin \frac{\pi}{2} = r_2 P_2 \sin \frac{\pi}{2} = r P \sin \alpha = \text{恒量}$$

这表明在行星运动中 $rP\sin\alpha$ 保持不变,这种规律性表明该量也是一种反映物体运动属性的物理量.这个物理量就是角动量,又称动量矩,它是与转动相联系的一个物理量.角动量用字母 L 表示.如果质点的动量为 p ,它相对于 O 点的位矢为 r ,则该质点相对于 O 点的角动量的大小为

$$L = rP\sin\alpha \quad (4.4-1)$$

式中 α 为 r 与 p 之间的夹角.角动量是矢量,它的方向垂直于 r 和 p 所决定的平面,指向按右手螺旋法则确定:以右手弯曲的四指表示从 r 以小于 π 的角度转到 p 的转向时,伸直的拇指即表示角动量 L 的方向,可用矢积表示

$$L = r \times p \quad (4.4-2)$$

图 4.4-2 表示 L 、 r 和 p 三者之间的方向关系.

在国际单位制中,角动量的单位是千克·米²/秒,符号为 $\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$,也可写作焦·秒(J·s).

质点系对给定点的角动量等于各质点对该点角动量的矢量和:

$$L = \sum_i L_i = \sum_i r_i \times p_i = \sum_i r_i \times m_i v_i \quad (4.4-3)$$

* § 4.5 角动量定理和角动量守恒定律

角动量在什么情况下发生变化?如何变化?我们可以利用前面的知识来解决这个问题.如图 4.5-1(a)所示,设质点 m 沿与某固定点 O 相距为 d 的直线运动,在某一时刻,质点与 O 的距离为 r ,速度为 v , v 与 r 的夹角为 α ,质点不受外力作用时,物体运动的方向与速率均不变; r 和 α 虽不断变化,但 $r\sin\alpha = d$ 不变,因此质点相对于 O 点的角动量

$$L = rps\sin\alpha = pd$$

始终保持不变.现将动量 $p = m v$ 分解为沿 r 方向的分量 $p_r = mv_r$ 和与 r 垂直方向的分量 $p_t = mv_t$,角动量 L 为

$$L = rps\sin\alpha = rmvs\sin\alpha = rmv_t = rp_t$$

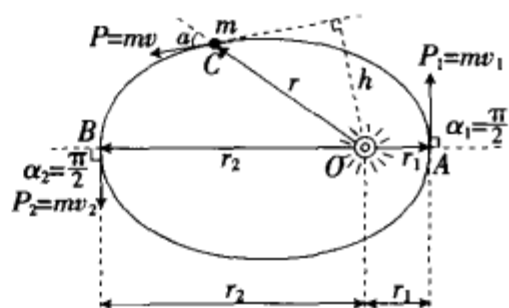


图 4.4-1

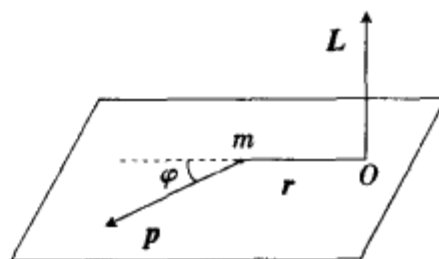


图 4.4-2 角动量 L 与 r 、 p 的方向关系

上式表明,角动量只与 r 和 p_t 有关,而与 p_r 的大小无关. 如果该质点受到位于 r 和 p 所在平面内的外力 F 的作用,如图 4.5-1(b)所示,并将此力分解为沿 r 方向的分力 F_r 和垂直于 r 方向的分力 F_t ,在一段极短的时间间隔 Δt 中, F_r 的冲量 $F_r \Delta t$ 将使质点沿 r 方向的动量增加 ΔP_r ,由上面的分析可知,这个增量对质点的角动量没有影响. 与此同时, F_t 的冲量 $F_t \Delta t$ 将使质点沿垂直于 r 方向的动量增加 $\Delta P_t = F_t \Delta t$,因而角动量的增量为

$$\Delta L = r \Delta P_t = r F_t \Delta t$$

两边除以 Δt ,并令 $\Delta t \rightarrow 0$,得

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta L}{\Delta t} = r F_t$$

上式左边为单位时间内角动量的改变量,即角动量变化率,而右边正是力 F 对 O 点的力矩,因此上式可写成

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta L}{\Delta t} = M \quad (4.5-1)$$

由以上分析得出结论:质点对某定点的角动量变化率等于质点所受外力对该定点的力矩. 这称为质点的角动量定理.

在上面的讨论中, r, F, p 都在同一平面(设为 $x-y$ 平面)上, L 和 M 在垂直于该平面的方向(设为 z 方向)上. (4.5-1)可写成导数形式

$$M_z = \frac{dL_z}{dt} \quad (4.5-2)$$

上式即对于 z 轴的角动量定理的微分形式. 我们还可以考察力矩的时间累积效果,即力矩施加于质点而经历一段时间所产生的效果. 为此,将(4.5-2)式两边对时间积分,得

$$\int_0^t M_z dt = L_z - L_{z0} \quad (4.5-3)$$

这里 L_z 和 L_{z0} 分别指质点在时刻 $t=0$ 和 $t=t$ 的角动量. 力矩对时间的积分 $\int_0^t M_z dt$ 称为冲量矩,从时刻 $t=0$ 到时刻 t ,质点的角动量的增量等于这段时间内质点所受的冲量矩,这就是质点对于某轴线的角动量定理的积分形式,积分形式的角动量定理适宜于研究冲击作用.

考察质点所受的力对于 z 轴的力矩 $M_z=0$ 这一特例,此时冲量矩亦为零. 对于 z 轴的角动量定理的微分形式(4.5-2)式和积分形式(4.5-3)式分别给出

$$\frac{dL_z}{dt} = 0, L_z - L_{z0} = 0 \quad (4.5-4)$$

两式意义相同,它们指出:如果质点所受的力对于某根轴线的力矩为零,则质点对于该轴线的角动量不随时间变化. 通常将这称为质点对于轴线的角动量守恒定律.

在质点固结于轴线的情况下,角动量守恒定律为

$$L = mR^2 \omega = \text{常量} \quad (4.5-5)$$

意味着质点绕轴转动的角速度 ω 不变.

一般说来,质点并不固结于轴线,角动量守恒定律为

$$L = mrv \sin \alpha = mr v_t = mr^2 \omega = \text{常量} \quad (4.5-6)$$

由上式可见,在质点所受的力对于轴线的力矩为零的条件下,如质点向轴线靠近, r 减小,则它围绕轴线运动的角速度 ω 加快,反之则减慢. 例如,在舞蹈表演或滑冰表演中,演员常绕自身的轴线旋转,演员将两手合抱于胸前,旋转就加快起来,演员将两臂伸展出来,旋转就减慢. 这正是利用了角动量守恒定律.

上面的讨论同样适用于质点对于 x 轴和 y 轴的角动量定理,即

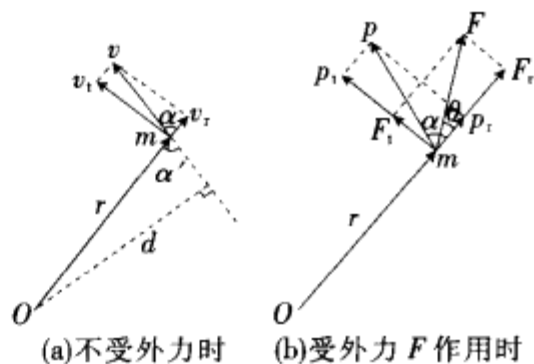


图 4.5-1 质点的角动量

$$M_x = \frac{dL_x}{dt}, M_y = \frac{dL_y}{dt} \quad (4.5-6)$$

$$\int_0^t M_x dt = L_x - L_{x0}, \int_0^t M_y dt = L_y - L_{y0} \quad (4.5-7)$$

对于直角坐标系中三个坐标轴的角动量定理可以用矢量形式表示:

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad (4.5-8)$$

$$\int_0^t \mathbf{M} dt = \mathbf{L} - \mathbf{L}_0 \quad (4.5-9)$$

通常将 \mathbf{M} 称为力 \mathbf{F} 对于 O 点的力矩, \mathbf{L} 称为质点对于 O 点的角动量. 因为 x, y, z 是任意选的一组指向, 因此一般地说, 过 O 点任作一直线, 力对于 O 点的力矩 \mathbf{M} 在该直线上的投影即是力对于该直线的力矩, 质点对于 O 点的角动量 \mathbf{L} 在该直线上的投影即是质点对于该直线的角动量. 如果质点所受的力对于某个 O 点的力矩 \mathbf{M} 为零, 则它对于 O 点的角动量 \mathbf{L} 不随时间而变, 这称为质点的角动量守恒定律. 当外力 \mathbf{F} 始终与 \mathbf{r} 在一条直线上(这样的力称为有心力)时, 角动量守恒. 另外, 当外力对定点的力矩虽不为零, 但其某一分量为零时则角动量的该分量守恒:

$$\begin{aligned} \text{若 } M_x = 0, \text{ 则 } L_x = \text{常量} \\ \text{若 } M_y = 0, \text{ 则 } L_y = \text{常量} \\ \text{若 } M_z = 0, \text{ 则 } L_z = \text{常量} \end{aligned} \quad (4.5-10)$$

例4.5-1 如图 4.5-2 所示, 一质量为 m 的小球系于一不能伸长的轻绳的一端, 并放在光滑的水平桌面上, 绳的另一端穿过桌面中心的小孔, 用手拉住, 先推动小球使它以速率 v_1 沿半径为 r_1 的圆周轨道运动, 然后慢慢向下拉绳, 使小球的转动半径减至 r_2 , 试求这时小球的速率.

解: 小球在水平方向受到的作用力沿着绳的方向并通过小孔 O , 该力对 O 点的力矩为零, 小球所受的重力和桌面对小球的支承力大小相等、方向相反, 对 O 点的合力矩为零, 因此, 小球对 O 点的角动量守恒, 即

$$\mathbf{r}_1 \times m\mathbf{v}_1 = \mathbf{r}_2 \times m\mathbf{v}_2$$

小球的径向速度很小, 如果忽略不计, 则有 $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{r}_1, \mathbf{v}_2 \perp \mathbf{r}_2$, 这样, 上式改为标量形式

$$r_1 m v_1 = r_2 m v_2$$

得
$$v_2 = \frac{r_1}{r_2} v_1$$

在本例中, 小球的轨道是缓慢收缩的螺旋线, 绳的张力与螺旋线并不严格垂直, 因而有切向分力, 这切向分力给小球以切向加速度, 因而增大了其速率.

下面我们讨论质点组的角动量定理. 为简单起见, 先讨论两个质点组成的体系, 选定某根轴线, 称之为 Z 轴, 将质点的角动量定理(4.5-2)式应用于这两个质点 1 和 2, 可得

$$\begin{aligned} \frac{dL_1}{dt} &= M_1 + M_{12} \\ \frac{dL_2}{dt} &= M_2 + M_{21} \end{aligned} \quad (4.5-11)$$

上面两式中的 L_1 和 L_2 分别为质点 1 和 2 对于 Z 轴的角动量, M_1 和 M_2 分别为作用于质点 1 和 2 的外力对于 Z 轴的力矩, M_{12} 和 M_{21} 分别为质点 2 和 1 作用于对方的内力对于 Z 轴的力矩, 将(4.5-11)两式相加, 得

$$\frac{d}{dt}(L_1 + L_2) = M_1 + M_2 + M_{12} + M_{21}$$

注意内力 \mathbf{F}_{12} 与 \mathbf{F}_{21} 大小相等、方向相反、沿着同一条直线, 它们在 xy 平面中的投影也必然大小相等、指向相反, 沿着同一条直线, 因而它们对 Z 轴的力矩之和为零, 这样, 上式中 $M_{12} = -M_{21}$, 因此

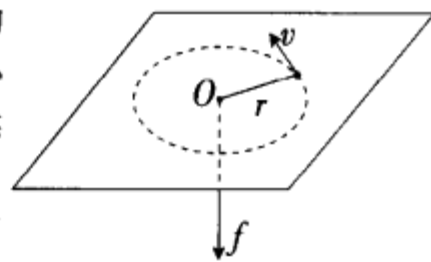


图 4.5-2

$$\frac{d}{dt}(L_1 + L_2) = M_1 + M_2 \quad (4.5-12)$$

质点组的各质点对 Z 轴的角动量之和 $L_1 + L_2$ 定义为质点组对于 Z 轴的角动量, 并以 L 记之, (4.5-12) 式就成为

$$\frac{dL}{dt} = M_1 + M_2 \quad (4.5-13)$$

质点组对于 Z 轴的角动量的时间变化率就等于质点组各质点所受外力对 Z 轴的力矩之和. 这就是质点组对于轴线的角动量定理的微分形式.

对于由许多质点组成的体系, 由于各质点之间的内力总是成对出现的, 因此所有内力对 Z 轴的力矩之和为零, 因此(4.5-13)式可推广到多质点体系, 若质点组包含 N 个质点, 则上式可推广为

$$\frac{dL}{dt} = M_1 + M_2 + \cdots + M_N \quad (4.5-14)$$

上式还可改用积分形式表出:

$$\int_{t_1}^{t_2} M_1 dt + \int_{t_1}^{t_2} M_2 dt + \cdots + \int_{t_1}^{t_2} M_N dt = L_{t_2} - L_{t_1} \quad (4.5-15)$$

从时刻 t_1 到时刻 t_2 , 质点组对于 Z 轴的角动量的增量就等于质点组各质点在这段时间内所受外力对于 Z 轴的冲量矩之和. 此即质点组对于轴线的角动量定理的积分形式. 同理, 对于 x 轴和 y 轴也可以得出质点组角动量定理的微分形式(4.5-14)和积分形式(4.5-15).

如果质点组各质点所受外力对于 Z 轴的力矩之和为零, 则(4.5-14)和(4.5-15)式给出

$$\frac{dL}{dt} = 0 \text{ 或 } L_{t_2} - L_{t_1} = 0 \quad (4.5-16)$$

也可写成 $L = \text{常量}$

此即质点组角动量守恒定律.

角动量是矢量, 在直角坐标系中有三个分量, 各分量可以分别守恒.

当 $M_x = 0$, 则 $L_x = \text{常量}$

当 $M_y = 0$, 则 $L_y = \text{常量}$

当 $M_z = 0$, 则 $L_z = \text{常量}$

(4.5-17)

例4.5-2 如图 4.5-3 所示, 轻绳跨过半径为 R 的轻滑轮, 质量为 m 的人抓住绳的一端, 另一端系了一质量为 $\frac{m}{2}$ 的物体, 求人相对于绳匀速上爬时, 重物上升的加速度是多少?

解: 以滑轮中心 O 为定点来讨论人与物体的角动量, 设人相对于绳的速度为 u , 物体上升的速度为 v , 则人相对于地面的上升速度为 $(u - v)$, 体系相对 O 点的角动量均沿 Z 轴(垂直于纸面指向外), 该体系对 O 轴的角动量为

$$L = \frac{m}{2} vR - m(u - v)R = \frac{3}{2} mvR - muR$$

角动量的时间变化率为

$$\frac{dL}{dt} = \frac{3}{2} mR \frac{dv}{dt} - mR \frac{du}{dt}$$

因 $\frac{du}{dt} = 0$

故 $\frac{dL}{dt} = \frac{3}{2} mR \frac{dv}{dt}$

作用在体系上的外力有重力、绳的张力和悬挂点的拉力, 但拉力和张力对 O 点的力矩为零, 故总外力矩为

$$M = mgR - \frac{m}{2} gR = \frac{m}{2} gR$$

由质点组角动量定理

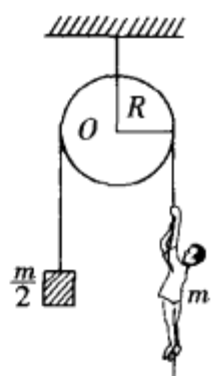


图 4.5-3

$$\frac{3}{2} mR \frac{dv}{dt} = \frac{m}{2} gR$$

得

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{1}{3} g$$

例4.5-3 有三个质量均为 m_1 的小球固结于一根轻杆上,如图 4.5-4 所示,每个小球之间的间距均为 l ,轻杆可绕水平轴 O 无摩擦地自由转动,当小球体系静止在竖直的平衡位置上时,有一质量为 m_2 的子弹以速度 v_0 垂直击中当中一个小球,然后被反弹,子弹反弹速度为 v ,与 v_0 反方向,试求杆上小球被子弹碰撞后的瞬时获得的绕 O 点转动的角速度.

解: 小球系统受到子弹给予的绕 O 点的冲量矩与子弹获得的冲量矩大小相等,方向相反,而子弹受到的冲量矩可由质点的角动量定理求出,设 M' 为子弹受到的相对 O 点的力矩,则

$$\int M' dt = -m_2 v \cdot 2l - m_2 v_0 \cdot 2l = -2lm_2(v + v_0)$$

小球系统受到的冲量矩为

$$\int M dt = -\int M' dt = 2lm_2(v + v_0)$$

小球系统获得对 O 点的角动量为

$$L = L_1 + L_2 + L_3 = m_1 l v_1 + m_1 \cdot 2l \cdot v_2 + m_1 \cdot 3l \cdot v_3$$

因三个小球和轻杆固结在一起,角速度 ω 相同,由 $v = \omega r$,可得

$$v_1 = l\omega, v_2 = 2l\omega, v_3 = 3l\omega$$

代入上式,得

$$L = m_1 l^2 \omega + m_1 (2l)^2 \omega + m_1 (3l)^2 \omega = 14m_1 l^2 \omega$$

由质点组的角动量定理

$$\int M dt = L$$

即

$$2lm_2(v + v_0) = 14m_1 l^2 \omega$$

得

$$\omega = \frac{m_2(v + v_0)}{7m_1 l}$$

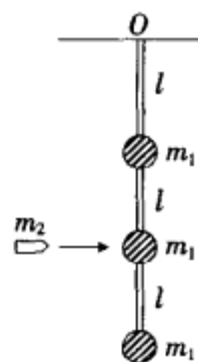


图 4.5-4

* § 4.6 变质量体系的运动方程 火箭

变质量体系是不断与外界交换质量的体系,所以直接用牛顿定律和体系的动量定理是不行的.但是,可以把体系变化的过程分成一系列元过程,在每个元过程的起始时刻 t ,原来的体系(称为主体)和即将进入(或离开)主体的物体(称为附体)是分离(或合并)的,经过 Δt 时间,在元过程的末了时刻 $t + \Delta t$,附体并入(或离开)主体,对于主体和附体组成的体系,在元过程中是确定的,质量也是不变的,体系的动量变化服从体系的动量定理,下一个元过程,该体系变成新主体,体系动量定理又可用于此新体系,这样,整个体系变化的过程可看成是一系列组成不一的确定体系的元过程的总和,在每一元过程中,对相应的体系均可应用动量定理,由此可导出主体的运动方程.

以火箭为例,这是质量连续减小,即 $\frac{dM}{dt} < 0$ 的情况,在时刻 t ,设火箭具有质量 M 和速度 v ,动量为 Mv ,到了时刻 $t + dt$,由于喷出了气体 $|dM|$ (注意 dM 是负值),火箭的质量减为 $M - |dM|$,速度变为 $v + dv$,火箭的动量为 $(M - |dM|) \cdot (v + dv)$,在 dt 这段时间内,火箭所喷出的气体的绝对速度几乎是一样的,记作 u ,因而所喷出的气体的动量为 $|dM|u$,由质点组动量定理.

$$[(M - |dM|)(v + dv) + |dM|u] - Mv = Fdt$$

上式中 F 是火箭所受外力, Fdt 就是外力在这段时间内的冲量,上式整理并略去二级小量,得

$$Mdv = -(u - v)|dM| + Fdt$$

即
$$M \frac{dv}{dt} = (u - v) \frac{dM}{dt} + F \quad (4.6-1)$$

这就是减质量体系的运动方程,其中 $\frac{dM}{dt} < 0$.

若质量是连续增长的,则用同样方法可证明,上式仍成立,不同在于 $\frac{dM}{dt} > 0$. (4.6-1)式称为密舍尔斯基方程.

下面我们进一步讨论变质量体系的运动方程(4.6-1)式,喷出去的气体 $|dM|$ 的速度变化为 $(u - v)$,因此 $(u - v) |dM|$ 为这部分气体动量的变化,它等于火箭给予这部分气体的冲量,而 $(u - v) \left| \frac{dM}{dt} \right|$ 就是火箭给予喷出去的气体的冲力,这部分气体给火箭的反作用冲力则为 $(u - v) \frac{dM}{dt}$.

因此式(4.6-1)实际上是牛顿第二定律的方程.

例 4.6-1 假设火箭不受外力作用,火箭初始质量为 M_0 ,初始速度为零,设所有燃料用完时火箭质量为 M_f ,气体以相对火箭为 v_r 的速率向后喷射出去,求火箭燃料用完时的速率 v_s . 若考虑重力的影响, v_s 为多少?

解:取 x 轴平行于火箭轨道并指向运动前方,则

$$u - v = v_r$$

在所取的坐标轴中 v_r 的投影为 $-v_r$,把 $F=0$ 代入(4.6-1)式,并化为一维方程,得

$$M \frac{dv}{dt} = -v_r \frac{dM}{dt}$$

改为

$$dv = -v_r \frac{dM}{M}$$

两边积分,并把已知条件 $t=0$ 时 $v=0$,质量为 M_0 ,燃料用完时 $v=v_f$,质量为 M_f 代入积分上、下限,得

$$\int_0^{v_f} dv = -v_r \int_{M_0}^{M_f} \frac{dM}{M}$$

解得

$$v_f = v_r \ln \frac{M_0}{M_f}$$

由上式可见,要提高火箭的速率应提高喷射速率 v_r ,或质量比 $\frac{M_0}{M_f}$,但由于火箭上需装备仪器设备,存放燃料也需要容器,所以 M_f 不可能太小,一般 M_0/M_f 约为 6,另外, v_r 也受到一定限制,通常可达 2~3 千米/秒,所以用一级火箭时 v_s 达不到第一宇宙速度(~ 8 千米/秒),一般发射人造卫星或宇宙飞船必须用多级火箭.

当考虑地球的引力时,若设火箭在加速过程中引力不变,将(4.7-1)式化为标量方程

$$M \frac{dv}{dt} = -v_r \frac{dM}{dt} - Mg$$

改为

$$dv = -v_r \frac{dM}{M} - gdt$$

各项分别积分

$$\int_0^{v_f} dv = -v_r \int_{M_0}^{M_f} \frac{dM}{M} - \int_0^{t_f} gdt$$

得

$$v_f = -v_r \ln \frac{M_f}{M_0} - gt_f$$

即

$$v_f = v_r \ln \frac{M_0}{M_f} - gt_f$$

与不受重力的情况相比,火箭所能达到的速率降低了 gt_f , 这降低的部分称为速度损失. 速度损失与喷射气体的时间 t_f 成正比, 喷射时间越少, 速度损失也越小.

例 4.6-2 如图所示, 当货车以匀速 v 前进时, 砂子从固定的漏斗里落进货车, 砂子落进货车的速率为 $\frac{dm}{dt}$, 求需用多大的力才能保持货车以匀速 v 运动?

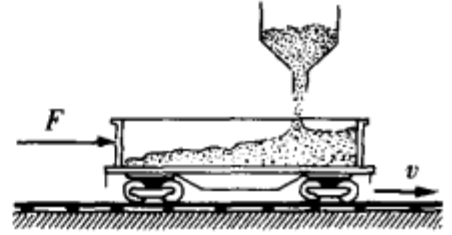


图 4.6-1

解: 这是增质量体系的运动情况, 砂子水平方向的初速度 $u = 0$, 所以密舍尔斯基方程为

$$m \frac{dv}{dt} = -v \frac{dm}{dt} + F$$

v 不变, 所以 $m \frac{dv}{dt} = 0$, 由上式可得保持货车匀速运动的力为

$$F = v \frac{dm}{dt}$$

本章综合例题

例 4-1 长为 l , 总质量为 m 的柔软绳索放在水平台面上, 用手将绳索的一端以恒定速率 v_0 向上提起, 求当提起高度为 x 时手的提力(图例 4-1).

解法一: 用动量定理:

以整根绳索为体系, 它共受三个力: 重力 mg , 台面支承力 N 和手的提力 F . 在三个力共同作用下, 体系的动量不断发生变化. 取 x 轴竖直向上, 体系的动量只有铅直方向分量, 在 t 时刻, 设绳索提起 x 长度的绳索, 体系的动量为

$$p(t) = m \cdot \frac{x}{l} v_0$$

在 $t + dt$ 时刻, 绳索被提起的长度为 $(x + dx)$, 体系的动量为

$$p(t + dt) = \frac{m}{l} (x + dx) v_0$$

根据动量定理

$$(F + N - mg)dt = p(t + dt) - p(t) = \frac{m}{l} v_0 dx \quad ①$$

而

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \quad ②$$

N 只与留在台面上的绳索质量有关,

$$N = \frac{l-x}{l} mg \quad ③$$

②, ③ 式代入 ① 式, 得

$$F = \frac{mg}{l} x + \frac{m}{l} v_0^2 \quad ④$$

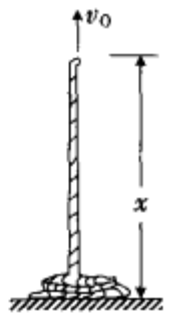
在计算结果中第一项是长为 x 的绳索的重量, 第二项是体系动量增加时所需要的附加力, 因为总有一部分绳索从速度为零变到 v_0 , 所以体系的动量不断在变化.

解法二: 用质心运动定理求解

仍以台面为 x 坐标轴的原点, 当绳索提起 x 时, 提起的绳索的质心在 $\frac{x}{2}$ 处, 留在台面上绳索的质心在 $x = 0$ 处的体系质心坐标为

$$x_c = \frac{\frac{m}{l}(l-x) \cdot 0 + \frac{m}{l}x \cdot \frac{x}{2}}{m} = \frac{x^2}{2l} \quad ⑤$$

质心速度为



图例 4-1

$$v_c = \frac{dx_c}{dt} = \frac{x}{l} \frac{dx}{dt} = \frac{x}{l} v_0 \quad (6)$$

质心加速度为

$$a_c = \frac{dv_c}{dt} = \frac{v_0}{l} \frac{dx}{dt} = \frac{v_0^2}{l} \quad (7)$$

体系共受三个力,提力 F ,重力 $-mg$,台面支承力 $\frac{m}{l}(l-x)g$,由质心运动定理有

$$F + \frac{m}{l}(l-x)g - mg = ma_c = \frac{mv_0^2}{l} \quad (8)$$

整理后得

$$F = \frac{m}{l}v_0^2 + \frac{m}{l}gx$$

例 4-2 如图例 4-2a 所示,四个质量均为 m 的质点,用同样长度且不可伸长的轻绳联结成菱形 $ABCD$,静止放在水平光滑的桌面上.若突然给质点 A 一个历时极短沿 CA 方向的冲击,当冲击结束的时刻,质点 A 的速度为 V ,其他质点也获得一定速度, $\angle BAD = 2\alpha$ ($\alpha < \pi/4$).求此质点系统受冲击后所具有的总动量.

(第 13 届全国中学生物理竞赛复赛题)

解:由对称性可知, C 点的速度也必沿 CA 方向,设其大小为 V_C , D 的速度可分为解为平行于 V 的分量和垂直于 V 的分量,其大小分别设为 V_{D1} 和 V_{D2} ,同样, B 的速度也类似地分解为平行和垂直于 V 的两个分量,其大小设为 V_{B1} 和 V_{B2} ,如图 4-2b 所示.根据对称性,必有

$$V_{B1} = V_{D1} \quad (1)$$

$$V_{B2} = V_{D2} \quad (2)$$

由于绳子不可伸长, A 沿 DA 的分速度和 D 沿 DA 的分速度一定相等, C 沿 CD 的分速度和 D 沿 CD 的分速度也相等.即:

$$V \cos \alpha = V_{D1} \cos \alpha + V_{D2} \sin \alpha \quad (3)$$

$$V_C \cos \alpha = V_{D1} \cos \alpha - V_{D2} \sin \alpha \quad (4)$$

另外,设绳子 AD 给质点 D 的冲量大小为 I_1 ,绳子 DC 给质点 C 的冲量的大小为 I_2 ,注意到绳子 DC 给质点 D 的冲量的大小同样也是 I_2 (各冲量方向均沿绳子方向).由对称性还可以判定,绳子 AB 给质点 B 的冲量的大小也是 I_1 ,绳子 BC 给质点 B 和 C 的冲量的大小都是 I_2 .根据动量定理,可分别列出关于质点 D 平行和垂直于 V 的方向以及质点 C 平行于 V 方向的关系式如下:

$$mV_{D1} = I_1 \cos \alpha - I_2 \cos \alpha \quad (5)$$

$$mV_{D2} = I_1 \sin \alpha + I_2 \sin \alpha \quad (6)$$

$$mV_C = 2I_2 \cos \alpha \quad (7)$$

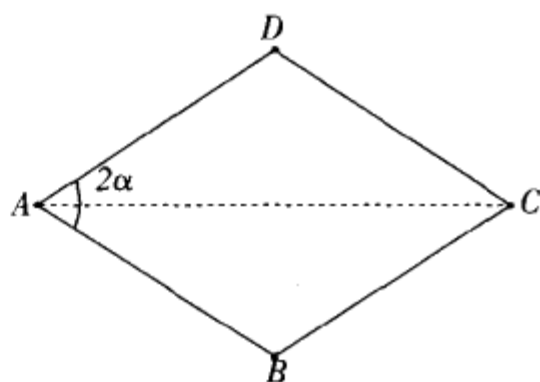
由 (3) - (7) 式可解出

$$V_{D1} = \frac{V}{1 + 2\sin^2 \alpha} \quad (8)$$

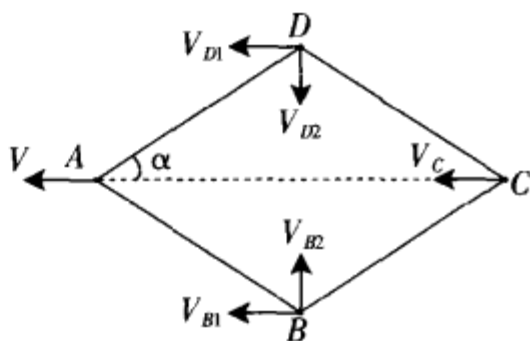
$$V_{D2} = \frac{V \sin \alpha}{1 + 2\sin^2 \alpha} \quad (9)$$

$$V_C = \frac{V \cos 2\alpha}{1 + 2\sin^2 \alpha} \quad (10)$$

由以上结果和 (1)、(2) 式,此系统的总动量为:



图例 4-2a

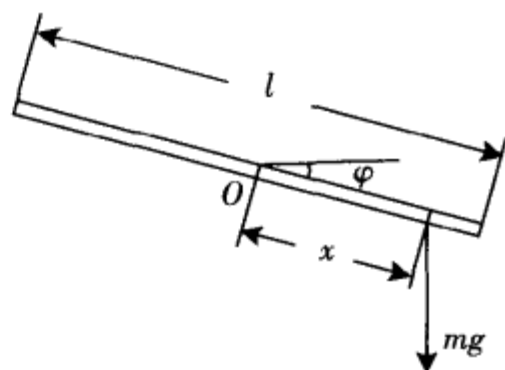


图例 4-2b

$$P = mV + 2mV_{D1} + mV_C = \frac{4mV}{1 + 2\sin^2\alpha}$$

方向沿 CA 方向。

例 4-3 有一轻杆长为 l , 开始时处于水平位置, 杆的中心 O 有一水平轴支撑着, 因而可以在竖直平面内绕 O 点转动, 如图例 4-3(a) 所示, 有一蜘蛛以垂直向下的速度 v_0 落到杆上离 O 点为 $\frac{l}{4}$ 处, 并立刻沿杆爬向杆端, 若蜘蛛在爬到杆端的过程中杆的转动角速度始终保持不变, 则 v_0 的最大值为多少? 假定杆转到垂直位置时蜘蛛离开杆落下, 试求出蜘蛛在空间爬行的轨迹。



图例 4-3a

解: 设蜘蛛质量为 m , 任一时刻杆的角速度都是 ω , 当蜘蛛刚落到杆上时

$$v_0 = \frac{l}{4} \cdot \omega$$

$$\omega = \frac{4v_0}{l} \tag{1}$$

当蜘蛛爬到离 O 点为 x 长度时, 蜘蛛的重力对 O 点的力矩为

$$M = mgx \cos\varphi \tag{2}$$

其中 $\varphi = \omega t$ 是杆转过的角度, 由题意, ω 不变, 蜘蛛对 O 点的角动量为

$$L = mxv = mx^2\omega \tag{3}$$

$$\frac{dL}{dt} = 2mx\omega \cdot \frac{dx}{dt} \tag{4}$$

由质点的角动量定理 $mgx \cos\varphi = 2mx\omega \cdot \frac{dx}{dt}$

把 $\varphi = \omega t$ 代入上式并改为积分形式

$$\int_{\frac{l}{4}}^x dx = \int_0^t \frac{g}{2\omega} \cos(\omega t) dt$$

得
$$x = \frac{g}{2\omega^2} \sin\omega t + \frac{l}{4} \tag{5}$$

以①式代入⑤式, 得

$$x = \frac{gl^2}{32v_0^2} \sin\left(\frac{4v_0}{l}t\right) + \frac{l}{4} \tag{6}$$

如果蜘蛛爬到端点, 必须满足

$$x \geq \frac{l}{2}$$

此时 $t = \frac{\pi}{2}$, 故

$$\frac{gl^2}{32v_0^2} + \frac{l}{4} \geq \frac{l}{2}$$

得
$$v_0 \leq \sqrt{\frac{gl}{8}}$$

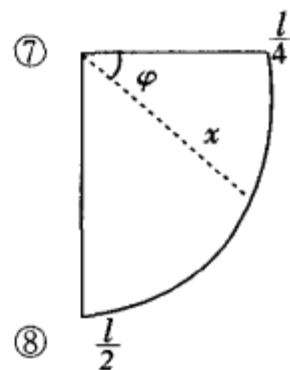
当杆转到垂直位置时蜘蛛正好落下, 则由⑦式

$$v_0 = \sqrt{\frac{gl}{8}}$$

上式代入⑥式, 得蜘蛛在空间爬行的轨迹为

$$x = \frac{l}{4} \left[\sin\left(\sqrt{\frac{2g}{l}}t\right) + 1 \right]$$

其轨迹如图例 4-3(b) 所示。



图例 4-3b

例 4-4 设一质量为 m 的滑块(可视为质点)在水平面(即 Oxz 平面)内以初速度 $v_0 = v_0 i$ 从原点 O 出发沿 x 轴滑动,如图例 4-4 所示,假设滑块与水平面的摩擦力 $f = -f i$ 恒定不变,试求在任一时刻 t 滑块对原点 O 以及对 y 轴上离原点距离为 l 的一点 A 的角动量.

解:根据题意,质点是在 Ox 轴上作直线运动,质点对 O 点的位矢 r 与速度 v 在同一方向,因此

$$L = r \times mv = 0$$

说明滑块对 O 点的角动量恒等于零.从角动量定理看,滑块角动量守恒是由于作用于它的合力矩等于零.滑块受到重力、直线轨道上的支承力和摩擦力的作用,前两个力的大小相等,方向相反,它们的力矩的矢量和为零,摩擦力 $f = -f i$ 的作用线恒通过 O 点,故对 O 点的力矩也为零.

以 A 点为参考点时,质点虽然作直线运动,但从 A 到质点的位矢不断在改变方向,也就是在绕 A 转动.滑块在 t 时刻的速度为

$$v = \left(v_0 - \frac{f}{m}t \right) i$$

而从 A 点到矢量 v 的垂直距离为 l ,故 $L = mlv$,而其方向与 Oz 轴相同,所以

$$L_A = l(mv_0 - ft)k$$

L_A 不仅不等于零,而且也不是守恒量.

上述结果也可以从角动量定理求得.滑块只受到摩擦力 $f = -f i$ 的力矩作用. f 的作用线在 Ox 轴上,而指向与 v 相反,所以它对 A 点的力矩 M_A 的大小等于 lf ,而指向为 $-k$

$$M_A = -lfk$$

由角动量定理

$$\int_0^t M_A dt = L_A(t) - L_A(0)$$

在 $t = 0$ 时, $v = v_0$, $L_A(0) = mlv_0k$,所以

$$L_A(t) = mlv_0k + \int_0^t (-lfdt)k = (mlv_0 - lft)k \text{ 与上面的结果完全一致.}$$

例 4-5 长为 l 、质量为 m 的柔软绳索,两端 A 、 B 并在一起悬挂在支点上,现让 B 点脱离支点自由下落,求 B 点下落 x 时(如图例 4-5 所示),支点上所受的力 T .

解法一:用动量定理求解

选支点为坐标原点,向下为 x 轴正方向,绳索的右半部分作自由落体运动,当 B 点下落了 x 时,其运动速度为

$$v = \sqrt{2gx}$$

以整条绳为体系,体系的动量 P 就是右半部分绳子的动量.当 B 点下落了 x 时,右边绳索的长度为

$$l_{\text{右}} = \frac{1}{2}(l+x) - x = \frac{1}{2}(l-x)$$

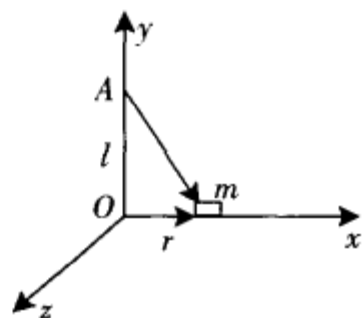
动量为

$$P = m_{\text{右}} \cdot v = \frac{m}{l} \cdot \frac{1}{2}(l-x) \cdot \sqrt{2gx}$$

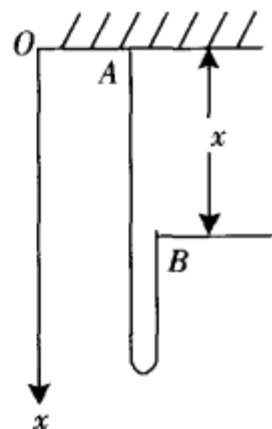
经过很短的时间 Δt 以后, B 点又下落了 Δx ,此时右边绳索长度变为

$$l'_{\text{右}} = \frac{1}{2}(l-x-\Delta x)$$

运动速度为



图例 4-4



图例 4-5

$$v' = \sqrt{2g(x + \Delta x)}$$

系统动量为

$$P' = \frac{m}{l} \cdot \frac{1}{2} (l - x - \Delta x) \cdot \sqrt{2g(x + \Delta x)}$$

系统所受的外力为绳索的重力 mg 和支点对绳索的 A 点的作用力 T' , 只要 Δt 取得足够小, 变力 T' 在 Δt 时间里的冲量 $T'\Delta t$ 可看成是恒力的冲量, 由质点系的动量定理可得

$$P' - P = (T' + mg)\Delta t$$

$$\frac{m}{2l} (l - x - \Delta x) \sqrt{2g(x + \Delta x)} - \frac{m}{2l} (l - x) \sqrt{2gx} = (T' - mg)\Delta t$$

利用二项式定理, 当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 有近似关系

$$\sqrt{2g(x + \Delta x)} = \sqrt{2gx} \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{1/2} \approx \sqrt{2gx} \left(1 + \frac{\Delta x}{2x}\right)$$

代入上式, 略去二级小量(即含有 $(\Delta x)^2$ 的项), 得

$$\frac{m}{4l} \sqrt{2gx} \left(\frac{l - 3x}{x}\right) \Delta x = (T' + mg)\Delta t$$

上式两边除以 Δt , 且有 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = v = \sqrt{2gx}$, 代入上式得

$$T' + mg = \frac{m}{4l} (l - 3x) \cdot 2g = \frac{mg}{2l} (l - 3x)$$

$$T' = -mg + \frac{mg}{2l} (l - 3x) = mg \left(-\frac{1}{2} - \frac{3x}{2l}\right)$$

所以得知 T' 方向向上, 绳索作用于支点上的力为

$$T = -T' = \frac{l + 3x}{2l} mg$$

方向向下.

解法二: 用质心运动定理求解

整条绳索的质心 x_c 可由左、右两部分绳的质心求得,

$$x_c = \frac{m_1 x_{c1} + m_2 x_{c2}}{m}$$

当 B 点下落 x 时, 上面各量如下:

$$\text{(左边)} m_1 = \frac{m}{l} \cdot \frac{l+x}{2}, x_{c1} = \frac{l+x}{4}$$

$$\text{(右边)} m_2 = \frac{m}{l} \cdot \frac{l-x}{2}, x_{c2} = x + \frac{l-x}{4}$$

代入上式, 得

$$x_c = \frac{\frac{m}{8l} (l+x)^2 + \frac{m}{2l} (l-x) \left(x + \frac{l-x}{4}\right)}{m} = \frac{l^2 + 2lx - x^2}{4l}$$

质心速度

$$v_c = \frac{dx_c}{dt} = \frac{dx_c}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{l-x}{2l} \cdot v = \frac{l-x}{2l} \sqrt{2gx}$$

质心加速度

$$\begin{aligned} a_c &= \frac{dv_c}{dt} = \frac{dv_c}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v \cdot \frac{dv_c}{dx} \\ &= \sqrt{2gx} \left(\frac{1}{2} \sqrt{2g} \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} - \frac{\sqrt{2g}}{2l} \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} g - \frac{3g}{2l} x \end{aligned}$$

由质心运动定理, 作用于绳上的力为重力 mg 和支点对绳的力 T'

$$mg + T' = ma_c$$

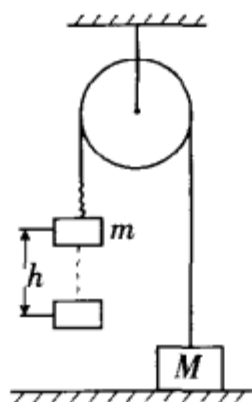
得 $T' = -mg + ma_c = -mg\left(\frac{l+3x}{2l}\right)$ 方向向上,

所以, 绳索作用于支点的力为

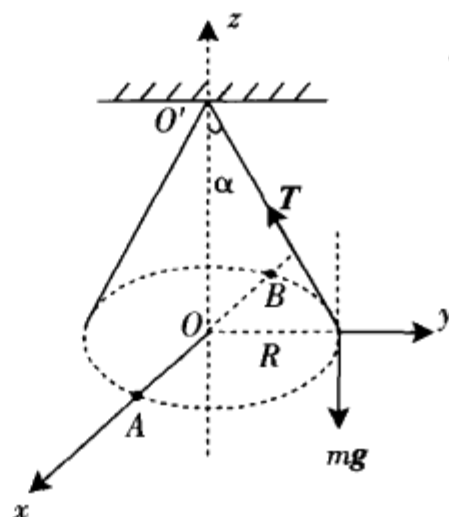
$$T = -T' = \frac{l+3x}{2l}mg \text{ 方向向下.}$$

本章习题

4.1 一绳跨过一定滑轮, 两端分别拴有质量为 m 和 M 的物体, 设 $M > m$, M 静止在桌面上, 开始时抬高 m , 使绳处于松弛状态, 如图所示: 然后放手使 m 自由落下, 当 m 下落距离为 h 时, 绳正好被拉紧, 试求 M 所能上升的最大高度. [提示]



图习 4.1

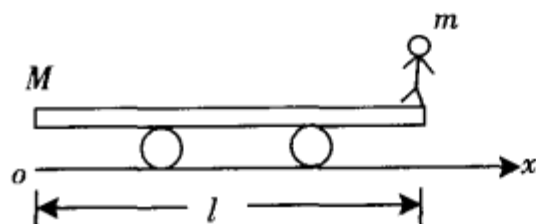


图习 4.2

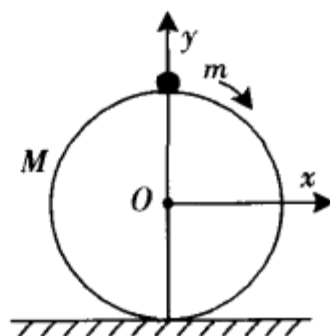
4.2 质量为 m 的小球通过细绳悬挂于固定点 O' 上, 小球从速率 v 在水平面上作匀速圆周运动, 细绳与竖直线的夹角为 α , 如图所示, 求小球从图中 A 点运动到 B 点的过程中绳子张力的冲量.

4.3 水平光滑铁轨上有一小车, 长为 l , 质量为 M , 车的一端站有一人, 质量为 m , 人和小车原来都静止不动, 现人从车的一端走到另一端, 问人和车各移动了多少距离?

4.4 一半径为 R 的光滑球, 质量为 M , 静止放在光滑的水平桌面上, 在球的顶点上有一质量为 m 的质点, m 沿 M 球下滑, 开始时速度非常小, 可略去不计, 求 m 离开 M 以前的轨迹. (图习 4.4) [提示]



图习 4.3



图习 4.4

4.5 两只小船平行逆向航行, 航线邻近, 当它的头尾相齐时, 由每一只船上各投质量为 $m = 50\text{kg}$ 的麻袋到对面一只船上去, 结果载重较小的一只船停下来了, 另一只船则以 $v = 8.5\text{m/s}$ 的速度向原方向航行. 设两只小船及船上装载的质量各为 $m_1 = 500\text{kg}$ 和 $m_2 = 1000\text{kg}$, 问在交换麻袋前两只船的速率各为多大? (水的阻力可略去不计) [提示]

4.6 一堵自由竖立的墙, 高为 h , 厚为 d , 由密度为 ρ_1 的砖砌成, 静止于粗糙的地板上, 风垂直于

墙面吹来,风中空气的密度为 ρ_2 .

(1)假定当风到达墙面上时便停止下来,求墙正好被风吹倒时的风速 v ;

(2)若 $\rho_1 = 3 \times 10^3 \text{kg/m}^3$, $\rho_2 = 1.25 \text{kg/m}^3$, $h = 2 \text{m}$, $d = 0.1 \text{m}$,求 v 的临界值,并求墙翻倒而不滑动时地板与墙之间的摩擦系数的最小值.[提示]

4.7 有 N 个人站在铁路上的静止的平板车上,每人的质量为 m ,平板车的质量为 M . 他们以相对于平板车的速度 u 跳离平板车的一端,平板车无摩擦地沿相反的方向滑动.

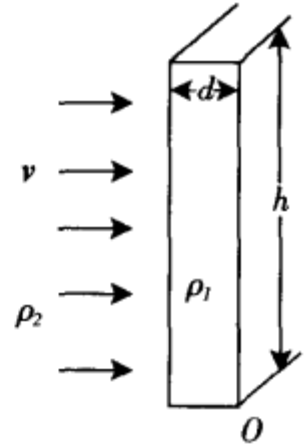
(1)若所有的人同时跳车,平板车的最终速度是多少?

(2)若他们一个一个地跳离,平板车的最终速度又是多少?

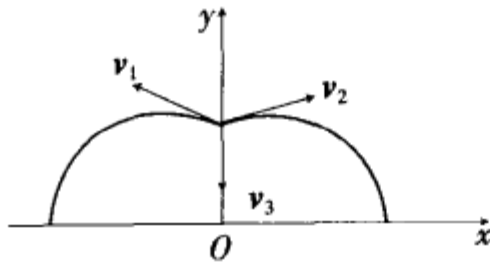
(3)情况(1)和(2)中哪一种的最终速度大些?[提示]

4.8 圆环放在光滑水平面上,有一甲虫的质量与环相等,沿环爬行,它相对于环的角速度为 ω_0 问圆环和甲虫如何运动,当甲虫在环上爬行一圈时,环相对于环心的角位移为多少?[提示]

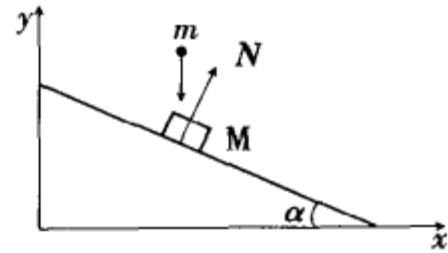
4.9 竖直向上飞行的炮弹在上升的最高点爆炸成三块相同的碎片,三块碎片速度方向互成夹角 120° 且都在竖直平面内,其中一块碎片沿竖直向下方向,经过时间 T_1 落地,另外两块碎片经过时间 T_2 同时落地,如图所示. 试求炮弹爆炸时所在高度 H .[提示]



图习 4.6



图习 4.9

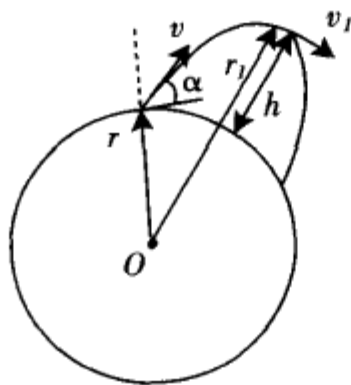


图习 4.10

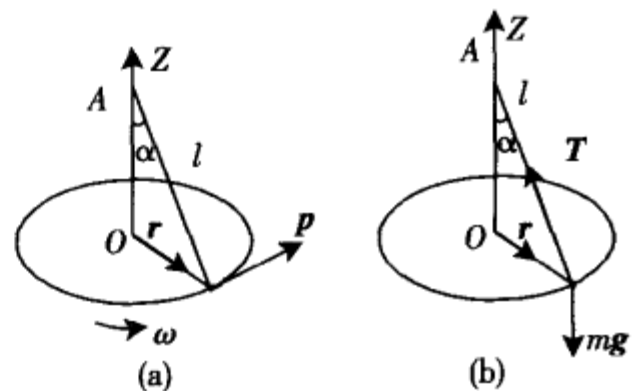
4.10 质量 $M = 12 \text{kg}$ 的砂箱沿冰封的小山往上滑,小山与水平面成角度 $\alpha = 30^\circ$,在山脚下,箱具有初速度 $v_0 = 3 \text{m/s}$,当箱滑路程 $l = 0.4 \text{m}$ 时,一只铁球竖直掉下来落在箱内,箱立即停下来. 试问球是从多高处落下来? 已知球的初速度为零,球的质量 $m = 3 \text{kg}$.

4.11 如图所示,设一质量为 m 的火箭(1)以初速率 v 和发射角 α 离开地面;(2)在离地面 h 处以速度 v_1 到达远地点. 试分别计算这两种情况火箭对地心的角动量的值.

4.12 一质量为 m 的小球悬挂在长为 l 的轻绳的一端,绳的另一端固定于 A 点,设小球以角速度 ω 在水平面内作匀速圆周运动,悬线与铅垂线的夹角是 α ,试分析小球对于圆心 O 的角动量和所受的合外力矩.(图习 4.12)



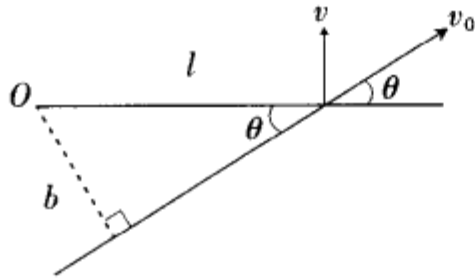
图习 4.11



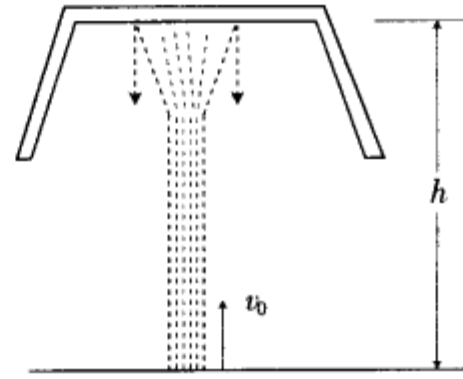
图习 4.12

4.13 在光滑的水平桌面上,用一根长为 l 的绳子把一质量为 m 的质点联结到一固定点 O ,如图所示,起初,绳子是松弛的,质点以恒定速率 v_0 沿一直线运动. 质点与 O 最接近的距离为 b ,当此质点

与 O 的距离达到 l 时,绳就绷紧了,进入一个以 O 为中心的圆形轨道,当质点作匀速圆周运动以后的某个时刻,绳子突然断了,它将如何运动? 绳断后质点对 O 的角动量如何变化? [提示]



图习 4.13

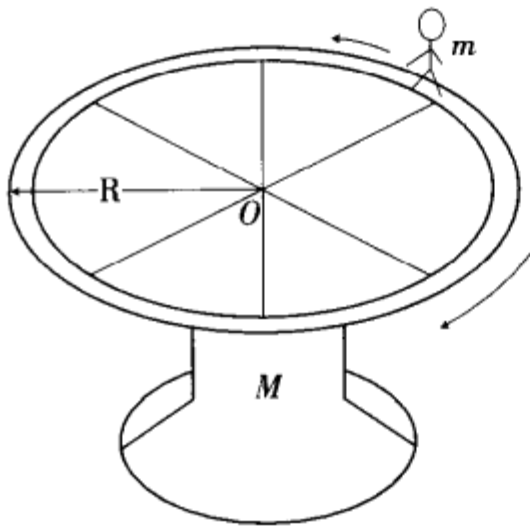


图习 4.14

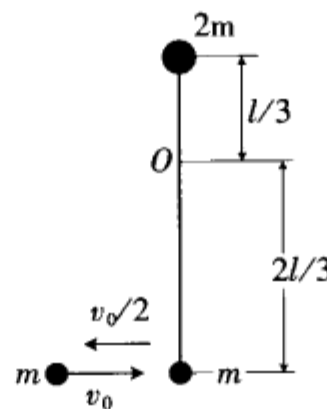
4.14 由喷泉中喷出的竖直水柱,把一个质量为 M 的木桶倒顶在空中,若水以恒定的速率 v_0 从面积为 S 的小孔中喷出,射向天空,在冲击木桶后以原速竖直流下,求木桶停留的高度 h (图习 4.14) [提示]

***4.15** 质量为 M ,半径为 R 的均匀水平圆环用轻杆和中心轴相连,如图所示,圆环可绕中心轴(光滑)转动,圆环上有一质量为 m 的人,起初人和圆环均静止.若人沿环边缘相对圆环行走一圈,求人相对地面转过的角度.

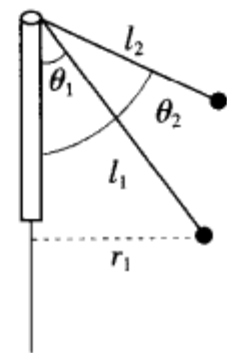
***4.16** 如图所示,长为 l 的轻杆,两端各固定质量分别为 m 和 $2m$ 的小球,杆可绕水平光滑轴 O 在竖直平面内转动,转轴 O 距两端分别为 $l/3$ 和 $2l/3$. 原来杆静止在竖直位置.今有另一质量为 m 的小球,以水平速度 v_0 与杆下端小球 m 作对心碰撞,碰后以 $v_0/2$ 的速度返回,试求碰撞后轻杆所获得的角速度 ω . [提示]



图习 4.15



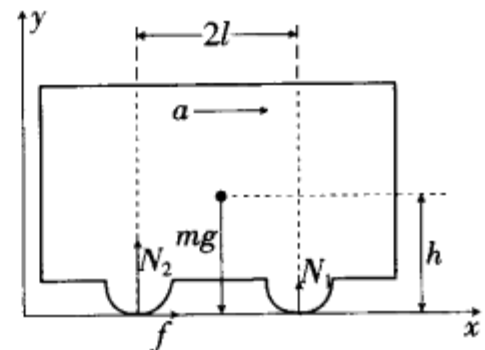
图习 4.16



图习 4.17

***4.17** 如图所示,圆锥摆的中央支柱是一个中空的管子,系摆锤的线穿过它,我们可以将它逐渐拉短,设摆长为 l_1 时摆锤的线速度是 v_1 ,摆线与竖直方向的夹角是 θ_1 ,将摆长拉到 l_2 时,摆线与竖直方向的夹角是 θ_2 ,试求摆锤的线速度 v_2 是多少? [提示]

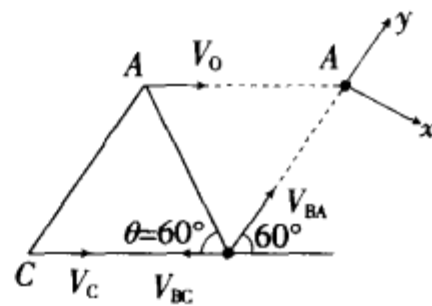
***4.18** 汽车质量为 m ,前后轮相距 $2l$,质心在前、后轮中点,离地高度为 h ,如图所示.汽车是后轮传动的,开动引擎使汽车获得加速度 a .问地面与后轮的摩擦系数 μ 最小多少,才得以避免打滑,可略去前轮所受摩擦力以及机件各部分的摩擦. [提示]



图习 4.18

4.19 如图所示,三个质量分别为 $3m, 2m, m$ 的小球 $A, B,$

C由两根长度相等的细绳相连,放置在光滑水平面上,三个小球正好位于正三角形的三个顶点位置,细绳正好拉直.现小球A以速度 v_0 沿平行于BC的方向运动,求细绳刚拉紧时小球C的速度.[提示]



图习 4.19

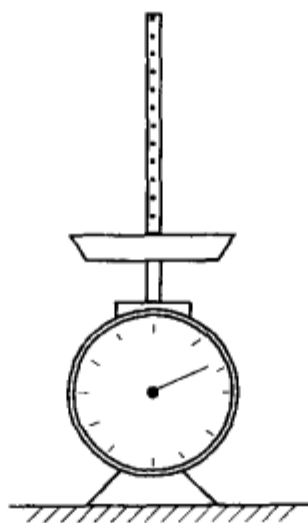
*4.20 一颗小行星绕着一恒星做圆周运动,这颗恒星各向同性地辐射能量,因此它的质量缓慢减小.已知恒星质量为 M_1 时行星的轨道半径为 r_1 ,试求恒星质量变为 M_2 时行星的轨道半径和它绕恒星转动的角速度.[提示]

*4.21 二级火箭每一级都是靠向后喷射气体来推进的,设气体相对于火箭的速率为 u ,火箭在一自由场中从静止开始发动,当充满燃料时,两级火箭的质量为 M_1 和 M_2 ,不充燃料时,质量为 m_1 和 m_2 .在第二级火箭点火之前,第一级空的火箭(质量 m_1)脱离火箭主体.

- (1)求空的第二级火箭的最后速度;
- (2)证明这一速度比下述单级火箭所能达到的速度快

$u \ln [M_2(m_1 + m_2) / m_2(m_1 + M_2)]$;单级火箭充满燃料时,质量为 $M_1 + M_2$;空时质量为 $m_1 + m_2$. [提示]

*4.22 如图所示,质量为 M ,长度为 l 的链条,铅直地悬挂在磅秤上,下端恰好触及秤盘,放松链条,使其落在秤盘上,当链条中长度为 $(l - x)$ 的一段已经落下时,磅秤的读数是多少?(每一环的尺寸可以忽略)[提示]



图习 4.22

功与能

§ 5.1 功和功率

改变质点的运动状态需要有力的作用,还需要经历一个过程,力的作用在时间上的累积表现为冲量,而力的作用在空间上的累积则表现为功。

设质点在恒力 F 作用下沿一直线运动,位移为 Δr ,力 F 的方向与质点的位移方向成 θ 角,则力在质点位移方向上的分量和质点位移的乘积就定义为功,如图 5.1-1 所示,用 W 表示功

$$W = F \cos \theta \cdot |\Delta r|$$

功也可以表示为力与质点位移的标积

$$W = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r} \quad (5.1-1)$$

由于在质点位移方向的分力只改变其速度的大小,所以对物体做功只与物体速度的大小变化相联系。

功是标量,没有方向,但有正负,当 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 时, $W > 0$,力 F 对质点作正功,当 $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$ 时,力 F 对质点作负功,或者说质点反抗外力作了功,当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时,该力对质点不做功。例如系着小球作圆周运动的绳中的张力对小球不做功。

若质点在变力作用下沿曲线运动,如图 5.1-2 所示,我们可以把质点的运动轨道分成许多小段,使每一小段都非常短,可近似看成是直线,同时满足每小段上质点所受的作用力可看成是恒力,则在任一小段位移 Δr_i 上,力对质点所作的元功可表示为

$$\Delta W_i = \mathbf{F}_i \cdot \Delta \mathbf{r}_i$$

质点从 a 点沿曲线移动到 b 点的过程中,力对质点所作的功等于该过程中所有元功的总和,即

$$W = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \Delta \mathbf{r}_i$$

上式在 $|\Delta r_i| \rightarrow 0$ 的极限情况下可写成积分的形式

$$W = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (5.1-2)$$

当质点受到几个力 F_1, F_2, \dots, F_n 共同作用时,力对质点所作的功可写成合力的功或分力的功的代数和,即

$$W = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r} + \int_a^b \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r} + \dots + \int_a^b \mathbf{F}_n \cdot d\mathbf{r} \quad (5.1-3)$$

在直角坐标系中,元功可用下式计算

$$\begin{aligned} \Delta W_i &= (F_{ix}\mathbf{i} + F_{iy}\mathbf{j} + F_{iz}\mathbf{k}) \cdot (\Delta x\mathbf{i} + \Delta y\mathbf{j} + \Delta z\mathbf{k}) \\ &= F_{ix}\Delta x + F_{iy}\Delta y + F_{iz}\Delta z \end{aligned} \quad (5.1-4)$$

力在单位时间内所作的功称为功率,用符号 P 表示,若在 Δt 时间内力所作的功为 ΔW ,则

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \mathbf{F} \cdot \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

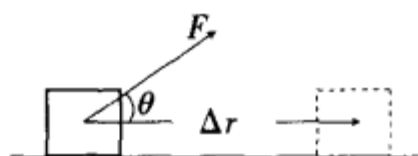


图 5.1-1 恒力做功

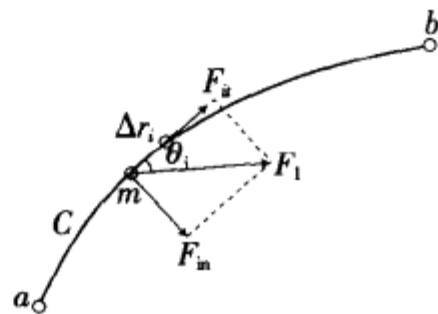


图 5.1-2 变力做功

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, 上式可表示为

$$P = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (5.1-5)$$

即作用力对质点做功的瞬时功率等于作用力与质点在该时刻速度的标积.

在国际单位制中, 功的单位称为焦耳, 符号为 J.

$$1 \text{ 焦耳} = 1 \text{ 牛顿} \cdot \text{米} \quad (1\text{J} = 1\text{N} \cdot \text{m})$$

功率的单位为瓦特, 符号为 W.

$$1 \text{ 瓦特} = 1 \text{ 焦/秒} \quad (1\text{W} = 1\text{J/s})$$

下面我们讨论质点在平面上绕固定轴 O 转动的情况, 如图 5.1-3 所示, 设力 F 和质点的位矢 r 都在纸平面内, 从 O 指向质点 P 的位矢 r 在力 F 的作用下转过一无限小的角度 $d\varphi$, 这时 P 点的位移 $d\mathbf{r}$ 与位矢 r 垂直, 大小为 $|d\mathbf{r}| = r d\varphi$, 因此, 力 F 所作的功为

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F |d\mathbf{r}| \cos\alpha = F(r d\varphi) \sin\theta$$

上式中 α 为 F 与 $d\mathbf{r}$ 间的夹角, θ 是 F 与 r 之间的夹角, 由于 $d\mathbf{r} \perp r$, 故 $\cos\alpha = \sin\theta$, 将上式改写为

$$dW = rF \sin\theta d\varphi = M d\varphi \quad (5.1-6)$$

上式中 M 为力 F 对转轴 O 的力矩. 上式适用于质点绕固定轴转动, 且力 F 与位矢 r , 位移 $d\mathbf{r}$ 都在同一个平面内的情况.

力矩在单位时间内的功称为功率

$$P = \frac{dW}{dt} = M \frac{d\varphi}{dt} = M\omega \quad (5.1-7)$$

上式中 ω 为质点绕固定轴转动的角速度.

从形式上看, $dW = M d\varphi$ 与 $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ 相对应, $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ 与 $P = M\omega$ 相对应, 即力 F 与力矩对应, 位移与角位移对应, 速度与角速度对应. 我们只讨论绕固定轴的转动, 因此 M, ω 都写成标量形式, 相当于一维的情况.

§ 5.2 几种力的功 势能

由功的计算式 $W = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ 可知, 一般情况下力所作的功不仅与力 F 和物体的初、末位置 a, b 有关, 而且与物体所经过的路径有关, 但在分析了各种力做功的情况后发现, 有些力的功只与物体的初、末位置有关, 而与物体所经过的实际路径无关, 具有这种性质的力称为保守力, 不具备这种性质的力称非保守力. 下面我们分析几种力做功的性质.

1. 弹性力的功

如图 5.2-1 所示, 把弹簧一端固定, 另一端连接质量为 m 的物体, 放在光滑水平面上, 取物体的平衡位置为 x 轴的原点, 将弹簧拉长或压缩, 当物体处于位置 x 时, 弹簧的弹性力的大小为

$$F = -kx$$

如图 5.2-2 所示, 直线 OE 即表示 $F = -kx$, 为计算这一变力的功, 我们把 Ox 分成 n 个等份, 取 n 足够大, 即 $\Delta x_i \rightarrow 0$, 此时每一段微小的位移过程中的弹性力 F_i 可近似看

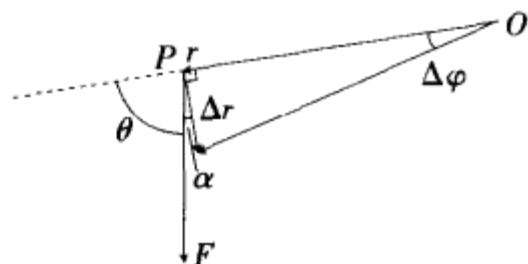


图 5.1-3 力矩的功

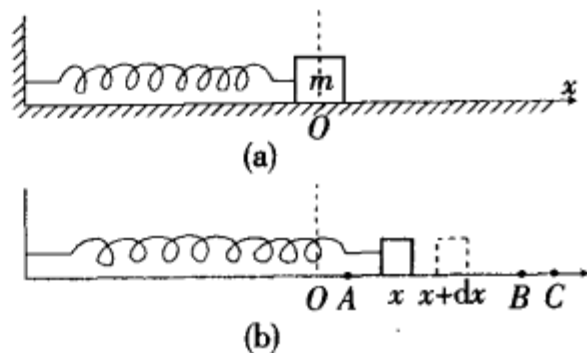


图 5.2-1 弹性力

作恒力. 弹性力 F_i 在 Δx_i 的位移过程中对物体所作的功为

$$\Delta W_i = F_i \Delta x_i$$

它对应于图 5.2-2 中 Δx_i 上细长矩形的面积(阴影部分). 将 n 段位移上的功相加, 并令 $n \rightarrow \infty$, 即 $\Delta x_i \rightarrow 0$, 则有

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n F_i \Delta x_i = \int_0^x F dx$$

此即弹性力在整个过程(物体从 $x=0$ 到 x)中所做的总功, 它等于图中三角形 Ox_E 的面积之负值, 因而有

$$W = -\frac{1}{2} kx \cdot x = -\frac{1}{2} kx^2$$

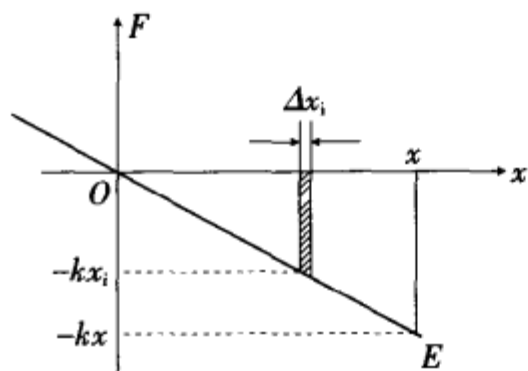


图 5.2-2 弹力的元功

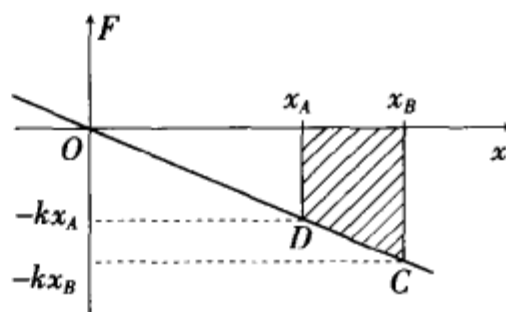


图 5.2-3 弹力的功

同理, 当物体由 A 点移动到 B 点的过程中弹性力所作的功就应该是图 5.2-3 中的梯形 $x_A x_B CD$ 的面积之负值

$$\begin{aligned} W &= -\frac{1}{2} (kx_A + kx_B) \cdot (x_B - x_A) \\ &= \frac{1}{2} kx_A^2 - \frac{1}{2} kx_B^2 \end{aligned} \quad (5.2-1)$$

上式中 x_A, x_B 分别表示 A, B 两点位置的坐标. 此结果表明, 弹性力的功与物体始、末位置有关, 与具体路径无关.

2. 重力的功

质量为 m 的物体在重力场中沿任一曲线从 A 点移动到 B 点, 如图 5.2-4 所示. 在任一小段位移 Δr_i 中, 重力的元功为

$$\begin{aligned} \Delta W_i &= m g \cdot \Delta r_i \\ &= -mgj \cdot (\Delta x_i i + \Delta y_i j + \Delta z_i k) \\ &= -mg \cdot \Delta y_i \end{aligned}$$

在整个过程中, 重力的功为

$$W = \sum_i \Delta W_i = -mg \sum_i \Delta y_i = mg(y_A - y_B) \quad (5.2-2)$$

重力所作的功也只与始、末两点的位置有关, 与所经过的路径无关.

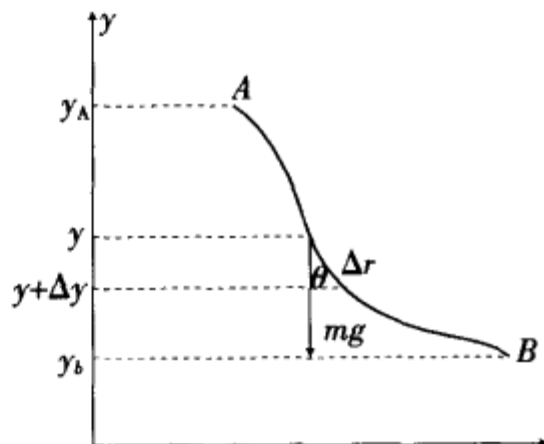


图 5.2-4 重力的功

3. 万有引力的功

设有两个质量分别为 M 和 m 的质点, M 静止不动, m 在万有引力作用下沿直线从 A 点运动到 B 点, 如图 5.2-5 所示, 为了计算此过程中万有引力所作的功, 我们把 AB 分

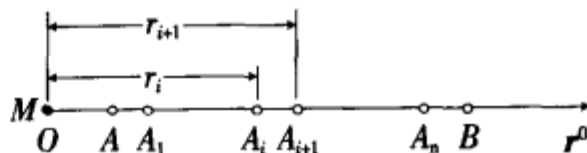


图 5.2-5 万有引力的功

成许多足够小的小段 $AA_1, AA_2, \dots, A_i A_{i+1}, \dots, A_n B$, 并令 $OA = r_A, OA_1 = r_1, OA_2 = r_2 \dots OA_i = r_i \dots OB = r_B$, 其中 O 即 M 质点的位置. 当 m 位于 $A, A_1, \dots, A_i, \dots, B$ 各点时, 受到 M 的万有引力依次是 $-G \frac{Mm}{r_A^2} \mathbf{r}^0, -G \frac{Mm}{r_1^2} \mathbf{r}^0, \dots, -G \frac{Mm}{r_i^2} \mathbf{r}^0, \dots, -G \frac{Mm}{r_B^2} \mathbf{r}^0$, m 从 A_i 到 A_{i+1} 的过程中, 万有引力的平均值近似为 $-G \frac{Mm}{r_i r_{i+1}} \mathbf{r}^0$, 位移为 $\Delta r_i = r_{i+1} - r_i$, 所以在这一小段位移上万有引力的功为

$$\Delta W_i = -G \frac{Mm}{r_i r_{i+1}} (r_{i+1} - r_i) = -GMm \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_{i+1}} \right)$$

同理, m 从 A 到 A_1 , 从 A_1 到 $A_2 \dots$, 从 A_n 到 B , 万有引力的功依次是

$$\begin{aligned} \Delta W_{AA_1} &= -GMm \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_{A_1}} \right) \\ \Delta W_{A_1 A_2} &= -GMm \left(\frac{1}{r_{A_1}} - \frac{1}{r_{A_2}} \right) \\ &\dots\dots \\ \Delta W_{A_{n-1} A_n} &= -GMm \left(\frac{1}{r_{A_{n-1}}} - \frac{1}{r_{A_n}} \right) \\ \Delta W_{A_n B} &= -GMm \left(\frac{1}{r_{A_n}} - \frac{1}{r_B} \right) \end{aligned}$$

将方程组相加, 得到整个过程中万有引力的功 W

$$\begin{aligned} W &= \Delta W_{AA_1} + \Delta W_{A_1 A_2} + \dots + \Delta W_{A_n B} = -GMm \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_{A_1}} + \frac{1}{r_{A_1}} - \frac{1}{r_{A_2}} + \dots + \frac{1}{r_{A_{n-1}}} - \frac{1}{r_{A_n}} + \frac{1}{r_{A_n}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{r_B} \right) \\ &= -GMm \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) \end{aligned} \quad (5.2-3)$$

由上式可见, 万有引力的功只与 G, M, m 和质点 m 的初始和终态位置有关, 与 A 到 B 点的具体路径无关.

对万有引力的功的结论, 可以推广到一般的各向同性的有心力, 即力的方向沿质点与力心(取为原点)的连线, 大小只与质点与力心的距离有关的力.

从以上讨论可知, 弹性力、重力和万有引力(包括有心力)都是保守力. 用数学形式表示为

$$\int_{L_1(A \rightarrow B)} \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{r} = \int_{L_2(A \rightarrow B)} \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{r} \quad (5.2-4)$$

上式中 \mathbf{F}_c 表示保守力, L_1, L_2 是从初始位置 A 到终了位置 B 的任意两条曲线, 如图 5.2-6 所示. 若以 L'_2 表示 L_2 的反方向路径, 即从 B 到 A , 则 \mathbf{F}_c 沿 L'_2 所作的功为沿 L_2 的功的负值.

$$\int_{L'_2(B \rightarrow A)} \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{r} = - \int_{L_2(B \rightarrow A)} \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{r}$$

代入(5.2-4)式, 化为

$$\int_{L_1(A \rightarrow B)} \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{r} + \int_{L'_2(B \rightarrow A)} \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{r} = 0$$

即
$$\oint_L \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (5.2-5)$$

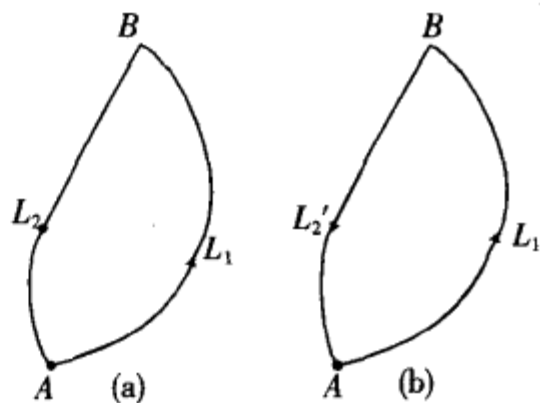


图 5.2-6 保守力

符号 \oint_L 代表沿任一闭合路径的曲线积分. (5.2-5) 式表明, 保守力沿任一闭合路径的线积分为零. 这是保守力的判据.

4. 摩擦力的功

设物体 m 在地面上由一点 A 移到另一点 B , m 与地面之间的滑动摩擦系数为 μ , 在运动过程中 m 受地面摩擦力为 $f = \mu mg$, 方向与位移 Δr_i 相反, 当 $\Delta r_i \rightarrow 0$ 时, 摩擦力所作元功为

$$\Delta W_i = -\mu mg |\Delta r_i| = -\mu mg \Delta s_i$$

Δs 为路径上的线元. 若物体沿路径 L_1 从 A 点到 B 点, 则摩擦力的功为(图 5.2-7)

$$W_1 = \sum_i \Delta W_i = -\mu m g \sum_i \Delta s_i = -\mu m g s_1 \quad (5.2-6)$$

式中 s_1 表示沿 L_1 从 A 到 B 点的路程, 同理, 若沿 L_2 从 A 到 B , 则有

$$W_2 = -\mu m g s_2 \quad (5.2-7)$$

s_2 是沿路径 L_2 从 A 到 B 的路程, 可见, 摩擦力做功不仅与始、末位置有关, 而且与所经过的路径有关. 路程愈长, 摩擦力所作的功越多, 因此摩擦力是非保守力.

下面我们讨论功和参照系的关系.

1. 一对内力的功之和与参照系无关.

设 m_1 和 m_2 两质点间的相互作用力分别为 f_1 和 f_2 , 在某参照系 S 中考察, 如图 5.2-8 所示. 两质点的位矢分别为 r_1 和 r_2 , 在内力作用下经过一段很短的时间, 位移分别为 Δr_1 和 Δr_2 , 这一对作用力和反作用力做功之和为

$$\Delta W = \Delta W_1 + \Delta W_2 = f_1 \cdot \Delta r_1 + f_2 \cdot \Delta r_2$$

设另有一参照系 S' , 相对于 S 系的速度为 v , 则在 Δt 时间内, m_1 和 m_2 相对于 S' 系的位移分别为

$$\Delta r_1' = \Delta r_1 - v \Delta t, \Delta r_2' = \Delta r_2 - v \Delta t$$

在 S' 系中一对作用力和反作用力做功之和为

$$\begin{aligned} \Delta W' &= \Delta W_1' + \Delta W_2' = f_1 \cdot \Delta r_1' + f_2 \cdot \Delta r_2' \\ &= f_1 \cdot (\Delta r_1 - v \Delta t) + f_2 \cdot (\Delta r_2 - v \Delta t) \end{aligned}$$

由牛顿第三定律 $f_1 = -f_2$, 代入上式, 得

$$\begin{aligned} \Delta W' &= f_1 \cdot \Delta r_1 + f_2 \cdot \Delta r_2 - (f_1 + f_2) v \cdot \Delta t \\ &= f_1 \cdot \Delta r_1 + f_2 \cdot \Delta r_2 = \Delta W \end{aligned} \quad (5.2-8)$$

上式表明, 在任何参照系中, 一对内力做功之和相同.

根据上面的结论, 计算一对内力做功的最简单方法是选取相对于其中一个质点为静止的参照系, 任何力对该质点的功一定为零, 只需要计算反作用力对另外一个质点的功就可以了.

2. 外力的总功与参照系有关.

设作用在两个质点上的外力分别为 F_1 和 F_2 , 力作用一段很短的时间后, 两质点的位移分别为 Δr_1 和 Δr_2 , 则两力所作的总功为

$$\Delta W = \Delta W_1 + \Delta W_2 = F_1 \cdot \Delta r_1 + F_2 \cdot \Delta r_2$$

设另有一 S' 系相对于上述参照系 S 以速度 v 运动, 则有

$$\Delta r_1 = \Delta r_1' + v \Delta t, \Delta r_2 = \Delta r_2' + v \Delta t$$

在 S' 系中外力的总功为

$$\begin{aligned} \Delta W' &= \Delta W_1' + \Delta W_2' = F_1 \cdot \Delta r_1' + F_2 \cdot \Delta r_2' \\ &= F_1 \cdot (\Delta r_1 - v \Delta t) + F_2 \cdot (\Delta r_2 - v \Delta t) \\ &= F_1 \cdot \Delta r_1 + F_2 \cdot \Delta r_2 - (F_1 + F_2) \cdot v \Delta t \\ &= \Delta W - (F_1 + F_2) \cdot v \Delta t \end{aligned} \quad (5.2-9)$$

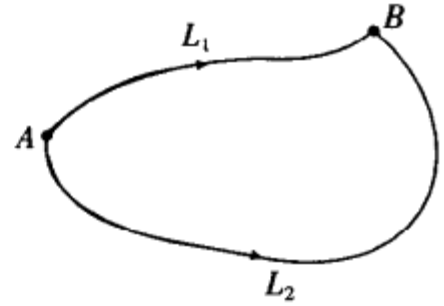


图 5.2-7 摩擦力的功

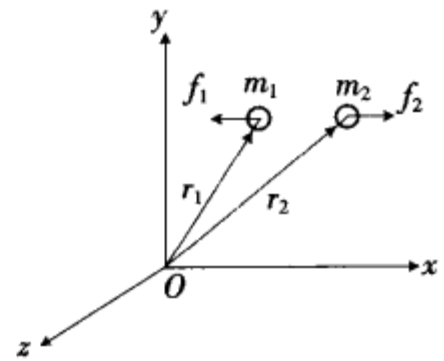


图 5.2-8 内力的功

可见 $\Delta W' \neq \Delta W$, 即外力的总功与参照系有关.

对于质点系, 我们还常将各质点的位矢写成质心位矢和相对于质心的位矢之和

$$r_i = r_c + r'_{ic}$$

对微过程, 位移为

$$\Delta r_i = \Delta r_c + \Delta r'_{ic}$$

式中 r_c 为质心位矢, r'_{ic} 为第 i 个质点相对质心的位矢.

在这微过程中, 外力对体系所作的总功为

$$\begin{aligned} \Delta W &= F_1 \cdot \Delta r_1 + F_2 \cdot \Delta r_2 + \cdots + F_i \cdot \Delta r_i + \cdots \\ &= \sum_i F_i \cdot \Delta r_i = \sum_i F_i \cdot (\Delta r_c + \Delta r'_{ic}) \\ &= (\sum_i F_i) \cdot \Delta r_c + \sum_i F_i \cdot \Delta r'_{ic} \end{aligned} \quad (5.2-10)$$

上式表明, 外力的总功等于外力矢量和对质心所作的功(上式右边第一项)与外力在质心系中对各质点所作的总功(上式右边第二项)之和.

例 5.2-1 证明重力对质点系所作的功等于合重力对体系质心所作的功.

解: 外力是重力时

$$F_i = m_i g$$

由(5.2-10)式

$$\begin{aligned} \Delta W &= (\sum_i F_i) \cdot \Delta r_c + \sum_i m_i g \cdot \Delta r'_{ic} \\ &= (M g) \cdot \Delta r_c + g \cdot \sum_i (m_i \Delta r'_{ic}) \\ &= M g \cdot \Delta r_c + g \cdot \sum_i (m_i \cdot v'_{ic} \cdot \Delta t) \end{aligned}$$

因为 $\sum_i m_i \cdot v'_{ic} = M v'_c = 0$

v'_c 即在质心系中体系的质心速度. M 为体系总质量, 代入上式

$$\Delta W = M g \cdot \Delta r_c$$

即重力对质点系所作的元功等于合重力对体系质心所作的元功, 当质点系在重力作用下运动时, 重

力的总功可用积分形式表达 $W = \int_a^b dW = \int_a^b M g \cdot d r_c$

由以上讨论可知, 各种不同保守力的功的具体形式虽然不同, 但都可以表示为某种仅与物体位置有关的标量函数在初始和终了位置的数值之差. 因此, 存在一个由系统内部质点之间的相对位置决定的状态函数, 称为势能, 并规定: 系统相对位置变化的过程中, 成对保守内力做功之和等于系统势能的减少量. 对于 M 和 m 组成的两质点体系, 计算成对保守内力的功时, 可选相对于 M 静止的参照系, 且以 M 为坐标原点, 这样, 只需要计算保守内力对 m 所做的功. 用 E_P 表示势能, 则

$$W = \int_a^b F_c \cdot dr = E_{Pa} - E_{Pb} \quad (5.2-11)$$

要选定一个位置作为势能的零点, 才能确定任一位置上体系的势能值. 例如, 当把(5.2-11)式中 b 点选为势能零点时, $E_{Pb} = 0$, m 在任意位置 a 处的势能为

$$E_{Pa} = \int_a^{\text{零势能点}} F_c \cdot dr \quad (5.2-12)$$

上式说明, m 在任一位置时, 体系的势能等于 m 从该位置沿任意路径移动到势能零点的过程中, 保守内力所做的功.

把(5.2-1)、(5.2-2)、(5.2-3)式与(5.2-12)式比较, 可得各种势能的表达式:

$$\text{弹性势能} \quad E_P = \frac{1}{2} kx^2 \quad (5.2-13)$$

上式中选弹簧自然伸长时弹簧振子的位置作为弹性势能的零点和坐标原点. x 为弹簧振子在任一时刻的坐标.

$$\text{重力势能} \quad E_P = mgh \quad (5.2-14)$$

上式中选地面为重力势能零点, h 为质点离地面的高度.

$$\text{引力势能} \quad E_p = -G \frac{m_1 m_2}{r} \quad (5.2-15)$$

上式中选两质点相距无穷远处为引力势能零点。

在两质点 M 和 m 的体系中,若选定 M 的位置作为坐标原点,则势能仅与 m 的坐标(x 或 r)有关,这时,表示势能与两质点相对位置关系的图形就称为势能曲线。重力、引力和弹性力的势能曲线如图 5.2-9a, 5.2-10a, 5.2-11a 所示。利用势能曲线可以求出相应的保守力。因为势能差是保守力对坐标(相对位置)的积分,因而保守力就是势能对坐标的导数

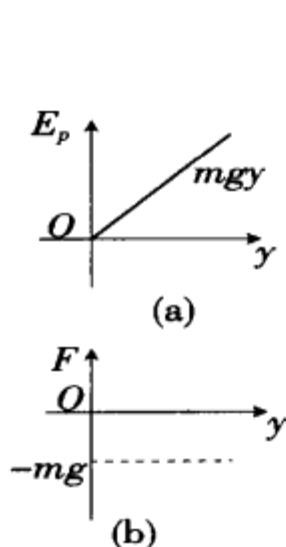


图 5.2-9 重力势能

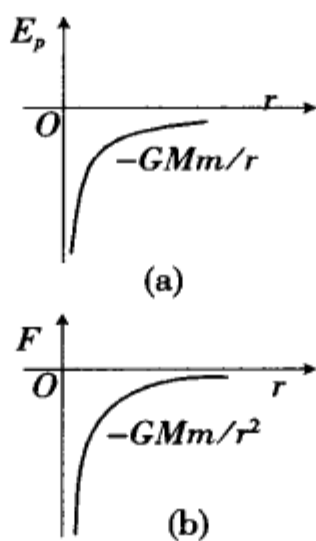


图 5.2-10 引力势能

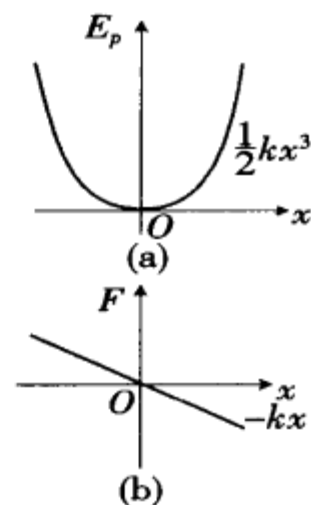


图 5.2-11 弹性势能

$$\begin{aligned} \Delta E_p &= E_p(x + \Delta x) - E_p(x) \\ &= - \int_x^{x+\Delta x} F(x) dx \\ &\approx -F(x) \Delta x \end{aligned}$$

$$\text{所以} \quad F(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{-\Delta E_p}{\Delta x} \right) = -\frac{dE_p}{dx} \quad (5.2-16)$$

即保守力是势能函数对坐标导数的负值。在势能曲线上,力就是曲线斜率的负值。与各势能曲线相应的保守力 $F(x)$ 画在各图的(b)部分。

利用势能曲线,我们还可以求体系的平衡位置及判断平衡的稳定性。

两质点的相互作用力为零的相对位置就是体系的平衡位置。所以,由(5.2-16)式可求得平衡位置,即由

$$\frac{dE_p}{dx} = 0$$

求得 x_0 , 在势能曲线图上,就是切线斜率为零的点。

平衡的稳定性,决定于当物体系偏离平衡位置时,它们所受的力的指向。若指向平衡位置,物体系就有回到平衡位置的趋势,平衡就是稳定的,称为稳定平衡,如图 5.2-12(a)所示,平衡位置对应于曲线的最低点。在数学上与 $\frac{d^2 E_p}{dx^2} > 0$ 相对应;图 5.2-12(b)所示为不稳定平衡的情况,平衡位置对应于

曲线的最高点,即与 $\frac{d^2 E_p}{dx^2} < 0$ 相对应;图 5.2-12(c)是随遇平衡的势能曲线,对应于 $\frac{d^2 E_p}{dx^2} = 0$ 。

曲线的最高点,即与 $\frac{d^2 E_p}{dx^2} < 0$ 相对应;图 5.2-12(c)是随遇平衡的势能曲线,对应于 $\frac{d^2 E_p}{dx^2} = 0$ 。

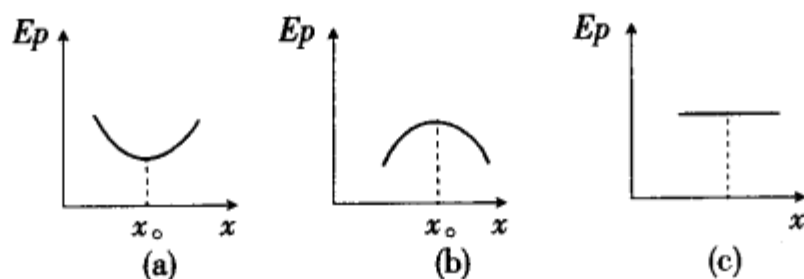


图 5.2-12 势能曲线形状与平衡性质的关系

例如,在氢原子中电子和原子核在静电吸引力作用下的势能曲线与图 5.2-10a 的形式相同. 双原子分子的势能曲线如图 5.2-13 所示,其势函数可表示为

$$E(r) = \frac{a}{r^m} - \frac{b}{r^n}$$

式中 r 为两原子之间的距离, a, b 均为大于零的常数. 上式中右边第二项相当于吸引力的势能, 第一项与第二项符号相反, 相当于斥力的势能, 在平衡位置 $r = r_0$ 处, $F = 0$, 势能曲线有一极小值. 对势能函数 $E(r)$ 求极值就可得到 r_0 的值, 即

$$\frac{dE(r)}{dr} = a(-m)r^{-(m+1)} - b(-n)r^{-(n+1)} = 0$$

得
$$r_0 = \sqrt[n-m]{\frac{ma}{nb}}$$

r_0 是平衡位置, 在这个位置上两原子之间的作用力 F 为零, 当 $r > r_0$ 时 $F < 0$, 说明这时吸引力起主要作用; 当 $r < r_0$ 时 $F > 0$, 说明这时斥力起主要作用. 因此, 无论两原子之间的距离是大于 r_0 或小于 r_0 , 两原子之间的作用力总是把它们推到平衡位置 r_0 .

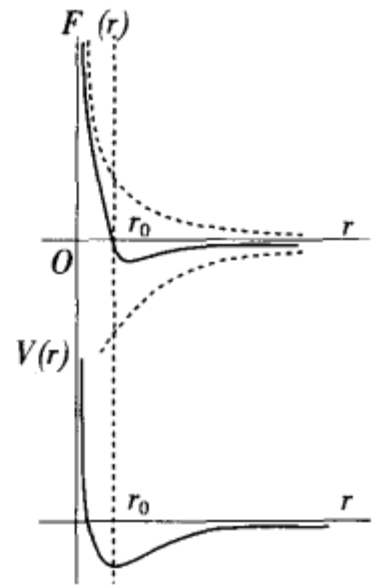


图 5.2-13 双原子分子的势能曲线

§ 5.3 动能和动能定理

设质点 m 受合力 F 作用沿曲线从 a 点移动到 b 点, 在此过程中合力做的功为

$$\begin{aligned} W &= \int dW = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r} = \int m v dv \\ &= \int m (v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z) \\ &= \frac{1}{2} m \int d(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \\ &= \frac{1}{2} m \int_{v_0^2}^{v^2} dv^2 \\ &= \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 \end{aligned} \quad (5.3-1)$$

上式中 $\frac{1}{2} m v^2$ 称为动能, 用 E_k 表示. 动能反映了运动物体做功的本领. 上式中 v_0 和 v 分别表示质点在合力作用的初始和终了时的速率, 因此(5.3-1)式表明: 合力对质点所作的功等于质点动能的增量. 这就是质点的动能定理, 可表达为

$$W = E_k - E_{k_0} = \Delta E_k \quad (5.3-2)$$

由于动能定理是在牛顿第二定律的基础上导出的, 因而只在惯性系中成立. 由前面 5.2 节的讨论, 我们知道功的数值与参照系有关, 而动能与速率有关, 所以也与参照系有关. 但在同一惯性系中, 功与动能之间的关系总能满足动能定理. 这就是力学相对性原理在质点的动能定理中的体现.

对于绕固定轴转动的质点组, 设质点组中某质元的质量为 m_i , 速率为 v_i , 则其动能为

$$E_{ik} = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

整个质点组的动能等于所有质点的动能之和, 即

$$\begin{aligned} E_K &= \sum_i E_{ik} \\ &= \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \end{aligned} \quad (5.3-3)$$

例 5.3-1 一物块质量为 m , 置于粗糙水平桌面上, 并系于橡皮绳的一端, 橡皮绳的另一端系于墙上, 如图 5.3-1 所示. 橡皮绳原长为 l , 当它拉伸时, 相当于倔强系数为 k 的弹簧. 物块与桌面的摩擦系数为 μ , 现将物块向右拉伸至橡皮绳长为 L 后再静止释放, 问物块撞击墙时的速度多大.

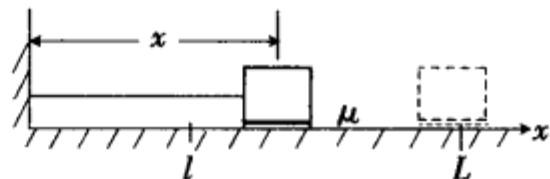


图 5.3-1

解:以墙为原点, 取 x 坐标向右为正. 作用于物块的力在水平方向上有弹性力和摩擦力. 弹性力只存在于物块从 L 到 l 的过程中, 摩擦力始终存在, 这两个力所作的功分别为

$$W_1 = \int_L^l -k(x-l)dx = \frac{1}{2}k(L-l)^2$$

$$W_2 = -\mu mgL$$

根据动能定理, 物块到达墙时的动能等于物块从释放位置至到达墙的运动过程中外力所作的功. 因此

$$\frac{1}{2}mv^2 = W_1 + W_2 = \frac{1}{2}k(L-l)^2 - \mu mgL$$

解得
$$v = \left[\frac{k}{m}(L-l)^2 - 2\mu gL \right]^{1/2}$$

例 5.3-2 质量为 M , 半径为 R 的匀质圆环形定滑轮可绕光滑的水平轴转动, 滑轮上绕有轻绳, 绳的一端挂着一质量为 m 的物体, 如图 5.3-2 所示. 物体由静止释放, 求物体下落 h 时的速度.

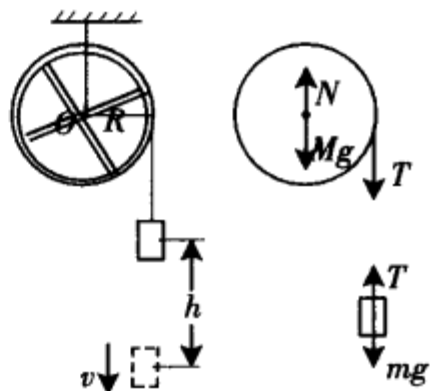


图 5.3-2

解:物体在运动过程中受重力和绳子张力的作用. 当物体下落 h 时, 合力的功为

$$W = (mg - T)h$$

根据动能定理

$$\frac{1}{2}mv^2 = W = (mg - T)h \quad (1)$$

滑轮受三个外力作用, 其中滑轮的重力和轴的支承力通过转轴, 对定轴转动的滑轮不做功, 只有绕在滑轮上的绳子张力对滑轮中心 O 的力矩 TR 对滑轮做功. 设滑轮边上任一小质元的质量为 m_i , 速度为 v_i

$$W = \int_0^\theta TRd\theta = \frac{1}{2} \sum_i (m_i v_i^2) = \frac{1}{2} MR^2 \omega^2 \quad (2)$$

式中 θ 为物体下落 h 时滑轮转过的角度. ω 为滑轮转动的角速度, 因绳与滑轮间无相对滑动, 故有:

$$v = \omega R, h = R\theta \quad (3)$$

解以上三式, 得

$$v = \sqrt{2gh \left(\frac{m}{m+M} \right)}$$

讨论: 若滑轮质量可忽略不计, 则 $v = \sqrt{2gh}$, 相当于物体自由下落, 这时有

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$$

重力势能全部转化为物体的动能.

§ 5.4 机械能守恒定律

在质点系中, 对其中的每一个质点都可应用动能定理,

$$W_i = E_{ik} - E_{ik0}$$

对整个质点系,则有

$$\sum_i W_i = \sum_i E_{ik} - \sum_i E_{ik0} = E_k - E_{k0} \quad (5.4-1)$$

上式中 $E_{k0} = \sum_i E_{ik0}$, $E_k = \sum_i E_{ik}$ 分别表示整个体系初态及末态所具有的总动能, $\sum_i W_i$ 表示作用在体系的每个质点上的所有力做功的代数和. 把这些功分类为: 所有外力的总功 $W_{外}$, 所有保守内力的总功 W' 和所有非保守内力的总功 $W_{非}$, 而保守内力所作的功应等于体系势能的减少量, 即

$$W' = E_{p0} - E_p$$

于是, (5.4-1) 式可写成

$$W_{外} + W_{非} = (E_k + E_p) - (E_{k0} + E_{p0}) = E - E_0 \quad (5.4-2)$$

上式中 $E_0 = E_{k0} + E_{p0}$, $E = E_k + E_p$ 分别表示体系初始状态和终了状态所具有的动能与势能之和, 体系所具有的动能与势能之和称为体系的机械能. 上式说明: 作用在体系上的所有外力的功与非保守内力的功的代数和等于体系总机械能的增量, 这称为功能原理.

根据功能原理, 当只有保守内力做功, 而外力和非保守内力的功为零时, 体系的机械能保持不变, 此即机械能守恒定律. 用数学式表达为:

$$\text{若 } W_{外} + W_{非} = 0, \text{ 则 } E = E_0 = \text{常量} \quad (5.4-3)$$

考察在任一给定的惯性系中, 有质量分别为 M 和 m 的两质点组成的孤立体系. 设两质点的位矢和速度分别为 \mathbf{R}, \mathbf{r} 和 \mathbf{V}, \mathbf{v} , 相互作用势能 $E_p = E_p(\mathbf{r} - \mathbf{R})$ 是两质点相对位置的函数, 该体系不受外力及非保守内力的作用, 机械能守恒, 即

$$\frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} mv^2 + E_p(\mathbf{r} - \mathbf{R}) = \text{常量} \quad (5.4-4)$$

当 $M \gg m$ 时, 质心几乎与大质量的质点 M 相重合, 由于孤立体系的质心相对于惯性系处于静止或匀速直线运动状态, 若以质心为参照系坐标原点, 在质心系中体系的机械能仍守恒, 在我们所选的质心系中, 质点 M 的 $\mathbf{V} \approx 0, \mathbf{R} \approx 0$, 于是体系的势能实际上仅由小质量质点 m 的位矢决定, (5.4-4) 式简化为

$$\frac{1}{2} mv^2 + E_p(\mathbf{r}) = \text{常量} \quad (5.4-5)$$

其中 \mathbf{r} 实际上是小质量的质点 m 相对于大质量的质点 M 的位矢, 于是, 质量悬殊的两质点体系的机械能守恒表现为小质量质点的动能与势能之和为恒量, 而作为体系的另一部分, 在守恒定律中并不显现. 例如物体在地球重力场中运动的机械能守恒定律

$$\frac{1}{2} mv^2 + mgh = \text{常量} \quad (5.4-6)$$

就属这种形式. 但是, 从意义上来说, 该机械能仍是物体与地球体系的机械能.

例 5.4-1 要使人造地球卫星在离地面高度为 h 处作匀速圆周运动, 需以多大的速度从地面发射? 要使物体脱离地球的引力范围, 至少需要以多大速度从地面发射?

解: 以地球和人造地球卫星作为体系, v_0 和 v 分别表示卫星从地面发射时的速率和在离地面 h 处作匀速圆周运动的速率, 并设体系和其他星体相距很远, 则体系不受外力作用, 也无非保守内力作用, 体系的机械能守恒.

$$\frac{1}{2} mv^2 + \left(-G \frac{Mm}{R+h} \right) = \frac{1}{2} mv_0^2 + \left(-G \frac{Mm}{R} \right) \quad (1)$$

万有引力是人造卫星作圆周运动的向心力, 因此

$$G \frac{Mm}{(R+h)^2} = m \frac{v^2}{R+h} \quad (2)$$

由②式得

$$\frac{GMm}{R+h} = mv^2$$

代入①式,解得

$$v_0 = \sqrt{GM \left(\frac{2}{R} - \frac{1}{R+h} \right)}$$

把 $\frac{GM}{R^2} = g$ 代入上式,得

$$v_0 = \sqrt{gR \left(2 - \frac{R}{R+h} \right)} \quad (3)$$

由③式知, h 越小,所需发射速度也越小,若在地球表面附近的人造卫星, $h \ll R$, 则上式为

$$v_0 \approx \sqrt{gR} = \sqrt{9.8 \times 6.37 \times 10^6} = 7.9 \times 10^3 (\text{m/s})$$

这发射速度称为第一宇宙速度,也称最小环绕速度。

若要物体离地球无限远,脱离地球引力范围,这时的引力势能为 $-\frac{GmM}{\infty} = 0$, 由机械能守恒定律

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} mv_0^2 + \left(-G \frac{Mm}{R} \right)$$

得

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R} + v^2} \quad (4)$$

因 $v \geq 0$, 所以

$$v_0 \geq \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2gR} = 11.2 \times 10^3 (\text{m/s})$$

这发射速度称为第二宇宙速度。由③式取 $h \rightarrow \infty$, 亦可得此结果。

例 5.4-2 如图所示,用劲度系数为 k 的弹簧将质量为 m_A 和 m_B 的物体连接,放在光滑的水平面上, m_A 紧靠墙,在 m_B 上施力将弹簧从原长压缩了 x_0 长度,当外力撤去后,试求:

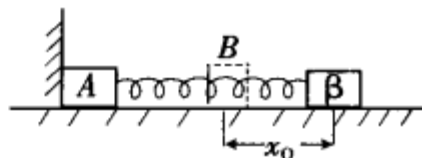


图 5.4-1

(1) 弹簧和 m_A 、 m_B 所组成的体系的质心加速度的最大值,

(2) 质心速度的最大值。

解:(1) 以弹簧自然伸长时 m_B 的位置为坐标原点,水平方向为 x 轴。从外力撤去到弹簧恢复原长的过程中, m_B 受到向右的弹性力 $F = -kx$, m_A 受到向左的弹性力 F' 和来自墙壁向右的正压力 N , 由于 m_A 静止, 所以

$$N - F' = 0, N = F' = -kx \quad (1)$$

在弹簧恢复原长前,整个体系所受外力就是 N , 所以质心加速度为

$$a_c = \frac{N}{m_A + m_B} = \frac{-kx}{m_A + m_B} \leq \frac{kx_0}{m_A + m_B}$$

上式中 x_0 为长度,是正值。最大质心加速度为

$$a_{c\max} = \frac{kx_0}{m_A + m_B} \quad (2)$$

(2) 外力 N 的作用点无位移,因此外力 N 不做功;水平面的支持力与位移垂直,也不做功,所以体系机械能守恒。当弹簧恢复到原长时,势能为零,体系动能最大,而 m_A 静止,所以 m_B 达到最大动能,

由机械能守恒定律

$$\frac{1}{2} kx_0^2 = \frac{1}{2} m_B v_B^2 \quad (4)$$

得

$$v_B = \sqrt{\frac{k}{m_B}} x_0 \quad (5)$$

此后体系在水平方向不受外力, $N = 0$, $a_c = 0$, 质心速度不变,因此质心的最大速度即 m_A 离开墙壁时的质心速度,满足

$$(m_A + m_B) v_{c\max} = m_B v_B + m_A v_A = m_B v_B \quad (6)$$

解得

$$v_{c\max} = \frac{m_B v_B}{m_A + m_B} = \frac{m_B}{m_A + m_B} \sqrt{\frac{k}{m_B}} x_0$$

$$= \frac{\sqrt{km_B}}{m_A + m_B} x_0$$

§ 5.5 碰撞

两物体在运动中相互靠近,或发生接触时,在较短的时间内发生较强的相互作用的过程称为碰撞.如打桩、质子受原子核的散射,陨星与地面的相撞等.一般情况下,由于碰撞时物体之间的相互作用力很大,外力往往可以忽略,因此可以认为体系的动量守恒,但对于质点与定轴转动的刚体之间的碰撞则不同,由于碰撞过程中刚体受到转轴处的冲力作用,动量不守恒.

碰撞过程中物体因相互作用而发生弹性形变,动能转变为弹性势能,若碰撞结束后物体能完全恢复原来的状态,则弹性势能又全部转变为动能,碰撞前后体系机械能保持不变,这类碰撞称为弹性碰撞.若碰撞后物体的形变不能完全恢复、有部分机械能转变为其他形式的能量,这类碰撞就称为非弹性碰撞.若物体碰撞后不再分开,以相同的速度共同运动(或静止),就称为完全非弹性碰撞.这类碰撞损失的机械能最大.下面就这三种情况分别进行讨论.

1. 弹性碰撞

以两个小球的弹性碰撞为例,为简单起见,设两球在碰撞前、后的速度都在两球的中心连线上,这种碰撞称为对心碰撞或正碰撞.用 v_{10} 、 v_{20} 分别表示两球在碰撞前的速度, v_1 和 v_2 分别表示两球碰撞后的速度, m_1 和 m_2 分别表示两球的质量,设两球在光滑的水平桌面上运动,体系水平方向的动量守恒,又由于是弹性碰撞,体系的动能守恒(此处不必考虑势能),选坐标轴沿物体的运动方向,则有:

$$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_1 v_1 + m_2 v_2 \quad (5.5-1)$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \quad (5.5-2)$$

式中速度的方向由其数值的正负来表示.求解以上两方程可得:

$$v_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_{10} + 2m_2 v_{20}}{m_1 + m_2} \quad (5.5-3)$$

$$v_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_{20} + 2m_1 v_{10}}{m_1 + m_2} \quad (5.5-4)$$

讨论:

(1)若 $m_1 = m_2$,则有 $v_1 = v_{20}$, $v_2 = v_{10}$,说明两个质量相同的物体发生弹性正碰撞时,碰撞后两个物体的速度(动量)互换.若再进一步有 $v_{20} = 0$,则碰撞后 $v_1 = 0$, $v_2 = v_{10}$,相当于 m_1 的动量全部转移到 m_2 上.

(2)若 $m_1 \gg m_2$, $v_{20} = 0$,则有 $v_1 \approx v_{10}$, $v_2 \approx 2v_{10}$,即质量很大的物体 m_1 以一定的速度 v_{10} 和一质量很小的静止物体 m_2 作弹性正碰时,碰撞后 m_1 的速度无显著改变,而 m_2 却几乎以 2 倍 v_{10} 的速度被弹开.

(3)若 $m_1 \ll m_2$,且 $v_{20} = 0$,则有 $v_1 \approx -v_{10}$, $v_2 \approx 0$,说明用小质量物体去碰撞大质量的静止物体时,小质量物体以约等于入射时的速率被反弹回来,而大质量的物体保持静止不动.

2. 完全非弹性碰撞

完全非弹性碰撞只有动量守恒式成立,设两球在碰撞后粘在一起以共同速度 V 运动,则有

$$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = (m_1 + m_2) V$$

解得

$$V = \frac{m_1 v_{10} + m_2 v_{20}}{m_1 + m_2} \quad (5.5-5)$$

碰撞前,两球的总动能为

$$E_{k0} = \frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2$$

碰撞后的总动能为

$$E_k = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2 = \frac{(m_1 v_{10} + m_2 v_{20})^2}{2(m_1 + m_2)}$$

在正碰撞情况下,碰撞过程中机械能的损失为

$$\Delta E = E_{k0} - E_k = \frac{m_1 m_2 (v_{10} - v_{20})^2}{2(m_1 + m_2)} \quad (5.5-6)$$

这部分机械能将转变为使物体产生永久形变所耗散的能量。

3. 非弹性碰撞

在非弹性碰撞中,两球相碰变形而不能完全恢复原状,一部分机械能将转变为其他形式的能量,机械能不守恒。牛顿总结了实验结果,得出碰撞定律:碰撞后两球的分离速度($v_2 - v_1$)与碰撞前两球的接近速度($v_{10} - v_{20}$)成正比,比值由两球的质料决定,即

$$e = \frac{v_2 - v_1}{v_{10} - v_{20}} \quad (5.5-7)$$

e 称为恢复系数。由上式可见,若 $e=0$, 则 $v_2 = v_1$, 这就是完全非弹性碰撞的情况;如果 $e=1$, 分离速度就等于接近速度,由(5.5-3), (5.5-4)式可以验证,这就是弹性碰撞的情况。对于一般碰撞 $0 < e < 1$, e 值可用实验测定,解(5.5-1)和(5.5-7)式,可得

$$v_1 = v_{10} - \frac{(1+e)m_2(v_{10} - v_{20})}{m_1 + m_2} \quad (5.5-8)$$

$$v_2 = v_{20} + \frac{(1+e)m_1(v_{10} - v_{20})}{m_1 + m_2} \quad (5.5-9)$$

用(5.5-8)和(5.5-9)式,可求出在非弹性碰撞中机械能的损失量为

$$\Delta E = \frac{1}{2} (1 - e^2) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_{10} - v_{20})^2 \quad (5.5-10)$$

例 5.5-1 一质量为 m_0 , 以速率 v_0 运动的粒子,碰到一质量为 $3m_0$ 的静止粒子,碰撞后质量为 m_0 的粒子偏转了 30° 并具有末速 $v_0/3$, 求质量为 $3m_0$ 的粒子偏转后的速率和方向,碰撞中动能守恒吗? (图 5.5-1)

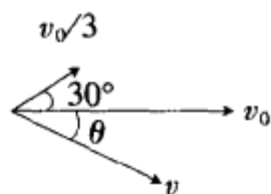


图 5.5-1

解:取质量为 m_0 的粒子碰撞前的运动方向为 x 轴,碰撞后具有末速为 $v_0/3$, 取 m_0 运动的平面为 xy 平面,则质量为 $3m_0$ 的粒子的运动也必在上述平面内,把动量守恒式分解为 x 和 y 方向的分量式,得

$$m_0 v_0 = m_0 \cdot \frac{v_0}{3} \cdot \cos 30^\circ + 3m_0 v \cos \theta \quad (1)$$

$$0 = m_0 \cdot \frac{v_0}{3} \sin 30^\circ - 3m_0 v \sin \theta \quad (2)$$

上式中 θ 是 $3m_0$ 粒子运动速度 v 与 x 轴的夹角,如图 5.5-1 所示。由①、②式解得

$$v = 0.24v_0, \theta = 13.2^\circ$$

末态动能为

$$E_k = \frac{1}{2} m_0 \cdot \left(\frac{v_0}{3}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot (3m_0) (0.24v_0)^2 = \frac{1}{2} m_0 v_0^2 \times 0.28 < \frac{1}{2} m_0 v_0^2$$

所以动能不守恒,是非弹性碰撞。

例 5.5-2 图 5.5-2 的冲击摆是一种测定子弹速率用的装置, A 是一个质量很大的沙箱,用两条平行的绳子将它悬挂在水平位置上,子弹沿水平方向射入沙箱,使沙箱摆动并升高一定的高度 h , 如果已知子弹和沙箱的质量分别为 m 和 M , 试从高度 h 求子弹的速率 v 。

解:子弹射入沙箱是完全非弹性碰撞过程,子弹在沙箱内遇到很大的阻力,很快和沙箱达到共同的速度 V ,这段过程经历的时间极短,虽然沙箱得到了速度,但实际上几乎还没来得及离开原来位置,因此这阶段重力和绳子张力的合力近似保持在铅垂方向,沙箱和子弹组成的体系在水平方向动量守恒,因此有

$$mv = (m + M)V \quad ①$$

碰撞过程结束后,体系像双线摆一样摆动,张力不做功,机械能守恒. 摆动到最高位置时,动能全部转换为势能:

$$\frac{1}{2}(m + M)V^2 = (m + M)gh \quad ②$$

由①、②两式得

$$v = \frac{m + M}{m} \sqrt{2gh}$$

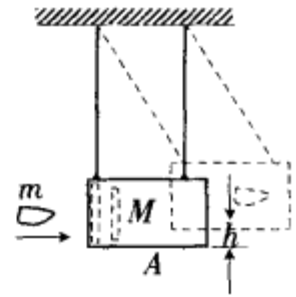


图 5.5-2 冲击摆

§ 5.6 开普勒定律

在太阳系中,所有行星的质量都比太阳的质量小得多,质量最大的木星也只有太阳质量的 9.5×10^{-4} 倍,因而行星在太阳的引力场中的运动可近似看成在以太阳为力心的有心力场中的运动. 在前人对太阳系行星轨道长期观察所积累的丰富资料的基础上,开普勒总结出行星运动所遵循的三条定律.

(1) 每个行星都各在以太阳为焦点的一个椭圆轨道上运动——轨道定律.

(2) 由太阳到行星的矢径,在相等的时间内扫过相等的面积——面积定律.

(3) 行星运动周期 T 的平方与其椭圆轨道半长轴 a 的立方之比为常量——周期定律. 即

$$T^2 = ka^3 \quad (5.6-1)$$

其中常量 k 对所有行星均相同.

第二定律是角动量守恒的直接结果,我们来证明一下. 如图 5.6-1 所示,设 O 为太阳中心,行星可看成是质点,在 dt 时间间隔内,质点从 P 点移动到 P' 点,质点的位矢从 r 转到 $r + dr$, r 扫过的面积是三角形 POP' , 这个三角形的面积 dS 等于 PP' (即 $|dr|$) 与从 O 到 PP' 的垂直距离 r_{\perp} 的乘积的 $\frac{1}{2}$, 即

$$dS = \frac{1}{2} r_{\perp} |dr| = \frac{1}{2} r_{\perp} |v| dt = \frac{1}{2} |r \times v| dt$$

因此,由太阳到行星的矢径 r 在单位时间内扫过的面积为

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} |r \times v|$$

行星相对于太阳 O 的角动量为

$$L = m(r \times v)$$

所以

$$r \times v = \frac{L}{m}$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} |r \times v| = \frac{|L|}{2m} = \frac{L}{2m} \quad (5.6-2)$$

因为行星只受太阳的万有引力作用,对 O 点不产生力矩,所以对 O 点的角动量守恒, $L =$ 恒量,因此 $\frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m}$ 也是恒量. 这就是开普勒第二定律.

由于位矢 r 在相同的时间内扫过的面积相同,所以当行星离太阳近时,行星位矢在单位时间内扫过的角度一定较大. 设行星离太阳的最远距离为 R_1 (此位置称为近日点), 离太阳的最远距离为 R_2 (此

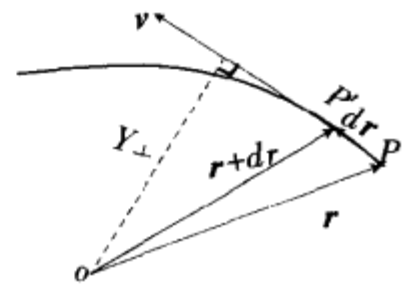


图 5.6-1 面积定律

位置称为远日点),由 $L = m(r \times v)$ 可知,在这两个位置上都是 $v \perp r$, 所以有

$$v_1 R_1 = v_2 R_2 \quad (5.6-3)$$

关于开普勒第三定律,我们近似把行星的轨道视为以太阳为中心的圆,设行星和太阳的质量分别为 m 和 M_S ,行星的轨道半径为 a ,速率为 v ,由牛顿运动定律和万有引力定律,有

$$G \frac{M_S m}{a^2} = m \frac{v^2}{a} \quad (1)$$

设行星运动的周期为 T ,则 $T = \frac{2\pi a}{v}$,和①式联立,得

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^2}{GM_S/a} = \frac{4\pi^2}{GM_S} a^3 = k a^3 \quad (2)$$

其中 $k = \frac{4\pi^2}{GM_S}$,是仅与太阳质量有关的常量.②式即为开普勒第三定律.

本章综合例题

例 5-1 如图所示,质量为 M ,宽度为 l 的木块静置于光滑水平台面上,质量为 m 的子弹以速度 v_0 水平地射入木块,以速度 v 自木块穿出,求从子弹进入木块到离开木块的整个过程中木块行进的距离 L ,设子弹在木块中受到的摩擦阻力为常量.

解:子弹和木块体系水平方向不受外力,动量在该方向守恒,有

$$mv_0 = MV + mv$$

得木块末速度为

$$V = \frac{m}{M}(v_0 - v) \quad (1)$$



图例 5-1

因为内力做功与参照系无关,故一对摩擦力的功之和只与子弹和木块的相对位移 l 有关,由体系的动能定理

$$-fl = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (2)$$

以①式代入②式,得摩擦力

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{l} \left[\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}M \cdot \frac{m^2}{M^2}(v_0 - v)^2 \right] \\ &= \frac{m}{2l} \left[v_0^2 - v^2 - \frac{m}{M}(v_0 - v)^2 \right] \end{aligned} \quad (3)$$

对木块用动能定理,摩擦力对木块作正功 fL .

$$fL = \frac{1}{2}MV^2 \quad (4)$$

以①,③式代入④式,求得

$$L = \frac{MV^2}{2f} = \frac{ml(v_0 - v)^2}{M(v_0^2 - v^2) - m(v_0 - v)^2}$$

例 5-2 一质量为 m 的人造地球卫星,在环绕地球的圆形轨道上飞行.轨道半径为 r_0 ,地球质量为 M_e .

(1)求卫星的总机械能.

(2)现假定卫星在地球大气的最上层运动,它在那里受到一恒定的微弱摩擦阻力 f 而减速,卫星将缓慢地沿一螺旋形轨道朝向地球飞行.因为摩擦力是微弱的,所以半径的变化非常缓慢.因此,我们可假定:在任一瞬间,卫星实际上是在一平均半径为 r 的圆轨道上,求卫星每旋转一周,它的半径的近似改变值 Δr .

(3)求每转一周卫星动能的近似变化值 ΔE_k .

解:(1)卫星在半径为 r_0 的圆周上运动,地球对它的引力是向心力,因此

$$GM_e m / r_0^2 = m v^2 / r_0$$

卫星的动能

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = GM_e m / 2 r_0$$

卫星的势能

$$E_p = -GM_e m / r_0$$

卫星总机械能

$$E = E_k + E_p = -GM_e m / 2 r_0$$

(2)根据功能原理,卫星机械能的变化量等于摩擦阻力 f 的功,在半径为 r 的圆周上,机械能为 $-GM_e m / 2r$. 因此有

$$\Delta E = \Delta(-GM_e m / 2r) = (GM_e m / 2r^2) \cdot \Delta r = -2\pi r f$$

得

$$\Delta r = \frac{-4\pi f r^3}{GM_e m}$$

负号表示半径减小.

(3)由(1)解得卫星在半径为 r 的圆周上的动能为 $E_k = \frac{1}{2} m v^2 = GM_e m / 2r$, 两边微分,得

$$\Delta E_k = m v \Delta v = (-GM_e m / 2r^2) \cdot \Delta r \quad \text{①}$$

又由动能定理知道卫星每转一圈动能的变化量等于引力和摩擦力所作的功:

$$\Delta E_k = m v \Delta v = (-GM_e m / r^2) \Delta r - 2\pi r f \quad \text{②}$$

由①②式得

$$\Delta E_k = m v \Delta v = 2m v \Delta v - 2\pi r f \quad \text{③}$$

卫星每转一圈,动能的近似变化值可由③式得

$$m v \Delta v = 2\pi r f \quad \text{所以 } \Delta E_k = 2\pi r f$$

讨论:设卫星每转一圈的时间为 Δt , 则 $v \Delta t = 2\pi r$. 由③式

$$m \frac{\Delta v}{\Delta t} = f$$

由上面的结果看到卫星速率的增加与运动阻力的大小成正比. 因为阻力把卫星轨道从圆变到朝里的螺旋线,阻力起了中介作用,使得引力对卫星作正功,这些功的一半用来增加卫星的动能,另一半用来克服摩擦阻力. 因此,卫星在阻力作用下势能减少而动能增加.

例 5-3 质量为 M 的圆环用细线(质量可略)悬挂着,将两个质量均为 m 的有孔小珠套在此环上,且可以在环上作无摩擦的滑动,如图例 5.3 所示,今同时将两个小珠从环的顶部释放,并沿相反方向自由滑下,试求:

(1)在圆环不动的条件下,悬线中的张力 T 随 $\cos\theta$ 变化的函数关系,并求出张力 T 的极小值及相应的角 θ .

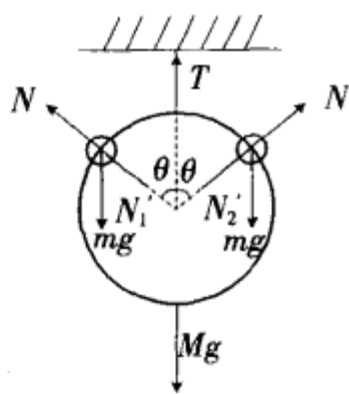
(2)小球与圆环的质置比 $\frac{m}{M}$ 至少为多大时圆环才有可能上升?

解:(1)圆环不动时,小珠作圆周运动,每个小珠受重力 mg 作用,方向向下,设圆环对它的正压力 N 沿半径向外,这两力提供小珠所需的向心力,小珠在 θ 角处有

$$mg \cos\theta - N = \frac{m v^2}{R} \quad \text{①}$$

小珠沿圆环运动过程中,小珠和地球组成的体系的机械能守恒,即

$$\frac{1}{2} m v^2 = mgR(1 - \cos\theta) \quad \text{②}$$



图例 5-3

上式取圆环中心为重力势能零点.

由①、②两式消去 v , 解得

$$N = (3\cos\theta - 2)mg \quad (3)$$

圆环受重力 Mg , 张力 T 以及两小珠的压力 N'_1 和 N'_2 , 其中

$$N'_1 = N'_2 = N \quad (4)$$

因圆环不动, 合力为零, 故有

$$T = 2N\cos\theta + Mg \quad (5)$$

把③式代入⑤式, 得

$$T = 2(3\cos\theta - 2)mg \cdot \cos\theta + Mg$$

即

$$T = Mg + 2mg(3\cos^2\theta - 2\cos\theta) \quad (6)$$

此即 T 和 $\cos\theta$ 的函数关系, 上式改写为

$$T = Mg + 6mg \left[\left(\cos\theta - \frac{1}{3} \right)^2 - \frac{1}{9} \right]$$

当 $\cos\theta - \frac{1}{3} = 0$ 时 T 有最小值 T_{\min}

$$T_{\min} = Mg - \frac{2}{3}mg$$

此时相应的角 θ 为

$$\theta = \arccos \frac{1}{3} = 70.5^\circ$$

(2) 由③式, 小珠给圆环的压力为

$$N = (3\cos\theta - 2)mg$$

当 $\cos\theta > \frac{2}{3}$ 时, $N > 0$, 为压力; 当 $\cos\theta < \frac{2}{3}$ 时, $N < 0$, 为拉力, 这是圆环上升的必要条件. 圆环上升

时 $T = 0$, 所受拉力和重力应满足 $-2N\cos\theta \geq Mg$, 即 $-2mg(3\cos\theta - 2)\cos\theta \geq Mg$

临界情况为

$$3\cos^2\theta - 2\cos\theta + \frac{M}{2m} = 0$$

上式有实根的条件为

$$4 - 4 \cdot 3 \cdot \frac{M}{2m} \geq 0$$

即

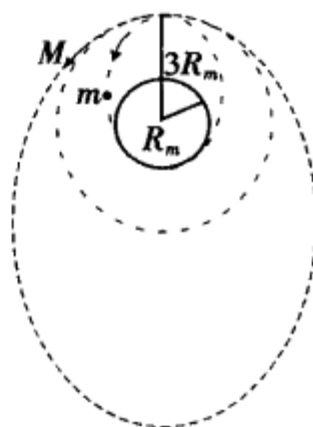
$$\frac{m}{M} \geq \frac{3}{2}$$

故 $\frac{m}{M}$ 至少为 $\frac{3}{2}$.

例 5-4 如图所示, 质量为 m 的登月器连接在质量为 $M (= 2m)$ 的航天飞机上一同绕月球作圆周运动, 其轨道半径是月球半径 R_m 的 3 倍. 某一时刻, 将登月器相对航天飞机向运动反方向射出, 登月器仍沿原方向运动, 并沿图示的椭圆轨道登上月球表面, 在月球表面逗留一段时间后, 经快速发动沿原椭圆轨道回到脱离点与航天飞机实现对接. 试求登月器在月球表面可逗留多长时间? 已知月球表面的重力加速度 $g_m = 1.62\text{m/s}^2$, 月球的半径 $R_m = 1.74 \times 10^6\text{m}$.

解: 设脱离前登月器与航天飞机一同绕月运动的速度为 v_0 , 向心力为月球的引力

$$\frac{GM_m(M+m)}{(3R_m)^2} = \frac{(M+m)v_0^2}{3R_m}$$



图例 5-4

得
$$v_0 = \sqrt{\frac{GM_m}{3R_m}}$$

式中 M_m 为月球的质量，两者绕月球运动的周期为

$$T_0 = \frac{2\pi(3R_m)}{v_0} = 6\pi R_m \sqrt{\frac{3R_m}{GM_m}} \quad (1)$$

月球表面的重力加速度为

$$g_m = \frac{GM_m}{R_m^2}$$

所以

$$\begin{aligned} T_0 &= 6\pi R_m \sqrt{\frac{3}{g_m R_m}} = 6\pi \sqrt{\frac{3R_m}{g_m}} \\ &= 6 \times 3.14 \times \sqrt{\frac{3 \times 1.74 \times 10^6}{1.62}} = 3.38 \times 10^4 (\text{s}) \approx 9.4 (\text{h}) \end{aligned}$$

设登月器与航天飞机脱离后两者的速度分别为 v_1 和 v_2 ，由动量守恒定律(两者在运动方向不受外力)

$$(M+m)v_0 = mv_1 + mv_2 \quad (2)$$

此后两者沿不同的椭圆轨道运动，登月器和月球体系不受外力作用，机械能守恒。设登月器运动到月球表面时的速度为 v'_1 ，由机械能守恒定律

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GM_m m}{3R_m} = \frac{1}{2}mv_1'^2 - \frac{GM_m m}{R_m} \quad (3)$$

登月器绕月球作椭圆运动时，相对于月球中心无力矩作用，角动量守恒，登月器的两个速度 v_1 和 v_1' 都正好与椭圆的长半轴相切，因此有 $L_1 = 3R_m v_1 m$ 、 $L_2 = R_m v_1' m$ ，两者相等，得

$$3v_1 = v_1' \quad (4)$$

由③、④两式解得

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM_m}{6R_m}} = \frac{1}{\sqrt{2}}v_0 \quad (5)$$

将⑤式代入②式，得

$$v_2 = v_0 + \frac{m}{M} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)v_0$$

因已知 $M=2m$ ，代入上式得

$$v_2 = \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)v_0 \quad (6)$$

设航天飞机运动到离月球最远处与月球的距离为 kR_m (k 为比例系数)，速度为 v'_2 ，同样可得类似于③、④式的方程：

$$\frac{1}{2}Mv_2^2 - \frac{GM_m M}{3R_m} = \frac{1}{2}Mv_2'^2 - \frac{GM_m M}{kR_m} \quad (7)$$

$$3R_m v_2 = kR_m v_2' \quad (8)$$

由⑦、⑧两式解得

$$k = \frac{3}{2\left(\frac{v_0}{v_2}\right)^2 - 1} = \frac{3}{2\left[\frac{1}{\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2} - 1\right]} \approx 5.75$$

所以航天飞机运动轨道的长半轴为

$$a_m = \frac{1}{2}(k+3)R_m \quad (9)$$

登月器和航天飞机对接处也是两者分离的地方,因而对接时航天飞机运行时间为 nT_M ,而登月器登上月球运行了半周期,从月球飞出到对接点又运行半周期,共一个周期.因此登月器可在月球上逗留的时间为

$$\Delta t = nT_M - T_m \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \textcircled{10}$$

式中 T_M 与 T_m 分别为航天飞机与登月器的运行周期.

由开普勒第三定律

$$\frac{T_M}{T_0} = \left(\frac{a}{3R_m}\right)^{\frac{3}{2}} = \left[\frac{\frac{1}{2}(k+3)R_m}{3R_m}\right]^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{k+3}{6}\right)^{\frac{3}{2}} \approx 1.76$$

$$\frac{T_m}{T_0} = \left[\frac{\frac{1}{2}(3R_m + R_m)}{3R_m}\right]^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \approx 0.54$$

得 $T_M = 1.76T_0$ $T_m = 0.54T_0$

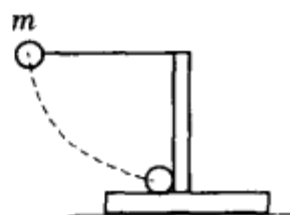
代入⑩式,

$$\Delta t = n \times 1.76T_0 - 0.54T_0 = (1.76n - 0.54)T_0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

最短的逗留时间为 $n = 1$

$$\Delta t = 1.22T_0 = 1.22 \times 9.4 = 11.5(\text{h})$$

例 5-5 一质量为 m 的黏性小球,用长为 l 的细绳挂在一与木块固定在一起的小立柱上,如图 5-5a 所示,木块和立柱的总质量为 M ,放在水平桌面上,木块与桌面间的摩擦系数为 μ .今把小球拉到水平位置后由静止释放,与小立柱发生完全非弹性碰撞.



图例 5-5a

(1) 设小球在下摆过程中木块不移动,求碰撞后小球、立柱、木块系统移动多远才停下来?

(2) 在小球下摆过程中,要使木块不移动,摩擦系数 μ 的最小值应为多大?

解:(1) 小球下摆到与小立柱碰撞前瞬时,以小球和地球为系统,机械能守恒,设碰撞前小球速度为 v ,则

$$mgl = \frac{1}{2}mv^2$$

得

$$v = \sqrt{2gl}$$

碰撞过程中,取小球与木块立柱为系统,由于摩擦力的冲量 $f\Delta t$ 很小,可略去不计,系统在水平方向动量守恒

$$mv = (m + M)v'$$

碰后系统的速度为

$$v' = \frac{m}{m + M}\sqrt{2gl}$$

碰撞后,系统在摩擦力 f 的作用下作减速运动,直到静止,设系统的最大位移为 x_{\max} ,由动能定理

$$-fx_{\max} = 0 - \frac{1}{2}(m + M)v'^2$$

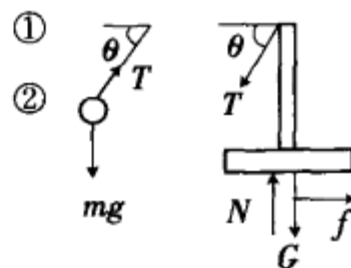
而

$$f = \mu(m + M)g$$

由①、②两式并代入 v' 的值,可得系统的最大位移为

$$x_{\max} = \frac{m^2 l}{\mu(m + M)^2}$$

(2) 设小球摆至任意位置时细绳与水平方向的夹角为 θ ,如图 b 所示,设此时小球速率为 v ,小球与地球系统机械能守恒,



图例 5-5b

$$mgl\sin\theta = \frac{1}{2}mv^2 \quad (3)$$

小球与立柱木块的受力情况如图所示,对小球和木块分别列出运动方程:

$$\text{小球:} \quad T - mg\sin\theta = m \frac{v^2}{l} \quad (4)$$

$$\text{木块立柱:} \quad f - T\cos\theta = 0 \quad (5)$$

$$N - T\sin\theta - Mg = 0 \quad (6)$$

木块不移动,则必有

$$f \leq \mu N \quad (7)$$

由③~⑦式解得

$$\mu \geq \frac{3m\sin\theta\cos\theta}{M + 3m\sin^2\theta} = \frac{\sin 2\theta}{\frac{2M}{3m} + 2\sin^2\theta} \quad (8)$$

令 $A = \frac{2M}{3m}$, 并设

$$f(\theta) = \frac{\sin 2\theta}{A + 2\sin^2\theta}$$

求 $f(\theta)$ 的极大值, 即令 $\frac{df(\theta)}{d\theta} = 0$

$$\frac{df(\theta)}{d\theta} = \frac{2\cos 2\theta(A + 2\sin^2\theta) - \sin 2\theta(4\sin\theta\cos\theta)}{(A + 2\sin^2\theta)^2}$$

利用 $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$, 上式化简为

$$\frac{df(\theta)}{d\theta} = \frac{2A - 4(A + 1)\sin^2\theta}{(A + 2\sin^2\theta)^2} = 0$$

得

$$\sin 2\theta = \frac{A}{2(A + 1)}$$

$$\begin{aligned} \sin 2\theta &= 2\sin\theta\cos\theta = 2\sin\theta\sqrt{1 - \sin^2\theta} = 2\sqrt{\frac{A}{2(A + 1)}} \cdot \sqrt{1 - \frac{A}{2(A + 1)}} \\ &= \frac{\sqrt{A(A + 2)}}{A + 1} \end{aligned}$$

代入 $f(\theta)$ 式中, 化简为

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \frac{1}{\sqrt{A(A + 2)}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2M}{3m}(\frac{2M}{3m} + 2)}} \\ &= \frac{3m}{2\sqrt{M^2 + 3mM}} \end{aligned}$$

可以证明此为 $f(\theta)$ 的最大值, 即

$$f(\theta)_{\max} = \frac{3m}{2\sqrt{M^2 + 3mM}}$$

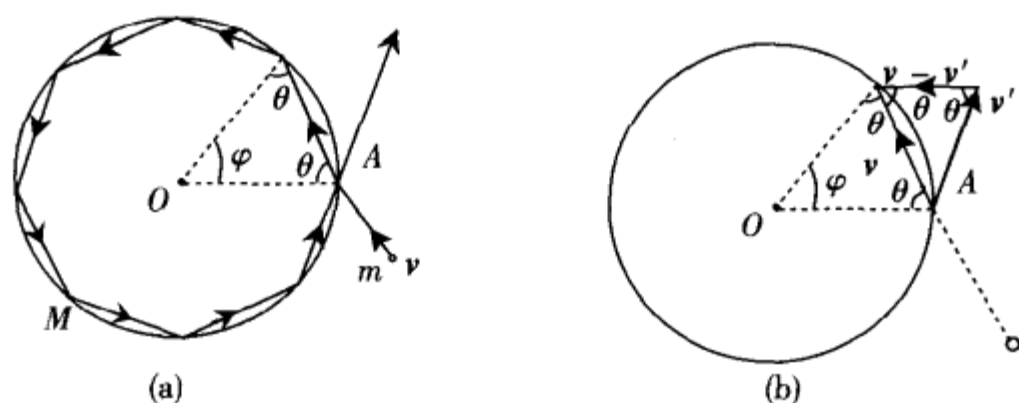
由⑧式, 得到小球在下摆过程中, 为使木块不移动的最小摩擦系数为

$$\mu_{\min} = \frac{3m}{2\sqrt{M^2 + 3mM}}$$

例 5-6 如图例 5-6 所示, 均匀圆环静止放置在光滑水平面上, 圆环质量为 M , 半径为 R , 一质量为 m 的小球(可看作质点)以水平速度 v 通过环上的小孔 A 射入环内, 小球与环内壁作完全弹性碰撞, 环壁光滑, 碰撞 N 次后小球绕环一周, 且又恰好经小孔 A 从圆环内穿出. 试求:

(1) 小球应沿什么方向射入?

(2) 小球经小孔 A 穿出圆环后, 圆环和小球的速度(相对水平面)各是多少?



图例 5-6

解:(1)由于环壁光滑,碰后小球的切向速度保持不变;由于碰撞是弹性的,恢复系数 $e=1$,碰撞前后小球与环的法向相对速度保持不变.于是,相对圆环而言,小球与圆环每一次碰撞时都遵守入射角等于反射角的规律,因此小球每次碰撞都应有相同的入射角 θ ,经 N 次碰撞后恰好环绕一周又从小孔 A 出来,因此小球相对圆环的轨迹一定是一个正多边形.碰撞 N 次,就是正 $(N+1)$ 多边形.图例 5-6a 所示是碰撞 7 次($N=7$),即正八边形.以 θ 角表示小球的入射方向, θ 角是 OA 与小球入射方向的夹角,环心 O 与小球第一次和圆环碰撞点的连线和小球入射方向的夹角也是 θ ,相应的圆心角为

$$\varphi = \pi - 2\theta$$

取圆环参照系,小球经正 $(N+1)$ 边形轨迹从 A 射出应有

$$(N+1)\varphi = 2\pi$$

由以上两式得

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{N+1} = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} \right)$$

此即小球入射方向.例如,当 $N=1$ 时, $\theta=0$; $N=2$ 时, $\theta=\frac{\pi}{6}$, ..., $N=7$ 时, $\theta=\frac{3\pi}{8}$ 等等.

(2)如图例 5-6b 所示,第一次碰撞前圆环是静止的,故小球相对圆环从 A 入射的速度为 v ,经 N 次碰撞后,设小球从 A 的出射速度相对圆环为 v' ,因作完全弹性碰撞,其大小 $v'=v$,设小球从 A 射出时相对水平面的绝对速度为 v_N ,小球穿出 A 后,圆环的最终速度相对水平面为 v_M ,由相对运动公式,有

$$v_N = v' + v_M$$

在水平面参照系中,小球和圆环系统在水平方向不受外力,动量守恒,即有

$$\begin{aligned} mv &= mv_N + Mv_M \\ &= m(v' + v_M) + Mv_M \end{aligned}$$

即

$$(M+m)v_M = m(v - v')$$

得

$$v_M = \frac{m}{M+m}(v - v')$$

因小球与圆环作完全弹性碰撞,故小球相对圆环的入射速度 v 和出射速度 v' 的大小都是 v ,矢量 v 和 v' 构成一等腰三角形的两边.由图例 5-6b 可知, $(v - v')$ 的大小为

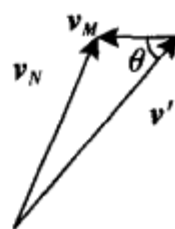
$$2v \cos \theta = 2v \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{N+1} \right) = 2v \sin \left(\frac{\pi}{N+1} \right)$$

$(v - v')$ 的方向与 \overline{AO} 平行.所以,小球从 A 孔穿出后,圆环获得的绝对速度大小为

$$v_M = \frac{2mv}{M+m} \sin \frac{\pi}{N+1}$$

v_M 的方向与 \overline{AO} 平行.

v_N 、 v_M 和 v' 三者的矢量关系如图例 5-6c 所示.因 v_M 与 \overline{OA} 平行,故 v_M 与 v' 的夹角为 θ ,又 v' 的大小为 v ,由余弦定理,得



图例 5-6c

$$\begin{aligned}
 v_N^2 &= v^2 + v_M^2 - 2vv_M \cos\theta \\
 &= v^2 + \frac{4m^2 v^2}{(M+m)^2} \sin^2 \frac{\pi}{N+1} - 2v \left(\sin \frac{\pi}{N+1} \right) \cdot \frac{2vm}{M+m} \sin \frac{\pi}{N+1} \\
 &= v^2 \left[1 + \frac{4m}{M+m} \left(\frac{m}{M+m} - 1 \right) \sin^2 \frac{\pi}{N+1} \right]
 \end{aligned}$$

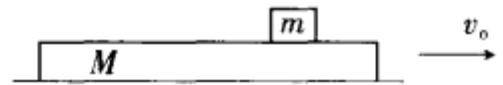
即

$$v_N = v \sqrt{1 - \frac{4mM}{(M+m)^2} \sin^2 \frac{\pi}{N+1}}$$

本章习题

5.1 如图所示,在光滑的水平面上有一质量为 M 的长条木板,以速度 v_0 向右作匀速直线运动,将质量为 m 的小铁块轻轻地放在木板的右端,小铁块和木板之间有滑动摩擦,摩擦系数为 μ . 试求:

- (1) 小铁块与木板处于相对静止时的共同速度 V .
- (2) 小铁块在木板上运动了多少距离?
- (3) 在整个过程中体系损耗了多少机械能?

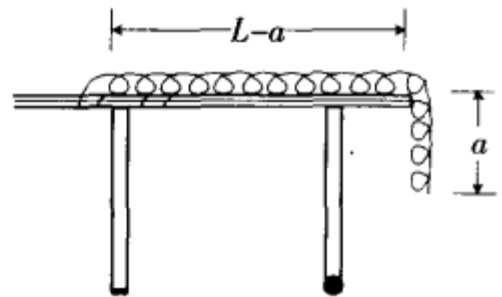


图习 5.1

5.2 汽车沿着一坡度不大的斜坡以 $v_1 = 12\text{m/s}$ 的速率向上匀速行驶,当此车用同样的功率沿斜坡向下匀速行驶时,车速为 $v_2 = 20\text{m/s}$. 若此车保持功率不变而沿水平的同样路面以匀速 v 行驶,设汽车在水平路面上受到的阻力与在斜坡上受到的阻力相同,求 v 的大小.[提示]

5.3 一小球作竖直上抛运动,当它回到抛出点时,速度为抛出时的 $\frac{3}{4}$,设小球运动中受到空气的阻力为恒力,试求:

- (1) 小球受到的空气阻力与重力之比
- (2) 小球上升的最大高度与真空情况下的最大高度之比
(g 取 10米/秒^2)[提示]



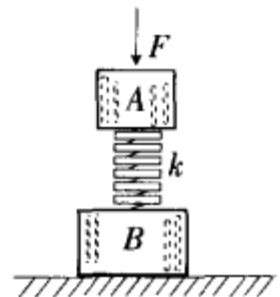
图习 5.4

5.4 一根质量为 m ,总长为 L 的均匀细链条,开始时长为 a 的一段从桌面边缘下垂,另一部分放在光滑的水平桌面上,并用手拉住 A 端使整个链条静止不动,如图所示,然后放手,链条开始下滑,求链条刚好全部离开桌面时的速度.

5.5 上题中若链条与桌面之间的摩擦系数为 μ ,问:

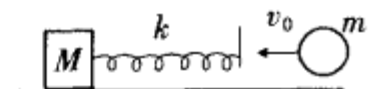
- (1) 下垂长度 a 为多大时,链条开始下滑?
- (2) 若链条以上面所求得的下垂长度开始下滑,则链条全部离开桌面时的速率为多大?[提示]

5.6 如图,质量分别为 m_A 和 m_B 的两物体 A 和 B 固定在劲度系数为 k 的弹簧两端,竖直地放在水平桌面上,用一力 F 垂直地压在物体 A 上,并使其静止不动,然后突然撤去 F ,问欲使物体 B 离开桌面, F 至少应为多大?(弹簧的质量可忽略)[提示]



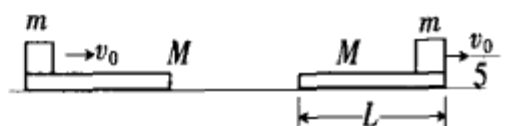
图习 5.6

5.7 如图所示,质量为 m 的小球以速度 v_0 射向靶 M 的弹簧上,设弹簧的劲度系数为 k ,靶原来静止在光滑的水平面上,求弹簧被压缩的最大位移.



图习 5.7

5.8 一质量为 M 的长木板,静止在光滑水平桌面上,一质量为 m 的小滑块以水平速度 v_0 从长木板的一端开始在木板上滑动,直到离开木板. 滑块刚离开木板时的速度为 $\frac{v_0}{5}$,若把此木板固定在水平桌面上,其他条件相同.

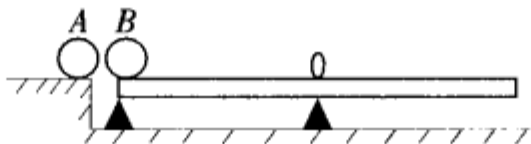


图习 5.8

- (1) 求滑块离开木板时的速度 v .

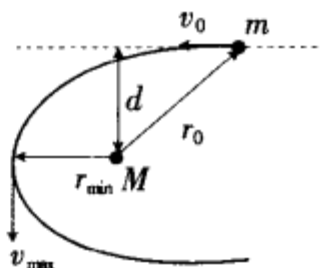
(2)若已知滑块和木板之间的摩擦系数为 μ ,求木板的长度.[提示]

5.9 如图所示,一块光滑的均匀木板可绕通过木板的中点 O 的轴向右翻转.在板的左端有一质量为 m_B 的静止小球 B ,另有一质量为 m_A 的球 A 对准 B 撞来.两球碰撞后均向右运动,且 B 球的速度是 A 球的 n 倍($n > 1$),而碰撞前 A 球的速度是 A 、 B 两球碰撞后速度和的 k 倍,试讨论 k 和 n 之间满足什么关系时, B 球到达板右端时木板不会倾倒?[提示]



图习 5.9

*5.10 有一远离太阳的慧星以速度 v_0 趋向于太阳,太阳质量为 M ,太阳到慧星运动方向的垂直距离为 d ,如图所示,试求慧星绕太阳轨道运动的最大速度和最短距离.

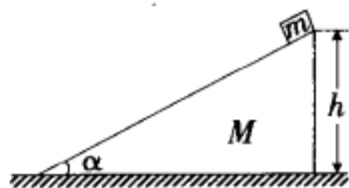


图习 5.10

5.11 有两个质点,其中一个质点的质量是另一个的两倍,在它们之间用一个已被压缩的弹簧将它们连在一起,贮藏在弹簧中的弹性势能为 60 焦耳.试问将两质点释放后,每个质点具有多大动能?

5.12 一个质量为 m 的电子和一个质量为 M 、最初静止的原子进行正碰撞,碰撞结果是一定量的能量 E 被贮藏到这原子的内部.问电子必须具有多大的最小初速率 v_0 ? [提示]

5.13 如图所示,质量为 m 的木块放在一质量为 M 的楔的斜面上,楔放在一水平桌面上,开始时,木块和楔都处于静止状态,当木块沿斜面下滑时,楔将沿水平桌面运动,设所有的表面都是光滑的,木块从离桌面高度为 h 处开始下滑,试求当它碰到桌面时,楔的速度为多大? 已知斜面的倾角为 α . [提示]



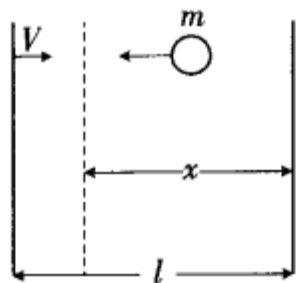
图习 5.13

5.14 一个质量为 m 的小球在两个壁面间来回弹跳,略去重力不计,已知碰撞是完全弹性的,开始时小球的速度为 v_0 ,两壁间的间隔长为 l ,

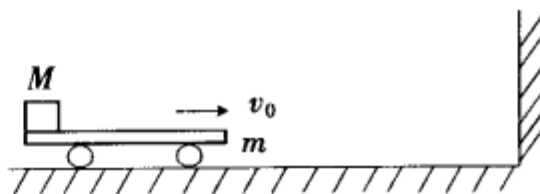
(1)求每个壁所受的平均力 F .

(2)如果左边的壁面以 $V \leq v_0$ 的速度慢慢地移向右边,试求当两壁间的距离为 x 时壁面受到的平均力.

(3)证明:把左壁从离右壁为 l 推进到 x 时所需的功,等于球的动能的增量.[提示]



图习 5.14



图习 5.15

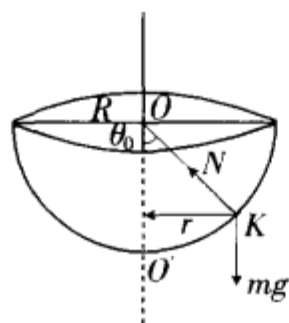
*5.15 一质量为 $m = 2.5$ 千克的小车左端放有质量为 $M = 3.5$ 千克的小滑块,滑块与小车间的摩擦系数 $\mu = 0.3$,开始时,小车和滑块共同以 $v_0 = 2$ 米/秒的速度在光滑水平面上向右运动,并与竖直墙壁发生完全弹性碰撞,小车足够长,使小滑块不会滑到小车右端(取 $g = 10$ 米/秒²),求:

(1)小车第一次与墙壁碰撞后向左运动的最大距离.

(2)小车与墙壁碰撞 n 次后,小车和滑块体系质心的速度 v_{cm} .

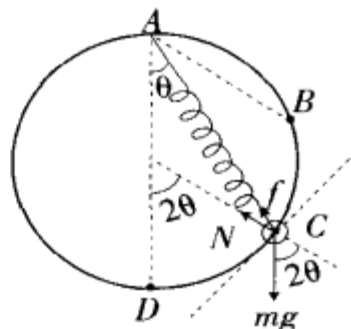
(3)为使滑块始终不会从小车中滑下,小车至少多长? [提示]

*5.16 将一个质点沿一个半径为 R 的光滑半球形碗的内表面水平地投射,碗保持静止,如图. 设 v_0 是质点恰好能达到碗口所需要的初速率. 试求出 v_0 作为 θ_0 的函数. θ_0 是用角度表示的质点的初位置. [提示]



图习 5.16

5.17 在一竖直放置的半径为 R 的固定光滑圆环上,穿有一质量为 m 的小环,小环通过一根原长也为 R ,倔强系数为 k 的弹簧与圆环的最高点 A 相连,如图所示,若小环从与 A 点相距为 R 的 B 点由静止开始下滑,试求小环在以后运动过程中所获得的最大速度 v_m 以及此时对圆环的作用力 N . [提示]



图习 5.17

5.18 如图所示,一根由橡皮做成的弹性绳的自然长度为 l ,小球与绳连结在一起,绳的另一端固定在 O 点,将小球拉至水平并使绳处于自然长度,然后将小球释放.

(1) 试证明:当球到达最低点时,如果绳子伸长 Δl 比 l 小得多,则 $\Delta l = \frac{3mg}{k}$,这里 k 是绳子的倔强系数.(注意 k 越大,则 Δl 越小,并且 $\Delta l \ll l$ 这一近似越好).

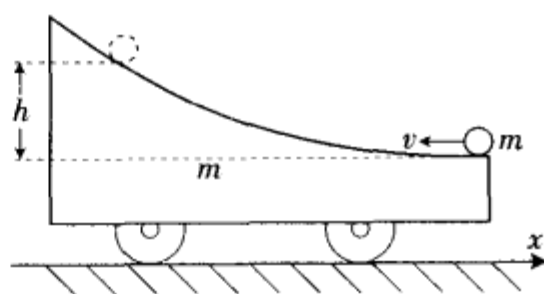
(2) 试证:在这种情况下,球到达最低点时的速率为

$$v = \sqrt{2g \left(l - \frac{3mg}{2k} \right)} \quad \text{[提示]}$$

5.19 在一辆小车上固定装有光滑弧形轨道,轨道下端水平,小车质量为 m ,静止放在光滑水平面上,今有一质量也为 m ,速度为 v 的铁球,沿轨道下端水平射入并沿弧形轨道上升某一高度. 如图所示,然后下降离开小车.



图习 5.18



图习 5.19

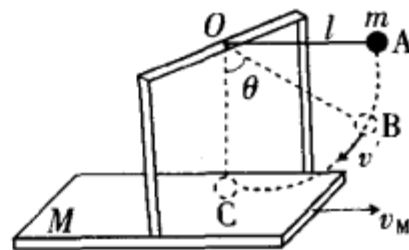
(1) 试求球离开小车时相对地面的速度多大?

(2) 球沿弧面上升的最大高度 h 是多少? [提示]

5.20 质量为 m 的小球用长为 l 的轻绳悬挂于支架的 O 点上,支架固连在矩形板上,板与支架的质量为 M ,整个装置放在光滑的水平桌面上,如图所示. 将小球拉至 A 点,使绳拉直,且处于水平位置,在小球与板均静止的情况下释放小球.

(1) 试问,在小球从 A 点运动到最低点 C 的过程中,绳子张力对小球是否做功? 若做功,求出此功.

(2) 求当小球运动到 B 点(绳与铅垂线成 $\theta = 60^\circ$ 角)时,板的运动速度. [提示]



图习 5.20

振动与波

物体在一定位置附近所作的往复的周期性运动,叫做机械振动,这一定位置通常就是平衡位置.振动作用在媒质中由近到远的传播过程叫做波动.振动是波动的根源;波动是振动作用的传播过程,两者间有着密切关系.

对于电量、电压、电流、电场强度和磁场强度等物理量,当它们围绕一定的平衡值作周期性的变化时,也可称为该物理量在作电磁振动,电磁场在空间传播叫做电磁波.

§ 6.1 简谐振动

1. 简谐振动运动学方程

置于光滑桌面上物体质量为 m ,与一劲度系数为 k 、质量可忽略不计的轻弹簧相联结,弹簧的另一端固定在墙上如图 6.1-1 所示.这样装置叫做弹簧振子.开始时,弹簧为原长,物体所处位置即平衡位置 O .现用外力使物体沿水平方向偏离平衡位置一段位移 x ,然后放手,此后该物体所作的运动即为简谐振动.

物体离开平衡位置的位移 x 随时间 t 呈余弦(或正弦)关系,这种运动叫做简谐振动.这是一种最简单、最基本的振动.简谐振动的运动方程为

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (6.1-1)$$

式中 ω, φ_0 均为常量,作 $x \sim t$ 图叫做振动图线(图 6.1-2)是一条余弦曲线.

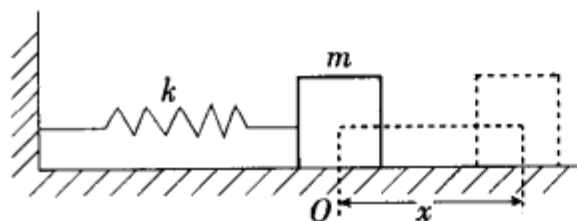


图 6.1-1 弹簧振子

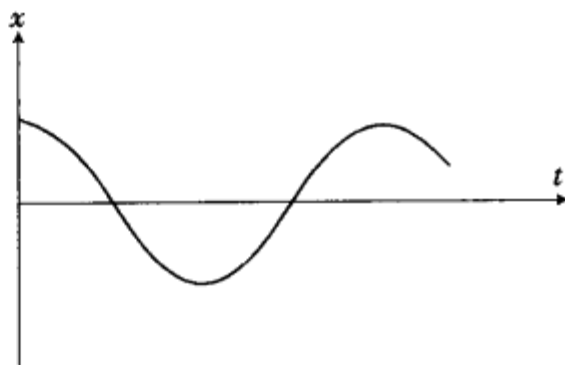


图 6.1-2 振动曲线

2. 简谐振动的特征参量

(1) 振幅 A 振动物体在振动方向上离开平衡位置的最大位移叫做振幅.振幅大小由初始状态决定.

(2) 圆频率 ω 、频率 ν 和周期 T 振动物体完成一次全振动所需时间 T 叫做周期;物体在 1 秒内振动次数叫做频率 ν (或 f);频率是周期的倒数,即

$$\nu = \frac{1}{T}$$

振动物体在 2π 秒时间内振动次数叫做圆频率 ω (又称角频率).圆频率与周期、频率间关系为

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$

振动系统频率或周期是由振动系统固有特性决定,不随外界条件而变化.

(3)周相 φ (或相位 φ)

周相是决定振动物体在振动过程中,对应某一时刻所处某一状态的物理量.即简谐振动式中 $\varphi = \omega t + \varphi_0$,其中 φ_0 为 $t=0$ 时周相叫做初相,初相数值决定了振动物体在 $t=0$ 时的初始状态.

在比较两个或两个以上的简谐振动时,周相差是很重要的概念.例如两个质点沿一直线以不同的振幅(A_1 和 A_2),频率(ω_1 和 ω_2)和初相(φ_{10} 和 φ_{20})在作简谐振动,其周相差(或相位差)为

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= \varphi_2 - \varphi_1 = (\omega_2 t + \varphi_{20}) - (\omega_1 t + \varphi_{10}) \\ &= (\omega_2 - \omega_1)t + (\varphi_{20} - \varphi_{10})\end{aligned}$$

如两简谐振动的频率相同,则其周相差为

$$\Delta\varphi = \varphi_{20} - \varphi_{10}$$

当 $\Delta\varphi$ 为零或 2π 的整数倍时,称这两简谐振动同相;当 $\Delta\varphi$ 为 π 或 π 奇数倍时,称这两简谐振动反相.若 $0 < \Delta\varphi < \pi$,就称 φ_2 超前于 φ_1 ;若 $-\pi < \Delta\varphi < 0$,就称 φ_2 落后于 φ_1 .周相差 $\Delta\varphi$ 反映了两简谐振动的步调关系,具有重要的物理意义.

3. 简谐振动物体的位移、速度和加速度

$$\text{位移 } x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\text{速度 } v = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0) \quad (6.1-2)$$

$$\text{加速度 } a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0) \quad (6.1-3)$$

4. 若初始条件已知,即在 $t=0$ 时振动物体的位移和速度 $x = x_0, v = v_0$ 值已知,则由初始条件即可定出振幅 A 和初相 φ_0

$$\text{当 } t=0, x = x_0 \text{ 时, } x_0 = A\cos\varphi_0 \quad (6.1-4)$$

$$v = v_0 \quad v_0 = -A\omega\sin\varphi_0 \quad (6.1-5)$$

由(6.1-4)和(6.1-5)式得

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} \quad (6.1-6)$$

$$\tan\varphi_0 = -\frac{v_0}{x_0\omega} \quad (6.1-7)$$

φ_0 所在象限还要由 $\sin\varphi_0$ (或 $\cos\varphi_0$)的符号共同决定.

5. 简谐振动的参考图法(或旋转矢量法)

取振动方向为 x 轴,以平衡位置 O 为圆心,以振幅 A 为半径作一圆,在圆上取一点 P_0 ,连结 $\overline{OP_0}$,开始时 $\overline{OP_0}$ 与 x 轴夹角为 φ_0 (即初相),此后 $\overline{OP_0}$ 以匀角速 ω (即圆频率)作逆时针方向匀速转动,则在任一时刻 t ,圆周上 P 点对应在 x 轴上的投影点 M 点的运动相当谐振动,通常把这个圆叫做参考圆(图 6.1-3), P 点叫做参考点.

当 P 作圆周运动时,其速度 $v = A\omega$ 在 x 方向投影值相当谐振动的速度 $v = A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$

参考点 p 的加速度 $A\omega^2$ 在 x 轴上投影相当于谐振动的加速度

$$a = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0)$$

若将 \overline{OP} 以一旋转矢量表示,则该旋转矢量在 x 轴上投影也就相当于一个简谐振动(图 6.1-4)

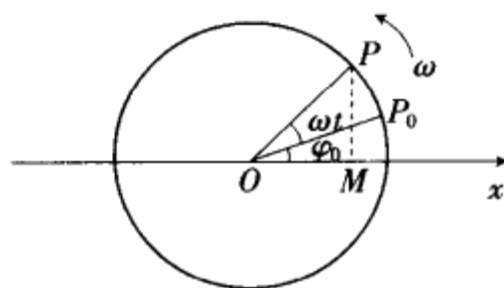


图 6.1-3 参考圆

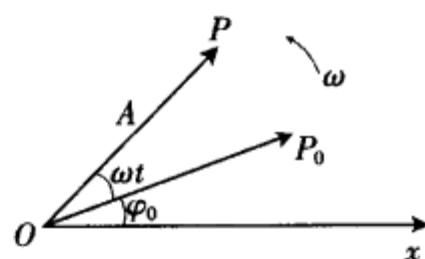


图 6.1-4 旋转矢量

6. 简谐振动的动力学方程

由简谐振动式(6.1-3)得

$$a = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x$$

根据牛顿运动定律 $F = ma = -m\omega^2 x$

令 $k = m\omega^2$ 则得 $F = -kx$

(6.1-8)

由此可见,如果物体受到弹性力作用,或其加速度与位移成正比,方向相反,即 $a = -\omega^2 x$,则该物体就

作简谐振动,并且其圆频率就是 ω , $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ 叫做物体的固有频率,它由物体固有特性决定的.

由此推广,小振幅的单摆其固有频率

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (6.1-9)$$

式中 l 为摆长; g 为当地重力加速度.

7. 谐振动能量

物体作简谐振动时,其动能

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) \quad (6.1-10)$$

势能为

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0) \quad (6.1-11)$$

总能量为

$$\begin{aligned} E &= E_k + E_p \\ &= \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \end{aligned} \quad (6.1-12)$$

即物体作简谐振动过程中,动能和势能均随时间作周期性变化,动能增大,势能减小,反之亦然.但总机械能保持守恒.总机械能与振幅平方成正比.

物体作简谐振动过程中,若势能或总能量已知,根据能量公式,也为我们提供另一种测定圆频率的方法.

$$\omega = \sqrt{\frac{2E}{mA^2}} \quad (6.1-13)$$

或

$$\omega = \sqrt{\frac{2E_p}{mx^2}} \quad (6.1-14)$$

例 6.1-1 已知质点振动图线如图 6.1-5. 试写出其振动方程,并求 3 秒时周相.

解:由例 6.1-5 图中可知

$$A = 2\text{m} \quad T = 4\text{s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$t = 0$ 时质点处在平衡位置,下一时刻将向正方向运动

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{2} \text{ (或 } \frac{3\pi}{2} \text{, 一般 } \varphi_0 \text{ 值不取超过 } \pi \text{ 值)}$$

则得质点振动方程

$$x = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{2}\right)$$

在 $t = 3$ 秒时 周相 $\varphi = \frac{\pi}{2} \times 3 - \frac{\pi}{2} = \pi$ 质点在负向位移最大处.

例 6.1-2 已知简谐振动振幅 $A = 6 \times 10^{-2}\text{m}$, $\nu = \frac{1}{2\pi}\text{Hz}$. 开始时质点位移 $x_0 = 3 \times 10^{-2}\text{m}$, 并向 x 轴正向运动,试写出其振动方程.

解: $t = 0$ 时, $x_0 = 3 \times 10^{-2}\text{m}$ $\omega = 2\pi\nu = 1\text{rad/s}$

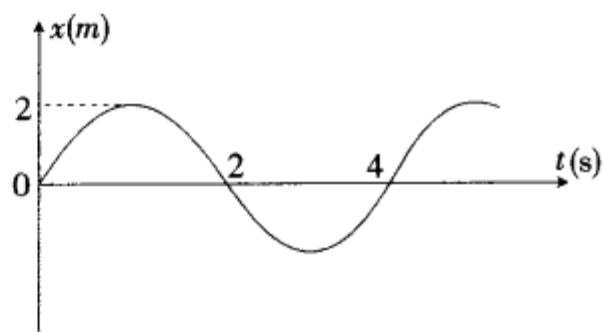


图 6.1-5

代入(6.1-4)式 $\cos\varphi_0 = \frac{x_0}{A} = \frac{1}{2}$ $\varphi_0 = \pm \frac{\pi}{3}$

$$\tan\varphi_0 = -\frac{v_0}{x_0\omega} \quad v_0 = -x_0\omega\tan\varphi_0$$

如 φ_0 取 $+\frac{\pi}{3}$, 则 $v_0 < 0$ 不符合要求, 故 φ_0 取 $-\frac{\pi}{3}$. (也可结合参数圆考虑, 当 $x_0 = 3 \times 10^{-2}$ 且向正向运动时是在第四象限中 φ 值应取 $-\frac{\pi}{3}$)

质点振动方程 $x = 6 \times 10^{-2} \cos\left(t - \frac{\pi}{3}\right)$

同理, 如 $x_0 = 0$ 时质点向正向运动, φ_0 取 $-\frac{\pi}{2}$

$x_0 = 3 \times 10^{-2}$, 质点向负向运动, φ_0 取 $\frac{\pi}{3}$

$x_0 = \frac{A}{\sqrt{2}}$, 质点向正向运动, φ_0 取 $-\frac{\pi}{4}$.

例 6.1-3 有二个沿 x 轴作简谐振动的质点, 其运动方程为 $x_1 = A\cos(\omega t + \varphi_1)$, $x_2 = A\cos(\omega t + \varphi_2)$. 当 $t=0$ 时, 第一质点由平衡位置向负方向运动; 第二质点在 $x_2 = -\frac{A}{2}$ 处, 也向负向运动, 求二质点的周相差.

解: 周相差 $\Delta\varphi = (\omega t + \varphi_2) - (\omega t + \varphi_1) = \varphi_2 - \varphi_1$,

当 $t=0$ 时, $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_2 = \frac{2\pi}{3}$

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$$

由于简谐振动的周期性 $\Delta\varphi = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$.

例 6.1-4 竖直悬挂弹簧的谐振动. 将质量为 m 的物体悬挂在劲度系数为 k 的弹簧下端, 弹簧另一端固定在天花板上, 此时弹簧伸长量为 x_0 , 物体处在 O 处(图 6.1-6(a)). 若将物体再向下拉伸 x 距离后放手(图 6.1-6(b)), 问该系统是否在作谐振动? 其振动频率为多大?

解: 取竖直向下方向为 x 轴, 开始时,

$$mg = kx_0 \quad x_0 = \frac{mg}{k}$$

拉下 x 距离后, $mg - k(x_0 + x) = ma$

将①式代入得 $-kx = ma$

$$a = -\frac{k}{m}x$$

与 $a = -\omega^2 x$ 比较, 可知该系统在作简谐振动, 且 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

即竖直悬挂的弹簧振子系统与水平放置在光滑水平面上的弹簧振子系统其固有频率 ω 不变, 但平衡位置变到重力与弹力相平衡处, 即离弹簧原长为 x_0 的 O 点处.

例 6.1-5 水平放置在光滑桌面上二根劲度系数分别为 k_1 、 k_2 的弹簧与一质量为 m 物体相连接: (1) 二弹簧串联(如图 6.1-7(a)); (2) 二弹簧并联(如图 6.1-7(b))时, 系统的固有频率各为多大?

解: (1) 取向右为 x 正向, 将质量为 m 物体自平衡位置 O 向右拉伸 x 长后放手. 此时弹簧 1、2 分别伸长量为 x_1 和 x_2 .

$$x_1 + x_2 = x \tag{1}$$

将此系统等效为一劲度系数为 k 的谐振动系统, 则

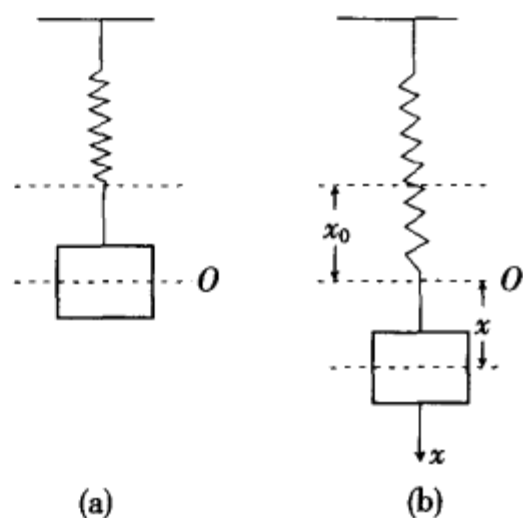


图 6.1-6

$$-kx = ma \quad \text{②}$$

分别对 k_1, k_2 二根弹簧根据牛顿运动定律得

$$-k_1 x_1 = ma \quad \text{③}$$

$$k_2 x_2 = k_1 x_1 \quad \text{④}$$

将②式代入③式得

$$-k(x_1 + x_2) = ma$$

将③,④式代入⑤式得

$$-k \left[\left(-\frac{ma}{k_1} \right) - \left(\frac{ma}{k_2} \right) \right] = ma$$

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad \text{⑤}$$

$$k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

系统固有频率 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)}}$

(2)取向右为 x 正向,将质量为 m 物体由平衡位置 O 向右拉伸 x 长后放手,弹簧 1,2 分别伸长同样为 x .

根据牛顿运动定律得

$$-k_1 x - k_2 x = ma \quad \text{⑦}$$

将二弹簧并联系统等效于一个劲度系数为 k 的系统,则

$$-kx = ma \quad \text{⑧}$$

将⑦式代入⑧式得

$$k = k_1 + k_2$$

二弹簧并联系统的固有频率

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

例 6.1-6 位于铅垂平面内的“∠”形等截面弯管,两管分别与水平面成 α 角和 β 角,如图例 6.1-8 所示.其内盛有长为 l 、质量为 m 的液柱,受扰动后,液柱将沿管作往返振荡,求振荡周期,设管壁无阻力.

解:本题试从能量观点来讨论,将重力看成内力,液柱作为一整体在振荡过程中只受重力作用,机械能守恒.取二边液面高度相等处为平衡位置.当液柱沿管轴位移为 s 时,其势能的增量(即势能)等于将长为 s 的液柱从左臂的 $O'B$ 位置

搬至右臂的 OA 位置的过程中,重力所作的功,在此过程中,该段液柱的重心升高了 $h = \frac{1}{2}(h_1 + h_2)$,

该段液柱的质量为 $\frac{s}{l}m$,故重力所作的功,即势能

$$E_p = \frac{s}{l}mg \frac{1}{2}(h_1 + h_2)$$

由图 6.1-8 可知 $h_1 = s \sin \alpha$ $h_2 = s \sin \beta$ 代入上式得

$$E_p = \frac{s}{l}mg \frac{1}{2}(\sin \alpha + \sin \beta)$$

则系统圆频率

$$\omega = \sqrt{\frac{2E_p}{ms^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}(\sin \alpha + \sin \beta)}$$

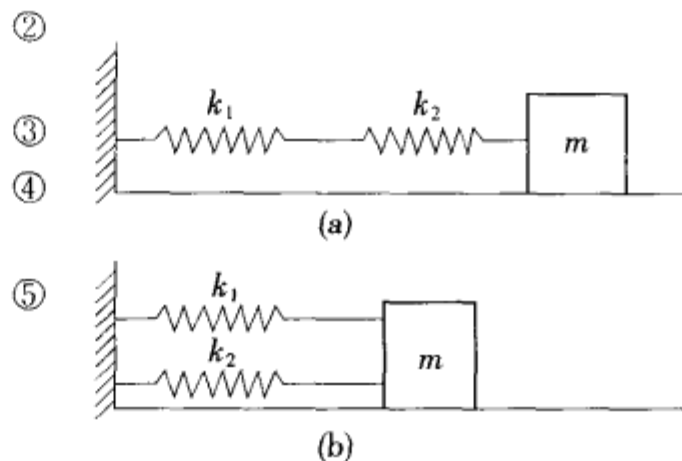


图 6.1-7

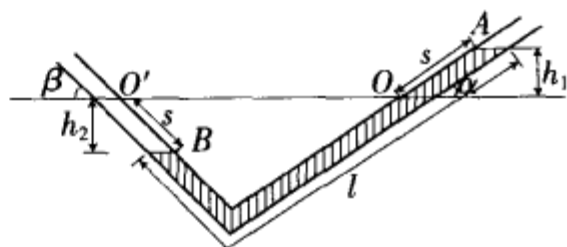


图 6.1-8

故周期

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g(\sin\alpha + \sin\beta)}}$$

§ 6.2 阻尼振动

1. 阻尼振动的运动学方程

物体在振动过程中,完全不与外界交换能量,系统内部又完全没有机械能损失,即理想的简谐振子,实际上是不存在的.在实际振动过程中,由于受到阻力的作用,造成能量损失而使振幅逐渐减少这种振动叫做阻尼振动或称减幅振动.

当摩擦力与振子速度成正比时,损失的能量也与振子本身具有的能量成正比,能量将随时间作指数衰减,相应地振子的振幅也将随时间而指数衰减,因而在阻尼振动中物体振动的位移与时间有如下关系

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_f t + \varphi_f) \quad (6.2-1)$$

上式即阻尼振动表达式, β 反映了振动衰减的快慢,叫做衰减因子. β 越大,振动衰减越快.

2. 阻尼振动的三种形式

阻尼振动可以分为三种运动形式(图 6.2-1)

(1)弱阻尼振动或欠阻尼振动

当阻尼较小时,即当 $\beta^2 < \omega_0^2$ 时,阻尼运动方程的解为

$$x = A e^{-\beta t} \cos(\omega_f t + \varphi_f)$$

式中 $\omega_f = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ 即振动系统不再是简谐振动,而是作往复的周期运动,振幅随时间是衰减的.振动系统从平衡位置出发经过一次完全振动所经历时间,叫做阻尼振动的“周期” T ,其值为

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} > T_0 \quad (6.2-2)$$

β 越大,阻尼振动衰减得越快,“周期”也越长.

(2)过阻尼运动

当阻尼较大时,即当 $\beta^2 > \omega_0^2$ 时,这时物体不再作周期性振动,要经过相当长时间物体才能到达平衡位置.

(3)临界阻尼运动

当 $\beta^2 = \omega_0^2$ 时,物体恰好不能作周期性振动,但能很快回到平衡位置.在精密天平及各类指针式测量仪表中,广泛采用临界阻尼系统.

例 6.2-1 一物体悬挂在弹簧下作阻尼振动,某时刻振幅为 20cm,经 100s 后,振幅减为 10cm.问再经多少时间,振幅减为 5cm?

解:由阻尼振动的振幅与时间关系 $A = A_0 e^{-\beta t}$ 可得衰减因子

$$\beta = \frac{\ln \frac{A_0}{A}}{t}$$

根据题意得
$$\beta = \frac{\ln \frac{0.20}{0.10}}{100} = \frac{1}{100} \ln 2 = 6.9 \times 10^{-3} \text{s}^{-1}.$$

振幅由 10cm 减为 5cm 所需的时间设为 t' ,则 $0.05 = 0.10 e^{-\beta t'}$

解得
$$t' = 100 \text{s}$$

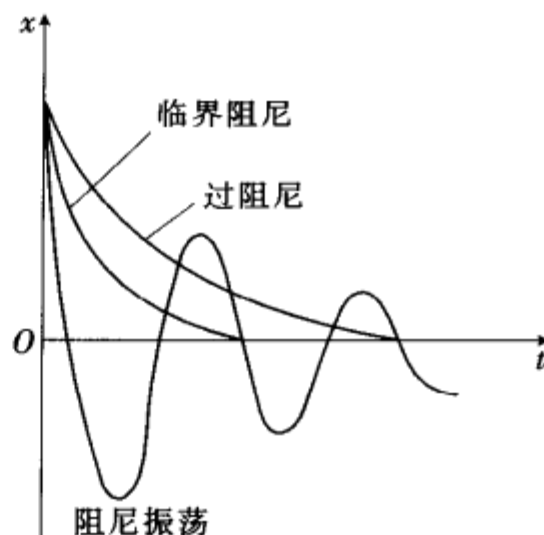


图 6.2-1 阻尼振荡

§ 6.3 受迫振动 共振

由于阻尼是不可避免的,为了保持系统作等幅振动,必须由外界不断地向系统补充能量,通常外界以做功形式向系统补充能量,做功的外力叫做强迫力.振子在强迫力作用下的振动叫做受迫振动.最简单的强迫力是简谐型的,即力是时间的余弦(或正弦)函数.由于振动系统具有自身的固有频率,所以当外加强迫力的频率与振子固有频率一致或很接近时,外力始终对振子作正功,振子将不断从外界获得能量,而使自身的振动幅度达到最大,这种现象叫做共振.当强迫力的频率与振子的固有频率不一致时,外力对振子有时做正功,有时做负功,达到稳定后,振子在每一周期中将从外界获得一定能量.从而达到与外加强迫力频率相同的等幅振动.

§ 6.4 简谐振动的合成

1. 两个同方向、同频率简谐振动的合成

当一物体同时参与同方向的两个振动时,它的位移应为参与每个振动时的位移的代数和,即

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

则其合振动 $x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$

利用旋转矢量,很容易求得以上的和见图 6.4-1. x_1 、 x_2 分别为旋转矢量 A_1 、 A_2 在 x 方向上投影.而矢量投影的和等于矢量和的投影,于是 x 就是合矢量 $A = A_1 + A_2$ 的投影.由于 A_1 与 A_2 的角速度 ω 相同,合矢量 A 与 A_1 、 A_2 的夹角保持不变,且 A 也以角速度 ω 旋转,即

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (6.4-1)$$

如图 6.4-1 所示,由图中不难看出

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \quad (6.4-2)$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} \quad (6.4-3)$$

当 $\varphi_2 - \varphi_1 = 2k\pi$ (k 为整数) 时, $A = A_1 + A_2$, 合成振动最强,称为振动相长. 当 $\varphi_2 - \varphi_1 = (2k + 1)\pi$ 时, $A = A_1 - A_2$, 合成振动最弱,称为振动相消,一般情况, A 介于 $(A_1 + A_2)$ 与 $(A_1 - A_2)$ 之间.

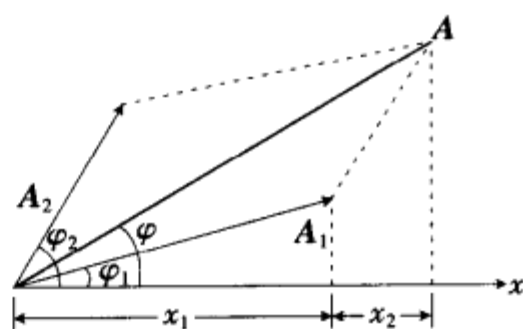


图 6.4-1 旋转矢量图

2. 两个同方向、不同频率简谐振动合成

设一物体同时参与了两个同方向,不同频率(设为 ω_1 和 ω_2)的简谐振动,如果两振动的振幅和初相都相同,则这两个简谐振动可写成

$$x_1 = A \cos(\omega_1 t + \varphi)$$

$$x_2 = A \cos(\omega_2 t + \varphi)$$

其合运动为 $x = x_1 + x_2 = A \cos(\omega_1 t + \varphi) + A \cos(\omega_2 t + \varphi)$

$$= 2A \cos \frac{(\omega_2 - \omega_1)t}{2} \cdot \cos \left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t + \varphi \right)$$

即合运动不再是简谐振动,而是比较复杂的周期性运动.

如果 $\omega_1 \ll \omega_2$, 则有

$$x = A + A \cos \omega_2 t$$

合运动是围绕 $x = A$ 的新的平衡位置以圆频率 ω_2 作简谐振动. $\omega_2 \ll \omega_1$ 时, 情形类似.

3. 拍

如果两个分振动的圆频率 ω_1 和 ω_2 都很大, 而两者相差却很小, 即 $|\omega_2 - \omega_1| \ll \omega_2 + \omega_1$, 这时两振动的合运动可以近似地看成是振幅按照 $|2A \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t|$ 缓慢变化的圆频率为 $\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}$ 的“准简谐振动”.

频率都较大, 但两者相差很小的两个同方向的简谐振动, 合成时所产生的这种合振幅时而加强时而减弱的现象(图 6.4-2)叫做拍. 拍的周期与拍频分别为

$$T_b = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}$$

$$\nu_b = \nu_2 - \nu_1$$

例 6.4-1 有两个同方向的简谐振动, 振动方程如下

$$x_1 = 0.05 \cos(10t + \frac{3}{4}\pi), x_2 = 0.06 \cos(10t + \frac{1}{4}\pi)$$

(1) 求合振动的振幅和初位相.

(2) 若另有一振动 $x_3 = 0.07 \cos(10t + \varphi)$, 问 φ 为何值时, $x_1 + x_3$ 的振幅最大; φ 为何值时, $x_2 + x_3$ 的振幅最小.

解: (1) 这是两个同方向同频率谐振动的合成, 合成后振动方程为

$$x = x_1 + x_2 = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\begin{aligned} \text{式中 } A &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \\ &= \sqrt{(0.05)^2 + (0.06)^2 + 2 \times 0.05 \times 0.06 \cos(\frac{1}{4}\pi - \frac{3}{4}\pi)} \\ &= 0.078m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan \varphi &= \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} \\ &= \frac{0.05 \sin \frac{3}{4}\pi + 0.06 \sin \frac{1}{4}\pi}{0.05 \cos \frac{3}{4}\pi + 0.06 \cos \frac{3}{4}\pi} \\ &= 11.1 \end{aligned}$$

$$\varphi = \tan^{-1} 11.1 = 84^\circ 48'$$

(2) 另有一同方向, 同频率振动

$$x_3 = 0.07 \cos(10t + \varphi)$$

要求 $x_3 + x_1$ 振幅最大, 则其分振动的周相差必须满足

$$\Delta \varphi_1 = \varphi - \frac{3}{4}\pi = 2k\pi \quad (k \text{ 为整数})$$

$$\varphi = 2k\pi + \frac{3}{4}\pi$$

要求 $x_3 + x_2$ 振幅最小, 则两个振动的周相差必须满足

$$\Delta \varphi_2 = \varphi - \frac{1}{4}\pi = (2k+1)\pi$$

$$\varphi = 2k\pi + \frac{5}{4}\pi$$

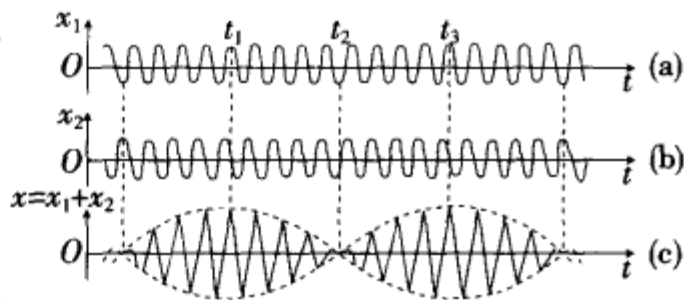


图 6.4-2 拍

§ 6.5 机械波的形成与传播

振动作用在媒质中由近到远的传播过程叫波动。

振动是波动的根源,波动是振动作用的传播过程两者间有着密切关系,短暂扰动在媒质中的传播形成脉冲波,周期振动在媒质中传播形成周期波,如图 6.5-1(a)(b)所示。

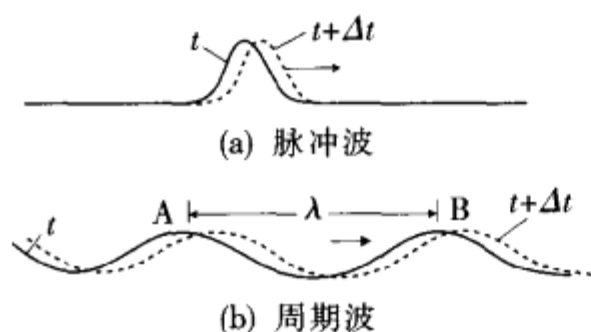


图 6.5-1

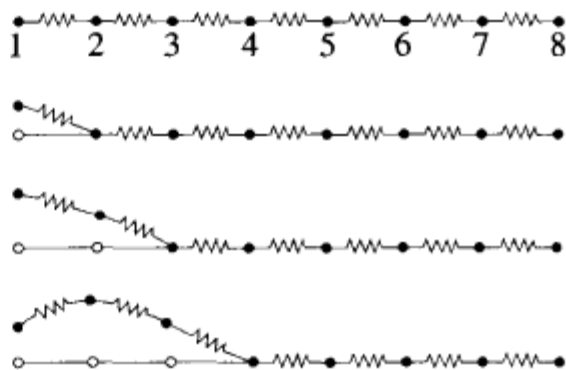


图 6.5-2 横波

产生机械波除了必须有波源外还必须存在有传播波动的媒质,且媒质中各质点间要有力的作用,按作用力性质不同,可形成不同的波,如弹性波、表面张力波、重力波(水波)等。振动是单个质点的运动,波动则是由无数质点(连续媒质)且相互间有作用力下所作的群体运动。如图 6.5-2 所示。沿水平方向各质点间都有弹性力作用时,当质点 1 偏离平衡位置在垂直方向作振动时,由于弹性力作用使质点 2 偏离平衡位置产生振动,但其振动周相则稍落后于质点 1,此后这作用逐渐由近向远的传播过程即形成波动。

波的传播方向与质点振动方向相垂直时叫做横波。横波产生时,波形上出现波峰与波谷,例如水面波、细绳上的波等。波的传播方向与振动方向相平行时叫做纵波。纵波产生时,波形上出现波疏与波密,例如声波,在固体中即能传播弹性纵波又能传播弹性横波。波的速度由媒质性质决定,媒质之间相互作用越强,波速越大;媒质密度(惯性)越大,波速越小。

$$\text{在固体弹性媒质中,纵波传播速度为 } u_{\parallel} = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \quad (6.5-1)$$

$$\text{横波传播速度为 } u_{\perp} = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (6.5-2)$$

式中 Y 、 G 分别为杨氏模量和切变模量,各表示产生单位相对形变(拉伸形变和切形变)时所需外力, ρ 是媒质的密度。

在柔软弦中,弦中存在有张力时能传播横波,波速为

$$u_{\text{弦}} = \sqrt{\frac{T}{\eta}} \quad (6.5-3)$$

式中 T 为张力, η 为弦的线密度。

液体和气体中的扰动只在扰动方向相对邻近质元产生弹性力作用,故液体与气体中只能传播弹性纵波,不能传播弹性横波。

§ 6.6 波动的描述方法

由波源发出波沿各方向传播的方向线叫做波线。例如点状波源发出波线是球面对称辐射状直线。某一时刻媒质中波所到达各点连成的面叫波阵面。显然波阵面上各点位相均相同,故也叫同相面。通

常每相隔一定时间画出一个波阵面,波阵面呈球形叫球面波,波阵面为平面叫平面波,如图 6.6-1(a)(b)所示.显然,离波源较远处球面波的一部分接近于平面波.

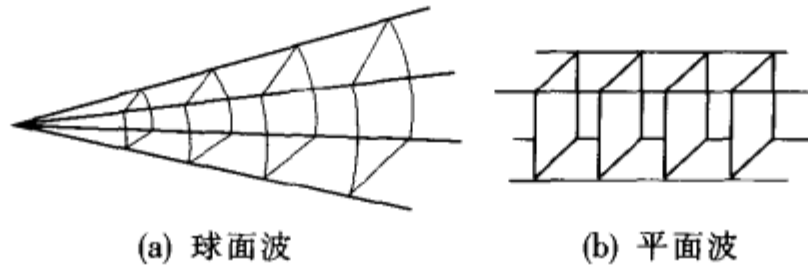


图 6.6-1

如果波源在作简谐振动,媒质中各质元也相继作简谐振动,媒质又不吸收,则这种振动作用在媒质中传播叫做简谐波.在媒质中任取一点作为坐标原点,通常取振源所在处,以波线方向为横坐标 x 轴,显然在 x 轴上存在有无数质元(连续媒质)其平衡位置均在 x 轴上,取质点振动方向为 y 轴(对横波而言 y 轴 $\perp x$ 轴,对纵波而言, y 轴 $\parallel x$ 轴),对应 t 时刻将各质元偏离平衡位置位移联成一光滑曲线即波动曲线或叫做波形图,如图 6.6-2 所示.

由波动曲线中可以采集到以下信息,它能反映出对应于某一时刻在波线方向上媒质中各质元作振动时偏离平衡位置的位移.由于波动所到达各点,每个质点均作与振源相同频率的谐振动,但开始振动时间不同,离振源越远地方,开始振动时间越晚,因而其振动位相越落后,振动时间相差一个周期的两点间的距离即波长,波长也就是振动在一周中所传播的距离.波动曲线尚能反映出离原点 O 不同距离处各点位相的差异.因为既然距离相隔一个波长的两点振动位相相差是 2π ,则离振源距离分别为 x_1 与 x_2 (设 $x_2 > x_1$) 的两点的振动位相差,即点 x_2 比点 x_1 落后位相为 $\Delta\varphi$.

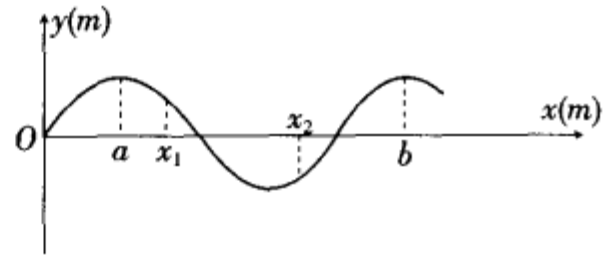


图 6.6-2 波形图

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{(x_2 - x_1)}{\lambda} \quad (6.6-1)$$

如果媒质性质已定波速 u 已知,则根据波形图 6.6-2 得到波长,即可获得该波的振动周期与波的频率

$$T = \frac{\lambda}{u} \quad \text{或} \quad \lambda = uT \quad (6.6-2)$$

$$\nu = \frac{u}{\lambda} \quad \text{或} \quad u = \lambda\nu \quad (6.6-3)$$

如在波形图上同时作出二个对应不同时刻的波形图如图 6.6-3 则根据波形图就能确定该波的传播速度及波源 O 点的振动初相,

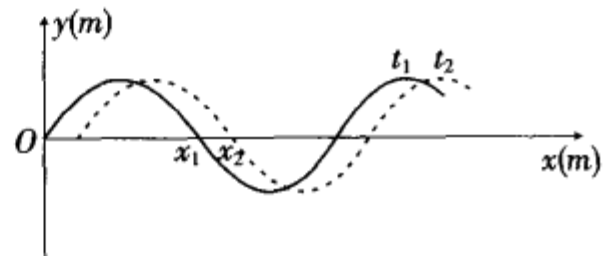


图 6.6-3

$$u = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \quad \text{设波沿 } x \text{ 正向传播}$$

在 t_1 时 O 点恰在平衡位置,下一时刻位移将沿 y 反方向运动,所以该波源的振动初相 $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

例 6.6-1 简谐波沿 x 轴正向传播在 $t=0$ 时波形图如图 6.6-4 所示,试画出(1) $t = \frac{1}{4}T$, $t = \frac{1}{2}T$ 时波形图.(2)画出 $x=0, x=x_1, x=x_2$ 三点振动图线.

解: 根据图 6.6-4 可知在 $t=0$ 时波形图,则经过 $t = \frac{T}{4}$ 后该波沿 x 轴正向传播,传播距离为 $\frac{\lambda}{4}$,因此 $t = \frac{T}{4}$ 后波形整体

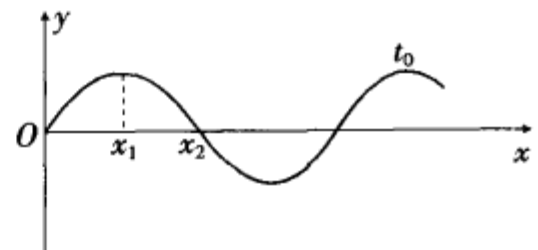


图 6.6-4

向右平移了距离 $\frac{\lambda}{4}$, 得图 6.6-5(a), 同理当 $t = \frac{T}{2}$ 时得图 6.6-5(b) 所示.

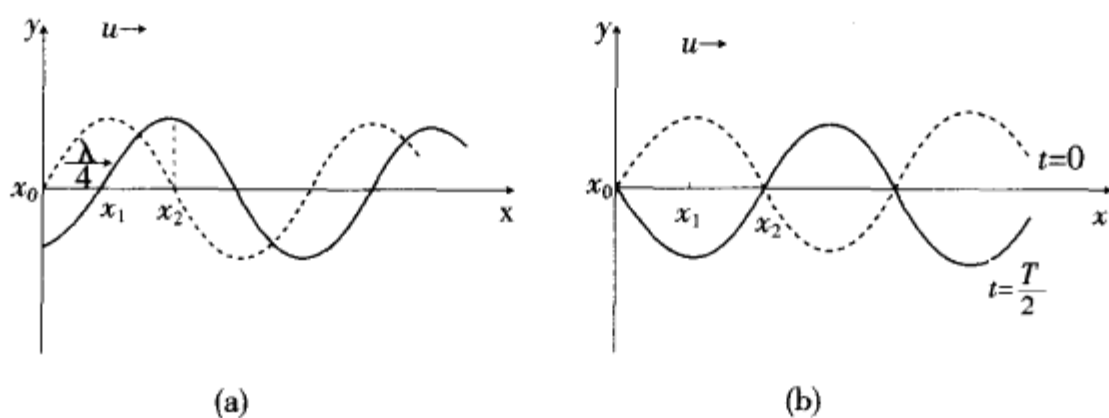


图 6.6-5

由波形图 6.6-4 中可得出 x_0, x_1, x_2 的振动初相分别为 $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ 即 $t=0$ 时在平衡位置下一时刻将向 y 轴负向运动. $\varphi_1 = 0$, 即 $t=0$ 时 x_1 在离平衡位置正向最大处, 下一时刻将向负向运动. $\varphi_2 = -\frac{\pi}{2}$, 即 $t=0$ 时 x_2 在平衡位置处下一时刻将向 y 轴正向运动. 由于各质点振动频率相同, 振幅相同所以依次得到下列三条振动图线图 6.6-6(a)(b)(c)

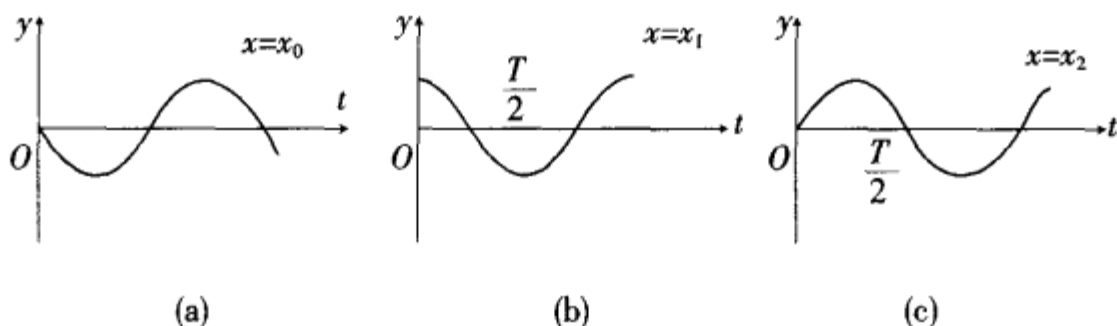


图 6.6-6

例 6.6-2 一波沿 x 轴传播, 观察到 x 轴上两点 x_1 和 x_2 处媒质的质点均作频率为 7.0Hz 的简谐振动, x_1 处位相比 x_2 处落后 $\frac{\pi}{4}$, 已知 $x_2 - x_1 = 3.0\text{cm}$.

- (1) 试问此波是沿正 x 方向传播, 还是沿着 x 轴反方向传播(设 $x > 3\text{cm}$)?
- (2) 试求波长 λ 和波速 u .

解法一: 在波的传播过程中, 离波源越远的点, 振动位相越落后, 既然 x_1 处位相比 x_2 落后, 可见波是沿负 x 方向传播.

根据(6.6-1), (6.6-2)式得

$$\lambda = \frac{2\pi}{\Delta\varphi}(x_2 - x_1) = \frac{2\pi}{\pi/4} \times 3.0 = 24\text{cm}$$

$$u = \lambda\nu = 24 \times 7 = 168\text{cm/s}$$

解法二: 由于振动的周期性, x_1 处振动位相比 x_2 处落后 $\frac{\pi}{4}$, 也可认为 x_1 处位相比 x_2 处超前了 $2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7}{4}\pi$, 因而可认为波沿 x 正向传播, 此时波长与波速分别为

$$\lambda = \frac{2\pi}{7/4\pi} = 3.4\text{cm}$$

$$u = \lambda\nu = \frac{24}{7} \times 7 = 24\text{cm/s}$$

§ 6.7 简谐平面波的波动方程

波动是振动状态的传播过程,波动方程就是要能定量地描述在任一时刻离开波源任一位置处的振动状况.

设有一列平面简谐波沿 x 水平方向传播,如果为横波,则各质元均在 y 垂直方向振动,取坐标原点为 O ,则其振动方程为

$$y_0 = A \cos(\omega t + \varphi)$$

式中 A 为振幅, ω 为振源圆频率, φ 为 O 点的初相.

设波速为 u ,波从 O 点传到距离为 x 的 p 点处所需时间为 $\Delta t = \frac{x}{u}$,因此 p 点的振动要比 O 点振动状态落后一个位相

$$\begin{aligned} y &= A \cos[\omega(t - \Delta t) + \varphi] \\ &= A \cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi] \end{aligned} \quad (6.7-1)$$

$$\text{如取 } O \text{ 点初相 } \varphi = 0 \text{ 则 } y = A \cos\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) \quad (6.7-2)$$

上面(6.7-1)(6.7-2)式即为平面简谐波的波动方程.

根据 $\omega = 2\pi\nu$, $u = \lambda\nu$,波动方程可改写为

$$\begin{aligned} y &= A \cos\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) \\ &= A \cos 2\pi\left(\nu t - \frac{x}{\lambda}\right) \end{aligned} \quad (6.7-3)$$

$$= A \cos\left(2\pi\nu t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) \quad (6.7-4)$$

波动方程意义在于当 $x = x_1$ 一定时,即表示在离原点距离为 x_1 处该质元的振动方程(如图 6.7-1(a)),当 $t = t_1$ 一定时波动方程反映的是在 t_1 时刻的波形方程(如图 6.7-1(b)),如果 x, t 均变化则可得到不同时刻的波形图(如图 6.7-1(c))由

$$\begin{aligned} y &= A \cos\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) \\ y' &= A \cos\omega\left(t + \Delta t - \frac{x + \Delta x}{u}\right) \end{aligned}$$

在 $x = u\Delta t$ 处, $y = y'$ 这表示在 Δt 时间内将 x 处振动状态移到了 $x + \Delta x$ 处,所以波速 $u = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ 也叫做相速.

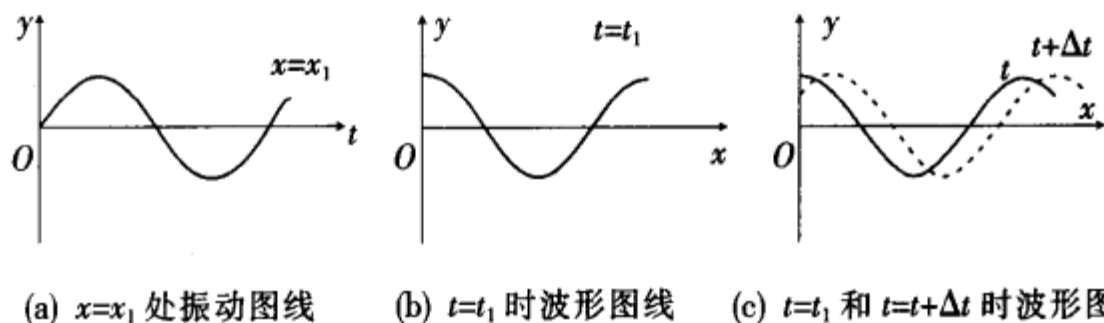


图 6.7-1

例 6.7-1 超声波清洗器向水中发出超声波的波动方程为 $y = 1.0 \times 10^3 \cos(3 \times 10^5 t - 200x)$ (m) 求(1)波的振幅与频率.(2)超声波在水中波速与波长.(3)距波源为 0.20m 和 0.24m 二点的位相差.

解:(1) $y = 10 \times 10^{-3} \cos(3 \times 10^5 t - 200x)$ ①

$$y = A \cos\left(2\pi\nu t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) \quad ②$$

将①与②式比较可得 $2\pi\nu = 3 \times 10^5 \quad \nu = \frac{3 \times 10^5}{2\pi} = 4.78 \times 10^4 (\text{Hz})$

(2) $\frac{2\pi}{\lambda} = 200 \quad \lambda = \frac{2\pi}{200} = 3.14 \times 10^{-2} (\text{m})$

$$u = \lambda\nu = \frac{2\pi}{200} \times \frac{3 \times 10^5}{2\pi} = 1.5 \times 10^3 (\text{m/s}) \quad ③$$

(3) $\Delta x = x_2 - x_1 = 0.24 - 0.20 = 0.04 (\text{m})$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x = \frac{2\pi \times 0.04}{\pi \times 10^{-2}} = 8 (\text{rad}) \quad ④$$

§ 6.8 波的能量

波在传播过程中取一体积元 ΔV 媒质密度为 ρ , 则该体积元内质元的动能为

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} \Delta m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \rho \Delta V \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2} \rho \Delta V A^2 \omega^2 \sin^2 \omega \left(t - \frac{x}{u}\right) \quad (6.8-1)$$

该体积元内包含势能

$$\Delta E_p = \frac{1}{2} \rho \Delta V A^2 \omega^2 \sin^2 \omega \left(t - \frac{x}{u}\right) \quad (6.8-2)$$

体积元中总能量

$$\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_p = \rho \Delta V A^2 \omega^2 \sin^2 \omega \left(t - \frac{x}{u}\right) \quad (6.8-3)$$

单位体积中包含能量即能量密度为

$$\epsilon = \frac{\Delta E}{\Delta V} = \rho A^2 \omega^2 \sin^2 \omega \left(t - \frac{x}{u}\right)$$

平均能量密度

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \quad (6.8-4)$$

在垂直于波传播方向上单位时间内通过面元 s 的平均能量叫做平均能流 \bar{p}

$$\bar{p} = \bar{\epsilon} \cdot su = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 us \quad (6.8-5)$$

单位时间内通过波线垂直方向上单位面积上的平均能量, 叫做能流密度也叫做波的强度 I .

$$I = \frac{\bar{\epsilon}}{\Delta t \cdot s} = \frac{\bar{p}}{s} = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 u \quad (6.8-6)$$

波的强度与波的振幅平方、频率平方和波速及媒质密度成正比, 这个结论不仅对机械波对电磁波也同样成立.

例 6.8-1 一波源以 35000W 的功率向空间均匀发射球面波. 在某处测得波的平均能量密度为 $7.8 \times 10^{-15} \text{J/m}^3$, 求该处离波源的距离. 已知波的传播速度为 $3.0 \times 10^8 \text{m/s}$.

解: 波在单位时间内通过波线垂直方向上通过 s 面元的平均能量按(6.8-6)式得

$$\bar{p} = Is = I \cdot 4\pi r^2$$

而平均能流与能量密度关系由(6.8-5)式得

$$\bar{p} = \bar{\epsilon} u \cdot 4\pi r^2$$

$$r = \sqrt{\frac{\bar{p}}{4\pi\bar{\epsilon}u}}$$

代入数据得

$$r = \sqrt{\frac{35000}{4\pi \times 7.8 \times 10^{-15} \times 3.0 \times 10^8}} = 34.5 (\text{km})$$

例 6.8-2 一正弦空气波,沿直径为 14cm 的圆柱形管传播,波的平均强度为 $9.0 \times 10^{-3} \text{W/m}^2$, 频率为 300Hz, 波速为 300m/s. 问波中的平均能量密度各是多少? 每两个相邻同相面间有多少能量?

解:根据波的强度 I 与平均能量密度 $\bar{\epsilon}$ 的关系 $I = \bar{\epsilon}u$ 得

$$\bar{\epsilon} = \frac{I}{u} = \frac{9.0 \times 10^{-3}}{300} = 3.0 \times 10^{-5} (\text{J/m}^3)$$

又最大能量密度 $\epsilon = 2\bar{\epsilon}$ 得 $\epsilon = 2\bar{\epsilon} = 2 \times 3.0 \times 10^{-5} = 6.0 \times 10^{-5} (\text{J/m}^3)$.

两个相邻同相面的间距为 λ , 其间含有能量

$$\begin{aligned} E &= \bar{\epsilon}V = \bar{\epsilon} \cdot \lambda s = \epsilon \frac{u}{\nu} s \\ &= 6.0 \times 10^{-5} \times \frac{300}{300} \times \frac{1}{4} \times \pi \times (0.14)^2 = 4.62 \times 10^{-7} (\text{J}) \end{aligned}$$

§ 6.9 惠更斯原理 波的反射、折射和衍射

1. 惠更斯原理

当波在连续介质中传播时,介质中任何一点的振动将直接引起邻近各点的振动. 因此,可将波动到达的任一点都看作新的波源. 例如,水面波在前进中遇到一个障碍物 AB , AB 上有一小孔 a , 小孔的孔径 a 与波长 λ 相比较为很小(如图 6.9-1), 可以看到,穿过小孔的波是圆形波,与原来波的形状无关,这说明小孔已起了一个新波源的作用.

惠更斯总结了上述现象于 1690 年提出,媒质中波动传到的各点,都可看作是发射子波的波源;在其后的任一时刻,这些子波的包迹就决定新的波阵面. 这一论断和相应的波传播的几何作图法统称为惠更斯原理.

根据惠更斯原理可以很容易地得出在一均匀媒质中球面波或平面波,以波速 u 传播,在其下一时刻 $t + \Delta t$ 时这些子波的包迹,即决定新的波阵面. 见图 6.9-2(a)(b).

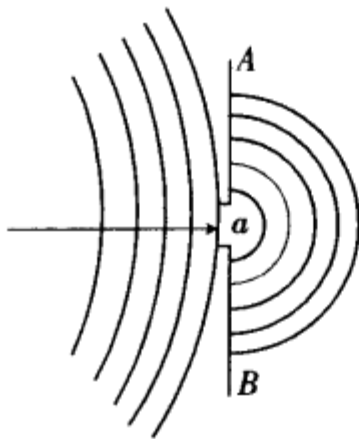


图 6.9-1
穿过小孔的圆形波

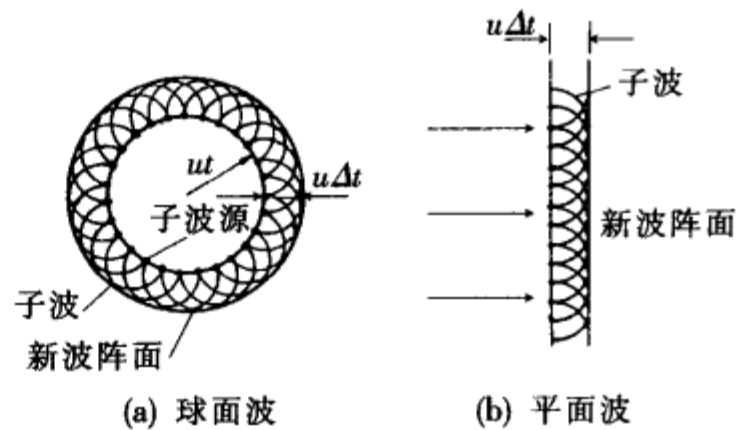


图 6.9-2 惠更斯原理图

惠更斯原理对任何波动过程都是适用的,不论是机械波或电磁波,不论这些波动经过的媒质是均匀的或非均匀的,只要知道了某一时刻的波阵面,就可根据这一原理用几何方法来决定下一时刻的波阵面,因而在很广泛范围内解决了波的传播问题.

2. 波的反射与折射

当波在传播过程中遇到两种媒质的交界面时,一部分会返回原媒质中,一部分将透入第二种媒质中继续传播;前者叫做反射波,后者叫透射波. 当入射波方向与两媒质交界面垂直时,反射波的方向与入射波的方向相反,透射波方向与入射波方向相同. 当入射波方向与交界面不垂直时,反射波与透射波(这时叫折射波)均偏离入射波的传播方向,产生反射与折射现象.

下面就用惠更斯原理来解释反射与反射现象并导出反射与折射中所遵从规律。

a) 波的反射

设有一平面波向两媒质的分界面 MN 传播(图 6.9-3), 当 $t = t_0$ 时, 入射波的波阵面达到 AB 位置(波阵面为通过 AB 线并与图面垂直的平面). A 点先与分界面相遇. 此后, 波阵面上 A_1, A_2, \dots 各点先后到达分界面上 E_1, E_2, \dots 各点, 直到 $t = t_1$ 时, B 点到达 C 点. 当波动传播到分界面上即发生反射.

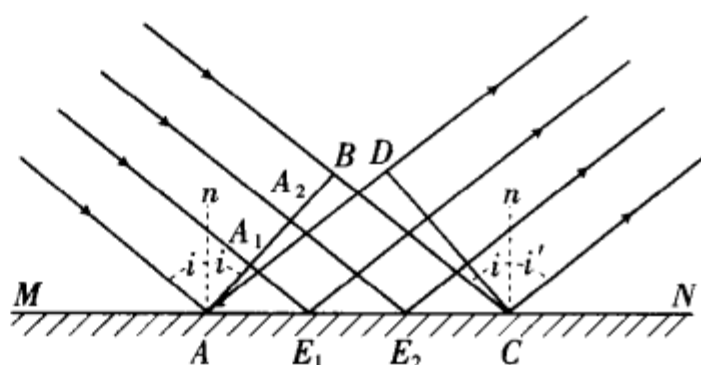


图 6.9-3 波的反射

设以入射波到达分界面上的各点作为子波的波源, 并设 $AA_1 = A_1A_2 = A_2B$, u 为媒质中的波速, 当 $t = t_1$ 时, 从 A_1, E_1, E_2, \dots 各点发射的子波与图面相交的交线分别是半径为 $u(t_1 - t_0)$, $\frac{2u(t_1 - t_0)}{3}$, $\frac{u(t_1 - t_0)}{3}, \dots$ 的圆弧. 这些圆弧的包迹显然是通过 C 点并与这些圆弧相切的直线 CD , 因而当 $t = t_1$ 时, 反射波的波阵面为经过 CD 并与图面垂直的平面. 与波阵面 AB 垂直的线则为 BC 线, 是入射波的波线, 称为入射线, 与波阵面 CD 垂直的线, 例如 AD 线, 是反射波的波线, 称为反射线, 令 n 为分界面的法线, 入射线与法线夹角 i 叫做入射角, 反射线与法线夹角 i' 叫做反射角.

由惠更斯原理作图法可得到下述结论: 入射角 i 等于反射角 i' . $i = i'$

入射线、反射线和分界面的法线均都在同一平面内.

以上两个结论叫做波的反射定律.

b) 波的折射

当波动从一媒质进入另一种媒质时, 由于在两种媒质中的波速不相同, 在分界面上要发生折射现象. 设 u_1 表示波动在第一种媒质中的波速, u_2 表示波动在第二种媒质中的波速, MN 为两种媒质的分界面(图 6.9-4).

当 $t = t_0$ 时, 入射波的波阵面到达 AB 位置, 而当 $t = t_1$ 时, B 点到达 C 点, 与反射相同, 入射波的波阵面到达分界面上的各点 A, E_1, E_2, \dots 都可看作子波的波源. 但折射波是在第二种媒质中进行的, 所以子波的波速应为 u_2 , 因此在 $t = t_1$ 时, 从 A, E_1, E_2, \dots 各点发出的子波与图面相交的交线分别为半径等于 $u_2(t_1 - t_0)$, $\frac{2u_2(t_1 - t_0)}{3}$, $\frac{u_2(t_1 - t_0)}{3}, \dots$ 的圆弧, 这些圆弧的包迹显然是通过 C 点

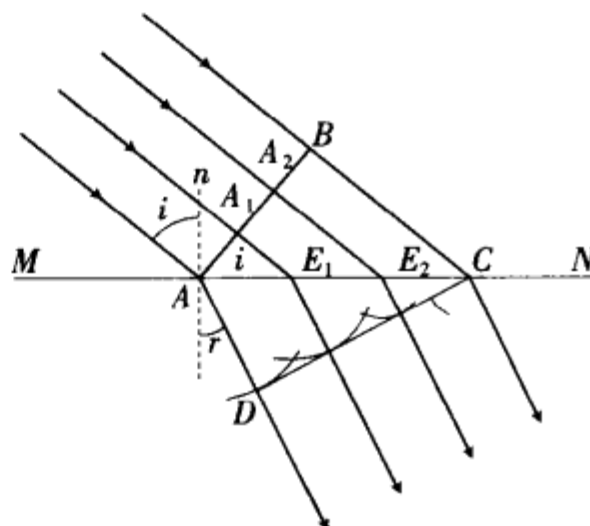


图 6.9-4 波的折射

并与这些圆弧相切的直线 CD , 因而 $t = t_1$ 时折射波的波阵面是通过 CD 并与图面垂直的平面. 与这平面垂直的直线, 例如 AD , 是折射波的波线, 称为折射线, 折射线与分界面的法线 n 的夹角 r 叫做折射角.

根据上述作图法, 可得到以下结论: 因 $i = \angle BAC$, $r = \angle ACD$, 所以 $BC = u_1(t_1 - t_0) = AC \sin i$, $AD = u_2(t_1 - t_0) = AC \sin r$, 两式相除, 得

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{u_1}{u_2} = n_{21}$$

上式指出, 不论入射角大小如何, 入射角的正弦与折射角的正弦之比等于波动在第一媒质中的波速与第二媒质中波速之比, 对于给定的二种媒质而言, 比值 n_{21} 叫做第二媒质对第一媒质的相对折射率. 由图中可以看出, 入射线、折射线与分界面的法线均都在同一平面内. 以上两个结论叫做波的折射定律.

波在两种媒质交界面上垂直反射时,由于两种媒质密度及波速不同,反射波的位相将发生变化.如果波是从波阻(媒质的密度和波速的乘积叫做这种媒质的波阻)较小的介质入射到波阻较大媒质中,并且在分界面处反射,则在反射点处反射波的相位与入射波的相位差 π ,这种反射叫半波反射,通常将这种现象叫做半波损失.

图 6.9-5(a)表示手握细弦产生一横波遇到空气后反射,在反射点为自由端,振幅最大.

图 6.9-5(b)表示手握细弦产生一横波,当其反射端固定时,由于反射波出现半波损失,因此固定端入射波与反射波位相相差 π ,迭加后反射点保持不动.

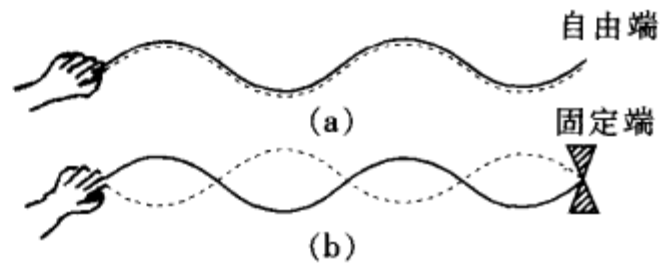


图 6.9-5 半波损失

3. 波的衍射

波在传播过程中遇到障碍物时,它能绕过障碍物边缘偏离其原来传播方向继续传播,波线发生弯曲这种现象叫做波的衍射.

根据惠更斯原理,可以极为简单地说明波在传播中途经一障碍物时,其传播方向绕过障碍物发生偏折的衍射现象.例如,一列平面波通过狭缝后能传到按直线前进应成为阴影的区域内.根据惠更斯原理可以作出简单的解释:因为缝处各点作为子波源,它们反射的各子波的包迹为新波阵面,此波阵面在缝缘处确实应进入缝两侧的阴影区域,如图 6.9-6.

波的衍射程度是与障碍物的大小有关,所指障碍物的大小是相对波长来说的,障碍物线度越小,波长越长,衍射现象越严重.衍射现象是波动的特征之一.

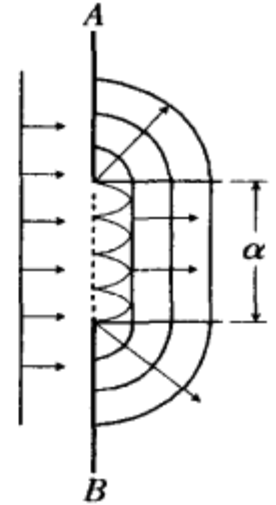


图 6.9-6 波的衍射

§ 6.10 波的叠加 波的干涉

当空间存在两个(或两个以上)振源发出的波时,当这几列波某时刻在空间某点相遇时,该点的扰动就是各个波在该点产生扰动的矢量和.下一时刻这几列波仍然保持其原有特性向前传播,好像中途没有相遇过一样,这就叫做波的叠加原理.

当有频率相同,振动方向相同两列波在空间交叠时,空间会出现某些地方振动加强,某些地方振动减弱,空间出现稳定的干涉图样,这就叫做波的干涉.这样两列波叫相干波.图 6.10-1 表示两个振源发出的两列相干水面波的干涉图样.

设有两列相干波自波源 s_1, s_2 发出,两振源的初相相同.空间任一点 P 到 s_1, s_2 的距离分别为 r_1, r_2 (图 6.10-2), 则该两列波在 P 点产生的位相差根据(6.6-1)式为:

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda}$$

式中 λ 是波长.当 $\Delta\varphi = k \cdot 2\pi$ (k 为整数) 或波程差

$$\Delta = r_2 - r_1 = k\lambda$$

时, P 点的合振动加强.

当

$$\Delta\varphi = (2K + 1)\pi$$

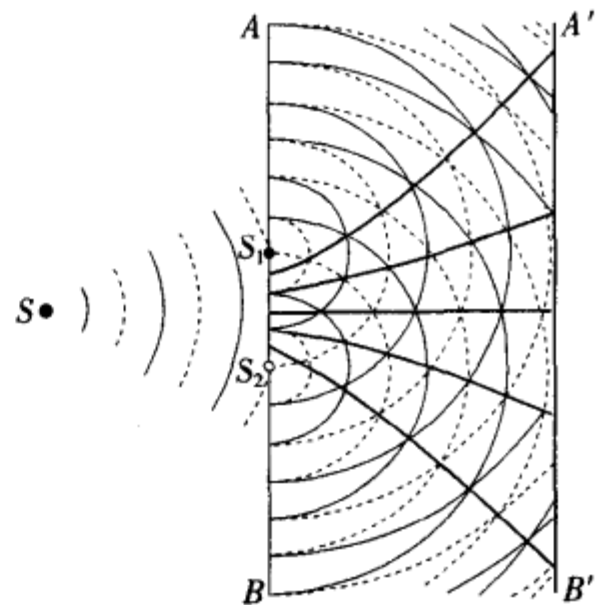


图 6.10-1 波的干涉

$$(6.10-1)$$

$$(6.10-2)$$

$$(6.10-3)$$

或
$$\Delta = r_2 - r_1 = (2k+1)\frac{\lambda}{2} \quad (6.10-4)$$

时, P 点的合成振动相消. 可见 P 点振动强弱是由波程差 $\Delta = r_2 - r_1$ 决定, 它是 P 点位置函数. 当 r_1, r_2 比 S_1, S_2 间距离 d 大得多时, 波程差表达式可简化为

$$\Delta = r_2 - r_1 \approx d \sin \theta$$

其中 θ 是 S_1, S_2 的连线的中垂线与 OP 间的夹角 (O 为 S_1, S_2 的中点), 这时波程差仅是由方位角 θ 决定.

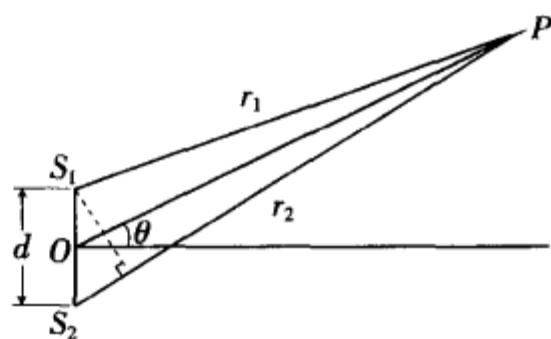


图 6.10-2

当弦上同时存在同频率、同方向振动的右行波和左行波 (如入射波和反射波) 时, 弦上各点的振动位移就是这二列波所产生的位移的代数和. 弦上的合成波扰动就是两列波扰动的叠加.

例 6.10-1 如图 6.10-3 所示, 地面上的波源 S 与一探测器 D 之间的距离为 d , 在 D 处测得从 S 直接发出的波与从 S 发出又经高度为 H 的水平层 B 反射后的波的合成信号强度最大, 当水平层逐渐升高 h 距离时, 在 D 处测到信号消失, 设波在水平层的反射角等于入射角, 不考虑大气的吸收, 求波长 λ 与 d, h, H 的关系.

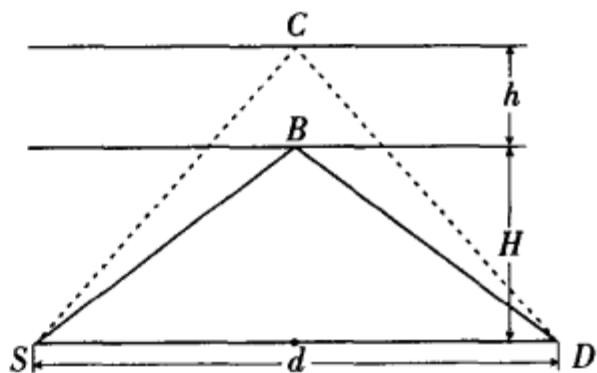


图 6.10-3

解: 经 B 点反射波与直射波到达 D 处波迭加后加强条件为

$$(\overline{SB} + \overline{BD}) - \overline{SD} = \pm k\lambda$$

即
$$2\sqrt{H^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} - d = \pm k\lambda \quad k=0, 1, 2, \dots$$

C 点反射的波与直射波在 D 点相消的条件为

$$(\overline{SC} + \overline{CD}) - \overline{SD} = \pm (2k+1)\frac{\lambda}{2} \quad k=0, 1, 2, \dots$$

两式相减得
$$2\sqrt{(H+h)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} - 2\sqrt{H^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \frac{\lambda}{2}$$

$$\lambda = 4\left[\sqrt{(H+h)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} - \sqrt{H^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}\right]$$

$$= 2[\sqrt{4(H+h)^2 + d^2} - \sqrt{4H^2 + d^2}]$$

本题中由于 B, C 处反射情况相同, 即使在反射面上出现半波损失, 二次测量不会对测量结果产生影响.

* § 6.11 驻波

两个振幅相同的相干波 (频率相同、振动方向相同) 沿相反方向传播时迭加而成的波叫做驻波.

设 $x=0$ 处振动方程为 $y = A \cos \omega t$, 则沿 x 正向或反向传播的两简谐波方程为

$$y_+ = A \cos\left(2\pi\gamma t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

$$y_- = A \cos\left(2\pi\gamma t + \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

合成波

$$y = y_+ + y_- = 2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cos 2\pi\gamma t$$

合成振动频率与原振动频率相同, 合成各点都在作简谐振动, 但振幅随 x 值不同而不同, 在 $x = k$

$\times \frac{\lambda}{2}$ 处, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 振幅最大, 称为波腹; 在 $x = \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2}$ 处, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 振幅为零. 实际上这些点处是不振动, 称为波节. 相邻两波腹或波节的距离都是 $\frac{\lambda}{2}$, 因而经常利用驻波来测定波长.

例 6.11-1 A, B 为二振幅为 A_1 的相干波源, 相距为 30m, $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$, 传播速度 400m/s, 频率 $\nu = 100\text{Hz}$, 求

1. A, B 连线上, A 波源左侧和 B 波源右侧各点合成振幅.
2. A, B 之间因干涉而处于静止状态各点位置.

解: 波长 $\lambda = \frac{u}{\nu} = \frac{400}{100} = 4(\text{m})$

$$x_B - x_A = 30 = \frac{30}{4} \lambda = 7.5\lambda$$

作图 6.11-1, 设在 A 左侧距离为 x 处的 P 点, 二列相干波叠加后的位相差为

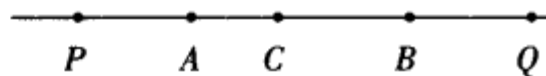


图 6.11-1

$$\begin{aligned} \Delta &= (\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{2\pi(x_2 - x_1)}{\lambda} = (\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{2\pi(x_B - x_A)}{\lambda} \\ &= \pi - \frac{2\pi \times 7.5\lambda}{\lambda} = \pi - 15\pi = -14\pi \dots \end{aligned}$$

则 P 点合成振动最强 $A_P = 2A_1$

设在 B 的右侧距离为 x 处的 Q 点, 二列相干波叠加后的位相差为

$$\begin{aligned} \Delta &= (\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{2\pi(x_2 - x_1)}{\lambda} = (\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{2\pi(x_B - x_A)}{\lambda} \\ &= \pi + \frac{2\pi \times 7.5\lambda}{\lambda} = \pi + 15\pi = 16\pi \end{aligned}$$

Q 处合成振动也是加强 $A_Q = 2A_1$

设在两波源 A, B 之间有一 C 点, 与 A 源相距为 x , 则由 A, B 波源发出的二列振幅相同, 沿相反方向传播的相干波迭加后成驻波. C 点振动位相为

$$\begin{aligned} \Delta &= \varphi_2 - \varphi_1 - \frac{2\pi(7.5x - x - x)}{\lambda} \\ &= \pi - 15\pi + \frac{4\pi x}{\lambda} = -14\pi + \frac{4\pi x}{\lambda} \end{aligned}$$

在 A, B 之间因干涉而处于静止状态位置(即波节)必须满足

$$\begin{aligned} \Delta &= (2k + 1)\pi \\ -14\pi + \frac{4\pi x}{\lambda} &= (2k + 1)\pi \end{aligned}$$

或 $x = (2k' + 1) \frac{\lambda}{4}$ 处合成振动最小.

将 $\lambda = 4\text{m}$ 代入, 对应 $k' = 0, 1, 2, \dots$ 得 $x = 1, 3, 5, \dots, 27, 29\text{m}$ 处均为波节所在处.

* § 6.12 多普勒效应

以上讨论涉及的波源与观察者(或接收者)都在同一媒质中且相对媒质静止时情况, 则波的频率就是波源的振动频率, 观察者所接收到的频率就是波源的振动频率. 如果波源或观察者相对媒质运动时, 则观察者所接收到的频率(单位时间内所接收到的波数)与波源的振动频率(单位时间内波源所发出的波数)不同, 这种现象叫做多普勒效应.

为简单起见, 下面只讨论波源 S 与观察者 O 二者运动发生在其连接直线上, 且媒质静止不动情况下的多普勒效应.

设以 v_s 表示波源相对于媒质速度, v_o 表示观察者相对于媒质的运动速度, 以 u 表示波在媒质中的传播速度, 在机械波的情形下, u 与波源及观察者的速度无关.

下面分四种情况讨论.

(1) 波源与观察者相对于媒质均为静止时, $v_s = 0, v_o = 0$.

观察者所感觉到的或仪器接收到的频率 ν' 等于单位时间内通过观察者所在处的波数. 单位时间内波源振动 ν 次, 波传播的距离长度为 u , 其间共有 ν 个波长. 观察者接收到一个波长就感觉到一次振动, 所以

$$\nu' = \frac{u}{\lambda} = \nu \quad (6.12-1)$$

即观察者所接收到的频率与波源的振动频率相同.

(2) 波源 S 相对媒质静止, 观察者 O 以速度 v_o 相对于媒质运动.

图 6.12-1 表示波源 S 在媒质中静止, 观察者 O 以速度 v_o 向波源运动. 各图表示波面, 相邻波面相距一个波长. 如果观察者在媒质中以速度 v_o 朝向波源 S 运动, 他在单位时间内多接收了 v_o/λ 个波. 所以他单位时间内接收到的波数, 即他观察到的频率 ν' 应为

$$\nu' = \frac{u}{\lambda} + \frac{v_o}{\lambda} = \frac{u + v_o}{\lambda} = \frac{u + v_o}{u/\nu} = \left(\frac{u + v_o}{u} \right) \nu \quad (6.12-2)$$

如果观察者以速度 v_o 离开波源运动, 则观察者单位时间内比静止时少接收到 v_o/λ 个波, 所以他观察到的频率为

$$\nu' = \frac{u}{\lambda} - \frac{v_o}{\lambda} = \left(\frac{u - v_o}{u} \right) \nu \quad (6.12-3)$$

可将式(6.12-2)和(6.12-3)合并, 写成

$$\nu' = \left(\frac{u \pm v_o}{u} \right) \nu \quad (6.12-4)$$

上式适用在波源静止不动, 观察者朝向波源运动时取正号, 观察者背离波源运动时, 取负号.

(3) 波源 S 以速度 v_s 相对于媒质运动, 观察者相对于媒质静止时.

当波源 S 向观察者 O 运动时, 将导致波长的缩短. 可以想到, 波源在前进过程中, 不断地发射出波, 已经发出的波仍以波速 u 前进, 而后继波的波源地点(波阵面球面中心)向前移了, 所以波源前面的波阵面被挤紧, 因此波长减小了. 波源后面的波面稀疏了, 因此波长增大了(图 6.12-2). 设波源的振动频率为 ν , 前进的速度为 v_s , 则在每一振动周期内, 振源前进了 v_s/ν 的距离, 也就是在波前进的方向上每一个波长缩短的长度. 所以在观察者处所接收到的波长不是 $\lambda = u/\nu$, 而是

$$\lambda' = \frac{u}{\nu} - \frac{v_s}{\nu} = \frac{u - v_s}{\nu} \quad (6.12-5)$$

所以观察者所接收到的频率为

$$\nu' = \frac{u}{\lambda'} = \frac{u}{\frac{u - v_s}{\nu}} = \left(\frac{u}{u - v_s} \right) \nu \quad (6.12-6)$$

观察者接收到的频率 ν' 比波源的振动频率大.

如果波源以 v_s 离开观察者, 则观察者在后方所接收到的波长比 $\lambda = u/\nu$ 增大了 v_s/ν , 即

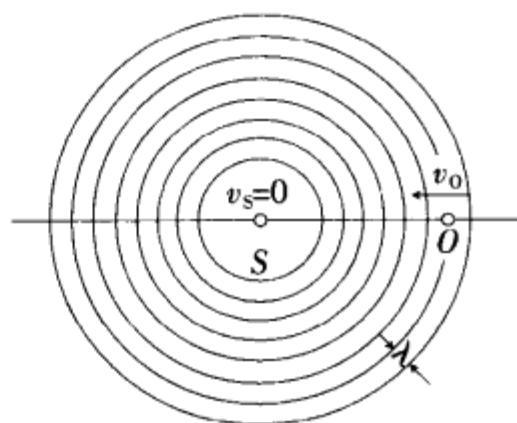


图 6.12-1 观察者向波源运动时的多普勒效应

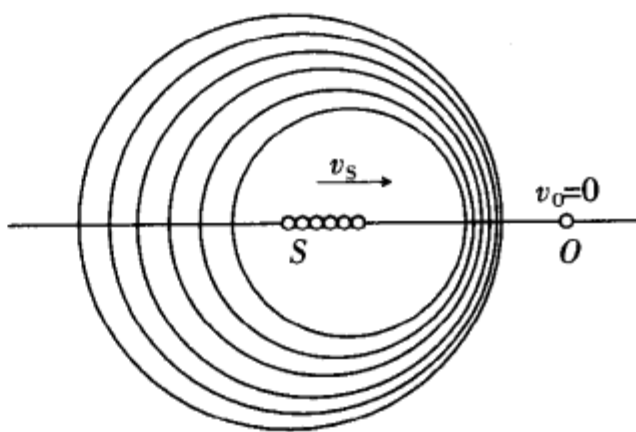


图 6.12-2 波源 S 在振动过程中前进, 前方的波长减小, 后方的波长增大, 因而产生多普勒效应

$$\lambda' = \frac{u}{\nu} + \frac{v_s}{\nu} = \frac{u + v_s}{\nu},$$

$$\nu' = \frac{u}{\lambda'} = \frac{u}{\frac{u + v_s}{\nu}} = \left(\frac{u}{u + v_s} \right) \nu \quad (6.12-8)$$

可以将式(6.12-6)和(6.12-8)合并,写成

$$\nu' = \left(\frac{u}{u + v_s} \right) \nu \quad (6.12-9)$$

上式适用在观察者不动,波源朝向观察者运动取负号,波源背离观察者运动时,取负号.

(4)波源 S 和观察者 O 同时相对媒质运动时.

在波源和观察者同时运动情况下,观察者接收到的频率 ν' 受上述两种影响,因而不同于波源的振动频率 ν . 如果波源和观察者在它们的连线方向上相向运动时,则

$$\nu' = \left(\frac{u + v_0}{u - v_s} \right) \nu \quad (6.12-10)$$

如果波源和观察者在它们连线上反向运动时,则

$$\nu' = \left(\frac{u - v_0}{u + v_s} \right) \nu \quad (6.12-11)$$

多普勒效应在声学上是很重要的现象. 例如,火车驶近我们时,汽笛的音调听来就比火车静止时汽笛的音调高,这表明人耳感觉到的频率比汽笛发出的频率增大了;当火车往远处驶去时,汽笛的音调听来变低,这说明我们感觉到的声波的频率变小了.

例 6.12-1 一警报器发出频率为 10^3Hz 的声波,离观察者向一悬崖运动,其速度为 10m/s .

问(1)观察者直接从警报器中听到的声频为多少?

(2)从悬崖上反射的声频是多少? (空气中声速 $u = 340\text{m/s}$)

解:(1)观察者不动,声源在远离观察者运动

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{u}{u + v_s} \nu_0 \\ &= \frac{340}{340 + 10} \times 10^3 = 971(\text{Hz}) \end{aligned}$$

(2)从悬崖上的反射波,相当于波源相向观察者运动

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{u}{u - v_s} \nu_0 \\ &= \frac{340}{340 - 10} \times 10^3 = 1030(\text{Hz}) \end{aligned}$$

本章综合例题

例 6-1 一个水平面上的弹簧振子,弹簧的劲度系数为 k ,所系物体的质量为 M ,振幅为 A . 今有一质量为 m 的小物体自高度 h 处自由下落(图例 6-1). 当振子在最大位移处,小物体正好落在物体 M 上,并粘在一起,这时系统的振动周期、振幅及振动能量有何变化? 如果小物体是在振子到达平衡位置时落在 M 上,这些量又怎样变化?

解:小物体未落下时,弹簧振子的振动周期 $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$,当振子在最大位移处,速度为零,小物体落在物体 M 上发生碰撞,但速度不变,仍为零,所以振动系统的能量不变,振幅也不变. 但振动周期

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}} > T_0$$

当小物体在振子通过平衡位置时落在物体 M 上时,振动周期的变化同上:

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}} > T_0$$

振子在平衡位置时,物体 M 的速度为 v_m ,小物体落在其上后,根据水平方向的动量守恒,两物体的共同速度 v'_m

$$= \frac{M}{M+m}v_m$$

设小物体未落在物体 M 上时,振子的振幅为 A ;小物体落在 M 物体上后,振幅为 A' ,根据简谐振动可知 $v_m =$

$$A\omega \text{ 所以 } \frac{A'}{A} = \frac{v'_m\omega'}{v_m\omega}$$

而

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}} \quad \omega' = \sqrt{\frac{k}{M+m}}$$

于是

$$\frac{A'}{A} = \frac{M}{M+m}\sqrt{\frac{M+m}{M}} = \sqrt{\frac{M}{M+m}} < 1$$

根据简谐振动的能量公式 $E = \frac{1}{2}kA^2$,得

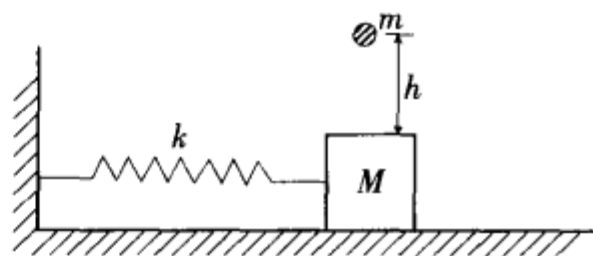
$$\frac{E'}{E} = \frac{A'^2}{A^2} = \frac{M}{M+m} < 1$$

例 6-2 一质量为 M 的盘子系于竖直悬挂的轻弹簧下端,弹簧的劲度系数为 k . 现有一质量为 m 的小物体自离盘高 h 处自由下落掉在盘上,没有反弹(图例 6-2(a)). 如以物体掉在盘上的瞬时作为计时起点,(1)求盘子的振动表达式.(2)问自物体与盘相触时起至盘运动到最低位置需要多长时间?

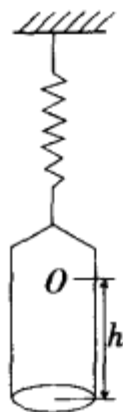
提示:取小物体掉在盘子后的平衡位置为坐标原点,并取位移向下为正方向.

解:空盘振动时,其圆频率: $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{M}}$;小物体掉在盘上后,其振动圆频率: $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{M+m}}$. 这时盘子的平衡位置也变了,设新的平衡位置对应于弹簧的伸长量为 l_2 (图例 6-2(b))则 $kl_2 = (M+m)g$,而物体未掉在盘上时弹簧伸长量设为 l_1 ,则 $kl_1 = Mg$.

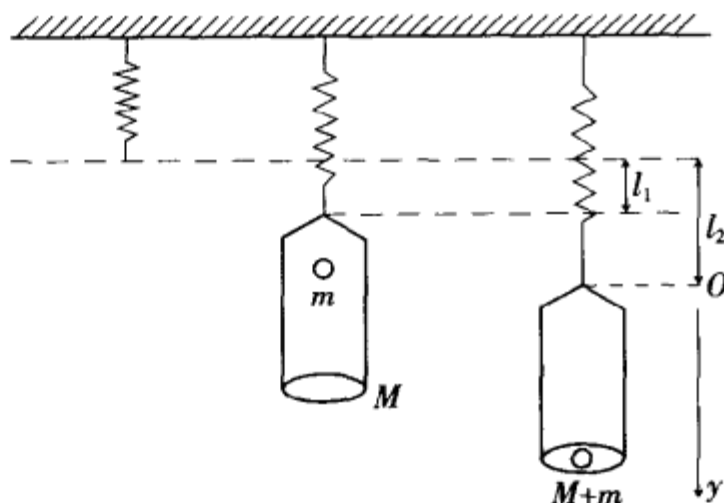
为求盘子的振动方程必须求得振幅和初相,这可以根据初始条件求得. 以新的平衡位置 O 为原点时,在 $t=0$ 时,盘子的初位移 $y_0 = -(l_2 - l_1) = -\left(\frac{M+m}{k}g - \frac{Mg}{k}\right) = -\frac{mg}{k}$. 初速度即为小物体掉在盘上后与 M 的共同速度



图例 6-1



图例 6-2(a)



图例 6-2(b)

由动量守恒得

$$mv_0 = (m+M)V_0$$

而 $v_0 = \sqrt{2gh}$,故有 $V_0 = \frac{m}{m+M}\sqrt{2gh}$

由此根据初始条件可得振幅和初相为

$$A = \sqrt{y_0^2 + \frac{V_0^2}{\omega_2^2}} = \sqrt{\frac{m^2 g^2}{k^2} + \frac{m^2}{(m+M)^2} 2gh} / \left(\frac{k}{m+M}\right)$$

$$= \frac{mg}{k} \sqrt{1 + \frac{2kh}{(M+m)g}}$$

$$\tan \varphi_0 = -\frac{V_0}{\omega y_0}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{V_0}{\omega y_0} \right) = \tan^{-1} \frac{\frac{m}{m+M} \sqrt{2gh}}{\sqrt{\frac{k}{m+M} \left(\frac{mg}{k} \right)}} = \tan^{-1} \sqrt{\frac{2kh}{(M+m)g}}$$

由于 $y_0 < 0, V_0 > 0$, 由参考圆不难看出(或由 $\cos \varphi < 0$ 判定) φ 应在第三象限, 即 $\pi < \varphi_0 < \frac{3}{2}\pi$,

$\varphi = -\left(\pi - \arctan \sqrt{\frac{2kh}{(m+M)g}}\right)$ 注意到 $\cos(\theta + \pi) = -\cos \theta$, 于是盘子的振动方程是

$$y = -\frac{mg}{k} \sqrt{1 + \frac{2kh}{(M+m)g}} \cos \left[\sqrt{\frac{k}{M+m}} t + \arctan \sqrt{\frac{2kh}{(M+m)g}} \right]$$

上式若简化为 $y = A \cos(\omega t + \varphi)$

式中 $\varphi = -\left(\pi - \arctan \sqrt{\frac{2kh}{(m+M)g}}\right), \omega = \sqrt{\frac{k}{m+M}}$

而盘运动到最低点时与 $y = A$ 相对应即 $\cos(\omega t + \varphi) = 1$ 即 $\omega t + \varphi = 0$, 得

$$t = -\frac{\varphi}{\omega} = \frac{\pi - \arctan \sqrt{\frac{2kh}{(m+M)g}}}{\sqrt{\frac{k}{m+M}}}$$

例 6-3 一单摆在空气(室温 20°C)中来回摆动, 其摆长 $l = 1.0\text{m}$, 衰减因子 $\beta = 6.04 \times 10^{-4}\text{s}^{-1}$ 求 (1) 摆的周期. (2) 振幅减小 10% 所需的时间. (3) 能量减小 10% 所需时间. (4) 从以上所得结果说明空气的粘滞性对单摆周期、振幅和能量的影响.

解: (1) 单摆固有频率 $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{9.8}{1.0}} = 3.13\text{s}^{-1}$

空气作用在摆球上有粘滞阻力, 但 $\beta \ll \omega_0$, 于是 $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \approx \omega_0$, 因而有阻尼时摆的周期 $T = \frac{2\pi}{\omega} \approx \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{3.13} = 2(\text{s})$

(2) 在有阻尼情况下, 摆的振幅 $A' = Ae^{-\beta t}$

设振幅减小 10% 所需时间为 t_1 , 则有 $0.9A = Ae^{-\beta t_1}$

$$t_1 = \frac{\ln \frac{1}{0.9}}{\beta} = \frac{\ln \frac{1}{0.9}}{6.04 \times 10^{-4}} = 174(\text{s}) = 3(\text{min})$$

(3) 因为能量与振幅平方成正比, 所以有

$$\frac{E'}{E} = \left(\frac{A'}{A}\right)^2 = e^{-2\beta t_2}$$

设能量减少 10% 所需的时间为 t_2 , 则有 $0.9 = e^{-2\beta t_2}$

$$t_2 = \frac{\ln \frac{1}{0.9}}{2\beta} = \frac{\ln \frac{1}{0.9}}{2 \times 6.04 \times 10^{-4}} = 87(\text{s}) \approx 1.5(\text{min})$$

(4) 从以上结果可见, 空气的粘滞性对单摆的周期几乎没有影响, 而对振幅和能量有显著的影响. $t_2 < t_1$ 表明能量比振幅要衰减得快. $t_2 \approx 44T$, 即来回摆动大约 44 次, 其能量就减少了 10%, 因此要维持等幅振动, 就需要设法补充能量.

例 6-4 N 个同方向、同频率的简谐振动, 它们的振幅相等, 而且依次间的周相差为 $\Delta\varphi$, 如适当选择计时起点, 使某个谐振动初相为零, 则这 N 个谐振动的振动表达式分别为 $x_1 = A_1 \cos \omega t$, $x_2 = A_2 \cos(\omega t + \Delta\varphi)$, $x_3 = A_3 \cos(\omega t + 2\Delta\varphi)$, \dots , $x_N = A_N \cos[\omega t + (n-1)\Delta\varphi]$, 式中 $A_1 = A_2 = A_3 = \dots = A_N = A_0$, 求它们合振动的振幅和初相.

提示: 对于 N 个同方向、同频率谐振动合成, 可以采用旋转矢量法相加, 以避免繁杂的数学运算.

解: 将 N 个旋转矢量 A_1, A_2, \dots, A_N 依次相接(如图例 6-4). 根据多个矢量合成法则, 由 A_1 的始端 O 指向 A_N 的末端 Q 的矢量 A 就是合矢量.

分别作 A_1, A_2 的垂直平分线相交于 P 点. 这两垂直平分线间夹角即 $\Delta\varphi$, 而矢量 A_1 或 A_2 对 P 张角也为 $\Delta\varphi$. 所以合矢量 A 对 P 所张的角 $\angle OPQ = N\Delta\varphi$. 因 $PO = PB = \dots = PQ = R$. 于是, 由几何关系有

$$A = 2R \sin\left(\frac{N\Delta\varphi}{2}\right)$$

$$A_0 = 2R \sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)$$

两式相比, 得合振动的振幅

$$A = A_0 \frac{\sin\left(\frac{N\Delta\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}$$

又等腰三角形 $\triangle POQ$ 中 $\angle POQ = \frac{1}{2}(\pi - N\Delta\varphi)$

等腰三角形 $\triangle POB$ 中 $\angle POB = \frac{1}{2}(\pi - \Delta\varphi)$

从而得合振动的初相 $\varphi_0 = \angle POB - \angle POQ = \frac{N-1}{2}\Delta\varphi$

于是, 振动表达式为

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0) = A_0 \frac{\sin\left(\frac{N\Delta\varphi}{2}\right)}{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}} \cos\left(\omega t + \frac{N-1}{2}\Delta\varphi\right)$$

例 6-5 三个质量均为 m 的质点, 由未伸长的质量不计的轻弹簧连接在一起达到平衡. 弹簧劲度系数均为 k , 三个质点限制在圆圈上. 如图例 6-5 所示.

(1) 若每个质点偏离平衡位置的小位移分别为 s_1, s_2 和 s_3 , 试写出每个质点的运动方程.

(2) 试验证此系统有如下简谐运动式的解: $s_i = a_i \cos \omega t$, 其加速度为 $-\omega^2 s_i$, 其中 $a_i (i=1, 2, 3)$ 是恒振幅, 圆频率 ω 有三个可能值: $\omega_0 \sqrt{3}, \omega_0 \sqrt{3}$ 和 0, 其中 $\omega_0 = \frac{k}{m}$.

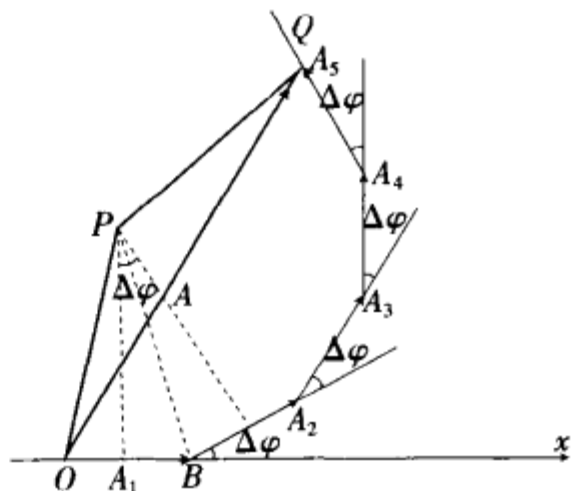
(第 17 届国际物理奥赛题)

解: (1) 三个质点运动方程分别为

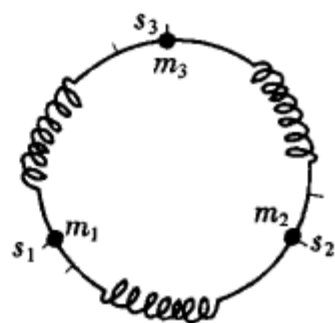
$$m \frac{d^2 S_1}{dt^2} = k(s_2 - s_1) + k(s_3 - s_1)$$

$$m \frac{d^2 S_2}{dt^2} = k(s_3 - s_2) + k(s_1 - s_2)$$

$$m \frac{d^2 S_3}{dt^2} = k(s_1 - s_3) + k(s_2 - s_3)$$



图例 6-4



图例 6-5

(2) 将 $s_i(t) = a_i \cos \omega t$ 和 $\omega^2 = \frac{k}{m}$ 代入上述方程得:

$$(2\omega_0^2 - \omega^2)a_1 - \omega_0^2 a_2 - \omega_0^2 a_3 = 0 \quad ①$$

$$-\omega_0^2 a_1 + (2\omega_0^2 - \omega^2)a_2 - \omega_0^2 a_3 = 0 \quad ②$$

$$-\omega_0^2 a_1 - \omega_0^2 a_2 - (2\omega_0^2 - \omega^2)a_3 = 0 \quad ③$$

当 $a_1, a_2, a_3 \neq 0$ 时, 由①②式解得 a_1, a_2 代入③式得

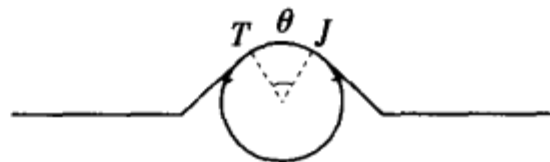
$$(3\omega_0^2 - \omega^2)\omega^2 = 0$$

解得 $\omega^2 = 3\omega_0^2, 3\omega_0^2$ 和 0

即得 $\omega = \sqrt{3}\omega_0, \sqrt{3}\omega_0$ 和 0

例 6-6 试以弦上传播的脉冲波为例, 导出弦上的波速表达式.

解: 当弦上有脉冲以速度 u 向右传播时, 在以 u 向右运动的参照系上看来, 波形不动. 但弦上的每质元均以 u 沿弦向左运动, 如图例 6-6 所示.



图例 6-6

取脉冲顶部长为 Δl 的一小段弦(质元)作研究对象, 在该时, 此质元近似作匀速率圆周运动. 设圆心为 O 与曲率半径为 R , Δl 所对应圆中心角为 θ , 弦上 Δl 两边拉力为 T , 则对应长度为 Δl 质元的质量为 $\eta \Delta l$ (η 为单位弦长所对应质量即弦线密度)上所受的向心力

$$f = 2T \sin \frac{\theta}{2}$$

当 θ 很小时 $\sin \frac{\theta}{2} \sim \frac{\theta}{2}$

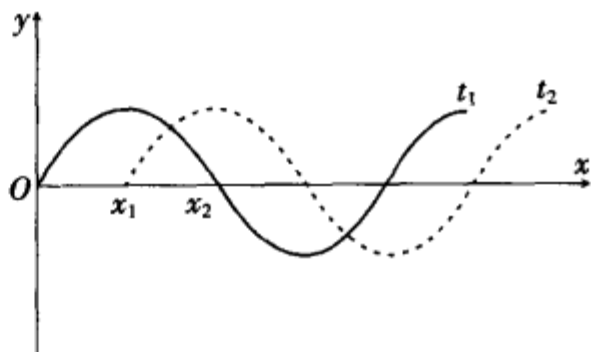
$$f \approx T\theta$$

根据牛顿运动定律得

$$T\theta = \eta \Delta l \frac{u^2}{R}$$

但 $\frac{\Delta l}{R} = \theta$, 由上式得 $u = \sqrt{\frac{T}{\eta}}$

例 6-7 已知 t_1 和 t_2 时刻波形图(图例 6-7), 试求波速及波的传播方向.



图例 6-7

解: 由波形图可知 $\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{T}{4}, T = 4\Delta t$

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{\lambda}{4}, \lambda = 4\Delta x$$

(a) 设波沿 x 正方向传播

$$u_+ = \frac{\Delta x + n\lambda}{\Delta t} = \frac{\Delta x + 4n\Delta x}{\Delta t} = (4n + 1) \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

(b) 设波沿 x 反方向传播

$$u_- = \frac{(\lambda - \Delta x) + n\lambda}{\Delta t} = (4n + 3) \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

当 $\Delta x < \lambda, \Delta t < T$ 时得

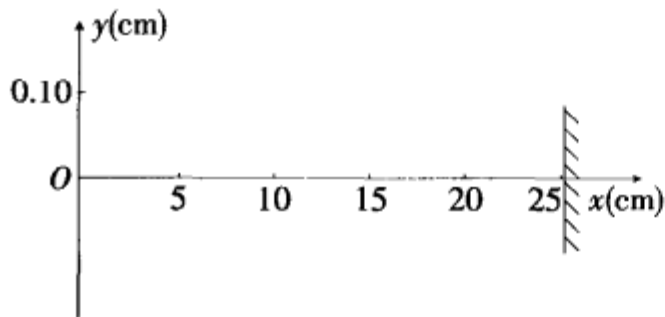
$$u_+ = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad u_- = \frac{3\Delta x}{\Delta t}$$

例 6-8 将一根长超过 100cm 的均匀弦线, 沿水平的 x 轴放置, 拉紧并使两端固定. 现对离固定的右端 25cm 处为坐标原点. 如图例 6-8(a) 所示的弦上一点施加一个垂直于弦线方向(即 y 轴方向)的扰动, 其位移随时间的变化规律如图例 6-8(b) 所示. 该扰动将沿弦线传播而形成波(孤立的脉冲波). 已知该波在弦线中的传播速度为 2.5cm/s, 且波在传播和反射过程中都没有能量损失.

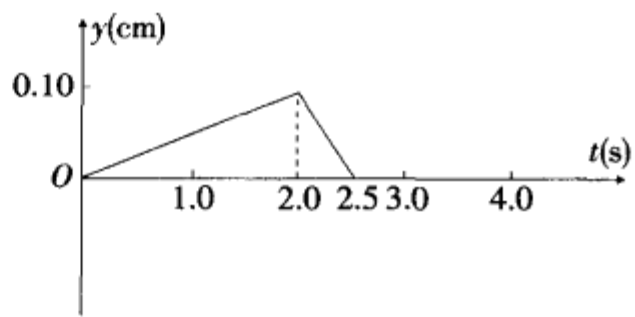
(1) 试在图例 6-8(a) 中准确地画出自 O 点沿弦向右传播的波在 $t = 2.5$ 秒的波形图.

(2) 该波向右传播到固定点时将发出反射, 反射波向左传播的波叠加, 使反射点的位移始终为零. 由此观点出发, 试在图例 6-8(a) 中准确地画出 $t = 12.5$ s 时的波形图.

(3) 在图例 6-8(a) 中准确地画出 $t = 10.5$ s 时波形图.



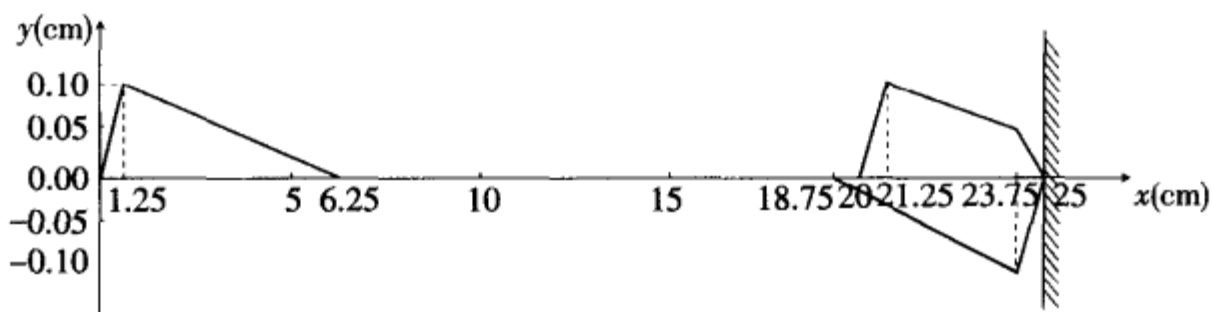
图例 6-8(a)



图例 6-8(b)

提示:在右端反射点位移始终为零,因而反射波在反射点有半波损失(固定端).

解:根据(1)(2)(3)问题中所要求,对应画出的波形曲线如图例 6-8(c)(d)所示.



图例 6-8(c)

图例 6-8(d)

例 6-9 如图例 6-9 所示,湖岸上距湖面高为 h 处有一电磁波接收器 C ,当一射电星从地平面渐渐升起时,接收器断续地测到一系列极大值.已知射电星所发射的电磁波的波长为 λ ,求第一次测到极大值时,射电星的方位与湖面所成的角度.

解:接收器测得的极大值是射电星发射的电磁波直接到达接收器与经湖面反射的两部分相互干涉的结果.

若射电星所在的位置与湖面成 θ 角,则反射波与入射波之间的夹角为 2θ ,则两相干波的波程差

$$\Delta = \overline{AC} - \overline{BC} + \frac{\lambda}{2}$$

式中 $\frac{\lambda}{2}$ 是考虑电磁波在湖面上反射时相位跃变 π 角度所引起的半波损失差.由几何关系得

$$\overline{AC} - \overline{BC} = \frac{h}{\sin\theta} (1 - \cos 2\theta) = \frac{h}{\sin\theta} 2\sin^2\theta = 2h \sin\theta$$

接收器测得的极大值时,波程差 Δ 等于波长的整数倍.对于第一级极大有

$$\Delta = 2h \sin\theta + \frac{\lambda}{2} = \lambda$$

所以

$$\theta = \arcsin \frac{\lambda}{4h}$$

例 6-10 一固定的超声探测仪,在海水中发出一束频率 $\nu = 18000\text{Hz}$ 的超声波,被一向着探测仪驶来的潜艇反射回来,探测器测得反射波和入射波的频率相差为 220Hz .求该潜艇的速度.已知超声波在海水中的波速为 1500m/s .

解:声源不动,潜艇向着声源运动潜艇接收到频率(相当观察者接受频率)

$$\nu' = \frac{u + v}{u} \nu_0$$

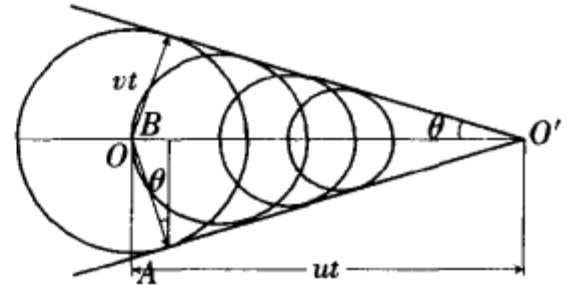
潜艇反射超声波,此时潜艇相当于声源,发射频率为 ν' 的超声波,声源在运动而接收器不动,将探

测器测的频率为

根据题意

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{u}{u-v} \nu' = \frac{u+v}{u-v} \nu_0 \\ \Delta\nu &= \nu - \nu_0 \\ &= \frac{u+v}{u-v} \nu_0 - \nu_0 \\ &= \frac{2v}{u-v} \nu_0 \\ 220 &= \frac{2v}{1500-v} \times 18000 \\ v &= \frac{220 \times 1500}{2 \times 18000 + 220} = 9.1(\text{m/s}) \end{aligned}$$

例 6-11 激震波(或叫冲击波),它是当物体的运动速度超过波在介质中的传播速度时所产生的一种现象。(1)在 5000 米高空,一喷气式飞机以 1.5 马赫(飞行速度与空气中声速之比叫做马赫数)的速率飞越地面上一人头顶上空.试求冲击波与喷气飞机的运动路线所成之角,并问当喷气机通过此人头顶之后,要经过多长时间冲击波才能到达他所在之处?(2)水中的光速为真空中的 3/4.由电子加速器产生高速电子束在水中产生切伦科夫辐射,其波前的包线是一个顶角为 120°的圆锥面.试求电子在水中的运动速率.



图例 6-11

解:(1)设 $v = 330\text{m/s}$,则喷气机的飞行速度 $u = 1.5v = 495\text{m/s}$. 设飞行路线与冲击波的夹角为 θ ,如图例 6-11,由几何关系,有

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \frac{v}{u} = \frac{1}{1.5} \\ \theta &= \sin^{-1}\left(\frac{1}{1.5}\right) = 41.8^\circ \end{aligned}$$

设 A 为地面上观察者所处的位置,则有

$$OA = \frac{AB}{\cos\theta} = \frac{5000}{\cos 41.8^\circ} = 6707(\text{m})$$

$$OB = AB \tan\theta = 5000 \tan 41.8^\circ = 4470(\text{m})$$

故

$$t' = \frac{OA}{v} - \frac{OB}{u} = \frac{6707}{330} - \frac{4470}{495} = 11.3(\text{s})$$

(2)由 $\sin\theta = \frac{v}{u_e}$, u_e 为电子的运动速度, $v = \frac{3}{4}c$ 为水中的电磁波速,所以得出

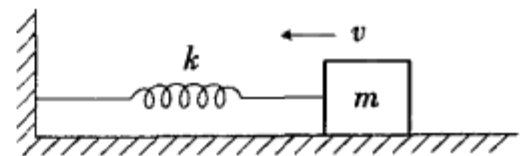
$$u_e = \frac{v}{\sin\theta} = \frac{\frac{3}{4} \times 3 \times 10^8}{\sin \frac{120^\circ}{2}} = 2.6 \times 10^8(\text{m/s})$$

本章习题

6.1 一弹簧振子在光滑水面上作谐振动,如图习 6-1 所示,已知振子的质量 $m = 100\text{g}$,弹簧的劲度系数 $k = 10\text{N/m}$,弹簧振子的总能量 $E = 0.05\text{J}$,当 $t = 0$ 时,物体处在平衡位置且向 x 轴的负向运动,求:

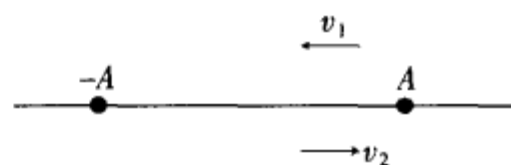
- (1) 振动圆频率 ω , 振幅 A 和初期 φ_0 ;
- (2) 振动方程;
- (3) 物体振动速度的最大值.[提示]

6.2 两质点沿同一直线作同振幅、同频率的谐振动.在振动过程中,每当它们经过振幅一半的地方相遇;而运动方向相



图习 6.1

反,如图习 6.2 所示,求它们的位相差,并作旋转矢量表示之.
[提示]



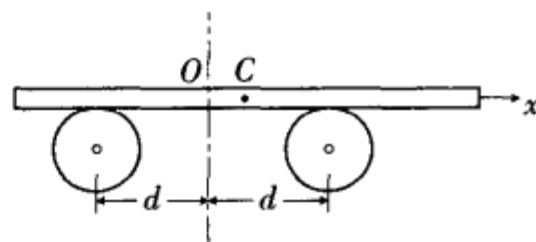
图习 6.2

6.3 竖直悬挂的弹簧上端固定在升降机的天花板上,弹簧的下端挂一质量为 m 的物体.当升降机静止或匀速直线运动时,系统的振动频率为 ν_0 ;当升降机作加速运动时,振动频率是否改变?为什么?若将一单摆悬挂在升降机上,情况又怎样?如升降机向下加速运动时 $a > g$,将出现什么现象?[提示]

6.4 一物体放在水平木板上,物体与板面间的最大静摩擦系数为 0.50.

(1)当此板沿水平方向作频率为 2.0Hz 的简谐振动时,要使物体在板上不致滑动,振幅的最大值应是多大?

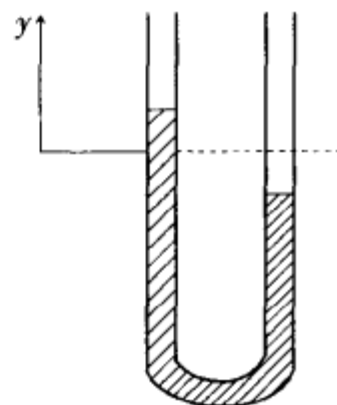
(2)若令此板作竖直方向的简谐振动,其频率仍为 2.0Hz,要使物体在板上不致滑动,振幅的最大值应是多大?[提示]



图习 6.4

6.5 两轮的轴相互平行,相距 $2d$.两轮转速相同而转向相反.将质量为 m 的一根均质杆搁在两轮上,杆与轮的摩擦系数为 μ ,若杆子的质心 C 起初距一轮较近,如图习 6.4.试证明杆在作简谐振动.并求其振动周期.[提示]

6.6 在横截面为 S 竖直放置的 U 形管中,有适量的液体,如图习 6.6,液体总长度为 l ,质量为 m ,密度为 ρ .求液面上下起伏的振动频率.(忽略液体与管壁间的摩擦)[提示]



图习 6.6

6.7 两个质量各为 m_1, m_2 并由一轻弹簧连系着的小球.如图习 6.7 所示.设弹簧的倔强系数为 k ,当 m_1 固定时, m_2 的振动频率为 ν ,试问

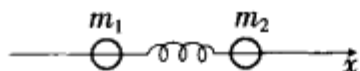
(1)当 m_2 固定时, m_1 的振动频率是多少?

(2)当 m_1, m_2 皆为自由时,它们的振动频率是多少?[提示]

6.8 设弹簧振子中的振动物体质量为 M ,弹簧的劲度系数为 k ,弹簧质量为 m ,假定弹簧质量分布均匀,忽略摩擦力,试求振动周期.[提示]

6.9 有质量均为 m 的 N 个质点与轻弹簧交连连接,如图习 6.9,起初弹簧未伸长处于平衡状态.当质点偏离平衡位置时用第 n 个质点与相邻

质点位移写出第 n 个质点的运动方程($n = 1, 2, \dots, N$).若试验证其作为 $s_n(t) = a_i \sin\left(\frac{2ni\pi}{N} + \varphi\right) \cos \omega_i t$. 式中 $i = 1, 2, \dots, N, n = 1, 2, \dots, N, \varphi$ 为任意位相,圆频率由下式决定 $\omega_i = 2\omega_0 \sin\left(\frac{i\pi}{N}\right)$,对一条包含无穷多个质点的链条,试阐明其频率的可能范围.[提示]

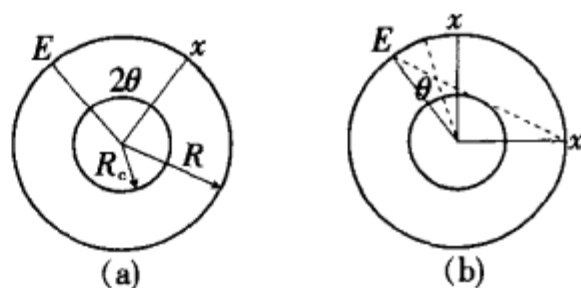


图习 6.7



图习 6.9

6.10 本世纪初曾提出一种地球模型,认为它是一个半径为 R 的球体,向里至半径为 R_c 是一个均匀,各向同性的固态地幔,半径 R_c 以内的区域为液态.如图习 6.10(a) 所示.地幔内地震纵波 P 和横波 S 的速度分别为 v_P 和 v_S 均为恒量,在地心区内纵波具有恒速 $v_{CP} < v_P$,而横波不能传播.在地球表面 E 处,一次地震所产生的地震波在地球内传播,且被地表面任一点 X 处设置有地震仪的观察者观察到,图习 6.10(b) 所示, E 与 X 间的角间隔 2θ 由下式给出 $2\theta = \angle EOX$,其中 O 为地心.

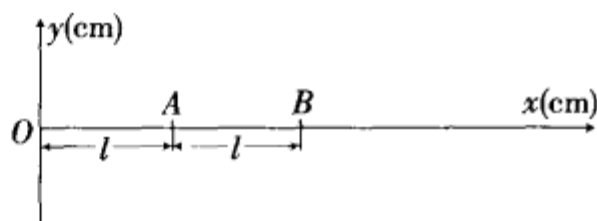


图习 6.10

(1) 试证明, 沿直线穿过地幔的地震波到达 X 的时间(地震后的传播时间)为 $t = \frac{2R \sin \theta}{v}$ [$\theta \leq \arccos \frac{R_c}{R}$ 的情形] 对 P 波, $v = v_P$, 对 S 波, $v = v_S$.

(2) 对 $\theta > \arccos(R_c/R)$ 的 x 点, 地震 P 波在地幔和地心界面上经两次折射后到达观察者, 试画出这种地震 P 波的路径, 并对 P 波求出 θ 与 i 间的关系式, 这里 i 是地震 P 波在地幔与地心界面的人射角. (第 17 届国际物理奥赛题)[提示]

6.11 一平面简谐波沿 x 轴正向传播, 如图习 6.11 所示. 设 O 点为波源, 已知 $OA = AB = l = 10\text{cm}$, 振幅为 10cm , 圆频率 $\omega = 7\pi\text{s}^{-1}$, 当 $t = 1.0\text{s}$ 时, A 处质点处在平衡位置, 振动速度为负值; B 处质点位移为 5.0cm , 振动速度为正值, 设波长 $\lambda > l$, 试写出波的表达式.

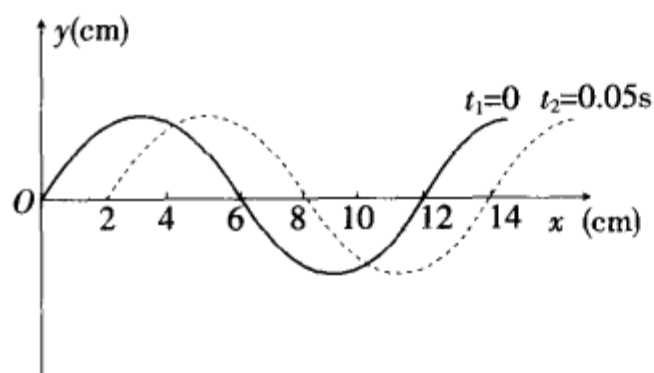


图习 6.11

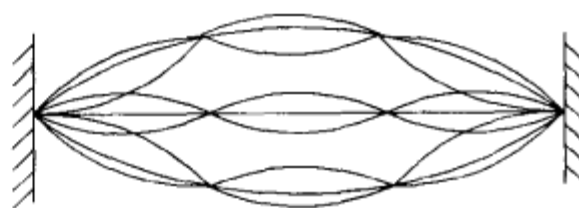
6.12 超声波清洗器向水中发出超声波, 波动方程 $y = 10 \times 10^3 \cos(3 \times 10^5 t - 200x)$ (m)

求(1)波的振幅和频率. (2)超声波在水中波速与波长. (3)距波源为 0.20m 和 0.24m 二点的位相差.

6.13 已知 $t_1 = 0, t_2 = 0.05\text{s}$ 时波形如图习 6.13, 波速 $u = 200\text{m/s}$, 求波动的传播方向及振动周期. (设 $\Delta t < T$)[提示]



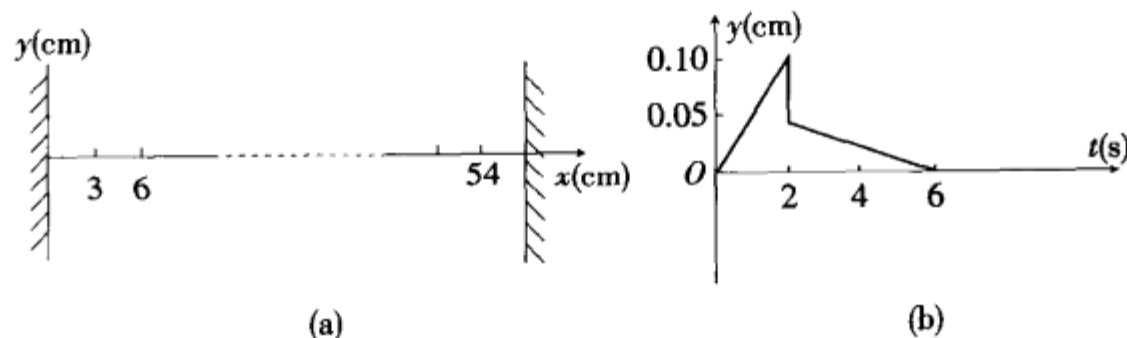
图习 6.13



图习 6.14

6.14 一根弦线的两端固定, 长 $L = 1\text{m}$, 线密度 $\eta = 10^{-2}\text{kg/m}$, 张力 $T = 90\text{N}$, 观察到的弦线振动如图 6.14 所示, 指出这种振动是哪几种频率的谐波合成的? 分别计算它们的频率. [提示]

6.15 一根均匀弦线, 沿水平方向沿 x 轴放置, 弦线拉紧并使两端固定, 现在离固定右端 54cm 处为坐标原点 O , 如图习 6.15(a) 所示处施加一个垂直于弦线方向 (y 方向) 的扰动, 其位移随时间的变化规律如图习 6.15(b) 所示, 该波扰动将沿弦线传播, 而成脉冲孤立波, 已知该波在弦线中传播速度为 3cm/s , 且波在传播和反射中都没有能量损失.



图习 6.15

- 试在图习 6.15(a) 中准确地画出自 O 点沿弦线向右传播的波在 $t = 6$ 秒时的波形图.
- 该波向右传播到固定点时将发生反射, 反射波将发生半波损失, 由此观点出发, 试在图习 6.15

(a)上准确画出 24 秒时的波形图 .

(3)在图习 6.15(a)中准确地画出 $t = 21$ 秒时波形图 . [提示]

6.16 设入射波的表达式 $y_1 = A \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{T}\right)$, 在 $x = 0$ 处发生反射, 反射点为一固定端, 求:

(1)反射波的表达式;

(2)合成波的表达式;

(3)波腹和波节的位置 . [提示]

6.17 一弦上驻波表达式为 $y = 0.02 \cos 16x \cos 750t$, 式中各量单位为 SI 单位 .

(1)组成此驻波的各行波的波腹及波速为多少?

(2)节点间距离为多大?

(3) $t = 2.0 \times 10^{-3}$ s 时, 位于 $x = 0.05$ m 处质点的速度为多少? [提示]

6.18 一列火车 A 以 $v_1 = 20$ m/s 的速度向前行驶, 若车 A 的司机听到自己汽笛声频率 $\nu_0 = 120$ Hz, 另一列火车 B 以 $v_2 = 25$ m/s 的速度行驶, 求

(1)当 A、B 两车相向而行时, B 的司机听到 A 车汽笛的频率 ν_1 为多少?

(2)若此时恰有 15m/s 的风速沿车 A 向车 B 吹来, B 的司机听到 A 车汽笛的频率 ν_2 又为多少?

(3)若 B 车和 A 车运行方向相同, 且 B 车在 A 车前方, 重求(1)(2)问, 已知空气中声速 $u = 340$ m/s. [提示]

6.19 有一口井, 侧面是竖直的, 井底有水, 它可与 7Hz 和 7Hz 以上的某些频率发生共鸣, 井里的空气密度为 1.1 kg/m³, 压强为 9.5×10^4 Pa, 比热 ω 为 $7/5$. 试问这井有多深? [提示]

气体定律与分子动理论

一、气体定律

§ 7.1 平衡态与状态参量

1. 平衡态 在热学中,把所研究的由大量的微观粒子组成的宏观物体,称为热力学系统简称系统或体系.

若系统与外界没有物质交换,也没有能量交换(即孤立系统),系统内部也不发生化学反应或核反应,经过足够长时间后系统的各种宏观性质达到稳定,不随时间而变化,系统的这种状态称为平衡态.

系统处在平衡态时,系统内部各部分之间、系统与外界之间必须达到力平衡.对于封闭在气缸内的气体,则各部分压强必须相等.在图 7.1-1(a)的气缸中,气缸的横截面为 S 、活塞质量为 m ,气缸壁是光滑的,气缸内气体压强为 p ,外界作用于活塞上压强为 p_0 ,则平衡条件是

$$p = p_0 + \frac{mg}{S} \quad (7.1-1)$$

若气缸换成液柱,如图 7.1-1(b),外界压强为 p_0 ,液体密度为 ρ ,液面下高度为 h 处压强

$$p = p_0 + \rho gh \quad (7.1-2)$$

系统处在平衡态时,系统各部分之间必定达到热平衡.因此体系内各处温度相等.若体系与外界的分界面是导热的,则体系与外界达到热平衡条件是体系内温度 T 与外界温度 T_0 相等.

如果体系是由多种化学成份的物质组成或组成体系的物质可以发生物态变化,例如由气态变成液态,由液态变成固态或相反变化,这种体系处于热平衡时还必须达到化学平衡或相平衡.但对于只有一种化学成分的体系或只有一种相存在体系,其平衡态只要满足力平衡与热平衡两个条件就可以了.

2. 状态参量 当系统处于平衡态时,其宏观状态可以用几个独立的宏观量来描述,这几个独立的宏观量称为系统的状态参量.例如一定量纯气体处于平衡态时,可用压强 p ,体积 V 和温度 T 中的任意两个作为状态参量.

§ 7.2 气体三条实验定律

对于一定量气体在常温(室温附近)常压(1 大气压附近)下,实验证明满足以下三条实验定律.

1. 玻义耳-马略特定律

对一定量气体,保持温度不变,体积和压强的乘积为一常量.

$$pV = \text{常量} \quad (7.2-1)$$

以 p 为纵坐标, V 为横坐标,作出 $p-V$ 关系曲线(图 7.2-1)是一条等轴双曲线,叫做等温线.对一定量气体,对应不同温度时,可得到一系列等温线.

2. 盖·吕萨克定律

一定量气体保持压强不变时体积随温度线性变化

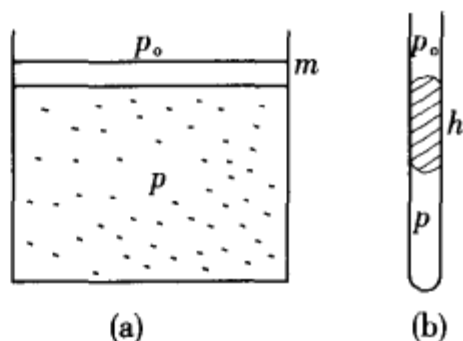


图 7.1-1 气体压强

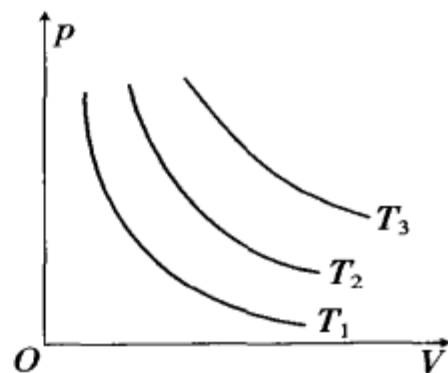


图 7.2-1 理想气体等温线

$$V = V_0(1 + \alpha_V t) \quad (7.2-2)$$

式中 t 为摄氏温度, V_0 为 $t=0$ 时气体体积, α_V 称为气体的体积温度系数, 实验测得 $\alpha_V = \frac{1}{273}$, 以 V 为纵坐标, 温度 t 为横坐标, 得到 $V-t$ 关系曲线为直线. 对于一定质量气体, 压强值不同时, 对应于 $V-t$ 图上得到的是相交于 $t = -273^\circ\text{C}$ 的一簇直线(图 7.2-2(a)).

根据摄氏温度与绝对温度关系

$$T = T_0 + t \quad (7.2-3)$$

其中 $T_0 = 273.15 = \frac{1}{\alpha_V}$, 盖·吕萨克定律可表示为

$$\frac{V}{T} = \frac{V_0}{T_0} = \text{恒量} \quad (7.2-4)$$

相应的 $V-T$ 图可表示为通过零点的一簇直线(图 7.2-2(b)).

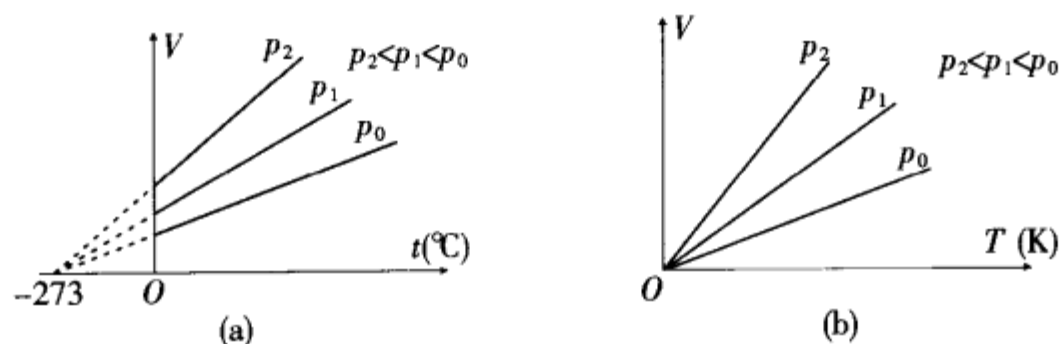


图 7.2-2 盖·吕萨克定律

3. 查理定律

一定量气体, 保持体积一定时, 压强随温度线性变化

$$p = p_0(1 + \alpha_p t) \quad (7.2-5)$$

式中 t 为摄氏温度, p_0 为 $t=0^\circ\text{C}$ 时气体压强, α_p 称为气体的压强温度系数, 实验测得 $\alpha_p = \frac{1}{273}$, 以 p 为纵坐标, t 为横坐标得出 $p-t$ 关系曲线为一条直线, 对一定量气体, 对应于不同体积作出 $p-t$ 图是相交于 $t = -273^\circ\text{C}$ 时的一簇直线(图 7.2-3(a)).

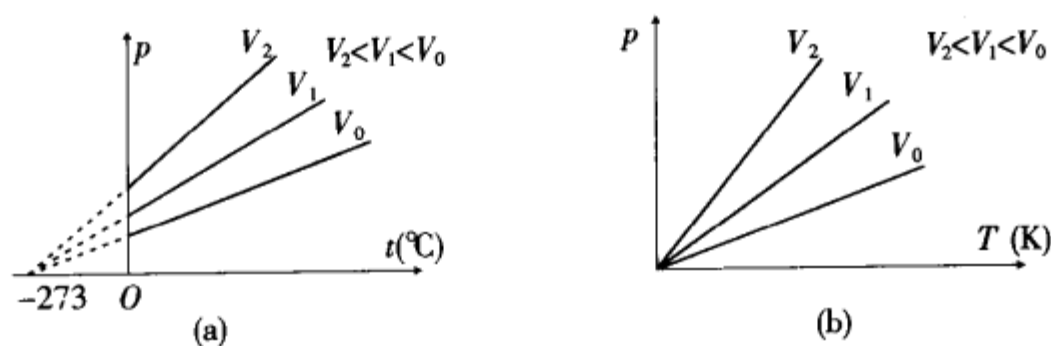


图 7.2-3 查理定律

如在查理定律中用绝对温度替代摄氏温度, 得到

$$\frac{p}{T} = \frac{p_0}{T_0} = \text{恒量} \quad (7.2-6)$$

相应的 $p-T$ 图将是通过零点的一簇直线.

例 7.2-1 一定量理想气体的 $p-T$ 图上有二条等容线 V_1 和 V_2 , 如图 7.2-4 所示, 试证明

(1) $V_1 < V_2$;

(2) 在二等容线 V_1 、 V_2 上各任选一点 A 和 B , 并连结成一直线 \overline{AB} , 在 \overline{AB} 连线上任一点 C 体积满足 $V_1 < V_C < V_2$.

证:(1)通过 A 点作平行于 p 轴的直线与 V_2 线相交于 D 点,由图中不难看出 $T_A = T_D, V_D = V_2, V_A = V_1$,对 A、D 两点根据玻义耳-马略特定律可知 $p_A > p_D$,所以 $V_A < V_D$,即 $V_1 < V_2$.

(2)过 C 点作平行 p 轴直线与 V_2 线相交于 E 点, $V_E = V_2, T_E = T_C$. 对于 E、C 两点,根据玻义耳-马略特定律得 $p_C > p_E$,所以 $V_C < V_E$ 即 $V_2 < V_C$,同理可证明得 $V_A < V_C$ 所以 $V_1 < V_C < V_2$.

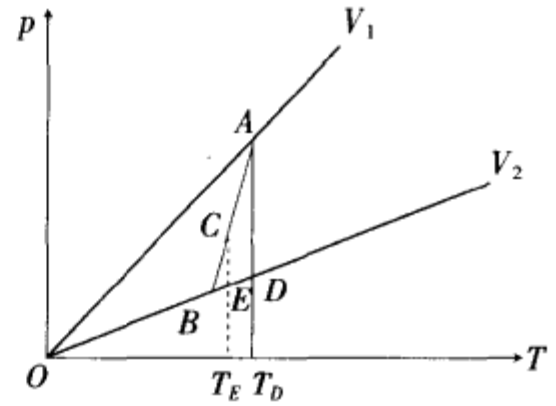


图 7.2-4

例 7.2-2 内径均匀的 L 形直角玻璃管,截面 $S = 1\text{cm}^2$,一端封闭长为 10cm,另一端开口长度为 60cm,开始时开口端竖直向上放置,用水银柱将一定量的空气封存在封闭管内,空气柱长为 8cm,水银柱高 57cm,另有一部分水银进入封闭管内长为 2cm,如图 7.2-5 所示,大气压强为 75cmHg,水银密度 $\rho = 13.6\text{g/cm}^3$,求:

(1)在图示位置时管内空气柱压强.

(2)将玻璃管从图示位置逆时针方向缓慢地转过 90° 后,封闭端竖直向上放置,当空气柱长度达到稳定时,一管内漏出水银质量为多少?

解:(1)设封闭管内气体压强为 p_1

$$\begin{aligned} p_1 &= p_0 + h = 75 + 57 = 132(\text{cmHg}) \\ &= 132 \times 1333 = 1.76 \times 10^5(\text{Pa}) \end{aligned}$$

(2)转过 90° 后,假定封闭管内水银柱恰好落到直角端处,设此时封闭管内气体压强为 p_2 ,根据状态方程 $p_1 V_1 = p_2 V_2$ 得

$$p_2 \times 10 \times 1 = p_1 \times 8 \times 1$$

$$p_2 = 132 \times \frac{8}{10} = 105.6(\text{cmHg}) > 75(\text{cmHg})$$

这说明水银柱将全部进入水平管中,则封闭端气体的压强只有等于大气压时才能保持水银柱平衡,设此时封闭管内气柱长度为 l_x ,根据状态方程得

$$p_0 l_x S = p_1 l_1 S$$

$$l_x = \frac{132 \times 8}{75} \doteq 14(\text{cm})$$

因此在直角玻璃管中长臂中空气柱长为 $14 - 10 = 4\text{cm}$,原有水银柱长为 $57 + 2 = 59\text{cm}$,现在水银柱长为 $60 - 4 = 56\text{cm}$,漏出水银柱长为 $59 - 56 = 3\text{cm}$,水银密度 $\rho = 13.6\text{g/cm}^3$,所以漏出水银质量为

$$m = \rho V = 13.6 \times 3 \times 1 = 40.8(\text{g})$$

例 7.2-3 如图 7.2-6 所示,光滑水平地面上有一个内、外壁都光滑的气缸,气缸质量为 M ,气缸内有一截面积为 S ,质量为 m 的活塞,用活塞封闭着体积为 V_0 的理想气体,整个装置处于平衡状态,现对活塞施加一个水平向左的恒力 F ,待缸内理想气体的体积稳定后,求其体积为多大?

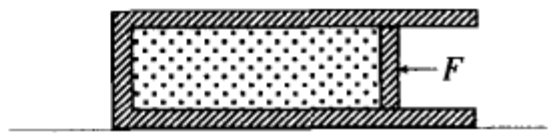


图 7.2-6

解:当外界用恒力 F 作用在活塞上,活塞将向左压缩气体,当被压缩气体压强变化后,作用在气缸左壁上压强使气缸也产生向左移动,当活塞移动速度与气缸移动速度相等时,气缸内气体体积 V 就保持恒定. 设 F 力作用时间 Δt 后,使气缸内气体压强为 p ,活塞与气缸达到相同速度 v ,则根据动量原理分别对活塞和气缸列出方程:

$$(p_0 S + F - pS)\Delta t = mv \quad \text{①}$$

$$(pS - p_0 S)\Delta t = Mv \quad \text{②}$$

$$\text{①/②} \quad (p_0 S + F - pS)M = (pS - p_0 S)m \quad \text{③}$$

$$\text{又} \quad p_0 V_0 = pV \quad \text{④}$$

解③④式得

$$V = \frac{(M+m)p_0V_0}{[(M+m)p_0s + MF]}$$

例 7.2-4 一个高为 h , 底面积为 S 的圆柱形薄型玻璃杯, 开口向下, 由水面以上缓慢地浸入水中, 当杯口内水面升至 $\frac{1}{3}h$ 时, 杯子恰好既不上浮也不下沉(如图 7.2-7).

求:(1)作用在杯上的浮力.

(2)此时杯口距离水面的深度.(杯壁厚度不计, 大气压为 p_0 , 水密度为 ρ)

解:(1)当杯子沉入水中深度为 H 处, 杯内液面高度为 $\frac{1}{3}h$, 则杯内气体体积为 $\frac{2}{3}h \cdot S$, 此时杯子受到浮力等于排开同体积液体重量.

$$F_{\text{浮}} = \frac{2}{3}hS \cdot \rho \cdot g$$

(2)杯中气体在水面上时压强为 p_0 , 体积为 $V_0 = hS$, 沉入深度为 H 处压强为 p , 体积为 $V = \frac{2}{3}h \cdot S$, 当温度不变时, 根据玻义耳-马略特定律得:

$$p_0V_0 = pV$$

$$p = \frac{p_0V_0}{V} = p_0 \frac{hS}{\frac{2}{3}hS} = \frac{3}{2}p_0$$

在水面下深度为 H 处压强为

$$p_0 + \rho gH = p + \frac{1}{3}\rho gh$$

解得

$$H = \frac{p - p_0}{\rho g} + \frac{1}{3}h = \frac{\frac{3}{2}p_0 - p_0}{\rho g} + \frac{1}{3}h$$

$$= \frac{p_0}{2\rho g} + \frac{1}{3}h$$

§ 7.3 理想气体状态方程

1. 一定量理想气体状态方程

在任何情况下都能满足三条气体实验定律的气体叫做理想气体.

一定量理想气体从状态 I (p_1, V_1, T_1) 变化到状态 II (p_2, V_2, T_2) 这二状态在 $p-V$ 图中对应的是 I、II 二点. 图 7.3-1. 另取一状态 III (p_3, V_3, T_3) 使 I - III 满足等容过程即 $V_1 = V_3$, III - II 为等压过程 $p_3 = p_2$

由 I - III 等容过程得 $\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_3}{T_3}$ (7.3-1)

III - II 等压过程得 $\frac{V_3}{T_3} = \frac{V_2}{T_2}$ (7.3-2)

(7.3-1)(7.3-2)两式相乘化简得

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2} = \dots = \frac{pV}{T} \quad (7.3-3)$$

(7.3-3)式即是一定量理想气体状态方程.

2. 1 mol 理想气体状态方程

对于 1 mol 理想气体在标准状态下(即 $p_0 = 1.013 \times 10^5 \text{Pa}$, $T_0 = 273\text{K}$), 此时体积为 $22.4 \times 10^{-3} \text{m}^3$.

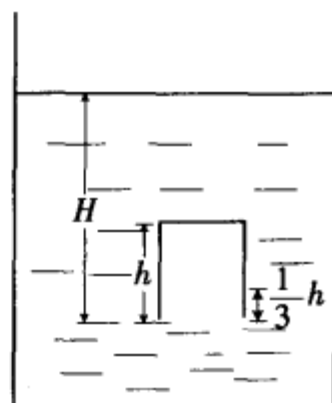


图 7.2-7

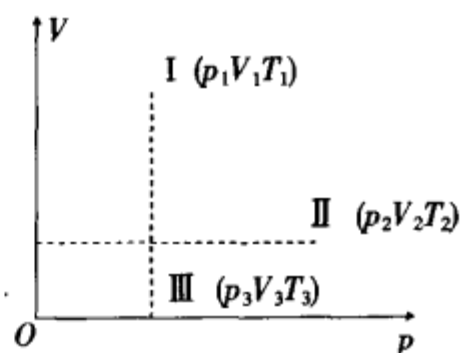


图 7.3-1

根据(7.3-3)式得

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_0 V_0}{T_0} = R \quad (7.3-4)$$

R 称气体普适恒量

$$R = \frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{1.013 \times 10^5 \times 22.4 \times 10^{-3}}{273} = 8.31 (\text{J/mol} \cdot \text{K}) \quad (7.3-5)$$

$$R = \frac{1 \times 22.4}{273} = 0.082 (\text{atm} \cdot \text{L/mol} \cdot \text{K})$$

$$1 \text{mol 理想气体状态方程为 } pV = RT \quad (7.3-6)$$

3. 理想气体状态方程 - 克拉贝龙方程

设理想气体的摩尔质量为 M , 则 m kg 理想气体其摩尔数为 $\nu = \frac{m}{M}$.

由(7.3-4)(7.3-5)式得

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_0 \nu V_0}{T_0} = \nu R$$

即得克拉贝龙方程

$$pV = \nu RT \quad (7.3-7)$$

例 7.3-1 一座真空炉外壳充氩气 ($M_A = 40 \times 10^{-3} \text{kg/mol}$). (1) 外壳容积 $V = 5 \text{m}^3$, 外壳内氩气平均温度 $t = 80^\circ\text{C}$, 压强 $p = 50 \text{mmHg}$, 求每次充入氩气的质量. (2) 氩气瓶容积为 40L , 内装 20°C , 150atm 的氩气, 工厂规定氩气瓶内压强降到 10atm 时, 就要停止使用, 问一瓶氩气大约可以处理几炉?

解: 已知外壳氩气压强 $p = 50 \text{mmHg} = \frac{50}{760} \text{atm}$, 体积 $V = 5 \text{m}^3 = 5 \times 10^3 \text{L}$, 温度 $T = 273 + 80 = 353 \text{K}$, 氩气摩尔质量 $M_A = 40 \times 10^{-3} \text{kg}$.

(1) 每次充入氩气质量, 根据克拉贝龙方程得

$$m = \frac{MpV}{RT} = \frac{40 \times 10^{-3} \times \frac{50}{760} \times 5 \times 10^3}{353 \times 0.082} = 0.45 (\text{kg})$$

(2) 氩气瓶中一共有氩气

$$m = \frac{MpV}{RT} = \frac{40 \times 10^{-3} \times 150 \times 40}{0.082 \times 293} = 9.989 (\text{kg})$$

氩气瓶中必须剩余气体

$$m' = \frac{Mp'V}{RT} = \frac{40 \times 10^{-3} \times 10 \times 40}{0.082 \times 293} = 0.665 (\text{kg})$$

可用氩气质量

$$\Delta m = m - m' = 9.989 - 0.665 = 9.324 (\text{kg})$$

每炉需用氩气 0.45kg , 因此可用 $\frac{9.324}{0.45} \approx 20$

例 7.3-2 在内径均匀的绝热的环形管内, 有三个薄金属片制成的活塞将管隔成三部分, 如图 7.3-2, 活塞的导热性和封闭性良好, 且可无摩擦地在圆环内运动. 三部分中盛有同一种气体. 容器平放在水平桌面上. 起始时, I、II、III 三部分气体的压强都是 p_0 , 温度分别是 $t_1 = -3^\circ\text{C}$, $t_2 = 47^\circ\text{C}$, $t_3 = 27^\circ\text{C}$, 三个活塞到圆环中心连线之间夹角分别是 $\alpha_1 = 90^\circ$, $\alpha_2 = 120^\circ$, $\alpha_3 = 150^\circ$.

(1) 试求最后达到平衡时, 三个活塞到圆环中心的连线之间的夹角各为多少?

(2) 已知一定质量的理想气体的内能变化量与温度的变化量成正比(与压强-体积的变化无关), 试求达到平衡时气体的温度和压强.

(第 9 届全国中学生物理竞赛预赛题)

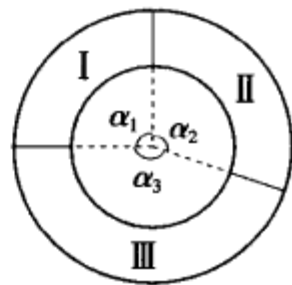


图 7.3-2

提示:开始时,环形管内三部分是同种气体,压强相等,体积、温度不同,因而质量不等,根据 $m = \frac{pVM}{RT}$ 可知 $m_1:m_2:m_3 = \frac{V_1}{T_1}:\frac{V_2}{T_2}:\frac{V_3}{T_3}$,因各活塞到圆心距离相等,所以 $m_1:m_2:m_3 = \frac{\alpha_1}{T_1}:\frac{\alpha_2}{T_2}:\frac{\alpha_3}{T_3}$. 最后当三部分气体达到平衡时,压强与温度均应相等,所以 $m_1:m_2:m_3 = \alpha_1':\alpha_2':\alpha_3'$. 此外 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_1' + \alpha_2' + \alpha_3'$,由此可求出 $\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3'$. 然后根据热平衡方程可求得最终温度,再由状态方程可求得最终压强.

解:(1)设气体摩尔质量为 M ,三部分气体质量分别为 m_1, m_2, m_3 ,开始时体积为 V_1, V_2, V_3 ,起始温度为 $T_1 = 273 - 3 = 270\text{K}$, $T_2 = 273 + 47 = 320\text{K}$, $T_3 = 273 + 27 = 300\text{K}$.

$$\begin{aligned} \text{由状态方程 } m = \frac{pVM}{RT} \text{ 得 } m_1:m_2:m_3 &= \frac{V_1}{T_1}:\frac{V_2}{T_2}:\frac{V_3}{T_3} = \frac{\alpha_1}{T_1}:\frac{\alpha_2}{T_2}:\frac{\alpha_3}{T_3} \\ m_1:m_2:m_3 &= \frac{90}{270}:\frac{120}{320}:\frac{150}{300} = \frac{1}{3}:\frac{3}{8}:\frac{1}{2} \end{aligned} \quad (1)$$

最后三部分气体达到平衡时,压强与温度均相同,则根据状态方程得

$$m_1:m_2:m_3 = \alpha_1':\alpha_2':\alpha_3' \quad (2)$$

$$\text{此外} \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_1' + \alpha_2' + \alpha_3' = 360^\circ \quad (3)$$

$$\text{由(1)(2)(3)式可解得} \quad \alpha_1' = 99^\circ \quad \alpha_2' = 112^\circ \quad \alpha_3' = 149^\circ$$

(2)设单位质量理想气体温度变化 1 度内能变化为 C ,气体平衡时压强与温度分别为 p 和 T ,则根据热平衡方程

$$m_1C(T - T_1) + m_2C(T - T_2) + m_3C(T - T_3) = 0 \quad (4)$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{m_1T_1 + m_2T_2 + m_3T_3}{m_1 + m_2 + m_3} \\ &= \frac{\alpha_1'T_1 + \alpha_2'T_2 + \alpha_3'T_3}{\alpha_1' + \alpha_2' + \alpha_3'} \end{aligned}$$

将 $\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3', T_1, T_2, T_3$ 值代入得

$$T = 298\text{K}$$

用 V 表示三部分总体积

$$\text{初始状态} \quad p_0V = \frac{(m_1T_1 + m_2T_2 + m_3T_3)R}{M} \quad (5)$$

$$\text{最终状态} \quad pV = \frac{(m_1 + m_2 + m_3)RT}{M} \quad (6)$$

由④式可知,⑤⑥两式右边相等,所以达到平衡时

$$p = p_0$$

例 7.3-3 两个球形容器其体积比为 $\frac{V_1}{V_2} = \frac{12}{13}$,由一细管(容积可忽略不计)相连,在细管的水平部分封有一段汞柱,两容器内盛有同种等量气体,并分别置于两个温度分别为 T_1 和 T_2 的热库内,如图 7.3-3 所示.

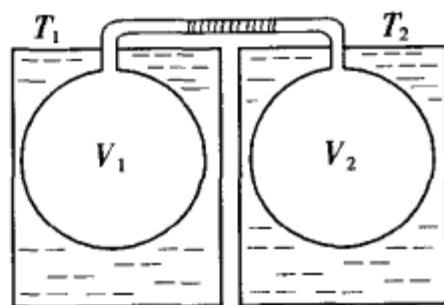


图 7.3-3

(1)当汞柱平衡于水平细管中央时,测得 $T_1 = 300\text{K}$,求 $T_2 = ?$

(2)这时使两热库的温度分别升高相同的温度 ΔT ,则汞柱能否保持平衡?

(3)若两热库的温度分别为 $T_1' = 320\text{K}$, $T_2' = 280\text{K}$,则汞柱不能保持平衡,而被冲入右方容器内,求气体重新达到平衡时的压强 p 与(1)中容器 1 内的压强 p_1 的比值 $p:p_1$.

解:当汞柱平衡于水平细管中央时,两容器中压强 $p_1 = p_2$. 因两容器中盛有同种等量气体,所以

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

$$T_2 = \frac{V_2}{V_1} T_1 = \frac{13}{12} \times 300 = 325\text{K}$$

(2) 容器 I 中压强

$$p_1 = \frac{V}{V_1} RT_1$$

容器 II 中压强

$$p_2 = \frac{V}{V_2} RT_2; \quad p_1 = p_2$$

当两容器升高相等温度 ΔT 时

$$p_1 + \Delta p_1 = \frac{V}{V_1} R(T_1 + \Delta T) \quad \Delta p_1 = \frac{V}{V_1} R \Delta T$$

$$p_2 + \Delta p_2 = \frac{V}{V_2} R(T_2 + \Delta T) \quad \Delta p_2 = \frac{V}{V_2} R \Delta T$$

因为 $V_2 > V_1$, 所以 $\Delta p_1 > \Delta p_2$, 汞柱不能在中央保持平衡, 将向右方移动

(3) 设开始时, 两容器中气体质量分别为 m , 则左室中气体状态方程为

$$p_1 V_1 = \frac{m}{M} RT_1 \quad \text{①}$$

两热库温度升高后, 汞柱被冲入右方容器内, 气体重新达到平衡时, 两容器内气体压强应相等, 此时

$$\text{左方} \quad p V_1 = \frac{m_1}{M} RT_1' \quad \text{②}$$

$$\text{右方} \quad p V_2 = \frac{m_2}{M} RT_2' \quad \text{③}$$

$$\text{②/③} \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{T_2'}{T_1'} = \frac{12}{13} \cdot \frac{280}{320} = \frac{21}{26}$$

而 $m_1 + m_2 = 2m$

$$m_1 + \frac{26}{21} m_1 = 2m$$

$$\frac{m_1}{m} = \frac{42}{47}$$

$$\text{由②/①} \quad \frac{p}{p_1} = \frac{m_1}{m} \cdot \frac{T_1'}{T_1} = \frac{42}{47} \times \frac{320}{300} = 0.95$$

§ 7.4 混合理想气体 道尔顿分压定律

由多种化学成分的理想气体混合成的气体称为混合理想气体, 其中每一种化学成分的气体称为混合气体的成分气体。

若现有质量分别为 m_1, m_2, \dots, m_N 等 N 种理想气体, 它们的摩尔质量分别为 M_1, M_2, \dots, M_N 。

在温度为 T 时, 将每一种气体分别装入容器为 V 容器中, 每一种气体产生压强叫做分压强, 根据克拉贝龙方程得:

$$p_1 V = \frac{m_1}{M_1} RT$$

$$p_2 V = \frac{m_2}{M_2} RT$$

⋮

$$p_N V = \frac{m_N}{M_N} RT$$

将上列各式相加后得

$$(p_1 + p_2 + \dots + p_N) V = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} + \dots \right) RT \quad (7.4-1)$$

若将 N 种气体同时装入容器 V 中产生压强叫做混合气体压强

$$p V = \frac{m}{M} RT \quad (7.4-2)$$

在容器中各种气体混合后的摩尔数与混合前多种气体摩尔数之和应相等,即

$$\frac{m}{M} = \frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} + \cdots + \frac{m_N}{M_N} \quad (7.4-3)$$

而式中 $m = m_1 + m_2 + \cdots + m_N$

故混合气体摩尔质量倒数满足式:

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{M_1} \cdot \frac{m_1}{m} + \frac{1}{M_2} \cdot \frac{m_2}{m} + \cdots + \frac{1}{M_N} \cdot \frac{m_N}{m}$$

将(7.4-3)式代入(7.4-2)式得

$$pV = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} + \cdots + \frac{m_N}{M_N} \right) RT \quad (7.4-5)$$

将(7.4-5)式与(7.4-2)式比较得:

$$p = p_1 + p_2 + \cdots + p_N \quad (7.4-6)$$

上式即道尔顿分压定律。道尔顿由实验发现,混合理想气体总压强等于各成分气体的分压强之和。

例 7.4-1 设空气是由 N_2 、 O_2 、Ar、 CO_2 、Ne 五种气体混合而成,五种成分的容积百分比为: N_2 占 78.084%, O_2 占 20.946%,Ar 占 0.934%, CO_2 占 0.033%,Ne 占 0.00182%,试求在标准状态下各种成分气体的分压强和密度以及空气的密度和平均分子量。

解:取一定质量的空气作为研究对象,它在标准状态下的体积为 V ,各成分气体的压强都为 $p = 101.325$ (kPa),则各种成分气体的分体积分别为

$$V_{N_2} = 0.78048V \quad V_{O_2} = 0.20946V$$

$$V_{Ar} = 0.00934V \quad V_{CO_2} = 0.00034V$$

$$V_{Ne} = 0.000182V$$

当各成分气体的体积都为 V 时,它们的分压强,由玻意耳定律

$$pV_{N_2} = p_{N_2}V$$

$$p_{N_2} = \frac{V_{N_2}}{V}p = 0.78048p = 79.115\text{kPa}$$

同理

$$p_{O_2} = \frac{V_{O_2}}{V}p = 0.20946p = 21.224\text{kPa}$$

$$p_{Ar} = \frac{V_{Ar}}{V}p = 0.00934p = 0.946\text{kPa}$$

$$p_{CO_2} = \frac{V_{CO_2}}{V}p = 0.00034p = 0.0345\text{kPa}$$

$$p_{Ne} = \frac{V_{Ne}}{V}p = 0.000182p = 0.00184\text{kPa}$$

$$pV = \frac{m}{M}RT$$

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{Mp}{RT}$$

由此得

$$\rho_{N_2} = \frac{M_{N_2}p_{N_2}}{RT} = \frac{28 \times 10^{-3} \times 0.78048 \times 1.013 \times 10^5}{8.31 \times 273.15} = 0.9735(\text{kg/m}^3)$$

$$\rho_{O_2} = \frac{M_{O_2}p_{O_2}}{RT} = \frac{32 \times 10^{-3} \times 0.20946 \times 1.013 \times 10^5}{8.31 \times 273.15} = 0.299(\text{kg/m}^3)$$

$$\rho_{Ar_2} = \frac{M_{Ar}p_{Ar}}{RT} = \frac{39.9 \times 10^{-3} \times 0.00934 \times 1.013 \times 10^5}{8.31 \times 273.15} = 0.0166(\text{kg/m}^3)$$

$$\rho_{\text{CO}_2} = \frac{M_{\text{CO}_2} p_{\text{CO}_2}}{RT} = \frac{44 \times 10^{-3} \times 0.00034 \times 1.013 \times 10^5}{8.31 \times 273.15} = 4.4 \times 10^{-4} (\text{kg/m}^3)$$

$$\rho_{\text{Ne}} = \frac{M_{\text{Ne}} p_{\text{Ne}}}{RT} = \frac{20.1 \times 10^{-3} \times 0.0000182 \times 1.013 \times 10^5}{8.31 \times 273.15} = 1.6 \times 10^{-5} (\text{kg/m}^3)$$

空气密度 $\rho = \rho_{\text{N}_2} + \rho_{\text{O}_2} + \rho_{\text{Ar}} + \rho_{\text{CO}_2} + \rho_{\text{Ne}} = 1.291 (\text{kg/m}^3)$

对第 i 种成分气体, 若其质量的摩尔数为 ν_i , 当其压强等于大气的压强 p 时, 其体积为分体积 V_i , 由克拉贝龙方程得:

$$pV_i = \nu_i RT$$

对于大气, 当其体积为 V , 压强为 p , 质量的摩尔数为 ν 时有

$$pV = \nu RT$$

由此得 $\frac{V_i}{V} = \frac{\nu_i}{\nu} = \frac{m_i/M_i}{m/M} = \frac{m_i \bar{M}}{m M_i}$

式中 m_i 和 M_i 为第 i 种成分气体的质量和摩尔质量, m 和 \bar{M} 为大气的质量和平均摩尔质量, 因

$$m = \sum_i m_i = \sum_i \frac{V_i M_i}{V} \frac{m}{M}$$

故 $\bar{M} = \sum \frac{V_i}{V} M_i = 0.78048 \times 28 \times 10^{-3} + 0.20946 \times 32 \times 10^{-3} + 0.00934$
 $\times 39.9 \times 10^{-3} + 0.00034 \times 44 \times 10^{-3} + 0.0000182 \times 20.1 \times 10^{-3}$
 $= 28.95 \times 10^{-3} (\text{kg/mol})$

即空气的平均分子量为 28.95.

二、分子动理论

§ 7.5 分子运动的基本概念

(1) 物质是由大量分子或原子组成. 1 mol 物质包含粒子数为 $N_0 = 6.02 \times 10^{23}$ 个, N_0 叫做亚佛加德罗常数.

(2) 物体的分子在永不停息地作无规则运动, 这由布朗运动实验加以验证的.

(3) 分子间存在相互作用力. 当分子间距离小于 10^{-10}m 时分子力为斥力; 大于 10^{-10}m 时, 则表现为引力. 当分子间距离大于 10^{-9}m 时, 分子力就可以忽略不计了, 如图 7.5-1.

§ 7.6 气体分子热运动的图景和特征

在标准状态下, 气体分子间的距离大约是分子本身线度 (10^{-10}m) 的 10 倍. 分子间的相互作用力, 除了在热运动过程中相互碰撞的那个瞬间以外, 是极其微小的. 在连续两次碰撞之间分子自由运动的路程平均约为 10^{-7}m , 而分子热运动的平均速率却很大, 例如, 室温下空气分子的平均速率, 约为 400m/s . 因此, 平均地说, 大约经过 10^{-10}s , 分子间就碰撞一次, 也就是说, 在 1 秒内一个分子得遭受到 10^{10} 次碰撞. 分子相互碰撞的瞬间约为 10^{-13}s , 这小于分子自由运动所经历的平均时间.

在大量分子热运动中, 微观上分析每个分子的运动状态和经历都各不相同, 带有很大的偶然性, 因而是无序的. 但对大量分子的集体来看, 宏观上表现出大量分子运动却有一定规律性, 这就是所谓的统计规律性.

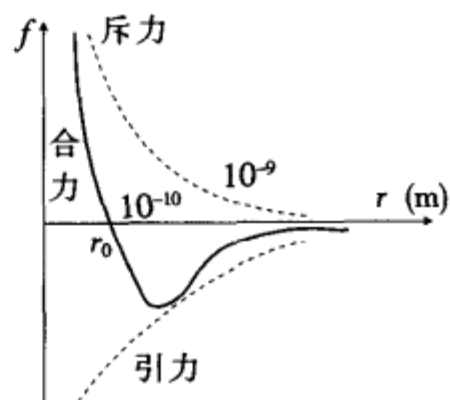


图 7.5-1 分子作用力

§ 7.7 理想气体的压强公式

从分子运动的观点来分析,气体对器壁产生的压力是由于大量分子对器壁产生碰撞的平均集体效果.个别分子的运动是无序的,因而一个分子对器壁的碰撞发生在什么时刻,碰撞在什么地方完全是偶然的,因此个别分子给予器壁的冲力是断续的,变化不定的.但对大量分子整体而言,每一时刻都有许多分子与器壁碰撞,器壁上受到的是一个恒定的、持续的平均作用力.因而宏观量压强对应的是大量微观量的统计平均值.容器中分子数越多,运动速度越大,压强也越大.

根据气体分子动理论可得到理想气体的压强公式为

$$p = \frac{1}{3} nm \overline{v^2} = \frac{2}{3} n \overline{\epsilon_k} \quad (7.7-1)$$

式中 m 为气体分子的质量, n 为分子数密度(单位体积内的分子数), $\overline{v^2}$ 为分子速率的平方平均值, $\overline{\epsilon_k} = \frac{1}{2} m \overline{v^2}$ 为气体分子的平均平动动能.

例 7.7-1 试根据气体分子动理论和统计理论证明理想气体压强公式为 $p = \frac{2}{3} n \overline{\epsilon_k}$.

证: 选一长方形容器,边长分别为 l_1, l_2, l_3 , 且 l_1 边沿 x 轴, 见图 7.7-1 容器中有 N 个(数目极大)个同类单原子分子在作热运动, 每个分子质量均为 μ , 在平衡时, 各处压力是相同的, 现计算 $A_1 = l_2 l_3$ 面所受的压力.

在容器中任意选择一分子 a , 它的速度为 v_1 , 在 x, y, z 方向的分量为 v_{1x}, v_{1y}, v_{1z} . 当它与器壁 A_1 面碰撞时受到器壁对它的作用力 f_1 , 方向沿 $-x$ 方向, 因碰撞是完全弹性的, 所以 v_x 沿 $-x$ 方向弹回, 碰撞过程中动量变化为

$$\Delta \mu v_{1x} = -\mu v_{1x} - \mu v_{1x} = -2\mu v_{1x} \quad (1)$$

根据动量原理 A_1 面作用在 a 分子上的冲量为

$$f_{1x} \cdot \Delta t = \Delta(\mu v_{1x}) = -2\mu v_{1x} \quad (2)$$

分子 a 从 A_1 面碰撞后弹回飞向 A_2 面, 碰撞 A_2 面后又回到 A_1 面(注意 y, z 方向动量没有变化), 在与 A_1 面作连续二次碰撞间通过距离为 $2l_1$, 因此在二次碰撞间所需时间为 $\Delta t = \frac{2l_1}{v_{1x}}$, 在单位时间内

分子 a 与 A_1 面碰撞 $Z = \frac{1}{\Delta t} = \frac{v_{1x}}{2l_1}$ 次, 每次碰撞动量变化 $-2\mu v_{1x}$, 因此单位时间内动量变化即为它在单位时间内所受到的平均冲力

$$f_{ax} = \frac{\Delta(\mu v_{1x})}{\Delta t} = -2\mu v_{1x} \frac{v_{1x}}{2l_1} \quad (3)$$

根据牛顿第三定律 A_1 面受到 a 分子给予的平均作用力为

$$F_a = -f_{ax} = 2\mu v_{1x} \frac{v_{1x}}{2l_1} = \mu \frac{v_{1x}^2}{l_1} \quad (4)$$

由上讨论可知, 每一分子对器壁的碰撞, 以及作用在壁上的力是间歇的, 不连续的. 但是, 容器内有大量分子, 所有分子在同一时间内都在与器壁碰撞, 因此使器壁上受到一个连续而均匀的压力.

A_1 面所受到的平均作用力 \overline{F} 的大小应该等于所有分子对 A_1 面碰撞时所作用力的总和.

$$\overline{F} = \sum F_a = \sum_{i=1}^N \mu \frac{v_{ix}^2}{l_1} \quad (5)$$

式中 v_{ix} 是 i 分子在 x 方向上的速度分量, 按压强定义

$$p = \frac{\overline{F}}{l_2 l_3} = \frac{\mu}{l_1 l_2 l_3} \sum_{i=1}^N v_{ix}^2 = \frac{\mu}{l_1 l_2 l_3} (v_{1x}^2 + v_{2x}^2 + \dots + v_{Nx}^2)$$

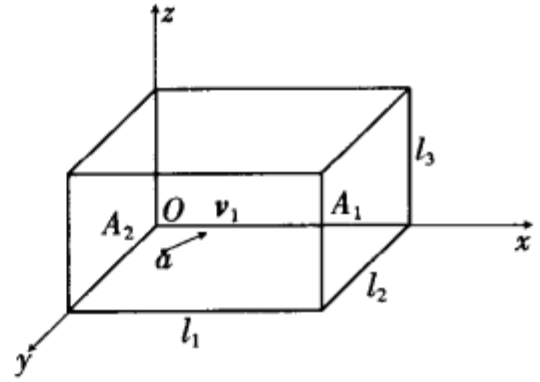


图 7.7-1

$$= \frac{\mu N}{l_1 l_2 l_3} \left(\frac{v_{1x}^2 + v_{2x}^2 + \dots + v_{Nx}^2}{N} \right) \quad (6)$$

根据统计理论 $\bar{v}_x^2 = \frac{v_{1x}^2 + v_{2x}^2 + \dots + v_{Nx}^2}{N}$ (7)

\bar{v}_x^2 是表示所有分子在 x 方向速度分量平方的平均值。

并以分子数密度 $n = \frac{N}{V} = \frac{N}{l_1 l_2 l_3}$ 代入得

$$p = n\mu \bar{v}_x^2 \quad (8)$$

又根据统计假设,在平衡状态下分子各方向运动速度的平均值应相等

$$\bar{v}_x^2 = \bar{v}_y^2 = \bar{v}_z^2 \quad (9)$$

又

$$\bar{v}^2 = \bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2 + \bar{v}_z^2 = 3\bar{v}_x^2$$

$$\bar{v}_x^2 = \frac{1}{3} \bar{v}^2 \quad (10)$$

$$p = \frac{1}{3} n\mu v^2 \quad (11)$$

设单个分子平均平动动能 $\bar{\epsilon}_k = \frac{1}{2} \mu \bar{v}^2$

则得证:

$$\begin{aligned} p &= \frac{2}{3} n \left(\frac{1}{2} \mu \bar{v}^2 \right) \\ &= \frac{2}{3} n \bar{\epsilon}_k \end{aligned} \quad (12)$$

§ 7.8 温度的微观意义

从分子运动论的观点来分析,温度是标志着物体内部大量分子无规则热运动的剧烈程度,温度是大量分子平均平动动能的量度,温度 T 与分子平均平动动能的关系为

$$\bar{\epsilon}_k = \frac{1}{2} \mu \bar{v}^2 = \frac{3}{2} kT \quad (7.8-1)$$

式中 $k = \frac{R}{N_0} = 1.38 \times 10^{-23} \text{J/K}$ 叫做波兹曼常数, μ 为每一分子质量。

理想气体状态方程

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{V} \frac{m}{M} RT = \frac{N}{V} \frac{\mu}{N_0 \mu} RT \\ &= n \frac{R}{N_0} T = nkT \end{aligned} \quad (7.8-2)$$

任何气体,在同一温度下,它们的分子平均动能都是相同的,但压强与分子数密度有关,分子数密度越大,压强越大;反之亦然。

例 7.8-1 一容器中贮有气体,压强为 0.010mmHg,温度为 27°C,求 1cm³ 体积中包含有多少个气体分子? 这些气体的平均平动动能是多少?

解: $p = 0.010 \text{mmHg} = 1.33 \text{Pa}$, $k = 1.38 \times 10^{-23} \text{J/K}$

$$T = 273 + 27 = 300(\text{K})$$

由 $p = nkT$ 得

$$n = \frac{p}{kT} = \frac{1.33}{1.38 \times 10^{-23} \times 300} = 3.21 \times 10^{-20} (\text{m}^{-3}) = 3.21 \times 10^{-14} (\text{cm}^{-3})$$

每个分子的平均动能为 $\frac{3}{2} kT$, 所以 1cm³ 内气体分子总平均动能为

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_k &= n \cdot \frac{3}{2} kT \\ &= 3.21 \times 10^4 \times \frac{3}{2} \times 1.38 \times 10^{-23} \times 300 = 19.9 \times 10^{-7} (\text{J}) \end{aligned}$$

§ 7.9 理想气体的内能

1. 分子的自由度

确定物体(气体、液体、固体等)在空间位置所必需的独立坐标数目,叫做该物体的自由度。

由于气体分子本身具有一定大小和较复杂的内部结构,分子除平动外,还会有转动和分子内原子的振动等。为了简化讨论,现设分子结构是刚性的,因此,在讨论分子热运动能量时,只需考虑分子的平动和转动能量。

对于单原子气体分子,可视为质点,只有3个自由度,均属平动自由度,对于双原子气体分子它是由一根化学链相联结,因此线状分子有5个自由度,其中3个是决定质心位置的自由度,2个绕质心转动的自由度,多原子分子有6个自由度,其中3个平动自由度,3个转动自由度。一般而言,如果一个分子由 n 个原子组成,则它最多有 $3n$ 个自由度,其中3个是平动自由度,3个是转动自由度,其余 $3n-6$ 个是振动自由度。如果振动不考虑的话,最多只有6个自由度。但分子的运动受到某种限制时,其自由度的数目就会减少。

2. 能量按自由度均分定理

根据统计理论,在热平衡状态下,单原子分子具有的平动动能为 $\frac{3}{2}kT$ (7.8-1式),自由度为3,则物质分子在每一个自由度都应具有相同能量,因此对应于一个自由度的能量就应是 $\frac{1}{2}kT$ 。这就叫做能量按自由度均分定理。

如果某种气体分子只有平动和转动的自由度,常以 i 表示两者之和,因此,分子的平均能量为

$$\bar{\epsilon} = \frac{i}{2} kT \quad (7.9-1)$$

这样,单原子分子平均能量为 $\frac{3}{2}kT$,双原子分子能量为 $\frac{5}{2}kT$,多原子分子为 $\frac{6}{2}kT = 3kT$ 。

3. 理想气体的内能

物质内部分子热运动的动能、分子间相互作用的势能间总和叫做内能。

气体的内能就是所有分子热运动的动能和分子间相互作用势能之总和。

理想气体分子间势能忽略不计,它的内能只是分子各种运动形式的动能之和。1 mol的理想气体中有 N_0 个分子所以它的内能为

$$E_i = \frac{i}{2} N_0 \cdot kT = \frac{i}{2} RT \quad (7.9-2)$$

对于 ν mol理想气体,其内能为

$$E = \nu \cdot \frac{i}{2} RT \quad (7.9-3)$$

4. 比热和热容量

单位物质温度升高摄氏1度时所需吸收的热量叫做比热。各种物质比热不同。

$$c = \frac{\Delta Q}{m \Delta T} \quad (7.9-4)$$

对同一物质(特别是气体),比热的大小又与加热时的条件,如温度的高低、压强和体积的变化情况有关。

某一物体温度升高摄氏1度所需的热量叫做热容量,简称热容。

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T} \quad (7.9-5)$$

物体热容量就相当于该物体质量和比热的乘积。

$$C = mc \quad (7.9-6)$$

1 mol理想气体在体积恒定条件下,温度升高1K所吸收的热量,称为定容摩尔热容量

$$C_V = \frac{i}{2} R \quad (7.9-7)$$

1 mol 的理想气体在压强恒定的条件下, 温度升高 1K 所吸收的热量, 称为定压摩尔热容. 用 C_p 表示.

$$C_p = \frac{i+2}{2}R \quad (7.9-8)$$

1 mol 的固体(对压强与体积变化影响不大)摩尔热容为

$$C = 3R \quad (7.9-9)$$

这结论由实验得出, 叫做杜隆-珀替定律.

§ 7.10 分子平均碰撞数与平均自由程

每个分子在单位时间内与其他分子碰撞的平均次数叫做分子的平均碰撞数.

取某一分子中心 O 为圆心, 以分子直径 d 为半径作一底面积 πd^2 , 则当一分子以平均速率 \bar{v} 运动时, 在 1 秒钟内通过路程为 $\bar{v} \cdot 1$, 以此长度为高作一柱体如图 7.10-1 所示. 若分子数密度为 n , 则在此体积内包含的分子数总共为 $\pi d^2 \bar{v} n$, 这些分子都是当一个分子以 \bar{v} 速率运动时在 1 秒钟内所碰到的, 考虑到其他分子也以 \bar{v} 在运动时, 即可得到分子在 1 秒钟内与其他分子的平均碰撞数

$$\bar{Z} = \sqrt{2} \pi d^2 \bar{v} n \quad (7.10-1)$$

有时将围绕某个分子作一横截面 $\sigma = \pi d^2$, 叫做碰撞截面, 如果另一分子的质心通过这个分子的面积 σ , 后者就会遭到碰撞.

一个分子在两次碰撞之间通过的直线路程叫做自由程, 一个分子的自由程, 时长时短, 具有偶然性, 但是, 大量分子自由程的统计平均值, 是具有确定值, 在 1 秒钟内通过的平均路程为 $\bar{v} \cdot 1$, 在这段路程中平均要碰撞 \bar{Z} 次, 因此一个分子在连续两次碰撞之间通过的平均自由程为 $\bar{\lambda}$.

$$\bar{\lambda} = \frac{\bar{v}}{\bar{Z}} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n} \quad (7.10-2)$$

对于理想气体 $p = nkT$, 故 $\bar{\lambda}$ 可写为

$$\bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi d^2 p} \quad (7.10-3)$$

当理想气体的温度一定时, 分子的平均自由程 $\bar{\lambda}$ 与气体的压强成反比.

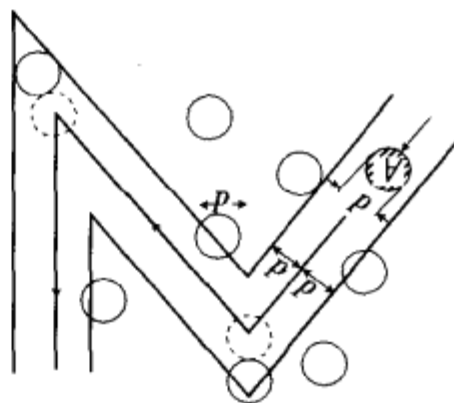


图 7.10-1 分子平均自由程

三、液体的表面性质

§ 7.11 表面张力

1. 表面张力

液体具有流动性, 没有固定形状, 但与固体或气体接触时都有明显的分界面. 液体的这一表面具有一些特殊性质.

在液体表面上想像一直线, 直线两旁的液膜之间存在着相互作用的拉力, 力的方向沿表面的切线方向并与直线垂直, 液面上出现的这种张力叫做表面张力. 表面张力具有使表面收缩的趋势, 天空中下落雨滴呈球形, 就是因为球形表面积最小.

表面张力的大小与直线段长度 l 成正比, 即

$$f = \alpha l \quad (7.11-1)$$

在整个液面上受到表面张力, l 即为液面边界线长度. 式中 α 称为液体表面张力系数. 它表示单位直线两旁液面的拉力, 它的单位为 N/m. 不同的液体具有不同的表面张力系数, 对于一定的液体, 表面张力系数随温度上升而减小. 液体的表面张力系数的大小还与杂质有关. 例如肥皂能使 20℃ 水的表面

张力系数由 $73 \times 10^{-3} \text{N/m}$ 减为 $40 \times 10^{-3} \text{N/m}$. 能使表面张力系数减小的物质叫做表面活性物质.

2. 球形液面内外压差

对于弯曲液面来说(例如液滴表面,液体内部气泡表面,肥皂泡等),由于液体表面张力的存在,液面内外的压强是不同的.一般球面内的压强总是大于球面外.

下面以液滴为球面时为例,求内外液面的压强差.

设有一半径为 r 的球形液滴,为了求出内部压强 p_i 和外部压强 p_0 的差,现将球形液滴剖析为二个半球,先分析右半球受力情况如图 7.11-1(a)所示.半球形边界上受到表面张力沿 $-x$ 方向,大小为

$$f = \alpha \cdot 2\pi r$$

设 p_i 为内压强,则作用在球面上 dA 面上的力为 $p_i dA = dF_i$ (如图 7.11-1(b)所示).

此力在 x 方向的分力为 $dF_{ix} = p_i dA \cos\theta = p_i dA'$

dA' 为 dA 在中央圆面上的投影,对右边半球面上的总压力(y, z 方向作用力相互抵消)

$$F_i = \int dF_{ix} = \int p_i dA' = p_i \pi r^2$$

同理,球外压力对半球面压力为 $F_0 = p_0 \pi r^2$

根据力的平衡条件

$$F_0 + f = F_i$$

$$p_i - p_0 = \frac{2\alpha}{r}$$

由此可知,液体表面张力越大,球半径越小,液滴内外压差越大;如果液面是凹形,则 $p_i - p_0 = -\frac{2\alpha}{r}$.

例 7.11-1 把端点相连的三根细棉线放在水面如图 7.11-2,其中 1、2 两根线各长 1.5cm,另一根线 3 长为 1cm. 现将表面张力系数为水的 $\frac{2}{5}$ 的表面活性剂滴入 A 点试求每根线上的张力. 然后将这种表面活性剂滴入 B 点,再求每根线上张力,水的表面张力系数 $\alpha = 0.07 \text{N/m}$.



图 7.11-2

解 (1) 当 A 区滴入活性剂后,形成图 7.11-3(a)所示,由于表面张力形成一圆周长 $L = l_2 + l_3 = 2.5 \text{cm}$,半径 $R_1 = \frac{L}{2\pi} \text{cm}$ 的圆,取圆心角为 θ 的一小段圆弧,这段圆弧所受相邻线段张力 T 与表面张力相平衡则

$$2T \sin \frac{\theta}{2} = (\alpha - \frac{2}{5}\alpha) R_1 \theta$$

因 θ 很小 $\sin \frac{\theta}{2} \approx \frac{\theta}{2}$ $T\theta = 0.6\alpha R_1 \theta$

$$T_2 = T_3 = 0.6\alpha R_1$$

$$= \frac{0.6 \times \alpha \times L}{2\pi} = \frac{0.6 \times 0.07 \times 2.5 \times 10^{-2}}{2 \times 3.14}$$

$$= 1.67 \times 10^{-4} (\text{N})$$

$$T_1 = 0$$

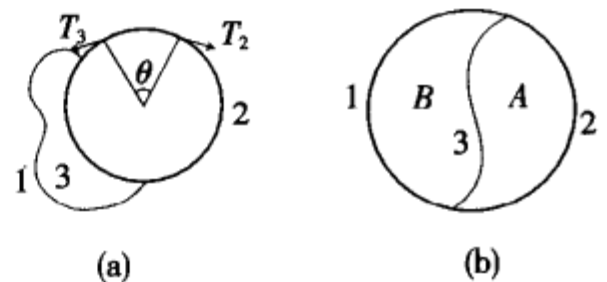


图 7.11-3 表面张力

(2) 在 B 点滴入活性剂后,出现图例 7.11-3(b)所示情况, $R_2 = \frac{l_1 + l_2}{2\pi} = \frac{0.03}{2\pi} \text{cm}$,用上类似方法解得

$$T_1 = T_2 = 2 \times 10^{-4} \text{N}$$

$$T_3 = 0$$

§ 7.12 毛细现象

1. 液体与固体接触处的表面现象——润湿与不润湿

将干净玻璃片插入水中,水将会附着在玻璃片上,将石蜡片插入水中,再取出水不会附着在石蜡上,

前者叫做水能润湿玻璃,而不能润湿石蜡。

润湿或不润湿是固体与液体接触时所发生现象,这与分子间作用力有关,液体分子间作用力叫内聚力,固体分子与液体分子间吸引力叫附着力,当附着力大于内聚力时该液体能润湿固体,否则不能。

润湿与不润湿还可以用固体表面与自由液体表面形状来区分。作液体自由表面的切线与固体表面切线这两条切线通过液体内部夹角为 θ ,叫做接触角。润湿情况下,接触角 $\theta < \frac{\pi}{2}$ 为锐角(图 7.12-1

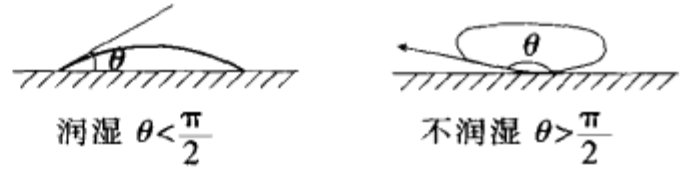


图 7.12-1 润湿与不润湿

(a)所示),不润湿时 $\theta > \frac{\pi}{2}$ 为钝角(图 7.12-1(b)所示)。

固体容器内装有润湿液体,在器壁附近液体其液面将向上弯曲,装着不润湿液体,则器壁附近液面将向下弯曲,在较细管中装有液体时,液面常呈现弯月面。

2. 毛细现象

将很细的玻璃管(内径小于 1mm)插入水中,管内水面会上升,内径越小,升高越多,若将这细管插到水银中,则管内水银面反而要降低,这种润湿或不润湿液体在细管内出现液面上升或下降的现象叫做毛细现象。能产生毛细现象的细管叫做毛细管(例如细玻璃管、毛发、微血管、植物中茎、根内导管等)。

毛细现象是由液体的表面现象与液体对管壁的润湿情况来决定的。

下面来讨论液体在毛细管中液面升高现象(图 7.12-2)。

由于液体润湿现象,使液面发生弯曲,因而液面下方压强小于液面上方大气压强,而管内外液面同高度的 B、C 两点压强原来应该相等均为外界大气压,由于管内液面弯曲后压强不平衡,管内液柱要上升,直到管内液柱产生压强使 B 点压强升高到与管外 C 点压强相等时停止上升。

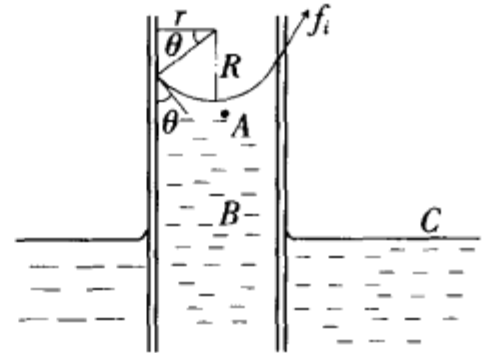


图 7.12-2 毛细现象

设弯月面下一点 A 压强为 p_A 。

$$p_0 - p_A = \frac{2\alpha}{R}$$

式中 p_0 为外界大气压, R 为弯曲液面的曲率半径, α 为液体表面张力系数。

B 点压强

$$p_B = p_A + \rho gh$$

ρ 为液体密度, h 为液柱高度

又 $p_B = p_C = p_0$

$$p_0 = -\frac{2\alpha}{R} + p_0 + \rho gh$$

$$h = \frac{2\alpha}{R\rho g}$$

$R = \frac{r}{\cos\theta}$, r 为毛细管半径, θ 为接触角

$$h = \frac{2\alpha \cos\theta}{r\rho g}$$

可以看出,液柱上升高度与 α 成正比与 r 成反比。

对于不润湿液体 $\theta > \frac{\pi}{2}$, 则 h 为负值,表示液面下降高度。

毛细现象在工农业生产、日常生活等方面都有着广泛应用,例如毛巾吸汗、灯芯吸油、植物根茎吸水分与养料,大多是通过土壤中的毛细管实现的。

例 7.12-1 如图 7.12-3 所示,一个 U 形玻璃管,两管的直径分别为 $d_1 = 1\text{mm}$, $d_2 = 3\text{mm}$, 水的表面张力系数 α , 试求两边管中水面的高度差。

解:设水完全润湿玻璃,则接触角 $\theta=0$,管内 A 点处压强为 p_A

$$p_A = p_0 - \frac{4\alpha}{d_1} = p_C - \rho gh$$

而 B 点压强

$$p_B = p_0 - \frac{4\alpha}{d_2} = p_C$$

由上两式解得

$$\rho gh = 4\alpha \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right)$$

所以

$$h = \frac{4\alpha}{\rho g} \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right)$$

将 $d_1 = 1\text{mm}$, $d_2 = 3\text{mm}$, $\rho = 1\text{g/cm}^3$, $g = 980\text{cm/s}^2$, $\alpha = 7.3 \times 10^{-2}\text{N/m}$ 代入得

$$h = 2.1\text{cm}$$

例 7.12-2 如图 7.12-4 所示,在图(a)中,毛细管内液面高度为 h ;在图(b)中,一倒置的 U 形毛细管,高度 $h_1 < h$,试求当 U 形管管口距液面距离为 h_2 时,管口液面的弯曲情况。

解:设管口液面内一点 A 与管内 B 点在同一水平面上, C 点和 D 点在同一水平上,则

$$p_A = p_B = p_C - \rho gh_2 = p_D - \rho gh_2 = p_0 - \rho gh_2$$

所以 $\Delta p = p_A - p_0 = -\rho gh_2$

这表明管口液面内外压强差为 $-\rho gh_2$,当 h_2 为正值时即 $h_2 > 0$

则 $\Delta p < 0$

即液面内 A 点的压强比液面外大气压要小,所以液面一定是凹液面。

当 $h_2 = 0$ 时, $\Delta p = 0$, $p_A = p_0$,这时一定为平液面。

当 $h_2 < 0$ 时, $\Delta p > 0$ 为凸液面。当 h 继续减少时,即 U 形管管口低于液面较大时,液滴将拉长,当液滴重量超过表面张力向上的分量时,液滴下落;管口再降低时,液体将从管口连续流出,即虹吸现象。

例 7.12-3 在水中平行而竖直地插入两块玻璃板,板间距离 $d = 0.5\text{mm}$,板的宽度 $L \gg d$,如图 7.12-5,求两板间水面上升高度(水的表面张力系数 $\alpha = 72.8 \times 10^{-3}\text{N/m}$,水与玻璃完全润湿 $\theta = 0$)。

解:当水与玻璃完全润湿时,两板间液面将上升。当板内液柱重量与液面受到表面张力相平衡时,液柱就不再升高。

设液柱在两板内上升高度为 h ,则受到表面张力为 $\alpha(2L + 2d)$ 。

两板内液柱重量为 $\rho gh(Ld)$

平衡时 $\alpha(2L + 2d) = \rho ghLd$

$\because L \gg d$ $h = \frac{2\alpha}{\rho gd}$

将 $\rho = 10^3\text{kg/m}^3$, $g = 9.8\text{m/s}^2$, $d = 0.5 \times 10^{-3}\text{m}$, $\alpha = 72.8 \times 10^{-3}\text{N/m}$ 代入得

$$h = \frac{2 \times 72.8 \times 10^{-3}}{10^3 \times 9.8 \times 0.5 \times 10^{-3}} = 29.7 \times 10^{-3}(\text{m})$$

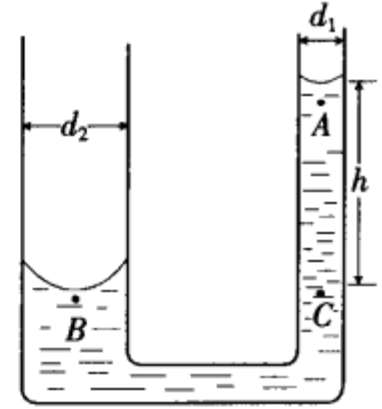


图 7.12-3

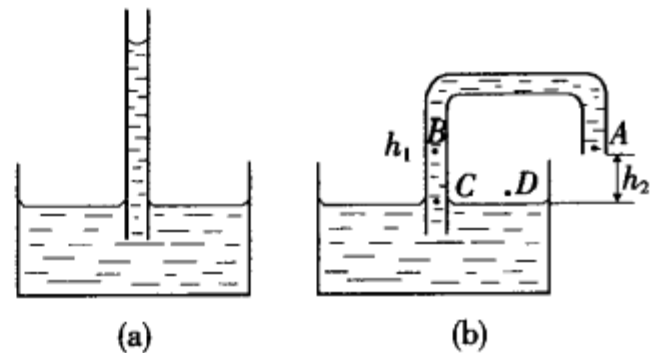


图 7.12-4

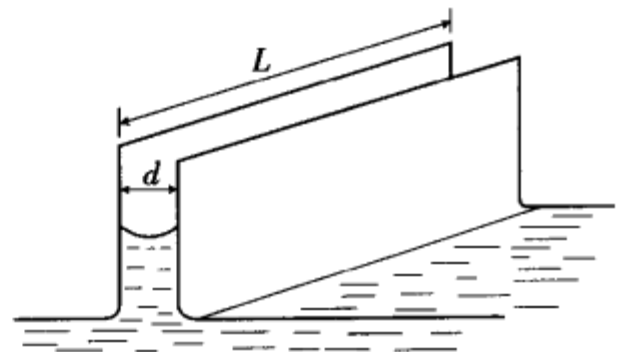


图 7.12-5

四、相 变

具有相同成分及相同物理、化学性质的均匀物质叫做相,各相之间有明显分界面。物质在通常条件下发生的最基本的相变过程,即气、液和固这三相之间的转换,物质在不同相之间的相互转变,称为相变。

§ 7.13 气液相变

物质由液相转变为气相过程,称为汽化,其相反的过程称为凝结或液化。汽化有蒸发和沸腾两种形式。蒸发是发生在液体表面的汽化过程,蒸发可以在任何温度下进行。对于同一种液体,外界条件不同,其蒸发的情况也不相同。对于敞开的容器中的液体来说,影响蒸发的主要因素有三个:(1)温度的高低。液体温度越高,蒸发越快,反之蒸发越慢;(2)表面积的大小。液面越大,蒸发越快,反之就小;(3)通风情况。如果液面上通风情况良好,蒸发就快,反之就慢。沸腾是在一定外界压强下,在某一特定温度时,在液体表面和内部同时发生的汽化过程。液体在沸腾时,温度保持不变。液体所受外部压强增大时,沸点升高;反之,沸点降低。

液体汽化时需要吸收热量,使单位质量的液体转化为同温度的蒸气所需的热量,叫做该物质的汽化热。这就是汽化时的相变潜热。汽化热一般随着温度的升高而减小。气体凝结成液体时要放出热量,单位质量蒸气凝结时放出的热量,叫做凝结热,数值上等于同温度的汽化热。

对于密闭容器中的液体,其汽化情况与敞开容器中液体的汽化有很大的不同。随着蒸发的进行,液面上方蒸气分子越来越多,因而单位时间内返回液面而凝结成液体的分子也多。当温度保持不变,单位时间蒸发出去的分子数等于返回液面的分子数时,蒸发实际上就停止。这时液面上的蒸气压称为饱和蒸气压。饱和蒸气压与液体的温度密切相关。温度高,饱和蒸气压就大。在相同温度下,不同物质的饱和蒸气压不相同。易蒸发的液体,其饱和蒸气压就大。在一定的温度下,密封容器内液体和气体两相平衡时,饱和蒸气压的值与气体所占的体积无关,也与气体中是否含有其他气体无关。

例 7.13-1 已知一容器内贮有少量的水,开始时容器体积为 V_1 ,温度为 T ,压强 $p_1 = 3\text{atm}$,水的体积可以忽略。现保持温度 T 不变,使容器体积增至 $V_2 = 2V_1$,此时容器内的水全部消失,压强 $p_2 = 2\text{atm}$ 。

(1)试求温度 T 。

(2)若等温地将容器体积增至 $V_3 = 2V_2$,则此时压强 p_3 是多大?

解:(1)因为容器内的气体由两部分气体即空气和饱和水蒸气组成,所以总压强 p 为

$$p = p_0 + p_g$$

式中 p_0 为水的饱和蒸气压, p_g 为空气的压强,当容器容积由 V_1 增至 V_2 时,压强从 p_1 变至 p_2

$$p_1 = p_0 + p_{1g} = 3\text{atm}$$

$$p_2 = p_0 + p_{2g} = 2\text{atm}$$

而空气在等温变化时, $p_{1g} \cdot V_1 = p_{2g} \cdot V_2$, $V_2 = 2V_1$

解得 $p_{1g} = 2\text{atm}$, $p_{2g} = 1\text{atm}$, $p_0 = 1\text{atm}$

由 $p_0 = 1\text{atm}$ 知道, $T = 373.15\text{K}(100^\circ\text{C})$

(2)经等温过程,气体体积由 V_2 增至 $V_3 = 2V_2$ 时,则有

$$p_2 V_2 = p_3 V_3$$

$$p_3 = \frac{p_2 V_2}{V_3} = \frac{1}{2} p_2 = 1\text{atm} = 1.013 \times 10^5 \text{Pa}$$

§ 7.14 固液相变

物质由固相转变为液相的过程,称为熔解。其相反的过程叫做凝固或结晶。

晶体在一定压强和一定温度下开始熔解。在熔解过程中要吸收热量。单位质量的晶体在熔解时所吸收的热量叫做熔解热。晶体熔解时温度保持不变,对应温度叫做熔点。非晶体在熔解过程中,随温度升高而逐渐软化,最后完全变为液体,没有确定的熔点,熔解时,系统的物理性质要发生显著变化。例如体积、饱和蒸气压、电阻率等。对于大多数物质来说,熔解时体积要膨胀。但是水和铋等物质却是例外,它们在熔解时体积反而缩小,这称为反常膨胀。

晶体物质凝固时的温度称为凝固点。单位质量物质凝固时所释放的热量称为凝固热。

§ 7.15 固气相变

物质由固相直接转变为气相的过程,称为升华。其相反的过程称为凝华。升华过程只发生在固体表面。单位质量的固态物质升华时所吸收的热量,叫做升华热。它等于单位质量的同种物质在相同条件下的熔解热与汽化热之和。由于物质在升华时要吸收大量热量,所以可用来制冷。例如,干冰(固态 CO_2)就是一种制冷剂。

§ 7.16 三相点

任何物质的气、液、固三相共存的状态,在 $p-T$ 图上,这状态正好是汽化曲线、熔解曲线和升华曲线的交点,所以称为三相点。三相点是对应于一个确定不变的压强和温度。如图 7.16-1 所示。例如水的三相点为 273.16K ,该温度是国际温标中最基本的固定参考点。

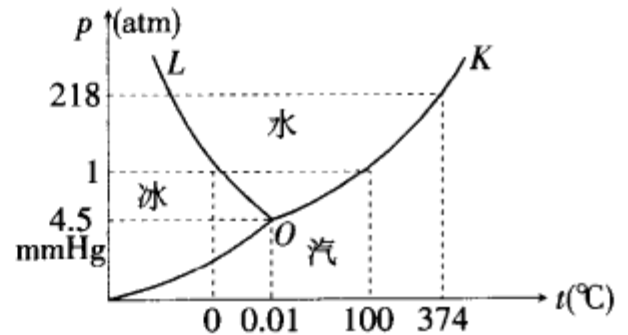


图 7.16-1 水的三相点

例 7.16-1 已知冰、水和水蒸气在一密闭容器内(容器内没有任何其他物质)如能三态平衡共存,则系统的温度和压强必定分别是 $t_i = 0.01^\circ\text{C}$ 和 $p_i = 4.58\text{mmHg}$ 。现在有

冰、水和水蒸气各 1g 处于上述平衡状态,若保持总体积不变而对此系统缓缓加热,输入热量 $Q = 0.255\text{kJ}$,试估算系统再达到平衡后冰、水和水蒸气的质量。已知在此条件下冰的升华热 $L_{\text{升}} = 2.83\text{kJ/g}$,水的汽化热 $L_{\text{汽}} = 2.49\text{kJ/g}$ 。

解:由题给数据可利用以下近似关系求得冰的熔解热

$$L_{\text{熔}} = L_{\text{升}} - L_{\text{汽}} = 0.34\text{kJ/g} \quad (1)$$

因为缓缓加热给系统的热 $Q < L_{\text{熔}}$,所以冰不能全部熔化,系统在物态变化过程中始终是三态共存且接近平衡,因此系统的温度及压强均不变。

现在估算在题给温度、压强条件下水蒸气的密度 $\rho_{\text{汽}}$,用理想气体状态方程可得 $\rho_{\text{汽}} = Mp_i/RT_i$ (M 为水蒸气摩尔质量)。代入数值 $M = 18 \times 10^{-3}\text{kg/mol}$, $R = 8.31\text{J/mol}\cdot\text{k}$, $p_i = 4.58\text{mmHg} = 610\text{Pa}$, $T_i = 273\text{K}$,粗算可得 $\rho_{\text{汽}} \approx 5 \times 10^{-3}\text{kg/m}^3$,在同样条件下,水的密度 $\rho_{\text{水}} \approx 1 \times 10^3\text{kg/m}^3$,冰的密度 $\rho_{\text{冰}} \approx 0.9 \times 10^3\text{kg/m}^3$,由此可知,在本题中水蒸气的体积远远大于水和冰的体积之和,又由于冰熔化为水体积变化不大,在总体积保持不变的条件下,完全可以认为本题物态变化过程中水蒸气的体积不变,也就是再达到平衡时水蒸气质量仍为 1g ,本题的物态变化过程几乎完全是冰熔为水的过程。

设后来冰、水、水蒸气的质量分别为 x, y, z ,则有

$$z = 1\text{g} \quad (2)$$

$$x + y = 2\text{g} \quad (3)$$

根据能量守恒,有

$$(1-x)L_{\text{熔}} = Q \quad (4)$$

由③④式解出 x, y ,再加上②式可得

$$x = 0.25\text{g}, y = 1.75\text{g}, z = 1\text{g}$$

本章综合例题

例 7-1 贮气罐的体积为 V ,罐内的气体压强为 p 。现将贮气罐经阀门与体积为 V_0 的真空室相

连，打开阀门为真空室充气，达到平衡后，关闭阀门，然后换一个同样的贮气罐继续为真空室（已非“真空”）充气……如此继续不断充气，直到真空室中气体的压强达到 p_0 ($p_0 < p$) 为止。设充气过程中温度恒定不变。试问需要多少个贮气罐？

解：在任一贮气罐为真空室充气的过程中，前者内部气体压强减小，后者内部气体压强增大，气体从贮气罐流向真空室。当两者压强相等时，该次充气过程结束。

每个贮气罐原有的气体摩尔数 $\nu = \frac{pV}{RT}$ ，

式中 T 是充气过程中不变的环境温度。当第一罐向真空室充气达到平衡后，气体的压强 $p_1 = \frac{\nu RT}{V_0 + V} = \frac{pV}{V_0 + V}$

进入真空室内的气体摩尔数

$$\nu_1 = \frac{p_1 V_0}{RT} = \frac{\nu RT}{RT} \frac{V_0}{V_0 + V} = \left(\frac{V_0}{V_0 + V} \right) \nu$$

第二罐向真空室（已有气体）充气达到平衡后，气体压强

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{(\nu + \nu_1)RT}{V_0 + V} = \frac{\left(1 + \frac{V_0}{V_0 + V}\right) \nu RT}{V_0 + V} \\ &= \left(1 + \frac{V_0}{V_0 + V}\right) \left(\frac{pV}{V_0 + V}\right) \end{aligned}$$

第二次充气后，真空室内的气体摩尔数

$$\nu_2 = \frac{p_2 V_0}{RT} = \frac{V_0}{V_0 + V} (\nu + \nu_1) = \left(1 + \frac{V_0}{V_0 + V}\right) \left(\frac{V_0}{V_0 + V}\right) \nu$$

第三罐向真空室充气达到平衡后，相应的物理量分别为

$$p_3 = \frac{(V + V_2)RT}{V_0 + V} = \dots = \left[1 + \left(\frac{V_0}{V_0 + V}\right) + \left(\frac{V_0}{V_0 + V}\right)^2\right] \left(\frac{pV}{V_0 + V}\right)$$

$$\nu_3 = \frac{p_3 V_0}{RT} = \frac{V_0}{V_0 + V} (\nu + \nu_2) = \dots = \left[1 + \left(\frac{V_0}{V_0 + V}\right) + \left(\frac{V_0}{V_0 + V}\right)^2\right] \left(\frac{V_0}{V_0 + V}\right) \nu$$

依次类推，第 k 罐向真空室充气达到平衡后，相应的物理量分别为

$$\begin{aligned} p_k &= \left[1 + \left(\frac{V_0}{V_0 + V}\right) + \left(\frac{V_0}{V_0 + V}\right)^2 + \dots + \left(\frac{V_0}{V_0 + V}\right)^{k-1}\right] \left(\frac{pV}{V_0 + V}\right) \\ &= \left[\frac{1 - \left(\frac{V_0}{V_0 + V}\right)^k}{1 - \frac{V_0}{V_0 + V}}\right] \left(\frac{pV}{V_0 + V}\right) = \left[1 - \left(\frac{V_0}{V_0 + V}\right)^k\right] p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_k &= \left[1 + \left(\frac{V_0}{V_0 + V}\right) + \left(\frac{V_0}{V_0 + V}\right)^2 + \dots + \left(\frac{V_0}{V_0 + V}\right)^{k-1}\right] \left(\frac{V_0}{V_0 + V}\right) \nu \\ &= \left[1 - \left(\frac{V_0}{V_0 + V}\right)^k\right] \frac{V_0}{V} \nu \end{aligned}$$

充气结束时，真空室内气体压强达到 p_0 ，即 $p_k = p_0$ ，把上述 p_k 的结果代入，得到所需贮气罐的数量

$$k = \frac{\ln \frac{p - p_0}{p}}{\ln \frac{V_0}{V_0 + V}}$$

例 7-2 一个质量 $m = 200.0\text{kg}$ ，长 $l_0 = 2.00\text{m}$ 的薄底大金属桶倒扣在宽旷的水池底部，如图例 7-2 所示，桶内的横截面积 $S = 0.5\text{m}^2$ （桶的容积为 $l_0 S$ ），桶本身（桶壁与底）的体积 $V_0 = 2.50 \times 10^{-2}\text{m}^3$ ，桶内封有高度 $l = 0.2\text{m}$ 的空气，池深 $H_0 = 20\text{m}$ ，大气压强 $p_0 = 10.00\text{m}$ 水柱高，水的密度 $\rho = 1.000 \times 10^3\text{kg}$ ，重力加速度 g 取 10.00m/s^2 ，若用图中所示的吊绳将桶上提，使桶能到达水面处，则绳拉力做

功有一最小值,试求从开始到绳拉力刚完成此过程中,桶和水(包括池水和桶内水)的机械能改变了多少(结果要保留三位有效数字),不计水的阻力,设水温很低,不计其饱和蒸汽压的影响,并设水温上下均匀且保持不变.

分析:桶在上提过程中,桶内空气压强逐渐减小,体积增大,从而对桶和桶内空气(质量忽略不计)这一整体浮力将增大,在本题中若存在浮力等于重力处,则此位置是不稳定平衡点,再稍上提,浮力将大于重力,桶就在浮力作用下上浮,从这时起,绳不必再拉桶,绳对桶的拉力所需作的最小功的过程就是缓慢地将桶由池底升高到浮力等于重力的位置所经历过程.

解:设浮力等于重力位置存在,桶内空气柱高度为 l' ,因为浮力等于重力

$$mg = \rho(l'S + V_0)g \quad (1)$$

将 $m = 200.00\text{kg}$, $g = 10.00\text{m/s}^2$, $\rho = 1.00 \times 10^3\text{kg/m}^3$, $V_0 = 2.50 \times 10^{-2}\text{m}^3$, $S = 0.500\text{m}^2$ 值代入得

$$l' = \frac{m - \rho V_0}{\rho S} = \frac{2.00 - 1.00 \times 10^3 \times 2.5 \times 10^{-2}}{1.00 \times 10^3 \times 0.5} = 0.350(\text{m}) \quad (2)$$

设此时桶下方边缘距离池底高度为 H ,由玻义耳定律得

$$[p_0 + H_0 - (l_0 - l)]lS = [p_0 + H_0 - H - (l_0 - l')]l'S$$

$$H = [p_0 + H_0 - (l_0 - l')] - [p_0 + H_0 - (l_0 - l)]\frac{l}{l'} \quad (3)$$

将 p_0 H_0 l_0 l l' 值代入得

$$H = 12.24\text{m} \quad (4)$$

由于 $H < H_0 - l_0$,桶仍在水中,即当桶向上提 12.24m 后,桶将自行浮至水面,所以绳对桶的拉力所需做的最小功的过程,就是缓慢地将桶提高到 12.24m 的过程,在这过程中,质量为 m 的桶被提高 H ,其势能将增加 ΔE_1

$$\Delta E_1 = mgH$$

被桶本身的体积 V_0 排开的水,其质量为 ρV_0 由离池底 H 高度下降到池底,势能减少 $\Delta E_2 = -\rho V_0 gH$

在 H 高度时,桶内空气所排开的水一部分下落,去填充桶在池底时桶内空气所占的空间,一部分上升到池面,由此引起水的势能的增加 ΔE_3

$$\Delta E_3 = \rho S l g (l_0 - \frac{1}{2}l) + \rho S (l' - l) g H_0 - \rho S \times g (H + l_0 - \frac{1}{2}l')$$

机械能变化总和

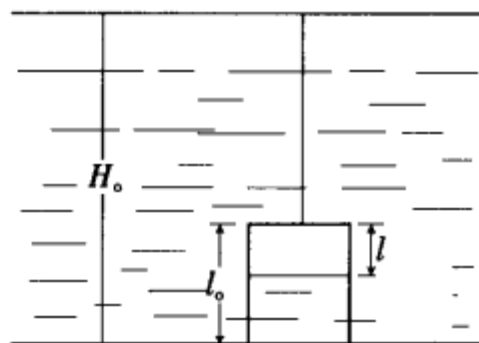
$$\Delta E = \Delta E_1 + \Delta E_2 + \Delta E_3$$

$$= [m - \rho(V_0 + Sl')]gH + \rho S g \left[(l' - l)(H_0 - l_0) + \frac{l'^2 - l^2}{2} \right]$$

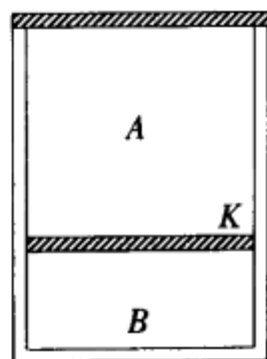
$$\text{由①式可得 } \Delta E = \rho S g \left[(l' - l)(H_0 - l_0) + \frac{1}{2}(l'^2 - l^2) \right]$$

$$\text{代入数据得 } \Delta E = 1.37 \times 10^4 \text{J}$$

例 7-3 如图例 7-3 所示,一薄壁钢筒竖直放在水平桌面上,筒内有一与底面平行并可上、下移动的活塞 K ,它将筒隔成 A 、 B 两部分,两部分的总体积 $V = 8.31 \times 10^{-2}\text{m}^3$,活塞导热性良好,与筒壁无摩擦,不漏气,筒的顶部轻轻放上一质量与活塞 K 相等的铝盖,盖与筒的上端边缘接触良好(无漏气缝隙,当筒内温度 $t = 27^\circ\text{C}$ 时,活塞上方 A 中盛有 $V_A = 3.00\text{mol}$ 的理想气体,下方 B 中盛有 $V_B = 0.400\text{mol}$ 的理想气体, B 中气体的体积占总容积的 $1/10$,现对筒内气体缓慢



图例 7-2



图例 7-3

加热,把一定量热量传给气体,当达到平衡时,B 中气体的体积变为占总容积的 1/9,问筒内的气体温度 t' 是多少? 已知筒外大气压强 $p_0 = 1.04 \times 10^5 \text{Pa}$, 气体普适常数 $R = 8.31 \text{J/mol}\cdot\text{K}$.

解:设温度为 t 时,A、B 二室中气体体积分别为 V_A 、 V_B ,压强为 p_A 、 p_B ,则由气态方程得

$$p_A V_A = \nu_A R T \quad (1)$$

$$p_B V_B = \nu_B R T \quad (2)$$

解①②式求得

$$T = 273 + 27 = 300 \text{K}$$

$$V_B = \frac{1}{10} V, V_A = \frac{9}{10} V$$

加热时,随着温度升高,活塞 K 向上移动,A 中气体压强增大,如果 A 中气体对铝盖的压力大于筒外大气对铝盖的压力及铝盖的重力之和,铝盖将被顶开,气体将从 A 中缓缓漏出,故首先应判定 B 中气体的体积由 $\frac{1}{10} V$ 增加到 $\frac{1}{9} V$ 的过程中,A 中气体是否有泄漏.

先假设铝盖未被顶开,当 A、B 中气体体积分别是 $V_B' = \frac{1}{9} V$, $V_A' = \frac{8}{9} V$ 时,压强分别为 p_{A1} , p_{B1} ,温度为 T_1 ,则有

$$p_{A1} V_A' = \nu_A R T_1 \quad (3)$$

$$p_{B1} V_B' = \nu_B R T_1 \quad (4)$$

$$p_{A1} - p_{B1} = p_B - p_A \quad (5)$$

由①②③④⑤式可求得 $p_{A1} = 3.0 \times 10^5 \text{Pa}$

而 $p_0 + (p_B - p_A) = 1.04 \times 10^5 + (1.20 \times 10^5 - 1.00 \times 10^5) = 1.24 \times 10^5 \text{Pa}$

由于 $p_{A1} > p_0 + (p_B - p_A)$,可见,在 B 中气体体积变为 $1/9 V$ 以前,铝盖已被顶开,A 中气体不断缓慢漏出,实际上,只要 A 内气体压强比 $p_0 + (p_B - p_A)$ 稍大一点,就有气体漏出,随着 A 中气体温度不断升高,不断有气体漏出,而 A 内气体压强始终等于 $p_0 + (p_B - p_A)$.

设加热完毕后,气体温度为 T' ,A 中气体压强为 p_A' ,则有

$$p_A' = p_0 + (p_B - p_A) \quad (6)$$

若 B 中气体的压强为 p_B' 则有

$$p_B' V_B' = \nu_B R T' \quad (7)$$

$$p_B' - p_A' = p_B - p_A \quad (8)$$

由①②⑥⑦⑧可得

$$T' = \frac{p_B' V_B'}{\nu_B R} = \frac{V_B'}{\nu_B R} [p_0 + 2(p_B - p_A)]$$

代入数据得

$$T' = 400 \text{K}$$

$$t' = T' - T_0 = 400 - 273 = 127^\circ\text{C}$$

例 7-4 在两端开口的弯管中,用两段水柱封闭了一段空气,如图例 7-4,开始时 ad 管内两液面持平, bc 管内两液面持平,若再往 a 管中注入一些水(加水后 B 管液面不超过 B 管长度),试证明只有当注入 a 管中水柱长度大于 d 管水面上升距离 4 倍时,管内液面才可能保持平衡.

证:本题中关键问题是下列二式始终成立

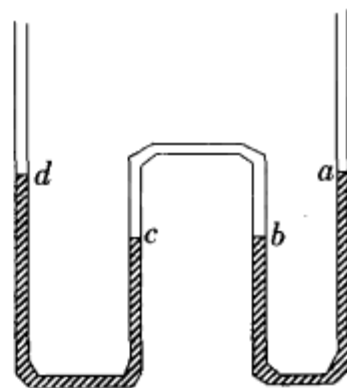
$$p_a = p_d = p_0, p_b = p_c$$

开始时两管面压差为

$$p_c - p_d = p_b - p_a = \rho g h \quad (h \text{ 为 } ab \text{ 与 } cd \text{ 水柱高度差}) \quad (1)$$

当在 a 管中注入水柱高度为 l 时,设 b 管内液面上升 Δl_b , c 管液面下降 Δl_c ,同时 d 管液面必定升高 $\Delta l_d = \Delta l_c$,此时两管中的压差为

$$p_b' - p_a' = \rho g h + \rho g l - 2\rho g \Delta l_b \quad (2)$$



图例 7-4

$$p_c' - p_d' = \rho gh + 2\rho g \Delta l_c \quad (3)$$

因为 $p_b' - p_a' = p_c' - p_d'$, 化简后得

$$l = 2(\Delta l_c + \Delta l_b) \quad (4)$$

讨论: 1. 如果 $l = \Delta l_c$, 则根据①③式 $p_c' - p_d' > p_b' - p_a'$ 管内水柱不能平衡.

2. 如果 $\Delta l_b = \Delta l_c$ 则 bc 管内气体在温度不变时, 体积不变, 压强也不变, 根据②式 a 、 b 管内液柱压强有变化.

3. 如果 $\Delta l_b < \Delta l_c$, 则在一定温度下, 封闭在管内气体膨胀, 压强应降低, 即 $p_c' < p_c$, 但比较①③式可知 $p_c' - p_d' > p_c - p_d$ 而 $p_d' = p_d = p_0$ 则得 $p_c' > p_c$ 与假设不符.

4. 只有当 $\Delta l_b < \Delta l_c$ 时, 根据④式 $l > 4\Delta l_c$ 时管内水柱才有可能保持平衡.

例 7-5 用高能量的质子流, 以 $2 \times 10^7 \text{ m/s}$ 的速度轰击一铜靶, 如果铜靶的质量是 0.5 kg , 观察中测出铜靶在 56 秒内温度升高了 100°C , 试计算每秒内有多少质子打到靶上? (质子的质量为 $m = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$, 铜的比热 $C = 0.376 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}$)

解: 铜靶在 56 秒内温度升高 100°C 总共吸收的热量为

$$Q = mC\Delta t = 0.5 \times 0.376 \times 100 = 18.8 \text{ (J)}$$

设每秒钟有 n 个质子打到靶上, 由于作完全弹性碰撞在 1 秒内质子损失的能量为

$$E_1 = n \cdot \frac{1}{2} mv^2$$

将 $m = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$, $v = 2 \times 10^7 \text{ m/s}$ 代入得

$$E_1 = 3.34 \times 10^{-13} n$$

在 56 秒内质子提供能量为

$$\begin{aligned} E &= 56E_1 = 56 \times 3.34 \times 10^{-13} \times n \\ &= 1.87 \times 10^{-15} n \end{aligned}$$

设质子放出能量全部被铜靶吸收 $E = Q$

$$\therefore n = \frac{18.8}{1.87 \times 10^{-15}} = 1.0 \times 10^{16}$$

即每秒内有 1.0×10^{16} 个质子打在铜靶上.

例 7-6 在真空瓶中保存有 $T_1 = 78 \text{ K}$ 的液态氮 2 升, 一昼夜有一半汽化. 如果 $T_2 = 273 \text{ K}$ 的 40 g 冰放在同一真空瓶中需要 22 小时 30 分钟溶解, 求氮的汽化热. 设周围空气温度为 $T = 293 \text{ K}$, 液态氮在 78 K 时的密度为 $\rho = 800 \text{ kg/m}^3$, 冰的熔解热为 $3.34 \times 10^5 \text{ J/kg}$.

提示: 题中给出单位时间真空瓶向周围空气吸收热量 (即热量传递速度) 是与真空瓶内外温差成正比的. 因此只要算出 2 升液氮汽化热和 40 g 冰的熔解热, 再根据热量传递速度与温差关系即可求解.

解: 设 2 升液态氮在一昼夜中吸收汽化热为 Q_1 , 40 g 冰在 22 小时 30 分钟内吸收熔解热为 Q_2

$$\text{则} \quad \frac{Q_1}{t_1} = K(T - T_1) \quad (1)$$

$$\frac{Q_2}{t_2} = K(T - T_2) \quad (2)$$

又 $Q_1 = \frac{1}{2} Lm$, $Q_2 = \lambda m_2$ 代入①②式解得氮的汽化热

$$L = \frac{2m_2(T - T_1)t_1\lambda}{m_1(T - T_2)t_2}$$

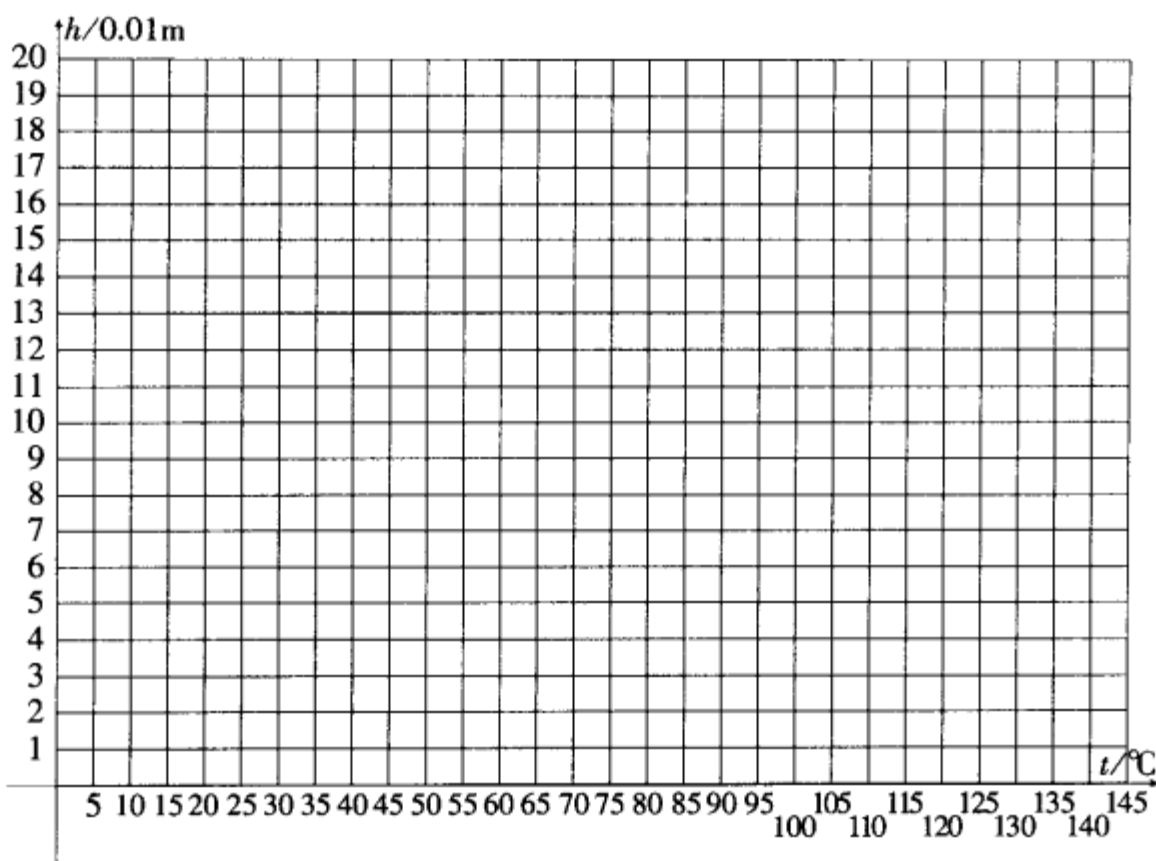
式中 $t_1 = 24$ 小时, $t_2 = 22.5$ 小时, $m_1 = \rho V = 800 \times 2 \times 10^{-3} = 1.6 \text{ kg}$, $m_2 = 40 \times 10^{-3} \text{ kg}$, $T = 293 \text{ K}$, $T_1 = 78 \text{ K}$, $T_2 = 273 \text{ K}$ 代入得

$$L = 1.9 \times 10^5 \text{ J/kg}$$

例 7-7 物理小组的同学在寒冷的冬天做了一个这样的实验: 他们把一个实心的大铝球加热到某温度 t , 然后把它放在结冰的湖面上 (冰层足够厚), 铝球便逐渐陷入冰层内. 当铝球不再下陷时, 测出

球的最低点陷入冰中的深度 h . 将铝球加热到不同的温度, 重复上述实验 8 次, 最终得到如下数据:

实验顺序数	1	2	3	4	5	6	7	8
热铝球的温度 $t/^\circ\text{C}$	55	70	85	92	104	110	120	140
陷入深度 h/cm	9.0	12.9	14.8	16.0	17.0	18.0	17.0	16.8



图例 7-7a

已知铝的密度约为水的密度的 3 倍, 设实验时的环境温度及湖面冰的温度均为 0°C . 已知此情况下, 冰的溶解热 $\lambda = 3.34 \times 10^5 \text{J/g}$

(1) 试采用以上某些数据估算铝的比热 c .

(2) 对未被你采用的实验数据, 试说明不采用的原因, 并作出解释.

(第 18 届全国中学生物理竞赛预赛试题)

解: (1) 铝球放热使冰熔化, 设当铝球的温度 t_0 时, 能熔化冰的最大体积恰与半个铝球的体积相等, 即铝球的最低点下陷的深度 h 与球的半径 R 相等, 当热铝球的温度 $t > t_0$ 时, 铝球最低点下陷的深度 $h > R$, 熔化的冰的体积等于一个圆柱体的体积与半个铝球的体积之和, 如图解 7-7b 所示. 设铝的密度为 ρ_{Al} , 比热为 C , 冰的密度为 ρ , 溶解热为 λ , 则铝球的温度从 $t^\circ\text{C}$ 降到 0°C 的过程中, 放出的热量

$$Q_1 = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_{\text{Al}} c t \quad \text{①}$$

熔化的冰吸收的热量

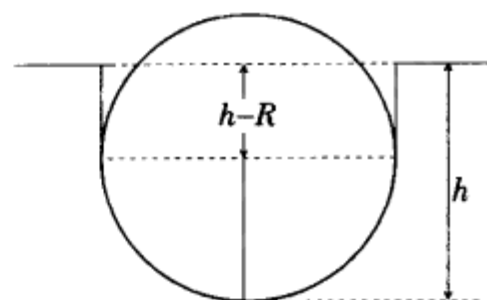
$$Q_2 = \rho \left[\pi R^2 (h - R) + \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi R^3 \right] \lambda \quad \text{②}$$

假设不计铝球使冰熔化过程中向外界散失的热量, 则有

$$Q_1 = Q_2 \quad \text{③}$$

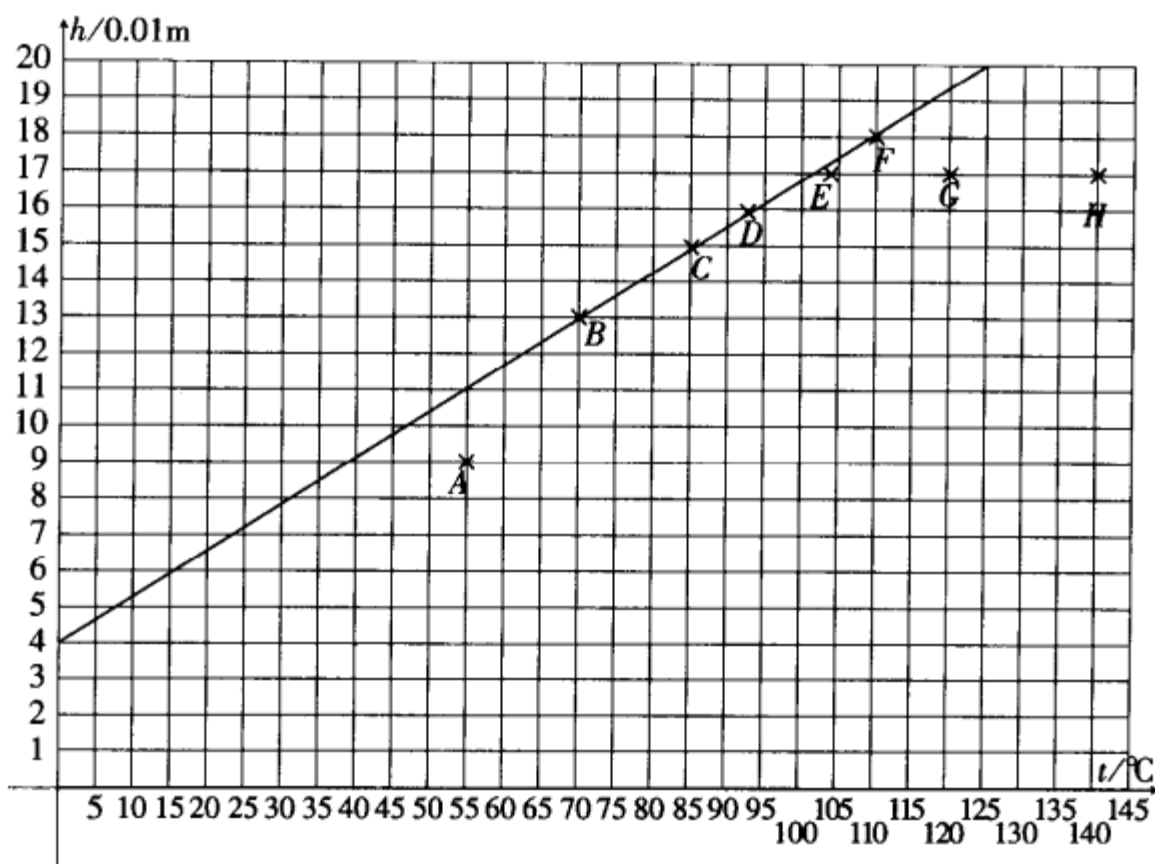
$$\text{解得} \quad h = \frac{4Rc}{\lambda} t + \frac{1}{3} R \quad \text{④}$$

即 h 与 t 成线性关系, 此时只对 $t > t_0$ 时成立, 将表中数据画



图例 7-7b

在 $h-t$ 图中,得 1,2,⋯,8 次实验对应的点 A,B,⋯,H,数据点 B、C、D、E、F 五点可拟合成一 直线,如图例 7-7c 所示.



图例 7-7c

此直线应与④式一致.这样,在此直线上任取两点的数 据,代入④式,再解联立方程,即可求出比热容 c 值,例如,在直线上取相距较远的横坐标为 8 和 100 的两点 x_1 和 x_2 ,它的坐标由图例 7-7b 中可 读得为

$$x_1(8.0, 5.1) \quad x_2(100, 16.7)$$

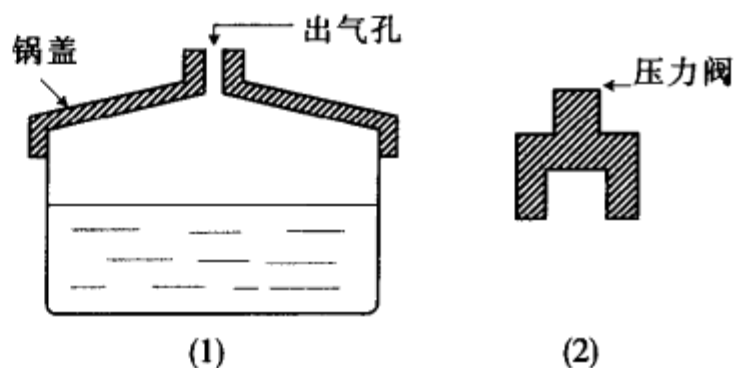
将此数据及 λ 值代入④式,消去 R ,得 $C = 8.6 \times 10^2 \text{ J/kg}^\circ\text{C}$

(2)在本题图例 7-7c 中,第 1、7、8 次实验的数据对应的点偏离直线较远,未被采用,这三个实验数 据在 $h-t$ 图上的点即 A、G、H.

A 点为什么偏离直线较远? 因为当 $h \approx R$ 时,从④式得对应的温度 $t_0 \approx 65^\circ\text{C}$,④式在 $t > t_0$ 的条件 下才成立,但第一次实验时铝球的温度 $t_1 = 55^\circ\text{C} < t_0$,熔解冰的体积小于半个球的体积,故④式不成立.

G、H 为什么偏离直线较远? 因为铝球的温度过高(120°C 、 140°C),使得一部分冰升华成水蒸汽,且 因铝球与环境温度相差较大而损失的热量过多,②、③式不成立,因而④式也不成立.

例 7-8 正确使用压力锅的方法是:将已盖好 密封锅盖的压力锅[如图例 7-8a(1)所示]加热,当 锅内水沸腾时再加盖压力阀 S[如图例 7-8a(2)所 示],此时可以认为锅内只有水的饱和蒸气,空气已 全部排除.然后继续加热,直到压力阀被锅内的水 蒸汽顶起时,锅内即已达到预期温度(即设计时希望 达到的温度),现有一压力锅,在海平面处加热能达 到的预期温度为 120°C ,某人在海拔 5000m 的高山 上使用此压力锅,锅内有足量的水.



图例 7-8a

(1)若不加盖压力阀,锅内水的温度最高可达多少?

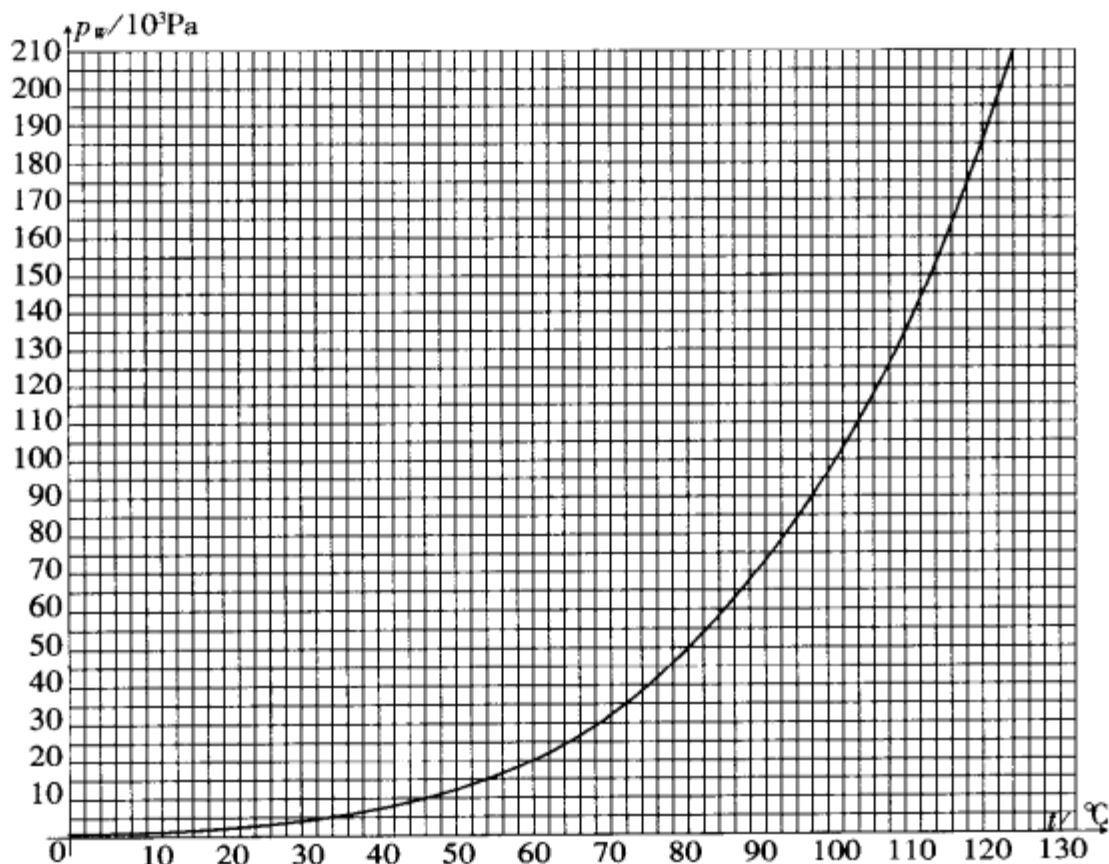
(2)若按正确方法使用压力锅,锅内水的温度最高可达多少?

(3)若未按正确方法使用压力锅,即盖好密封锅盖一段时间后,在点火前就加上压力阀,此时水温为 27°C ,那么加热到压力阀刚被顶起时,锅内水的温度是多少? 若继续加热,锅内水的温度最高可达多少?

假设空气不溶于水。

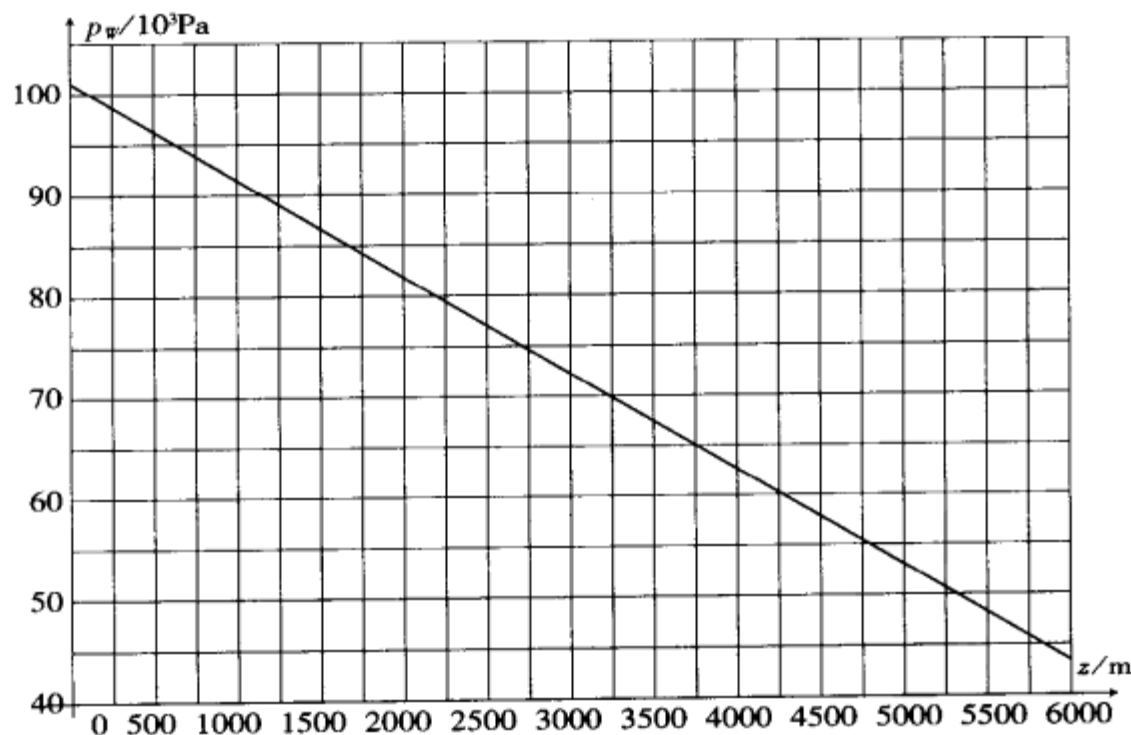
已知：水的饱和蒸气压 $p_w(t)$ 与温度 t 的关系如图例 7-8b 所示，大气压强 $p(z)$ 与高度 z 的关系的简化图线如图例 7-8c 所示， $t = 27^\circ\text{C}$ 时 $p_w(27^\circ) = 3.6 \times 10^3 \text{Pa}$ ； $z = 0$ 处 $p(0) = 1.013 \times 10^5 \text{Pa}$ 。

(第 16 届全国中学生物理竞赛预赛试题)



图例 7-8b

解：(1) 已知在海平面处，大气压强 $p(0) = 101.3 \times 10^3 \text{Pa}$ ，由图例 7-8c 得在 $z = 5000 \text{m}$ 处，大气压强 $p(5000) = 53 \times 10^3 \text{Pa}$ 。



图例 7-8c

此处水沸腾时的饱和蒸气压 p_w 应等于此值，由图例 7-8b 中可知，对应的温度即沸点为 $t_1 = 82^\circ\text{C}$ 。达到此温度时锅内水沸腾，温度不再升高，故在 5000m 高山上，若不加盖压力阀，锅内温度最高可达 82°C 。

(2) 从图例 7-8b 中可知，在 $t = 120^\circ\text{C}$ 时，水的饱和蒸气压 $p_w(120^\circ) = 198 \times 10^3 \text{Pa}$ ，而在海平面处，

大气压强 $p(0) = 101.3 \times 10^3 \text{Pa}$, 可见压力阀的附加压强为

$$p_s = p_w(120^\circ) - p(0) = 198 \times 10^3 - 101.3 \times 10^3 = 96.7 \times 10^3 (\text{Pa})$$

在 5000m 高山上, 大气压强与压力阀的附加压强之和为

$$p' = p_s + p(5000) = 96.7 \times 10^3 + 53 \times 10^3 = 149.7 \times 10^3 (\text{Pa})$$

若在 $t = t_2$ 时阀被顶起, 则此时的 p_w 应等于 p' , 即

$$p_w = p'$$

由图例 7-8b 中可知, $t_2 = 112^\circ\text{C}$

此时锅内水开始沸腾, 温度不再升高, 故按正确方法使用此压力锅, 在 5000m 高山上锅内水的温度最高可达 112°C .

(3) 在未按正确方法使用压力锅时, 锅内有空气, 设加压力阀时, 内部水蒸气已饱和, 由图解 7-8b 中可知, 在 $t = 27^\circ\text{C}$ 时, 题中已给出水的饱和汽压 $p_w(27^\circ) = 3.6 \times 10^3 \text{Pa}$, 这时锅内空气的压强(用 Pa 表示)为

$$p_a(27^\circ) = p(5000) - p_w(27^\circ) = 53 \times 10^3 - 3.6 \times 10^3 = 49.4 \times 10^3 (\text{Pa})$$

当温度升高时, 锅内空气的压强也随之升高, 设在温度为 $t^\circ\text{C}$ 时, 锅内空气压强为 $p_a(t)$, 则有

$$\frac{p_a(t)}{273+t} = \frac{p_a(27^\circ)}{273+27}$$

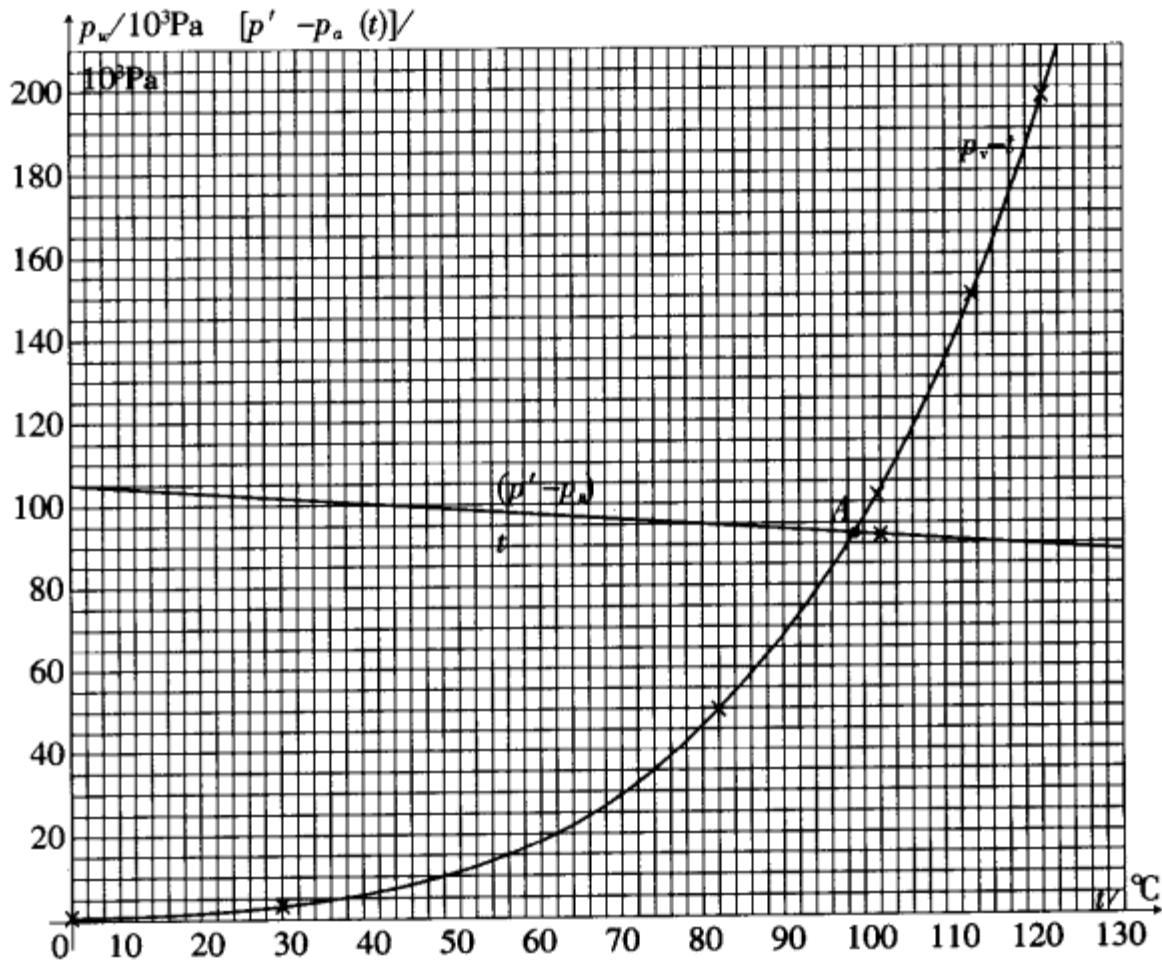
$$p_a(t) = 164.7t + 45.0 \times 10^3$$

若在 $t = t'$ 时压力阀刚好开始被顶起, 则有 $p_w(t') + p_a(t') = p'$

由此得 $p_w(t') = p' - p_a(t') = 105 \times 10^3 - 164.7t'$

画出函数 $p' - p_a(t')$ 的图线

取 $t = 0, p' - p_a(0^\circ) = 105 \times 10^3 \text{Pa}; t = 100, p' - p_a(100) = 88.6 \times 10^3 \text{Pa}$



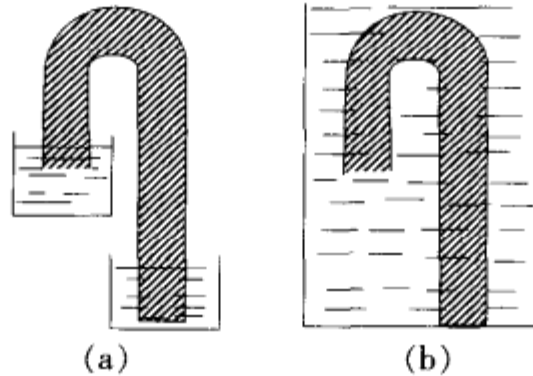
图例 7-8d

由此二点便可在图例 7-8b 上画出此直线, 如图例 7-8d 所示, 此直线与图例 7-8b 中的 $p_w(t) \sim t$ 曲线的交点为 A, A 即为所求的满足上式的点, 由图可看出与 A 点对应的温度为 $t' = 97^\circ\text{C}$. 即在压力阀刚开始被顶起时, 锅内水的温度是 97°C . 若继续加热, 压力阀被顶起后, 锅内空气随水蒸汽

一起被排出,最终空气排净,锅内水温仍可达 112°C .

本章习题

7.1 将两臂不等长的 U 形管,装满煤油,在下面两种情况里,管内的煤油将怎样流动?



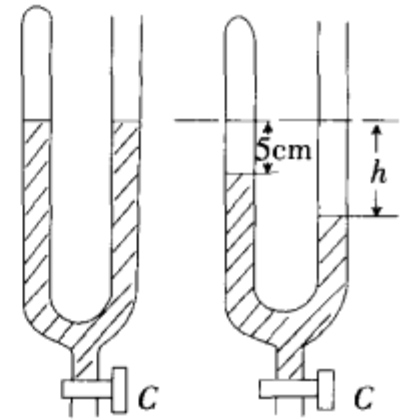
图习 7.1

(1)倒插在两个煤油槽中[如图习 7.1(a)]

(2)倒放在水槽内[如图习 7.1(b)].[提示]

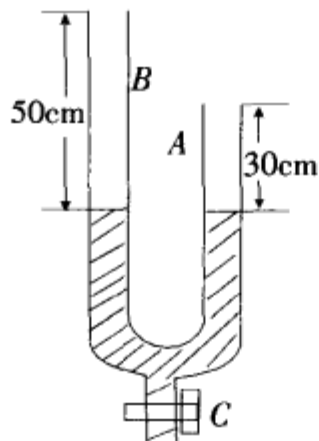
7.2 在气缸贮有 1mol 理想气体,已知其初态压强为 p_0 ,温度为 T_0 ,如该气体的压强与体积按 $p = \alpha V$ 规律变化,试求(1)系数 α . (2)当气体体积增加到初态体积的 2 倍时,气体的温度为多少?[提示]

7.3 如图习 7.3 所示,一端开口、一端闭口的粗细均匀的 U 形管中装有水银,两臂水银柱等高. 左边封闭的一臂中的水银面上,有一段 20cm 的空气柱,右边的一臂是通大气的. 将底部开关阀门 C 打开,漏出一些水银,左臂水银面下降了 5cm ,这时右臂中水银面下降了多少?(设外部大气压强为 75cmHg)[提示]



图习 7.3

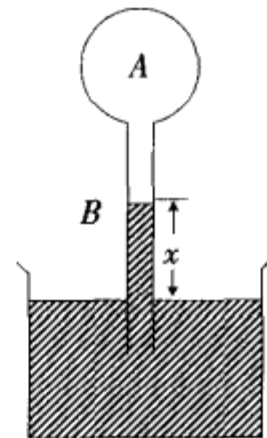
7.4 一支粗细均匀的不等臂的 U 形管,管的截面积为 1.0cm^2 ,底部有阀门 C ,向管内装适量水银,并使两臂的水银面相平,如图习 7.4 所示,然后将管口封闭. 这时 B 管内被封闭的空气柱长 50cm , A 管中空气柱长 30cm ,在等温条件下,从底端阀门 C 处再压进 10cm^3 的水银后, A 管中水银面上升 4cm ,求原来封闭在两臂中空气柱的压强.[提示]



图习 7.4

7.5 有人设计了一种测温装置,其结构如图习 7.5 所示. 玻璃泡

A 中封有一定量气体,与 A 相连的 B 管插在水银槽中,管内水银面的高度 x 即可反映泡内气体的温度,即环境温度,并可由 B 管上的刻度直接读出,设 B 管的体积与 A 泡的体积相比可以略去不计.



图习 7.5

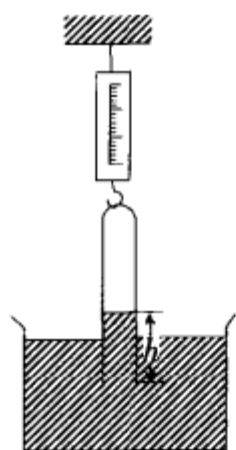
(1)在标准大气压下对 B 管进行温度刻度(标准大气压相当于 76cmHg 的压强),已知当温度 $t_1 = 27^\circ\text{C}$ 时,管内水银面高度 $x_1 = 16\text{cm}$,此高度即为 27°C 的刻度线,问 $t = 0^\circ\text{C}$ 的刻度线在 x 为多少厘米处?

(2)若大气压已变为相当于 75cmHg 的压强,利用该测温装置测量温度时所得读数仍为 27°C ,问此时实际温度为多少?

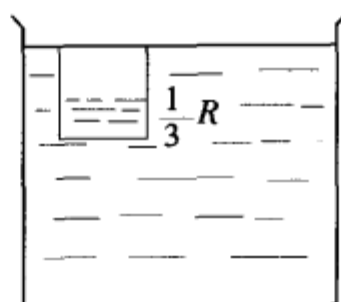
7.6 在一密封的啤酒瓶中,下方为溶有 CO_2 的啤酒,上方为纯 CO_2 气体.在 20°C 时溶于啤酒中的 CO_2 的质量为 $m_A = 1.050 \times 10^{-3}\text{kg}$,上方气体状态 CO_2 的质量为 $m_B = 0.137 \times 10^{-3}\text{kg}$,压强为 $p_0 = 1$ 标准大气压,当温度升高到 40°C 时,啤酒中溶解的 CO_2 的质量有所减少,变为 $m_A' = m_A - \Delta m$,瓶中气体 CO_2 的压强上升到 p_1 ,已知 $\frac{m_A'}{m_A} = 0.60 \times \frac{p_1}{p_0}$,啤酒的体积不因溶入 CO_2 而变化,且不考虑容器体积和啤酒体积随温度的变化.又知对同种气体,在体积不变的情况下 $\frac{p}{T}$ 与 m 成正比,试计算 p_1 等于多少标准大气压(结果保留二位有效数字).[提示]

7.7 一端封闭的玻璃管自重为 G ,内装一段高为 h 的水银柱,封闭了一定质量的理想气体,现将玻璃管封闭端用弹簧秤悬起,另一端没入水银槽中,如图习 7.7 所示.当玻璃管没入一定深度后,弹簧秤的示数为 G ,若当时的大气压为 p_0 ,则此时管内上方气体压强为多少?玻璃管插入槽内深度为多大?(设玻璃管壁的厚度不计)[提示]

7.8 图习 7.8 为一个高为 h 底面积为 S 的圆柱形薄玻璃杯,放入 $\frac{1}{3}$ 容积的水恰能浮在水面,杯口与水面相持平,现将杯口向下,由水面外缓慢竖直地沉入水中,当其既不上浮也不下沉时,求此时杯内气体体积与压强为多少?(水密度为 ρ ,大气压强为 p_0)[提示]



图习 7.7



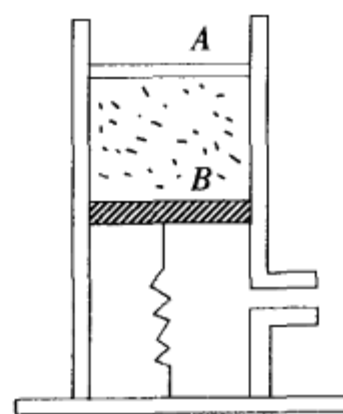
图习 7.8

7.9 如图习 7.9 所示,一个上下都与大气相通的直圆筒,内部横截面的面积 $S = 0.01\text{m}^2$,中间用两个活塞 A 与 B 封住一定质量 m 的理想气体,A、B 都可沿圆筒无摩擦地上、下滑动,但不漏气,A 的质量可不计,B 的质量为 M 并与一根弹系数 $k = 5 \times 10^3\text{N/m}$ 的较长的弹簧相连,已知大气压强 $p_0 = 1 \times 10^5\text{Pa}$,平衡时,两活塞间的距离 $l_0 = 0.6\text{m}$,现用力压 A 使之缓慢向下移动一定距离后保持平衡,此时用于压 A 的力 $F = 5 \times 10^2\text{N}$,求活塞 A 向下移动的距离.(假定气体温度保持不变)[提示]

7.10 一容器中贮有气体.压强为 0.010mmHg ,温度为 27°C ,问 1cm^3 中有多少个气体分子?这些气体分子的总平均动能是多少?

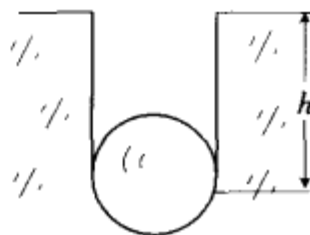
7.11 太阳中心温度约为 $1.4 \times 10^7\text{K}$,密度为 $1.0 \times 10^3\text{kg/m}^3$,在这温度下如把组成太阳核心的主要成分质子气视作理想气体,质子质量为 $1.67 \times 10^{-27}\text{kg}$,则太阳核心的压强为多少?

7.12 为了测定某种合金材料制成的球形工件的比热容,可以先将工件均匀加热到不同温度,然后将其置于 0°C 的大冰块上,分别测出工件陷入冰中的深度 h 如图习 7.12 所示.已知,当工件初始温



图习 7.9

度分别为 $t_1 = 75^\circ\text{C}$ 和 $t_2 = 100^\circ\text{C}$ 时, 对应工件陷入冰中深度分别为 $h_1 = 13.6\text{cm}$ 和 $h_2 = 16.7\text{cm}$, 球的体积 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, 工件密度约为冰的 3 倍, 设实验过程中环境温度恒为 0°C , 不计热量损失, 冰的熔解热 $\lambda = 3.34 \times 10^5 \text{J/K}$, 试求该材料的比热容 C . [提示]



图习 7.12

7.13 质量为 m_1 的铜量热器中装有质量为 m_2 的水, 共同的温度为 t_{12} (t 为摄氏温度). 一质量为 m_3 , 温度为 t_3 的冰块投入量热器中, 试求出各种可能情形下的最终温度. 已知铜、水、冰的比热分别为 C_1, C_2, C_3 , 冰的熔化热为 L . [提示]

7.14 有一壶水, 水温是 10°C , 把它放到火力恒定的炉火烧, 当气压为 1atm 时, 经 20min 即沸腾, 若继续放在火上, 试估算再经过约多少分钟后, 这壶水将被烧干. (水的比热容 $C = 4.18\text{J/g}^\circ\text{C}$, 汽化热 $L = 2.25 \times 10^3 \text{J/g}$)

7.15 在家中冰箱中制冰时, 5 分钟即可把温度为 227K 的水冷却到 273K , 为了把水全部变为冰, 还需要 1 小时 40 分钟, 求冰的熔解热(水的比热容是 $4.18 \times 10^3 \text{J/kg}\cdot\text{K}$)

7.16 有两个相同毛细管, 一个插在水里, 另一个插在酒精里, 管子插入时是竖直的, 水上升的高度和酒精上升的高度之比是多少? (水的表面张力系数 $\alpha_{\text{水}} = 72 \times 10^{-3} \text{N/m}$, 酒精的表面张力系数 $\alpha_{\text{酒}} = 22 \times 10^{-3} \text{N/m}$, 酒精密度 $\rho_{\text{酒}} = 0.8 \times 10^3 \text{kg/m}^3$, 设接触角 $\theta = 0^\circ$)

7.17 试计算水在直径为 0.20mm 的玻璃毛细管内上升的高度以及在这种情况下表面张力所作之功? 这些功被消耗在哪些方面? (假定接触角等于 30° , 温度为 20°C , 水在 20°C 时表面张力系数 $\alpha = 0.072\text{N/m}$, 水密度 $\rho = 1 \times 10^3 \text{kg/m}^3$) [提示]

7.18 一根一端封闭的玻璃管充满水银后, 倒立在一个深水银槽里, 在管的上方注入乙醚, 空气温度为 20°C , 大气压强为 76cmHg , 乙醚在 20°C 的饱和汽压为 44cmHg , 试求

- (1) 当管内水银面高出管外 64cm 时, 乙醚汽的压强为多大?
- (2) 将玻璃管提高 16cm , 此时乙醚汽压强为多大?
- (3) 将玻璃管向下压, 使管内的上方乙醚汽柱长为 2.5cm , 此时乙醚汽压强为多少?

热力学定律

§ 8.1 热力学第零定律

1. 热交换定律

温度不同的二物体相互接触后,要产生能量传递,高温物体向低温物体放出热量,低温物体要向高温物体吸收热量,当达到热平衡时

$$|Q_{\text{放}}| = |Q_{\text{吸}}| \quad (8.1-1)$$

这就是热交换定律,它是符合能量守恒定律的.

2. 热力学第零定律

热交换是必须发生在两个相互接触的物体上,但热平衡可以指两个不接触的物体.如果两物体相互接触而不交换热量(或它放出的热量等于它吸收的热量: $|Q_{\text{放}}| = |Q_{\text{吸}}|$),这说明它们相互在未接触时就已处于热平衡状态.

在热力学系统中,当第一、第二两系统都与第三个系统达到热平衡,那么第一、第二两系统也达到热平衡,这就叫做热力学第零定律(如图 8.1-1 所示)

热力学第零定律说明当两系统达到热平衡时,它们具有一个共同的状态参量——温度,因此温度相同是两系统达到热平衡的必要与充分条件.

热力学第零定律是由大量实验总结出来的规律,它指明了可以通过第三系统来比较任意二系统是否处于热平衡,这个第三系统即是媒介物.只要媒介物足够小,不影响第一、第二系统的平衡,这就是温度计的测温原理了.

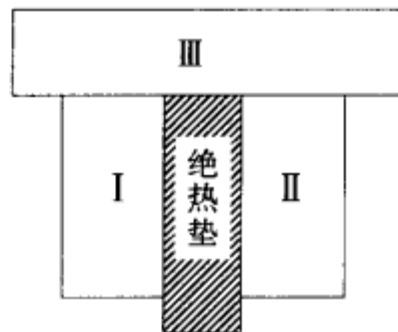


图 8.1-1
热力学第零定律

热力学第零定律不仅建立了温度概念,同时又是测量温度的理论及实验依据.

§ 8.2 热力学第一定律

1. 准静态过程

当系统与外界交换能量时,系统的状态就要发生变化.系统状态随时间的变化,叫做热力学过程.

实际过程进行时,任一时刻,系统的状态会偏离平衡态.如果过程中的任一时刻,系统都无限接近于平衡态,这样的过程叫做准静态过程.

准静态过程是一种理想化过程,须进行得无限缓慢.当实际过程进行的时间比驰豫时间(从平衡态被某一干扰破坏到建立新的平衡态所需的时间)大得多时,可近似视为准静态过程.

2. 功

在无摩擦的准静态过程中,气体的体积从 V 变化为 $V + dV$ 时,则系统对外所做的元功为

$$dA = p dV \quad (8.2-1)$$

式中 p 为气体的压强. 在 $p-V$ 图 8.2-1 中系统对外所做的元功对应是狭条的阴影面积. 当系统膨胀时, $dV > 0, dA > 0$, 系统对外作正功; 当系统被压缩时, $dV < 0, dA < 0$, 外界对系统作正功.

若系统经历一有限的准静态过程, 体积由 V_1 变为 V_2 , 系统对外界所作的功为

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV \quad (8.2-2)$$

在 $p-V$ 图 8.1-2 中即以曲线下面积来表示, 可以看出, 当系统始末状态决定后, 系统在状态变化中所作的功并不是定值, 而是与过程有关.

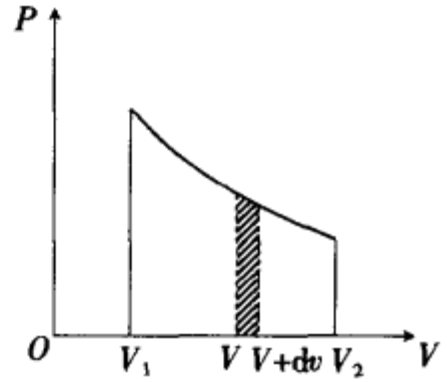


图 8.2-1 功的计算

3. 热量

温度不同的两物体 A 与 B 相互接触后, 高温物体会变冷, 低温物体会变热, 最后达到热平衡, 具有共同温度 T . 根据实验证明高温物体向低温物体传递的热量(或低温物体从高温物体中吸收的热量)应为:

$$\Delta Q = mc\Delta T \quad (8.2-3)$$

式中 m 是物体质量, c 为物体比热容(也简称比热), ΔT 是温度的变化量.

物体比热容定义是使单位质量物质温度升高 1 度所需吸收(或放出)的热量:

$$C = \frac{\Delta Q}{m\Delta T} \quad \text{单位: J/kg}\cdot\text{K} \quad (8.2-4)$$

使 m 千克物体温度升高 1 度所需吸收热量叫做热容量

$$C = mc = \frac{\Delta Q}{\Delta T} \quad \text{单位: J/K} \quad (8.2-5)$$

物体比热或热容量都与物质性质有关, 不同物质比热、热容量值不同, 除此之外还与状态变化过程有关, 例如在等容过程与等压过程中其热容量值是不同的.

由此可见, 只有当二系统温度不同且相互接触时发生状态变化才会有热量传递, 因此热量传递和做功一样必定与状态变化相联系, 但在热量传递过程中系统不发生宏观位移.

4. 内能

物质(气体、液体和固体)内部分子热运动动能、和分子间相互作用势能之和, 总称为内能.

气体的内能就是所有分子热运动的动能和分子间相互作用势能之总和.

理想气体分子间的势能忽略不计, 它的内能只是分子各种运动形式的动能之和, ν mol 理想气体的内能为

$$E = \nu \frac{i}{2} RT \quad (8.2-6)$$

一定量的理想气体的内能仅决定于气体的热力学温度. 所以理想气体的内能是温度的单值函数, 而与压强、体积无关.

5. 热力学第一定律

系统从外界吸收的热量, 一部分使系统的内能增加, 其余部分使系统对外做功, 这一规律称为热力学第一定律, 其数学表达式为

$$Q = (E_2 - E_1) + A \quad (8.2-7)$$

或

$$dQ = dE + dA \quad (8.2-8)$$

系统吸热, Q 为正值; 系统放热, Q 为负值; 系统对外做功, A 为正值; 外界对系统做功, A 为负值.

热力学第一定律也可表述为: 第一类永动机是不可能制造成功的. 所谓第一类永动机就是外界不需要供给它能量而能永远对外做功的机器.

热力学第一定律实质上是包含热量交换在内的能量守恒定律.

例 8.2-1 一体系由状态 a 出发, 分别经过 $a \text{ I } b$ 、 $a \text{ II } b$ 和 $a \text{ III } b$ 三个不同的过程到达同一末态 b , 其中过程 $a \text{ II } b$ 是平行于 P 轴的直线, 如图 8.2-2 所示. 这三个过程中, 哪个过程吸收的热量最多, 哪个过程吸收的热量最少?

解: 由状态 a 到状态 b , 体系内能变化 $\Delta E = E_b - E_a$ 是确定的, 在 $a \text{ II } b$ 过程中, 体积不变, 不做功, 由热力学第一定律得 $\Delta Q_{a \text{ II } b} = \Delta E$

在 $a \text{ I } b$ 过程中, 从 $a \rightarrow e$ 外界对体系做功, 从 $e \rightarrow b$ 过程中体积膨胀, 体系对外做功, 因此从 a 经 e 到 b 过程中系统对外所作净功 A_1 其值等于 $aebe$ 所包围面积, 根据热力学第一定律

$$\Delta Q_{a \text{ I } b} = \Delta E + A_1$$

同理, 在 $a \text{ III } b$ 过程中, 从 $a \rightarrow f$ 系统对外做功, 从 f 到 b 是外界对系统做功, 从 a 经 f 到 b 过程中, 外界对系统所做净功 A_2 是 $afba$ 所包围面积且 $|A_2| > A_1$, 根据热力学第一定律得

$$\Delta Q_{a \text{ III } b} = \Delta E - A_2$$

由此可得

$$\Delta Q_{a \text{ I } b} > \Delta Q_{a \text{ II } b} > \Delta Q_{a \text{ III } b}$$

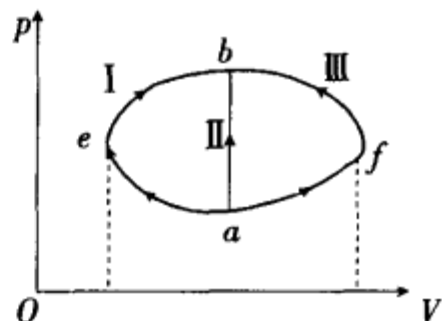


图 8.2-2

§ 8.3 热力学第一定律 对理想气体热力学过程的应用

热力学第一定律是说明系统在状态变化过程中功、内能和热量之间的变换关系. 在不同的变化过程中, 功、内能和热量的变化是不同的, 但热力学第一定律都必须遵从. 下面就分别讨论理想气体在不同变化过程中内能、功和热量间关系.

1. 等容过程

理想气体的等容过程在 $p-V$ 图上是一条平行于 P 轴的直线, 如图 8.3-1 所示在等容过程中 $V = \text{常量}$, $\Delta V = 0$, 做功为零. 由热力学第一定律 $\Delta Q_V = \Delta E$

ΔQ 的脚标 V 表示在等容过程中吸收热量

对 1 mol 理想气体而言, 由 7.9-7 式可得 $\Delta E = \frac{i}{2} R \Delta T$

又 $\Delta Q_V = C_V \Delta T$

$$\therefore C_V = \frac{i}{2} R$$

对 ν 个摩尔理想气体在等容过程中吸收热量为

$$Q_V = \nu C_V \Delta T = \nu \frac{i}{2} R \Delta T \quad (8.3-2)$$

上式表示在等容过程中, 系统所吸收热量等于系统内能的增量.

2. 等压过程

理想气体的等压过程在 $p-V$ 图上是一条平行于 V 轴的直线, 如图 8.3-2 所示, 在等压过程中 $p = \text{常量}$, 当体积由 V 变化到 $V + \Delta V$ 时所作之功 $\Delta A = p \Delta V$

对 1 mol 理想气体按 7.3-4 式得

$$p \Delta V = R \Delta T$$

根据热力学第一定律得

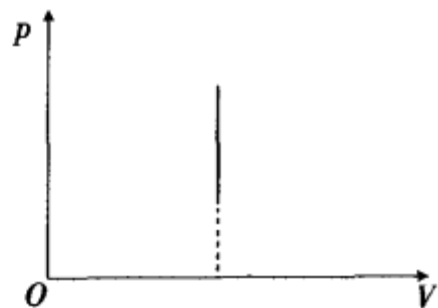


图 8.3-1 理想气体等容线

$$(8.3-1)$$

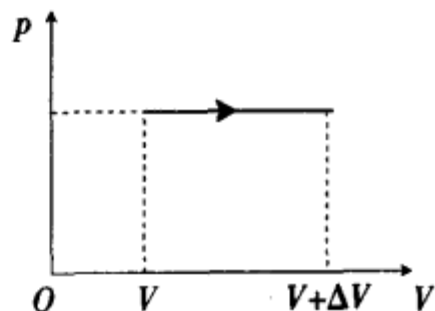


图 8.3-2 理想气体等压线

$$\Delta Q_p = \Delta E + p\Delta V = \frac{i}{2}R\Delta T + R\Delta T = \left(\frac{i}{2}R + R\right)\Delta T \quad (8.3-3)$$

ΔQ 的脚标 p 表示在等压过程中吸收热量

根据摩尔定压热容量得

$$C_p = \frac{\Delta Q_p}{\Delta T} = \frac{i}{2}R + R = C_v + R \quad (8.3-4)$$

上式称为梅耶公式, 定压摩尔热容 C_p 大于定容摩尔热容 C_v , 这是因为在等容过程中, 传给气体的热量全部用于增加气体的内能, 而在等压过程中, 气体内能增加的同时还对外做功。

3. 等温过程

理想气体的等温过程可以用 $p-V$ 图上的等边双曲线来表示, 如图 8.3-3 所示, 在等温过程中, 理想气体内能保持不变, 热力学第一定律表达为

$$\Delta Q_T = \Delta A \quad (8.3-5)$$

ΔQ 的脚标 T 表示等温过程中吸收热量

对于 1mol 理想气体 $pV = RT$ $p = RT \frac{1}{V}$

$$\Delta Q_T = p\Delta V = RT \frac{\Delta V}{V}$$

系统在等温过程中从体积 V_1 变化到 V_2 时, 系统对外所作之功

$$A_T = \int_{V_1}^{V_2} RT \frac{dV}{V} = RT \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (8.3-6)$$

在等温过程中, 若气体对外界做功 ($V_2 > V_1$) 则系统必须吸收热量, 而在等温过程中, 系统此吸收热量全部用来对外做功, 系统内能保持不变。

4. 绝热过程

在绝热过程中, 系统与外界无热量交换, 即 $dQ = 0, Q = 0$. 在绝热膨胀过程中, 气体内能的减少, 全部转变为对外做功, 绝热压缩过程中, 外界对气体所做之功, 全部转变为内能的增量, 即

$$A_Q = -\Delta E = -\nu C_v \Delta T \quad (8.3-7)$$

A 的脚标 Q 表示在绝热过程中做的功

理想气体绝热过程中, p, V, T 之间关系为

$$pV^\gamma = \text{常量} \quad (8.3-8)$$

$$V^{\gamma-1}T = \text{常量} \quad (8.3-9)$$

$$p^{\gamma-1}T^{-\gamma} = \text{常量} \quad (8.3-10)$$

式中 $\gamma = C_p/C_v$ 称为比热容比, 上述三方程叫做理想气体绝热过程方程。

例 8.3-1 一定质量的理想气体, 经过图 8.3-4 所示的过程, 由体积为 V_1 , 压强为 p_1 的状态到达体积为 V_2 , 压强为 p_2 的状态. 已知该气体每摩尔的内能为 $E = C_v T$, C_v 为定容摩尔热容, 求气体内能的变化, 自外界吸收的热量以及该过程中气体的摩尔比热。

解: 设该气体质量的摩尔数为 ν , 则其内能的变化为

$$\Delta E = \nu C_v (T_2 - T_1)$$

由理想气体状态方程 $pV = \nu RT$ 得

$$\Delta E = \frac{C_v}{R} (p_2 V_2 - p_1 V_1)$$

在该过程中, 系统对外界做功

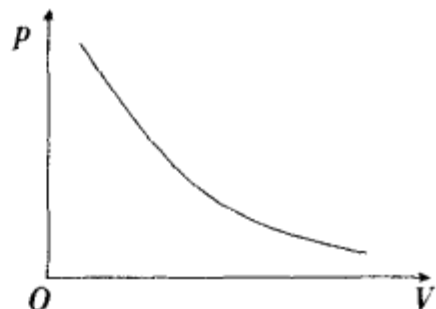


图 8.3-3 理想气体等温线

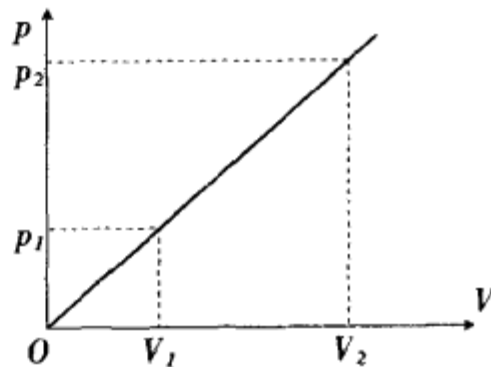


图 8.3-4

$$\Delta A = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)(V_2 - V_1) = \frac{1}{2}(p_1 V_2 - p_1 V_1 + p_2 V_2 - p_2 V_1)$$

在所考虑的过程中

$$\frac{p_1}{V_1} = \frac{p_2}{V_2}$$

故得

$$\Delta A = \frac{1}{2}(p_2 V_2 - p_1 V_1)$$

根据热力学第一定律,系统吸收热量

$$\begin{aligned} \Delta Q &= \Delta E + \Delta A = \frac{C_V}{R}(p_2 V_2 - p_1 V_1) + \frac{1}{2}(p_2 V_2 - p_1 V_1) \\ &= \left(\frac{C_V}{R} + \frac{1}{2}\right)(p_2 V_2 - p_1 V_1) \end{aligned}$$

该过程中的热容量

$$\begin{aligned} C &= \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{\left(\frac{C_V}{R} + \frac{1}{2}\right)(p_2 V_2 - p_1 V_1)}{\Delta T} \\ &= \frac{\left(\frac{C_V}{R} + \frac{1}{2}\right)\nu R(T_2 - T_1)}{(T_2 - T_1)} \\ &= \nu C_V + \frac{1}{2}\nu R \end{aligned}$$

例 8.3-2 如图8.3-5所示, ab 、 dc 是绝热过程, cea 是等温过程, bed 是任意过程, 组成一循环过程, 若图中 edc 所包围的面积为 30J , cea 过程中系统放热 100J . 问 bed 过程中系统吸热为多少?

解: $edce$ 包围面积为 70J , 表示系统对外做正功 70J . eab 包围的面积为 30J , 由于 $eabe$ 为逆向循环过程, 故系统对外做负功 30J . 所以整个循环过程系统对外做的净功

$$A = 70 - 30 = 40\text{J}$$

在整个循环过程中, 系统与外界交换热量的只有 bed 及 cea 过程. 根据题意, cea 过程为系统放热设为 Q_1

$$Q_1 = -100\text{J}$$

设 bed 过程系统与外界交换热量为 Q_2 , 则整个循环系统与外界交换的净热量

$$Q = Q_1 + Q_2$$

根据热力学第一定律, 对整个循环过程有 $Q = A$

$$Q_2 = A - Q_1 = 40 - (-100) = 140(\text{J})$$

即在 bed 过程中, 系统从外界吸热 140J .

例 8.3-3 试分别求出 1mol 单原子理想气体从 V_1 膨胀到 V_2 过程中所做之功: (1) 经历的是等温过程 (2) 经历的是绝热过程 (3) 试用分子运动论观点来分析在这二过程中所作之功为何不同?

解: (1) 1mol 单原子理想气体经历等温过程, 体积从 V_1 变化到 V_2 , 内能变化为零 $\Delta E = 0$

根据热力学第一定律, 它所作之功

$$\Delta A = p\Delta V = \frac{RT}{V}\Delta V$$

$$A_T = \int_{V_1}^{V_2} RT \frac{dV}{V} = RT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

在如图 8.3-6 所示的 $p-V$ 图中图 A_T 是以 ab 曲线下包围面积来表示.

(2) 1mol 单原子理想气体经历的是绝热过程 $\Delta Q = 0$.

根据热力学第一定律得

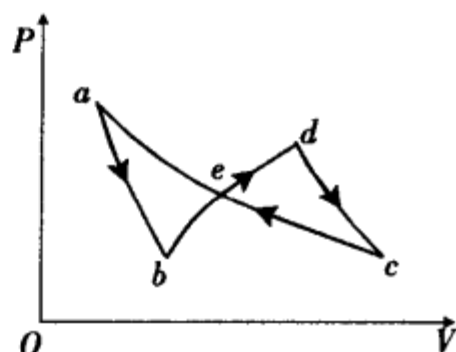


图 8.3-5

$$A_Q = -\Delta E = -C_V\Delta T = -\frac{3}{2}R(T_2 - T_1)$$

$$= \frac{3}{2}(p_1 V_1 - p_2 V_2)$$

A_Q 在图 8.3-6 中为 ac 曲线下包围面积表示, 显然 $A_T > A_Q$.

(3) 从分子运动论观点来分析, 在等温过程中, 系统内能不变, 大量分子的平均动能不变, 从外界吸收的热量全部转变为对外所做之功, 体积膨胀时单位体积内粒子数减少所以压强降低从 P_1 降到 P_1' .

在绝热过程中, 外界不提供能量, 系统是依靠内能减少对外做功, 因此在体积膨胀同时温度降低, 也即单位体积内分子数减少同时, 大量分子平均动能也在减少所以压强 P_2 降得比 p_1' 更低. 从而 $A_T > A_Q$.

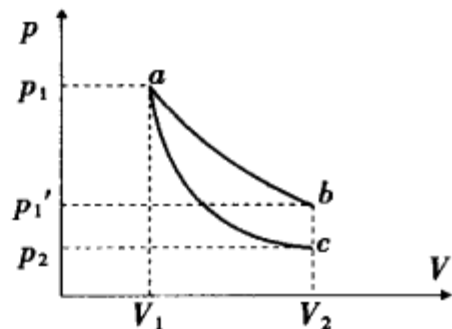


图 8.3-6

例 8.3-4 一气缸, 除底部导热外, 其余部分都是绝热的, 其容积被一位置固定的轻导热板隔成相等的两部分 A 和 B, 如图 8.3-7 所示, 其中各盛有 1mol 的氮气(视为理想气体). 今将 335J 的热量缓缓地由底部传给气体. 设活塞上的压强始终保持在 1 atm, 求: (1) A、B 两部分温度的改变及吸收的热量(导热板的吸热、活塞的重量及摩擦均不计); (2) 若将位置固定的导热板换成可自由滑动的绝热板, 上述温度改变和热量又如何?

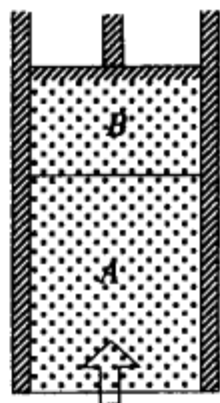


图 8.3-7

解: (1) A、B 中的气体初态温度相同, $T_A = T_B$, A 中气体吸热后, 因活塞中的导热板, 使 A、B 中气体的末温度也相同, $T_A' = T_B'$, 而且两者的温度变化也相同, $\Delta T = T_A' - T_A = T_B' - T_B$.

A 中气体经历的是等容过程, 系统吸热 Q , 向 B 中气体放热 Q_1 , 因而净吸热

$$Q - Q_1 = \nu C_V \Delta T = \nu \frac{i}{2} R \Delta T \quad (1)$$

B 中气体经历等压过程, 系统吸热

$$Q_1 = \nu C_p \Delta T = \nu \frac{i+2}{2} R \Delta T \quad (2)$$

将①, ②两式合并得 $Q = \nu(C_V + C_p)\Delta T$

$$\Delta T = \frac{Q}{\nu(C_V + C_p)} = \frac{Q}{\nu(i+1)R} = \frac{335}{1 \times (5+1) \times 8.31} = 6.72(\text{K})$$

B 中气体吸热

$$Q_1 = \nu \frac{i+2}{2} R \Delta T = 1 \times \frac{5+2}{2} \times 8.31 \times 6.72 = 196(\text{J})$$

A 中气体吸热

$$Q - Q_1 = 335 - 196 = 139(\text{J})$$

(2) 如将导热板换成绝热板, B 中气体经历的是绝热的定压过程, 因而 $Q_B = 0$, 且由 $Q_B = \nu C_p \Delta T$ 得 $\Delta T = 0$, 即系统的温度不变. 这过程的物理图象是: 过程中绝热板上升, 同时活塞也上升.

A 中气体经历的是等压膨胀过程, 系统从外界吸收热量 Q , 其中一部分 Q_1' 是增加内能使系统温度升高从 $T \rightarrow T + \Delta T$

$$Q_1' = C_V \Delta T \quad (3)$$

另一部分 Q_2' 用来做功

$$Q_2' = p(V_2 - V_1) = R \Delta T \quad (4)$$

由③+④得

$$Q = Q_1' + Q_2' = (C_V + R)\Delta T = C_p \Delta T = \frac{7}{2} R \Delta T$$

$$\therefore \Delta T = \frac{2Q}{7R} = \frac{2 \times 335}{7 \times 8.31} = 11.5(\text{K})$$

系统温度升高 11.5K, 系统对外做功 $A = R \Delta T = 8.31 \times 11.5 = 95.7(\text{J})$

§ 8.4 循环过程

1. 正循环和逆循环

如果一系统由某个状态出发,经过一系列过程,最后回到原来的状态,这样的过程称为循环过程,简称循环,系统经历一个循环后,其内能不变。

在 $P-V$ 图上,准静态循环过程是一条闭合曲线,如果循环沿顺时针方向进行,称为正循环。在正循环中,系统膨胀时对外所做的功,大于被压缩时外界对系统所做的功,在整个正循环中,系统对外所做净功为正值。

如果循环沿逆时针方向进行,称为逆循环。在逆循环中,系统膨胀对外所作的功,小于被压缩时外界对系统所做的功。在整个过程中,系统对外所做净功为负值。

2. 热机和致冷机

(1) 热机

热机是利用工作物质的正循环,不断地把热量转变为功的机器。在正循环中,工作物质从高温热源吸收热量 Q_1 ,向低温热源放出热量 $|Q_2|$ (放热, Q_2 为负值),同时对外做净功 A (图 8.4-1)。由热力学第一定律得

$$A = Q_1 - |Q_2|$$

工作物质在一个循环中对外界所做的净功与从高温热源吸收的热量之比,称为热机效率。用符号 η 表示

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1} \quad (8.4-1)$$

(2) 致冷机

致冷机是利用工作物质的逆循环,外界对工作物质做功,不断地从低温热源吸取热量,传递给高温热源的机器。在一个逆循环中,外界对工作物质做功为 $|A|$,从低温热源吸收的热量为 Q_2 ,向高温热源放出热量为 $|Q_1|$,根据热力学第一定律 $|Q_1| = |A| + Q_2$ (如图 8.4-2) 由于致冷机性能是以外界对工作物做功 $|A|$ 能从低温热源中提取热量 Q_2 来衡量。 $\frac{Q_2}{|A|}$ 叫做致冷系数,用符号 ϵ 表示:

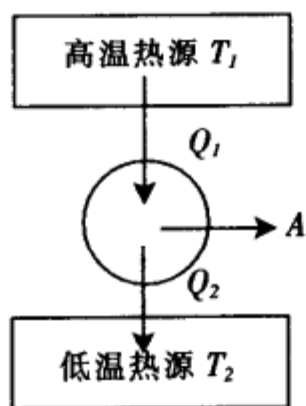


图 8.4-1 热机示意图

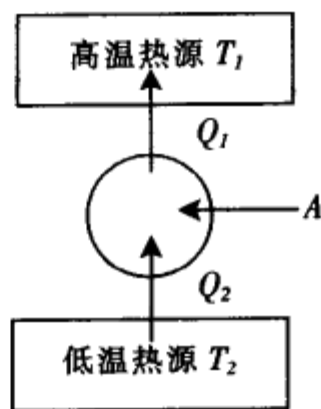


图 8.4-2 致冷机示意图

$$\epsilon = \frac{Q_2}{|A|} = \frac{Q_2}{|Q_1| - Q_2} \quad (8.4-2)$$

ϵ 越大,致冷机性能越好。

3. 卡诺循环、卡诺定理

(1) 卡诺循环

为了从理论上研究热机效率,卡诺提出了一种理想的循环,并证明它具有最高的效率。

卡诺循环是由两个等温过程和两个绝热过程组成。理想气体的卡诺循环如图 8.4-3 所示,理想气体经历一个卡诺正循环,在等温膨胀过程中,从高温热源(温度为 T_1)吸收热量 Q_1 ,在等温压缩过程中,向低温热源放出热量 $|Q_2|$,卡诺循环的效率为

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad (8.4-3)$$

即理想气体正卡诺循环的效率由高、低温热源的温度决定。 T_1 越高, T_2 越低,则效率越高。

对于逆向卡诺循环,气体从低温热源吸收热量 Q_2 ,外界对气体做功 $|A|$,理想气体逆向卡诺循环的致冷系数为

$$\epsilon = \frac{Q_2}{|A|} = \frac{Q_2}{|Q_1| - Q_2} = \frac{T_2}{T_1 - T_2} \quad (8.4-4)$$

在一般情况下,制冷系统的高温热源就是大气, T_1 是室温,要求达到的制冷温度 T_2 越低,则制冷系数 ϵ 越小。

(2) 卡诺定理

①在相同的高温热源和相同的低温热源之间工作的一切可逆热机,其效率 η 都相等,与工作物质无关。

②在相同的高温热源和相同的低温热源之间工作的一切不可逆热机,其效率 η 都小于可逆热机的效率 η 。

以上结论就叫做卡诺定理。

卡诺定理为提高热机效率指出了方向:

- ①尽量接近可逆循环;
- ②提高高温热源温度 T_1 ,降低低温热源温度 T_2 。

例 8.4-1 一热机,其工作物为理想气体,它的循环如图 8.4-4 所示。从初态 a 经定容加热到状态 b ,再由状态 b 经绝热膨胀到状态 c ,然后经定压压缩返回到初状态。试证其效率

$$\eta = 1 - \gamma \frac{\left(\frac{V_3}{V_1} - 1\right)}{\left(\frac{V_3}{V_1}\right)^\gamma - 1}$$

解:对于 $a \rightarrow b$ 过程,是等容升温过程吸收热量

$$Q_1 = \nu C_V(T_2 - T_1) \quad (1)$$

对于 $c \rightarrow a$ 过程,是等压压缩过程,放出热量

$$|Q_2| = \nu C_p(T_3 - T_1) \quad (2)$$

循环效率

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1} = 1 - \gamma \frac{\nu C_p(T_3 - T_1)}{\nu C_V(T_2 - T_1)} = 1 - \gamma \frac{\frac{T_3}{T_1} - 1}{\frac{T_2}{T_1} - 1} \quad (3)$$

在等容过程 $a \rightarrow b$ 有

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \quad (4)$$

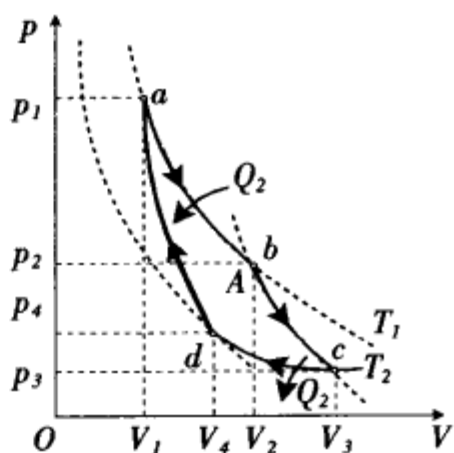


图 8.4-3 卡诺循环

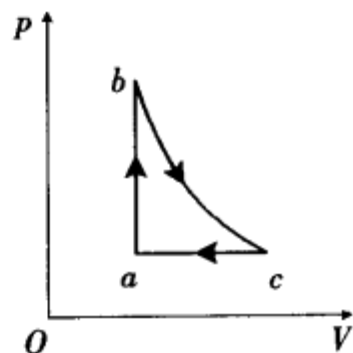


图 8.4-4

在等压过程 $c \rightarrow a$ 有
$$\frac{T_3}{T_1} = \frac{V_3}{V_1} \quad (5)$$

在绝热过程 $b \rightarrow c$ 有
$$\frac{p_2}{p_3} = \left(\frac{V_3}{V_2}\right)^\gamma, V_2 = V_1 \quad (6)$$

即
$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_3}{V_1}\right)^\gamma, p_1 = p_3 \quad (7)$$

代入得
$$\eta = 1 - \gamma \frac{\frac{V_3}{V_1} - 1}{\left(\frac{V_3}{V_1}\right)^\gamma - 1} \quad (8)$$

例 8.4-2 已知 1mol 单原子理想气体, 它所经历的准静态循环过程如图 8.4-5 所示.

(1) 试求循环一次系统对外所做的功;

(2) 计算由 A 经 B 到 C 过程的内能增量 ΔE 和吸热量 Q

解: 此循环的过程方程为

$$\left(\frac{p}{p_0} - 2\right)^2 + \left(\frac{V}{V_0} - 2\right)^2 = 1$$

其中 $p_0 = 10^5 \text{Pa}$, $V_0 = 10^{-3} \text{m}^3$,

若改变 p 、 V 轴的标度, 过程方程可表达为椭圆方程

$$\frac{(p - 2p_0)^2}{P_0^2} + \frac{(V - 2V_0)^2}{V_0^2} = 1$$

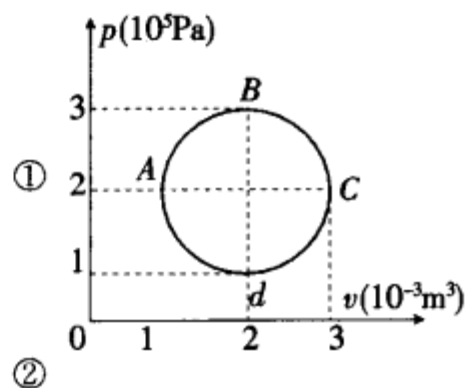


图 8.4-5

以上两式是等价的.

经过一次循环 $abcda$ 对外所做的功 A 为圆或椭圆的面积

$$A = \pi p_0 V_0 = 3.14 \times 10^5 \times 10^{-3} = 314 \text{(J)} \quad (3)$$

在 abc 过程中, 内能增量:

$$\begin{aligned} \Delta E_{abc} &= C_V(T_c - T_a) = \frac{3}{2} R \left(\frac{p_c V_c}{R} - \frac{p_a V_a}{R} \right) \\ &= \frac{3}{2} (6p_0 V_0 - 2p_0 V_0) = 6p_0 V_0 = 600 \text{J} \end{aligned} \quad (4)$$

对外做功

$$\begin{aligned} A_{abc} &= \frac{1}{2} \pi p_0 V_0 + 2p_0(3V_0 - V_0) \\ &= \left(\frac{\pi}{2} + 4\right) p_0 V_0 = 557 \text{J} \end{aligned} \quad (5)$$

吸热

$$\begin{aligned} Q_{abc} &= \Delta E_{abc} + A_{abc} = \left(\frac{\pi}{2} + 4\right) p_0 V_0 + 6p_0 V_0 \\ &= 600 + 557 = 1157 \text{(J)} \end{aligned} \quad (6)$$

例 8.4-3 一定量氮气(看作理想气体)经历图 8.4-6(a)所示的循环过程, 其中 ab 、 cd 、 ef 都是等温过程, 温度分别为 700K, 400K 和 300K; bc 、 de 、 fa 都是绝热过程. 而 $V_b = 4V_a$, $V_d = 2V_c$, 试求循环的效率.

解: 将绝热线 bc 延长与等温线 ef 交于 g , 这样可把循环看成两个卡诺循环(图 8.4-6(b))所示, 对于卡诺循环 $abgfa$, 过程 ab 吸收的热量

$$\begin{aligned} Q_{ab} &= \nu R T_1 \ln \frac{V_b}{V_a} = \nu R 700 \ln \frac{4V_b}{V_a} \\ &= 1400 \nu R \ln 2 \end{aligned} \quad (1)$$

过程 gf 放出的热量

$$|Q_{gf}| = \frac{T_3}{T_1} Q_{ab} = \frac{300}{700} Q_{ab} = 600 \nu R \ln 2 \quad (2)$$

对于卡诺循环 $cdeg$, 过程 cd 吸收的热量

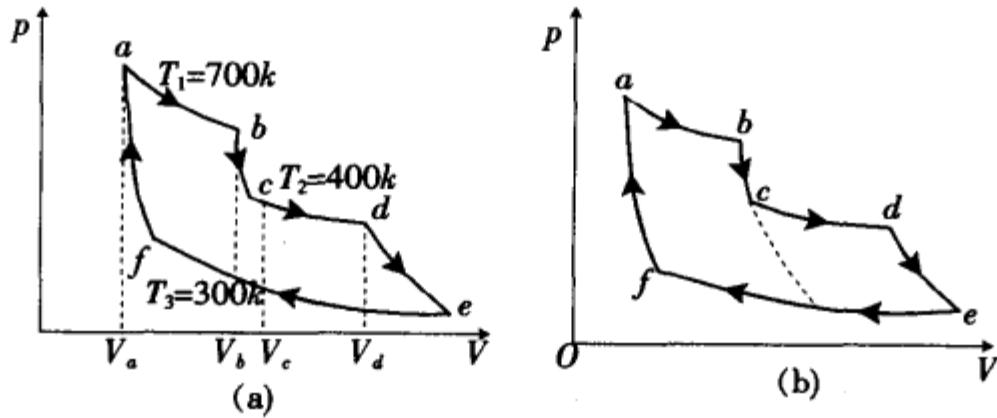


图 8.4-6

$$Q_{cd} = \nu RT_2 \ln \frac{V_d}{V_c} = \nu R 400 \ln \frac{2V_c}{V_c} = 400 \nu R \ln 2 \quad (3)$$

过程 eg 放出的热量

$$|Q_{eg}| = \frac{T_3}{T_2} Q_{cd} = \frac{300}{400} Q_{cd} = 300 \nu R \ln 2 \quad (4)$$

该循环的效率

$$\eta = \frac{|Q_{gf}| + |Q_{eg}|}{Q_{ab} + Q_{cd}} = \frac{600 \nu R \ln 2 + 300 \nu R \ln 2}{1400 \nu R \ln 2 + 400 \nu R \ln 2} = 50\% \quad (5)$$

§ 8.5 热力学第二定律

由卡诺热机循环中已得出热机从高温热源吸取热量 Q_1 , 通过循环放给冷源热量 Q_2 , 循环的热机效率为

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$$

为了提高热机效率趋使其热机效率 η 等于 1, 就要求 $Q_2 \rightarrow 0$, 这就要求从高温热源吸取热量全部转化为功, 而不向冷源放出热量, 经过大量实验证明, 这样的热机是不可能制造成功的. 开尔文总结了上述实验事实得出:

1. 开尔文叙述法

不可能制造成功一种循环动作的热机, 它只从单一热源吸取热量, 使之完全变为有用的功, 而其他物体不发生任何变化.

从单一热源吸取热量全部转变为功这种循环动作热机叫做第二类永动机. 图 8.5-1(a) 为其示意图.

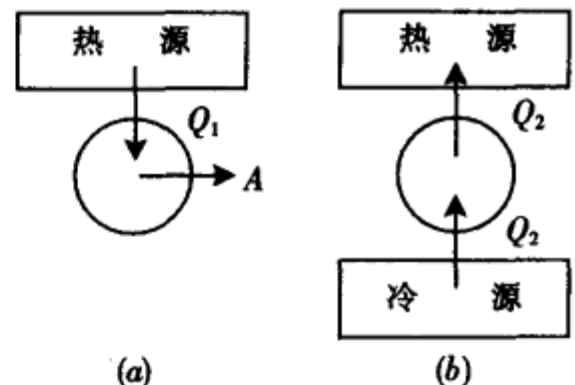
由卡诺冷机的致冷系数定义中得出

$$\epsilon = \frac{Q_2}{A} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}$$

致冷系数越大, 就意味着外界可用较小的功从冷源中取出较多的热量. 然而无数事实证明要从低温热源中取出热量送到高温热源去, 外界必须做功, 否则热量不可能自动地从低温热源送到高温热源中去. 根据热量传递的这种规律, 克劳修斯总结出了热力学第二定律的另一种叙述法.

2. 克劳修斯叙述法

热量不能自动地从低温热源传向高温热源. [图 8.5-1



开尔文机示意图 克劳修斯机示意图

图 8.5-1 第二类永动机示意图

(b)为其示意图]

热力学第二定律是由大量实验事实总结得出的。热力学第二定律指明了系统做功通过系统内能变化可以全部转变为热量,而从单一热源吸收热量却不能全部转变为功。热量可以自动地从高温物体传到低温物体,而相反过程是不会自动出现的。这说明了自然界出现的过程是有方向性的。

§ 8.6 可逆过程和不可逆过程

一个系统由某一状态出发,经过某一过程到达另一状态,如果存在另一过程能使系统回到原来的状态,同时消除了系统对外界引起的一切影响,则原来的过程称为可逆过程,如果用任何方法都不可能使系统和外界完全复原,则原来的过程称为不可逆过程。

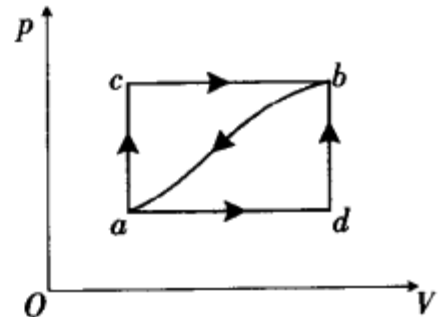
例如纯粹的机械运动——单摆,如果空气阻力及其他摩擦力都忽略不计,则当它离开平衡位置后开始摆动,经过一周期后又回到起始位置,周围一切都没有变化;这样单摆摆动就是一个可逆过程,所以可逆过程是一理想过程。

现再分析热力学过程,由热力学第二定律的二种表述法已明确指出对系统做功全部转变为热是可能的,而利用单一热源吸热全部转变为功是不可能的,热量自动地从高温物体传给低温物体是可能的,而热量自动地从低温物体传到高温物体是不可能的。

自然现象中的不可逆过程是多种多样的,但可以证明凡有热现象伴随的实际过程都是不可逆的,每一种不可逆过程都存在着内在联系即每一种不可逆过程都可以用来表征热力学第二定律,因此热力学第二定律可以归结为一切实际进行的自发过程都是不可逆过程。

本章综合例题

例 8-1 一系统由状态 a 经 acb 过程到状态 b ,如图例 8-1 所示。吸热 350J,对外做功 126J。
(1)如果经 adb 过程,由状态 a 变到状态 b ,系统对外做功 42J,问系统吸热多少?
(2)如果外界对系统做功 84J,使系统经过程曲线 ba 由状态 b 返回状态 a ,问此过程中系统吸热还是放热,其量值为多少?



图例 8-1

解:(1)对于 acb 过程

$$\begin{aligned} E_b - E_a &= Q_{acb} - A_{acb} \\ &= 350 - 126 = 224(\text{J}) \end{aligned}$$

对于 adb 过程

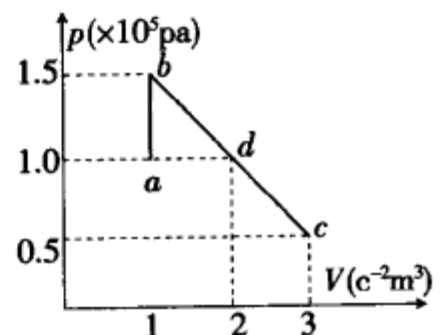
$$Q_{adb} = (E_b - E_a) + A_{adb} = 224 + 42 = 266(\text{J})$$

(2)对于 ba 过程

$$Q_{ba} = (E_a - E_b) + A_{ba} = -224 + (-84) = -308(\text{J})$$

负号表示系统放热。

例 8-2 1mol 单原子理想气体,经历一平衡过程 abc ,在 PV 图上 ab 、 bc 为直线,求:(1) a 、 b 、 c 三状态温度 T_a 、 T_b 、 T_c =? (2)在 ab 、 bc 两过程中 ΔQ 、 A 和内能变化 ΔE ? (3) abc 过程中哪一状态温度 T_{\max} 最高?
(4)由 T_{\max} 到 C 过程中气体是吸热还是放热?



图例 8-2

解:(1)根据 1mol 理想气体状态方程 $pV = RT$ 可得:

$$T_a = \frac{p_a V_a}{R} = \frac{10^5 \times 10^{-2}}{R} = 120(\text{K})$$

$$T_b = \frac{p_b V_b}{R} = \frac{1.5 \times 10^3}{R} = 180(\text{K})$$

同理 $T_C = 180\text{K}$

(2) ab 是等容过程 $A_{ab} = 0$

$$\Delta E_{ab} = C_V(T_b - T_a) = \frac{3}{2}R(T_b - T_a)$$

$$= \frac{3}{2}R \times \frac{0.5}{R} \times 10^3 = \frac{3}{4} \times 10^3 \text{J}$$

$$\Delta Q_{ab} = \Delta E_{ab} = \frac{3}{4} \times 10^3 \text{J}$$

在 bc 过程中, b 、 c 温度相同, 内能增量为零 $\Delta E_{bc} = 0$

$$A_{bc} = \frac{1}{2}(p_b - p_c)(V_c - V_a) + p_a(V_c - V_a)$$

$$= \frac{1}{2}(1.5 - 0.5)(3 - 1) \times 10^3 + 0.5(3 - 1) \times 10^3$$

$$= 2 \times 10^3 \text{J}$$

$$\Delta Q_{bc} = A_{bc} = 2 \times 10^3 \text{J}$$

(3) 在 ab 过程中是 b 点温度最高.

在 bc 过程中, 过程方程为 $2p + V = 4$ ($P: 10^5 \text{Pa}$ $V: 10^{-2} \text{m}^3$)

①

由 $pV = RT$ 代入得 $2 \frac{RT}{V} + V = 4$

$$2RT = 4V - V^2 = 4 - (V - 2)^2$$

②

当 $V = 2 \times 10^{-2} \text{m}^3$ 时 T 值最大从 $p - V$ 图中对应得状态 d , 其 p 值为 $1.0 \times 10^5 \text{Pa}$, 对应温度 T_{\max}

$$= T_d = \frac{p_d V_d}{R} = \frac{1 \times 2 \times 10^3}{R} = 240 \text{K}$$

(4) 在从 d 到 c 过程中, 根据热力学第一定律得

$$dQ_{dc} = C_V dT + p dV$$

③

由①式可得

$$p = \frac{2 - V}{R}$$

由②式可得

$$dT = \frac{2 - V}{R} dV$$

代入③式得

$$dQ_{dc} = \frac{3}{2}R \left(\frac{2 - V}{R} \right) dV + \left(\frac{4 - V}{2} \right) dV$$
$$= (5 - 2V) dV$$

④

从 d 到 c 过程中, 体积始终膨胀即 $dV > 0$,

当 $5 > 2V$ 即 $V < \frac{5}{2}$, 也就是 $V < 2.5 \times 10^{-2} \text{m}^3$ 时 $dQ > 0$ 系统吸热

当 $V > \frac{5}{2}$ 时, 即 $V > 2.5 \times 10^{-2} \text{m}^3$ 时 $dQ < 0$ 系统放热

例 8-3 一绝热的气缸, 活塞可在气缸内无摩擦的移动, 如图例 8-3 所示. 活塞外面是大气, 大气压强为 p_0 , 开始时, 活塞被固定, 气缸内盛有 νmol 的理想气体, 其压强为 $p_1 = 5p_0$, 温度 $T_1 = 350\text{K}$, 体积 $V_1 = 7\text{L}$. 已知每摩尔质量的气体的内能可表示成 $E = \frac{5}{2}RT$, R 为气体普适常数, T 为绝对温度. 今释放活塞, 让它自由移动, 问当活塞再次平衡时, 气缸内气体的温度和体积各为多少?



图例 8-3

解: 释放活塞后, 由于 $p > p_0$, 活塞迅速向右移动, 气体体积膨胀, 并出现气流和扰动, 气体处于非平衡态. 但外界作用于活塞的力 $F_e = p_0 S$, 是恒定的, S 为活塞的面积. 若气体的初始体积为 V_1 , 活塞再次达到平衡时气体的体积为 V_2 , 活塞的位移为 x , 则外界对气体作的功

$$A = -F_e x = -p_0 S x = -p_0 (V_2 - V_1)$$

①

根据热力学第一定律, 在绝热条件下, 外界对气体作的功等于气体内能的增加

$$-p_0(V_2 - V_1) = \frac{5}{2}\nu R(T_2 - T_1) \quad ②$$

由状态方程

$$p_1 V_1 = \nu R T_1 \quad ③$$

$$p_0 V_2 = \nu R T_2 \quad ④$$

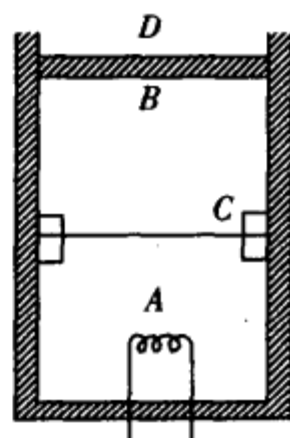
将③④代入②式得

$$-T_2 + \frac{1}{5}T_1 = \frac{5}{2}T_2 - \frac{5}{2}T_1$$

$$T_2 = \frac{27}{35}T_1 = \frac{27}{35} \times 350 = 270(\text{K})$$

$$V_2 = \frac{\nu R T_2}{p_0} = \frac{p_1 V_1}{T_1} \cdot \frac{T_2}{p_0} = 5 \times \frac{27}{35} \times 7 = 27(\text{L}) \quad ⑤$$

例 8-4 图例 8-4 是一有绝热壁组成的截面相同的容器, C 是固定导热板, D 是绝热的能活动的活塞, C、D 将容器分成 A、B 两部分, 开始时, A、B 两部分各盛有 1mol 氮气, 今将 Q 焦耳热量由电热丝 E 缓慢供给气体, 设活塞压力始终保持为 P, 试求



图例 8-4

(1) A 部和 B 部温度的改变量是多少?

(2) B 部体积变化为多少?

解: (1) 由于 D 是活动的, C 是固定的, 因此 D 室中气体作等压变化, A 室中气体作等容变化, 而 C 板是导热板. A、B 两室中气体温度变化是相同的

$$\begin{aligned} Q &= C_V \Delta T + C_p \Delta T \\ &= \frac{5}{2} R \Delta T + \frac{7}{2} R \Delta T \quad (\text{氮气是双原子气体}) \\ &= 6R \Delta T \end{aligned}$$

$$\Delta T = \frac{Q}{6R}$$

(2) 当室中 1mol 氮气是作等压变化, 根据状态方程得

$$\begin{aligned} p \Delta V &= R \Delta T \\ \Delta V &= \frac{R \Delta T}{p} = \frac{Q}{6P} \end{aligned}$$

例 8-5 1mol 单原子分子理想气体从初态压强 $p_0 = 32 \times 10^5 \text{Pa}$, 体积 $V_0 = 8 \text{m}^3$, 经 p-V 图例 8-5 上的直线达到终态压强 $p_1 = 1.0 \times 10^5 \text{Pa}$, 体积 $V_1 = 64 \text{m}^3$; 再经绝热过程回到初态, 如此构成一循环. 求此循环的效率.

解: 此循环的吸热与放热均在直线过程中发生. 因此首先要求出吸热与放热的转折点 C 的状态参量 p_c, V_c , 设直线过程方程为

$$p = \alpha - \beta V$$

又

$$pV = \nu RT$$

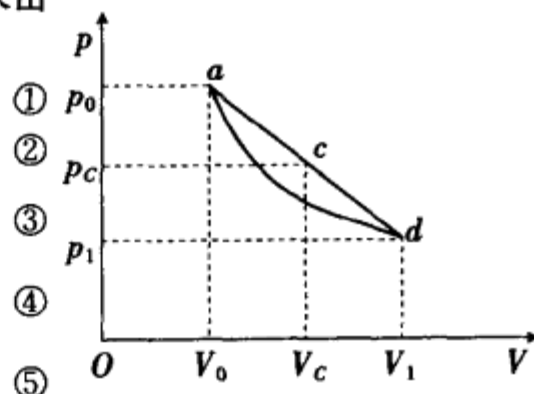
由以上两式得 $T = \frac{1}{\nu R}(\alpha V - \beta V^2)$

对某微过程有 $dT = \frac{1}{\nu R}(\alpha dV - 2\beta V dV)$

微过程中内能增量 $dE = \nu C_V dT = \nu \frac{3}{2} R dT$

由热力学第一定律及以上各式有

$$\begin{aligned} dQ &= dE + dA = dE + p dV \\ &= \nu \frac{3}{2} R dT + (\alpha - \beta V) dV \\ &= \nu \frac{3}{2} R \frac{1}{\nu R} (\alpha dV - 2\beta V dV) + (\alpha - \beta V) dV \end{aligned}$$



图例 8-5

$$= \left(\frac{5}{2} \alpha - 4\beta V \right) dV \quad (5)$$

在转折点 C 附近的微过程, 应有 $dQ=0$, 由此得

$$\left(\frac{5}{2} \alpha - 4\beta V_C \right) = 0, V_C = \frac{5\alpha}{8\beta}, \quad (6)$$

$$p_A = \alpha - \beta V_A = \alpha - \beta \cdot \frac{5\alpha}{8\beta} = \frac{3}{8} \alpha \quad (7)$$

由已知态 $a(p_0, V_0)$ 和 $b(p_1, V_1)$ 可定出 α 和 β :

$$p_0 = \alpha - \beta V_0, \quad p_1 = \alpha - \beta V_1$$

得

$$\alpha = \frac{p_0 V_1 - p_1 V_0}{V_1 - V_0} = \frac{255}{7} \times 10^5 (\text{Pa}) \quad (8)$$

$$\beta = \frac{p_0 - p_1}{V_1 - V_0} = \frac{31}{56} \times 10^5 (\text{Pa}) \quad (9)$$

代入得

$$p_C = 13.7 \times 10^5 (\text{Pa}), V_C = 41.1 \text{m}^3.$$

对于此循环, 由 $a \rightarrow c$ 吸收热量

$$\begin{aligned} Q_1 &= \nu C_V (T_c - T_0) + \frac{1}{2} (p_0 + p_c) (V_c - V_0) \\ &= \frac{3}{2} (p_c V_c - p_0 V_0) + \frac{1}{2} (p_0 + p_c) (V_c - V_0) \end{aligned} \quad (10)$$

由 $c \rightarrow b$ 放出的热量

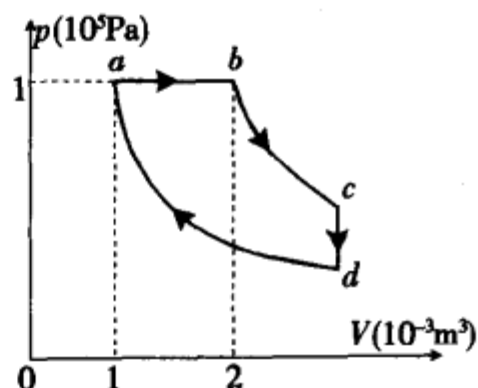
$$\begin{aligned} |Q_2| &= \nu C_V (T_c - T_1) + \frac{1}{2} (p_c + p_1) (V_c - V_1) \\ &= \frac{3}{2} (p_c V_c - p_1 V_1) + \frac{1}{2} (p_c + p_1) (V_c - V_1) \end{aligned} \quad (11)$$

循环效率

$$\eta = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1} = 1 - \frac{\frac{3}{2} (p_c V_c - p_1 V_1) + \frac{1}{2} (p_c + p_1) (V_c - V_1)}{\frac{3}{2} (p_c V_c - p_0 V_0) + \frac{1}{2} (p_c + p_0) (V_c - V_0)} = 52\% \quad (12)$$

例 8-6 某热机循环如图例 8-6 所示, 请将正确数据填写在下列表格中.

过程	$\Delta Q(\text{J})$	$A(\text{J})$	$\Delta E(\text{J})$
$a \rightarrow b$ 等压			
$b \rightarrow c$ 绝热		75	
$c \rightarrow d$ 等容	-75		
$d \rightarrow a$ 等温		-125	
热机效率 η			



图例 8-6

解: 根据热力学第一定律 $\Delta Q = \Delta E + A$, 因此在 $\Delta Q, \Delta E, A$ 三个量中如果二个量已知, 则第三个量即可求得, 在上述表格中, $b \rightarrow c$ 绝热过程 $\Delta Q = 0$, $c \rightarrow d$ 等容过程 $\Delta = 0$, $d \rightarrow a$ 等温过程 $\Delta E = 0$ 因此上述三过程中 $\Delta Q, A, \Delta E$ 均能求得. 而在 $a \rightarrow b$ 等压过程中所作的功 A 可由 $p-V$ 图中求得 $A = p_a (V_b - V_a) = 1 \times 10^5 \times (2 - 1) \times 10^{-3} = 100 \text{J}$ 内能由一个循环内能变化为 0 可求得 $\Delta E = 150 \text{J}$, 则 $a \rightarrow b$ 等压过程中 $\Delta Q, A, \Delta E$ 也均能求得, 填表如下. 热机效率 $\eta = \frac{Q - Q_2}{Q_1}$ 即由系统所作总功 $A = 100 + 75 - 125 = 50$, 在整个循环中吸收热量 $Q_1 = 250 \text{J}$ 因此此循环的效率 $\eta = \frac{50}{250} = 20\%$.

过程	$\Delta Q(J)$	$A(J)$	$\Delta E(J)$
$a \rightarrow b$ 等压	250	100	150
$b \rightarrow c$ 绝热	0	75	-75
$c \rightarrow d$ 等容	-75	0	-75
$d \rightarrow a$ 等温	-125	-125	0
热机效率 η		20%	

例 8-7 某发电厂,平均输出功率为 50MW,在 $T_1 = 1000\text{K}$ 和 $T_2 = 300\text{K}$ 下工作.试问:(1)理论上最高效率为多少?(2)如这个厂只能达到理想效率的 70%,则有多少热量转化为电能?(3)为了生产 50MW 的电功率,每秒钟需要提供多少热量?(4)如果低温热源是由一条河流来承担,其流量为 $10\text{m}^3/\text{s}$,由于电厂释放的热量而引起的温升是多少?

解:(1)理论上最高热效率为卡诺循环的效率:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{1000 - 300}{1000} = 70\%$$

(2)实际热效率 $\eta' = 70\% \cdot \eta = 49\%$

已知功率 $P = 50\text{MW} = 50 \times 10^6 \text{W}$,即每秒钟有 $5.0 \times 10^7 \text{J}$ 的热量转为电能,它占输入热量的 49%.

(3)每秒钟需提供的热量

$$\frac{Q}{t} = \frac{P}{\eta'} = \frac{50 \times 10^6}{0.49} = 1.02 \times 10^8 (\text{W})$$

(4)水的比热容 $c = 4.18 \times 10^3 \text{J/kg} \cdot \text{K}$,水的密度 $\rho = 1.0 \times 10^3 \text{kg/m}^3$,水的流量即单位时间内通过的水量 $V = 10\text{m}^3/\text{s}$,则每秒钟内通过水的质量 $m = \rho V = 1.0 \times 10^3 \times 10 = 1.0 \times 10^4 (\text{kg/s})$.

每秒钟向河流释放的热量

$$q = Q(1 - \eta') = 1.02 \times 10^8 \times (1 - 49\%) = 5.20 \times 10^7 (\text{J/s}).$$

因此,引起河流水温升高

$$\Delta T = \frac{q}{mc} = \frac{5.20 \times 10^7}{10 \times 10^4 \times 4.18 \times 10^3} = 1.24 (\text{K})$$

例 8-8 某空调器按可逆卡诺循环运转,其中做功装置连续工作时所提供的功率为 P_0 .(1)夏天,室外温度为恒定的 T_1 ,启动空调器连续工作,最后可将室温降至恒定的 T_2 .室外通过热传导在单位时间内向室内传输的热量正比于 $(T_2 - T_1)$ (牛顿冷却定律),比例系数为 K .试用 T_1 、 P_0 和 K 来表示 T_2 .(2)当室外温度为 30°C 时,若这台空调器只有 30% 的时间处于工作状态,则室温可维持在 20°C .试问室外温度最高为多少时,此空调器仍可使室温维持在 20°C .(3)冬天,可将空调器吸热、放热反向.试问室外温度最低为多少时,用此空调器可使室温维持在 20°C .

解:无论空调器是连续工作还是间断工作,其做功装置提供的平均功率设为 P ,显然,连续工作时 $P = P_0$ 为极大,间断工作时应打个折扣.

(1)夏天,空调器为制冷机,单位时间内从室内吸热 Q_2 向室外放热 Q_1 ,故 $Q_1 = Q_2 + P$

因空调器作可逆卡诺循环,故有 $\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}$

由以上两式得出 $Q_2 = \frac{T_2}{T_1 - T_2} P$

同时,单位时间内室外向室内通过热传导传输的热量

$$Q = K(T_1 - T_2)$$

为了保持室温恒定,室内应处于热平衡,即

$$Q = Q_2 \quad K(T_1 - T_2) = \frac{T_2}{T_1 - T_2} P$$

或
$$T_1 - T_2 = \sqrt{\frac{P}{K} T_2} \quad (1)$$

解此方程, 弃去不合理的 $T_2 > T_1$ 的解, 得

$$T_2 = T_1 + \frac{1}{2} \left[\frac{P}{K} - \sqrt{\left(\frac{P}{K}\right)^2 + \frac{4P}{K} T_1} \right]$$

因空调连续工作, $P = P_0$, 故

$$T_2 = T_1 + \frac{1}{2} \left[\frac{P_0}{K} - \sqrt{\left(\frac{P_0}{K}\right)^2 + \frac{4P_0}{K} T_1} \right] \quad (2)$$

(2) 当 $T_2 = 293\text{K}$, $P = 0.3P_0$ 时, $T_1 = 300\text{K}$, 而所求的是 $P = P_0$ 时对应的 T_1 值, 记为 $T_{1\max}$, 由式①得

$$T_1 - T_2 = \sqrt{\frac{P}{K} T_2} = \sqrt{\frac{0.3P_0}{K} T_2} \quad (3)$$

$$T_{1\max} - T_2 = \sqrt{\frac{P_0}{K} T_2} \quad (4)$$

由③④两式得

$$T_{1\max} = T_2 + \frac{1}{\sqrt{0.3}} (T_1 - T_2) = 293 + \frac{1}{\sqrt{0.3}} (300 - 293) = 311.26(\text{K})$$

即
$$t_{1\max} = 38.26^\circ\text{C} \quad (5)$$

若空调器连续工作, 则当夏天室外温度最高为 38.26°C 时, 仍可使室内温度维持在 20°C .

(3) 冬天, 空调器为热机, 单位时间从室外(低温热源, 温度为 T_1')吸热 Q_1' , 向室内(高温热源, 温度为 T_2)放热 Q_2' , 空调器连续工作, 功率为 P_0 , 故有 $Q_2' = Q_1' + P_0$ (6)

因空调器作可逆卡诺循环, 有 $\frac{Q_1'}{T_1'} = \frac{Q_2'}{T_2}$ (7)

由⑥⑦两式得
$$Q_2' = \frac{T_2}{T_2 - T_1'} P_0 \quad (8)$$

同时, 单位时间从室内向室外通过热传导传输的热量

$$Q' = K(T_2 - T_1') \quad (9)$$

为了保持室温恒定, 室内仍应处于热平衡(注意: 与夏天的情况不对称), 应有

$$Q' = Q_2' \quad (10)$$

于是
$$T_2 - T_1' = \sqrt{\frac{P_0}{K} T_2} \quad T_1' = T_2 - \sqrt{\frac{P_0}{K} T_2}$$

把式⑩代入得

$$\begin{aligned} T_1' &= T_2 - (T_{1\max} - T_2) = 2T_2 - T_{1\max} \\ &= 2 \times 293 - 311.26 = 274.74(\text{K}) \end{aligned}$$

即
$$t_1' = 1.74^\circ\text{C}$$

若空调器连续工作, 则当冬天室外温度最低为 1.74°C 时, 仍可使室内温度维持在 20°C .

例 8-9 一热机工作于两个相同材料的物体之间, 两物体的温度分别为 T_A 和 T_B ($T_A > T_B$), 每个物体的质量为 m , 比热恒定, 均为 c , 设两个物体的压强保持不变, 且不发生相变.

(1) 假定热机能从系统获得理论上允许的最大机械能, 求出两物体 A 和 B 最终达到的温度 T_0 的表达式, 给出解题过程.

(2) 由此得出允许获得的最大功的表达式.

(3) 假定热机工作于两桶水之间, 每桶水的体积为 2.50m^3 , 一桶水的温度为 350K , 另一桶水的温度为 300K , 计算可获得的最大机械能.

已知水的比热容 $= 4.19 \times 10^3 \text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, 水的密度 $= 1.00 \times 10^3 \text{kg}/\text{m}^3$

解: 设 ΔQ_1 为从物体 A 吸收的热量, ΔQ_2 为释放给物体 B 的热量, 则

$$\Delta Q_1 = -mc(\Delta T_1) \quad (\Delta T_1 < 0) \quad ①$$

$$\Delta Q_2 = mc\Delta T_2 \quad (\Delta T_2 > 0) \quad ②$$

(1) 为获得最大机械能, 设热机为卡诺机, 由热力学第二定律, 在工作全过程中有

$$\frac{\Delta Q_1}{T_1} = \frac{\Delta Q_2}{T_2} \quad ③$$

即

$$-mc \int_{T_A}^{T_0} \frac{dT_1}{T_1} = mc \int_{T_B}^{T_0} \frac{dT_2}{T_2}$$

$$\ln \frac{T_A}{T_0} = \ln \frac{T_B}{T_0}$$

得

$$T_0 = \sqrt{T_A T_B} \quad ④$$

(2)

$$W = Q_1 - Q_2 = mc(T_A - T_0) - mc(T_0 - T_B) \quad ⑤$$

$$= mc(T_A + T_B - 2\sqrt{T_A T_B})$$

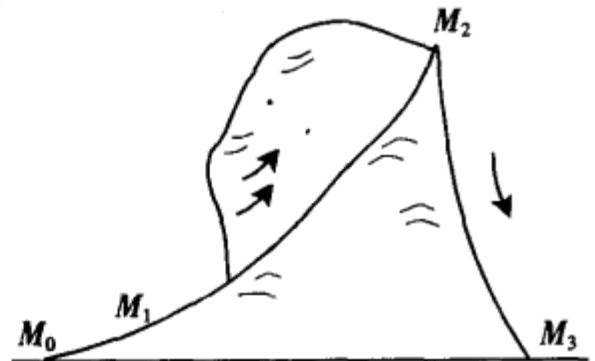
或

$$W = mc(\sqrt{T_A} - \sqrt{T_B})^2 \quad ⑥$$

(3) 数值结果

$$\begin{aligned} W &= 2.50 \times 1.00 \times 10^3 \times 4.19 \times 10^3 \times (350 + 300 - 2\sqrt{350 \times 300}) \text{J} \\ &= 2.0 \times 10^7 \text{J} = 20 \text{MJ} \end{aligned} \quad ⑦$$

例 8-10 如图例 8-10 所示, 潮湿空气绝热地持续地流过山脉, 气象站 M_0 和 M_3 测出大气压均为 $1 \times 10^5 \text{Pa}$, 气象站 M_2 测出大气压为 $0.7 \times 10^5 \text{Pa}$, 在 M_0 处空气温度为 20°C , 随着空气上升, 在压强为 $0.845 \times 10^5 \text{Pa}$ 高度处(气象站 M_1)开始有云生成, 空气继续上升, 经过 1500 秒后到达山脊的 M_2 站. 在上升过程中, 空气里的水蒸气凝结成雨落下, 设每平方米上空潮湿空气的质量为 2000kg , 每千克潮湿空气中凝结出 2.45 克的雨水.



图例 8-10

(1) 求在云层底部(即 M_1 处)温度 T_1 .

(2) 假设空气密度随高度线性变化, 问云层底部到 M_0 的高度 h_1 是多少?

(3) 试问在山脊处 M_2 处温度 T_2 是多少?

(4) 求由于空气中水蒸气的凝结, 在 3 小时内形成的降雨量, 设在 M_1 和 M_2 之间的降雨量是均匀的.

(5) 求山脉背后 M_3 气象站处温度 T_3 是多少? 并讨论 M_3 处空气的状态并与 M_0 处的作比较.

提供数据:

空气可看作理想气体, 水蒸汽对热容量及空气密度影响忽略不计.

空气定压比热 $C_p = 1005 \text{J/kg}\cdot\text{K}$ 在 M_0 处对应 $p_0 T_0$ 时的空气密度 $\rho_0 = 1.189 \text{kg/m}^3$. 在云层中水的汽化热 $L_v = 2500 \text{kJ/kg}$, 又 $\frac{C_p}{C_v} = \gamma = 1.4$, $g = 9.8 \text{m/s}^2$.

(第 18 届国际物理奥赛试题)

解: (1) 设云层底部 M_1 处温度为 T_1

从 M_0 到 M_1 状态变化是绝热的

$$p_0^{-\gamma} T_0^{-\gamma} = p_1^{-\gamma} T_1^{-\gamma} \quad ①$$

$$\frac{T_1}{T_0} = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}$$

$$T_1 = T_0 \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}} = (273 + 20) \left(\frac{0.845 \times 10^5}{1 \times 10^5}\right)^{1-\frac{1}{1.4}}$$

$$= 279.4(\text{K}) \quad \text{②}$$

即经绝热膨胀后温度降低了。

(2) 设云层底部高度为 h_1 (即 M_0 到 M_1 的垂直距离)。

大气压是测量点上空气柱的重量, 大气压强差可由空气柱高度求 h

$$p_0 - p_1 = \bar{\rho}gh_1 \quad \text{③}$$

$\bar{\rho}$ 表示平均空气密度, 因空气密度成线性变化, 所以 $\bar{\rho} = \frac{1}{2}(\rho_0 + \rho_1)$

空气摩尔质量是一定的, 由状态方程得出

$$p_0 V_0 = \frac{m_0}{M}RT_0 \quad \text{④}$$

$$p_1 V_1 = \frac{m_1}{M}RT_1 \quad \text{⑤}$$

$$\frac{p_0}{\rho_0 T_0} = \frac{p_1}{\rho_1 T_1} \quad \text{⑥}$$

$$\rho_1 = \frac{p_1}{p_0} \cdot \frac{\rho_0 T_0}{T_1} = \frac{0.845 \times 10^5}{1 \times 10^5} \cdot \frac{1.189 \times 293}{279.4} = 1.054(\text{kg/m}^3) \quad \text{⑦}$$

$$\text{平均密度 } \bar{\rho} = \frac{1}{2}(\rho_0 + \rho_1) = 1.122\text{kg/m}^3 \quad \text{⑧}$$

代入③式得出

$$h_1 = \frac{p_0 - p_1}{\bar{\rho}g} = 1408\text{m} \quad \text{⑨}$$

(3) 山脊温度为 T_2

从 $M_1 \rightarrow M_2$ 影响空气温度有二个因素。其一是绝热膨胀(压强降低)温度变化到 T_X , 第二原因是水蒸汽凝结成雨水向空中放热使温度升高 ΔT 。所以 $T_2 = T_X + \Delta T$

由于绝热膨胀得

$$\frac{T_X}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}} \quad \text{⑩}$$

$$T_X = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}} = 279.4 \left(\frac{0.70 \times 10^5}{0.845 \times 10^5}\right)^{1-\frac{1}{1.4}} = 264.8(\text{K}) \quad \text{⑪}$$

计算 ΔT , 每千克空气中有 m 克水蒸气凝结成水滴, 释放出凝结热 $\Delta Q = L_v m$ 使空气吸收热量温度升高 $\Delta Q = C_p \Delta T$

$$\Delta T = \frac{L_v m}{C_p} = \frac{2500 \times 10^3 \times 2.45 \times 10^{-3}}{1005} = 6.1(\text{K}) \quad \text{⑫}$$

$$\text{因此 } T_2 = 264.8 + 6.1 = 270.9\text{K} \quad \text{⑬}$$

(4) 降雨量

每秒钟在每平方米上因空气上升水蒸气凝结成雨量为 $2000 \times 2.45 \times 10^{-3} / 1500$, 则在 3 小时内总雨量有 $\frac{2000 \times 2.45 \times 10^{-3}}{1500} \times 3 \times 3600 = 35.3(\text{kg/m}^3)$

1kg/m³ 产生 1mm 降雨量, 因此降雨量是 35.3mm

(5) 气象站 M_3 处温度 T_3

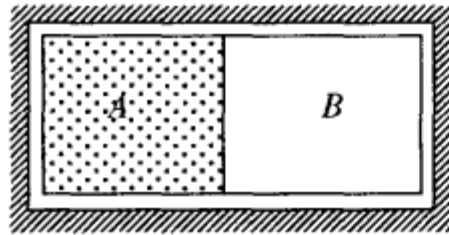
$$\text{因空气绝热压缩 } T_3 = T_2 \left(\frac{p_3}{p_2}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}} = 270.9 \left(\frac{1 \times 10^5}{0.70 \times 10^5}\right)^{1-\frac{1}{1.4}} = 300(\text{K}) \quad \text{⑭}$$

讨论: 在上述条件下, $T_3 > T_0$ 这说明当空气流过山脉后变得干燥, 温度升高是由于水蒸气凝结放出热量。如果是完全干燥空气, 则在相同条件下越过山脉 M_0 与 M_3 高度相等温度应该相等。

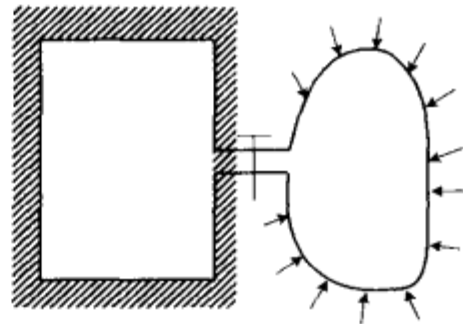
本章习题

8.1 在用绝热壁包围的体积为 V 的容器内, 用一隔板将容器等分成 A、B 二室如图习 8.1。在 A

室内装有 1mol 压强为 p_0 的氮气(可视作理想气体), B 室内为真空. 现将隔板抽去, 当容器内气体达到稳定状态时, 气体的温度 T 为多少? [提示]



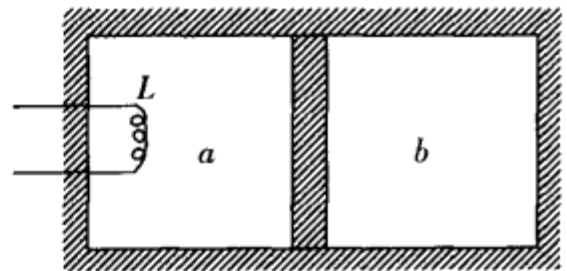
图习 8.1



图习 8.2

8.2 一绝热的真空室, 有一小阀门通过线管, 与大气相连, 如图习 8.2 所示. 打开阀门, 大气便涌入真空室. 直到室内外压强都是 p_0 , 已知 1 mol 的空气在大气中的温度为 T_0 , 压强为 p_0 , 体积为 V_0 , 内能为 E_0 , 问进入真空室后内能 E_f 为多少? [提示]

8.3 一水平放置的绝热气缸, 内有一不导热的隔板, 把气缸分成 a 、 b 两室, 隔板可在气缸内无摩擦地移动, 如图习 8.3 所示. 每室中装有质量相同的同种理想气体, 它们的压强都是 101.325kPa, 体积都是 45L, 温度都是 270K. 已知每摩尔该气体的内能 $E = \frac{3}{2}RT$, 今通过 a 室中的电热丝 L 对气体加热, 传给气体热量 $\Delta Q = 2.70 \times 10^4 \text{J}$. 达到平衡时, a 室的体积为 b 室的 2 倍, 求 a 、 b 两室中气体的温度. [提示]

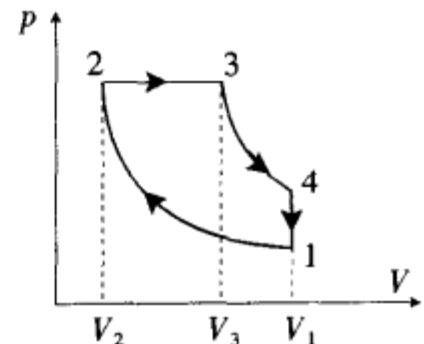


图习 8.3

8.4 ν mol 理想气体经历下列狄塞尔循环如图习 8.4 所示.

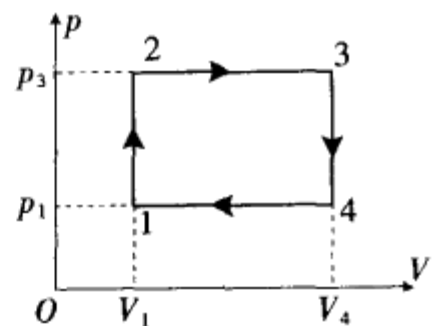
- (1) 绝热压缩, 由 V_1, T_1 到 V_2, T_2 ;
- (2) 等压吸热, 由 V_2, T_2 到 V_3, T_3 ;
- (3) 绝热膨胀, 由 V_3, T_3 到 V_4, T_4 ;
- (4) 等容放热, 由 V_4, T_4 到 V_1, T_1 .

试求此循环效率. [提示]



图习 8.4

8.5 1 mol 单原子理想气体, 完成 $p-V$ 图上两条等压线和两条等容线构成的循环过程, 如图习 8.5 所示, 已知状态 1 温度为 T_1 , 状态 3 的温度为 T_3 , 状态 2 与状态 4 的温度相等, 求循环过程中气体对外界作的净功以及在吸热过程中所吸收的热量 [提示]



图习 8.5

8.6 试证明在等压过程中, 系统吸收的热量 Q_p 总可以写成 $Q_p = H_2 - H_1$, 其中 $H = U + pV$ 称为系统的焓. 显然, 焓也是状态的单值函数. [提示]

8.7 一个质量可不计的活塞将一定量的气体封闭在上端开口的直立圆筒形气缸内, 活塞上堆放着铁砂, 如图习 8.7 所示. 最初活塞搁置在气缸内壁固定的卡环上, 气体柱的高度为 H_0 , 压强等于大气压 p_0 . 现对气体缓慢加热, 当气体温度升高 $\Delta T = 60\text{K}$ 时, 活塞(及铁砂)开始离开卡环而上升. 继续加热直到气体高度为 $H_1 = 1.5H_0$, 此后, 在维持温度不变条件下逐渐取走铁砂, 直到铁砂全部取走时, 气柱高度变为 $H_2 = 1.8H_0$, 求此时气体的温度(不计活塞与气缸间的摩擦). [提示]

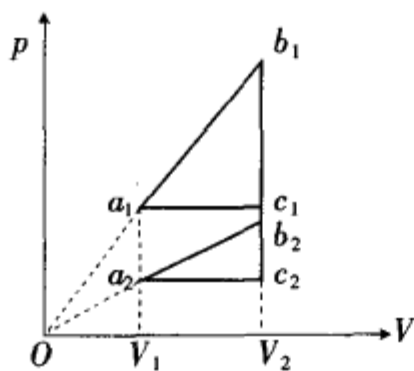
8.8 如图习 8.8 所示, 圆筒中盛有 1 mol 的双原子分子的理想气体, 用可动的活塞封住, 圆筒浸在冰水混合物中, 活塞在位置 1 时, 气体处于标准状态. 迅速压缩气体使其体积变成原来体积的一半(活塞在位置 2 处), 然后维持活塞位置不动, 待气体温度达到 0°C 时, 再让活塞慢慢地上升到位置 1, 这样完成一次循环.

(1) 试在 $p-V$ 图上画出相应的循环曲线;

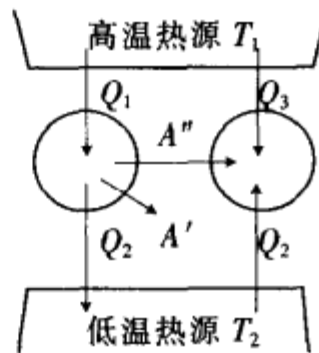
(2) 若作 100 次这样的循环, 问有多少克冰被融化? (已知冰的融解热为 $3.35 \times 10^3 \text{ J/kg}$) [提示]

8.9 定容摩尔热容 C_V 为常量的某理想气体, 经历如图习 8.9 所示的两个循环过程 $a_1 b_1 c_1 a_1$ 和 $a_2 b_2 c_2 a_2$ 相应的效率分别为 η_1 和 η_2 , 试比较 η_1 和 η_2 的大小. [提示]

8.10 有人设计一台如图习 8.10 所示的组合机, 其工作原理为: 热机甲从高温热源吸热 Q_1 , 向低温热源放出热量 Q_2 , 对外做功 A . 该组合机将功 A 分成两部分, 一部分用来开动致冷机乙, 即做回输功 A'' , 另一部分对外做净功 A' . 致冷机乙在 A'' 的作用下从低温热源吸取热量 Q_2 , 而将热量 $Q_3 = Q_2 + A''$ 送到高温热源中去. 这样经过一循环后, 这台组合机从高温热源净吸热 $Q = Q_1 - Q_3$, 得到净功 $A' = A - A''$, 而低温热源没有变化. 试分析这台机器的设计思想是否合理? 为什么? [提示]



图习 8.9



图习 8.10

静 电 场

静电学研究的是相对观察者静止的带电体之间的相互作用及其周围的电场,而带电体之间的相互作用正是通过电场来传递的,这种由静止电荷产生的电场称为静电场。

历史上围绕带电体之间如何相互作用的问题有过长期的争论,一种超距作用的观点认为,电力与磁力、万有引力等非接触物体之间的相互作用力,是不需要任何媒质传递,也不需要传递时间,即是直接地、超距地作用。而另一种近距作用观点则认为,任何非接触物体之间的作用力是需要中间媒介物质来传递,且传递的速度也是有限的。这种媒介物质称为场,并在较长的历史时期被认为是一种特殊的弹性介质——“以太”。这一争论最终是以近距作用观点的胜利而告终。按近距作用观点,带电体在其周围产生电场,电场对处于其中的其他电荷有力的作用,在真空中,这种电力(包括磁力)是以真空中的光速 c 来传递的,只是“以太”并不存在。

本章从反映真空中点电荷之间相互作用规律的库仑定律出发,引入描写静电场的两个物理量:电场强度和电势,并介绍描述静电场性质的高斯定理和环路定理,最后讨论静电场中的导体及电容等。

§ 9.1 库 仑 定 律

18世纪末,法国物理学家库仑通过著名的扭秤实验,总结出两个点电荷之间相互作用的规律——库仑定律。所谓点电荷是指这样的带电体,它本身的几何线度与它和其他带电体之间的距离相比要小得多,为此可把它抽象成一个几何点。点电荷与质点一样,都是理想化的模型。

库仑定律表述如下:

两个点电荷 q_1 与 q_2 之间相互作用力的大小和 q_1 与 q_2 的乘积成正比,和它们之间距离 r 的平方成反比;作用力的方向沿着它们的连线,同号电荷相斥,异号电荷相吸。

其数学表达式为:

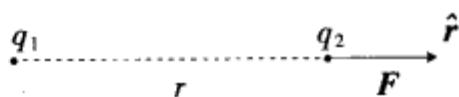


图 9.1-1

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r} \quad (9.1-1)$$

上式 F 表示 q_1 对 q_2 的作用力, \hat{r} 表示由 q_1 指向 q_2 方向的单位矢量, k 为比例系数,式中各量界用国际单位制(SI),则 k 值为

$$k = 8.99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2 \\ \approx 9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2$$

还可以用另一常数 ϵ_0 来表示 k ,规定

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

ϵ_0 称为真空介电常数,其值 $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 / \text{N} \cdot \text{m}^2$ 。这样库仑定律又可表示为

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r} \quad (9.1-2)$$

库仑力满足叠加原理,即如果空间存在两个以上的点电荷时,任两个点电荷之间的作用力不因其他电荷的存在而改变,仍服从库仑定律,而任一点电荷所受到的力等于其他各点电荷单独作用于该点电荷的库仑力的矢量和。

§ 9.2 电场与电场强度

带电体之间相互作用的电力是以电场为媒介传递的,任一带电体在其周围产生电场,电场对处于其中的其他电荷就有作用力,即电荷间的相互作用可表示为

$$\text{电荷} \Leftrightarrow \text{电场} \Leftrightarrow \text{电荷}$$

1. 电场强度

这是描写电场性质的物理量.在电场中引入试探电荷,通过电场对试探电荷的作用力来研究电场.作为试探电荷,首先其电量应尽可能小,以使它的引入不致改变产生电场的源电荷的分布;其次它的几何线度也应尽可能小,即应是点电荷,以便确定场内每一点的性质.

在电场内任一确定点,试探电荷受到的电场力 F 与试探电荷的电量 q_0 成正比,然而此作用力与试探电荷量 q_0 之比却是一个与 q_0 无关,而仅由电场本身性质决定的物理量,可用它来描写电场,定义为电场强度(简称场强)

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0} \quad (9.2-1)$$

即电场内某点的电场强度等于单位正电荷在该点受到的电场力.电场强度是矢量,其单位为 N/C.

由库仑定律可得,点电荷 q 在距离 q 为 r 处的 P 点的电场强度为

$$\mathbf{E} = \frac{kq}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (9.2-2)$$

式中 $\hat{\mathbf{r}}$ 为从 q 指向 P 点的单位矢量.

2. 电场强度的叠加原理

与库仑力一样,电场强度满足叠加原理:若场源由几个点电荷 q_1, q_2, \dots, q_n 组成,则电场中某点的场强等于各点电荷单独存在时在该点产生的场强的矢量和,可表示为

$$\mathbf{E}_i = \sum_i \frac{kq_i}{r_i^2} \hat{\mathbf{r}}_i \quad (9.2-3)$$

式中 r_i 为第 i 个点电荷 q_i 到该点的距离, $\hat{\mathbf{r}}_i$ 为由 q_i 指向该点方向的单位矢量.

如果场源是电荷连续分布的带电体,则可把该场源想像地分割成许多足够小的电荷元 Δq , 每个电荷元都可看作点电荷.根据场强的叠加原理,电场中某点的电场强度可表示为

$$\mathbf{E} = \sum_i \frac{k\Delta q_i}{r_i^2} \hat{\mathbf{r}}_i \xrightarrow{\Delta q_i \rightarrow 0} \int \frac{k dq}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (9.2-4)$$

连续分布电荷元产生场强的叠加,可表示为上式中后一等式右方的积分形式.由于这是一矢量积分,一般可分解到几个方向的分量积分,求出场强沿这几个方向的分量,即可求出场强.

3. 电场线

这是描写电场的辅助工具.由于电场中每一点的场强都有确定的大小和方向,故可以人为地在电场内画出一些曲线,使曲线上每一点切线的方向与该点场强的方向一致,这种曲线称为电场线,并规定电场线的数密度与该点场强的大小成正比.

例 9.2-1 半径为 R 的细圆环上均匀带电,总电量为 $q (> 0)$, 求圆环轴线上各点的场强.

解: 取环心为坐标原点 O , Z 轴沿环的轴线.考察点 P 到原点 O 的距离为 a , 如图 9.2-1 所示.把圆环分割成许多相等小段 Δl , 任取一小段, 该小段电荷 Δq 在 P 点产生的场强为

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{k\Delta q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

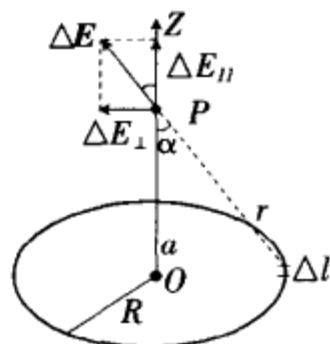


图 9.2-1

ΔE 可分解成沿 z 轴的分量 ΔE_z 和垂直于 z 轴的分量 ΔE_{\perp} 两部分, 由于环上电荷的轴对称性, 故在圆环上取出的各小段电荷在 P 点产生场强的 ΔE_{\perp} 分量之和必为零. 因此, 有

$$E_p = \sum E_z = \sum \frac{k\Delta q}{r^2} \cos\alpha = \sum \frac{k\Delta q}{r^2} \cdot \frac{a}{r}$$

$$= \frac{ka}{r^3} \sum \Delta q = \frac{kaq}{(a^2 + R^2)^{3/2}}$$

即均匀带电细圆环在轴线上各点的场强, 方向沿轴线方向, 大小为 $\frac{kaq}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$.

例 9.2-2 电荷面密度为 σ 的无限大均匀带电平面, 求其周围各点的电场强度.

解: 从考察点 P 到带电平面作垂线, 取垂足为坐标原点 O , 并取此垂线为 z 轴, 如图 9.2-2 所示. 把带电平面分割成以 O 为圆心的无限多同心细圆环, 各圆环的半径 r 从 O 到 ∞ 各不相同, 宽度为 dr , 由上题可知, 内、外半径分别为 r 和 $r + dr$ 的圆环的电量 dq 为

$$dq = 2\pi r \sigma dr$$

此圆环上电荷在 P 点产生的场强 dE 沿 Z 轴方向, 大小为

$$dE = \frac{kadq}{(a^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{2\pi ka\sigma r dr}{(a^2 + r^2)^{3/2}}$$

式中 a 被取为 P 点到 O 点的距离. 由于各圆环在 P 点产生的场强均沿 z 方向, 故 P 点的总场强 E 沿 z 方向, 即垂直于带电平面方向. 场强的大小为

$$E = \int dE = \int_0^{\infty} \frac{2\pi ka\sigma r dr}{(a^2 + r^2)^{3/2}}$$

$$= 2\pi ka\sigma \int_0^{\infty} \frac{r dr}{(a^2 + r^2)^{3/2}} = 2\pi k\sigma$$

由以上计算可知, 无限大均匀带电平面产生的电场, 与考察点到平面的距离无关, 即是一均匀电场, 场强的大小为 $2\pi k\sigma$, 若 $\sigma > 0$, 则方向垂直于平面指向两侧; 若 $\sigma < 0$, 则方向垂直于平面指向平面.

例 9.2-3 两块无限大的均匀带电的平面平行放置, 它们的电荷面密度分别为 σ_1 和 σ_2 ($\sigma_1 > \sigma_2 > 0$), 试求空间的场强分布.

解: 由电场强度的叠加原理可知: 空间任一点的电场强度等于各场源在该点产生电场强度的矢量和. 根据上题例 2 求得一块无限大均匀带电平面产生的场强, 即可求得两块无限大均匀带电平面在空间的场强分布.

如图 9.2-3 所示, 把空间分为 I、II、III 三个区域, 则此三个区域的场强分别为

$$E_I = -2\pi k(\sigma_1 + \sigma_2), \text{负号表示方向指向 } x \text{ 轴负方向;}$$

$$E_{II} = 2\pi k(\sigma_1 - \sigma_2), \text{方向为 } x \text{ 轴正方向;}$$

$$E_{III} = 2\pi k(\sigma_1 + \sigma_2), \text{方向为 } x \text{ 轴正方向.}$$

例 9.2-4 一半径为 R 的球面均匀带电, 试证明球面内电场强度处处为零.

证明: 在球面内任取一考察点 P , 过 P 点任作一直线交球面于 A_1, A_2 两点, 以 P 为顶点, 以此直线为轴线作对顶小立体角 $\Delta\Omega$, 并在球面上割出两小面元 ΔS_1 和 ΔS_2 , 如图 9.2-4 所示.

设 $A_1P = r_1, A_2P = r_2$, 球面上电荷面密度为 σ , 则两面元上的电量分别为 $\Delta q_1 = \sigma\Delta S_1, \Delta q_2 = \sigma\Delta S_2$, 则这两电荷(均可看作点电荷), 在 P 点产生的场强分别为

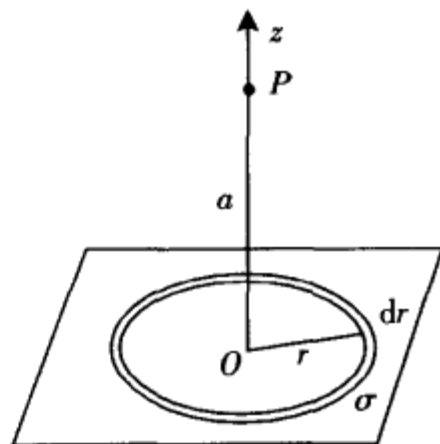


图 9.2-2

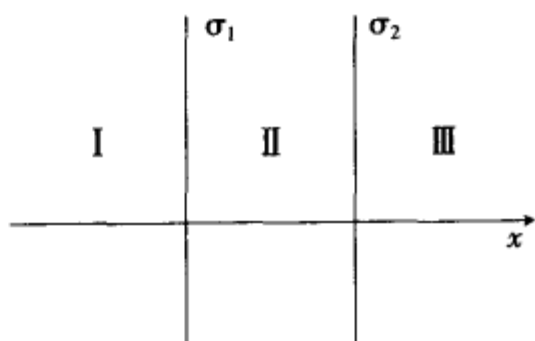


图 9.2-3

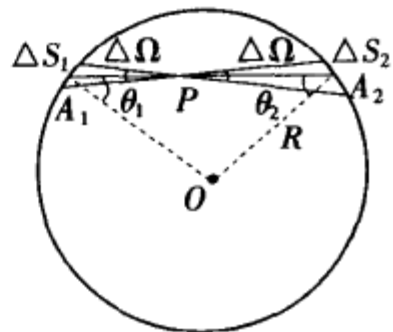


图 9.2-4

$$\Delta E_1 = \frac{k\sigma\Delta S_1}{r_1^2} = \frac{k\sigma}{\cos\theta_1} \left(\frac{\Delta S_1 \cos\theta_1}{r_1^2} \right) = \frac{k\sigma\Delta\Omega}{\cos\theta_1}$$

$$\Delta E_2 = \frac{k\sigma\Delta S_2}{r_2^2} = \frac{k\sigma}{\cos\theta_2} \left(\frac{\Delta S_2 \cos\theta_2}{r_2^2} \right) = \frac{k\sigma\Delta\Omega}{\cos\theta_2}$$

由几何可知, $\theta_1 = \theta_2$, 故有

$$\Delta E_1 = \Delta E_2$$

即面元 ΔS_1 和 ΔS_2 上的电荷在 P 点产生的场强大小相等, 且方向相反, 故相互抵消. 由于整个球面可以被许多这样的以 P 为顶点的小立体角分割成许多对小面元, 每一对小面元电荷在 P 点产生的场强和均为零, 故 P 点的总场强为零. 由于 P 点是球面内任取的一点, 由此证得球面内的场强处处为零.

§ 9.3 静电场的高斯定理

1. 电通量

在研究静电场性质时, 常引入电通量的概念. 这与流体流过一管道截面时的通量相仿: 当流体以速度为 v 均匀通过一管道时, 则单位时间内通过管道任一截面 ΔS 的流体体积(即通量)为 $v\Delta S\cos\theta = v \cdot \Delta S$. 在静电场中虽无什么东西在流动, 但可借助于流体通量的概念, 引入电通量. 在静电场中任取一很小的面积元 ΔS , 由于 ΔS 很小, 故 ΔS 面上各点的场强 E 可视为是均匀的, 若 E 与 ΔS 的夹角为 θ , 则电场对 ΔS 的通量(即电通量)定义为

$$\Delta\Phi = E\Delta S\cos\theta = E \cdot \Delta S$$

电场对任意曲面 S 的电通量, 则是电场对从 S 上分割出的许多小面积元 ΔS 的电通量的代数和. 即

$$\Phi = \sum \Delta\Phi = \sum E \cdot \Delta S \stackrel{\Delta S \rightarrow 0}{=} \int_S E \cdot dS$$

如果用电场线来描写电场, 且使电场线的数密度等于场强, 则电通量值正好等于通过该曲面的电场线的条数.

2. 高斯定理

静电场的高斯定理指出: 静电场对任意封闭曲面的电通量正比于在该曲面内电量的代数和, 比例系数为 $4\pi k$, 即

$$\oint_S E \cdot dS = 4\pi k \sum_{i \text{ 内}} q_i \quad (9.3-1)$$

高斯定理表明: 静电场对任意封闭曲面的电通量只取决于包围在其内的电量, 而与曲面外的电量无关. 这说明静电场是有源场, 电荷以发散方式产生电场. 即电场线是有头有尾的, 正电荷是电场线的源头, 负电荷则是电场的尾间. 必须指出, 高斯面外的电荷对整个高斯面的电通量无贡献, 并不是说高斯面处的场强仅由高斯面内的电荷所产生, 而应是由空间所有电荷, 即高斯面内、外电荷共同产生的总场.

3. 高斯定理的应用

高斯定理为某些具有一定对称性的静电场场强的计算提供了一个较为简便的方法. 用高斯定理求场强的关键在于选取适当的高斯面, 一般是使高斯面上各点的场强与所求点的场强的大小相同, 且其方向与该处面元的法线方向的夹角也应相同并已知. 或至少是包括所求点在内的部分高斯面是这样, 而其余部分的高斯面电通量为零. 这样, 就可通过计算整个高斯面的电通量和高斯面内的电荷量, 即可求得所求点的场强.

例 9.3-1 一无限大平面均匀带电, 电荷面密度为 $\sigma (> 0)$, 试求空间电场强度的分布.

解: 由无限大均匀带电平面的对称性, 可断定平面两侧的场强垂直于平面并指向两侧, 且在距平面等距离的点场强应相等. 根据此特点, 作一柱形高斯面, 使其两底面与平面平行且等距, 而侧面与平面

垂直,如图 9.3-1 所示. 设柱体底面积 $\Delta S_1 = \Delta S_2 = \Delta S$, 两底面处场强 $E_1 = E_2 = E$, 则此高斯面的电通量为

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E_1 \cdot \Delta S_1 + E_2 \cdot \Delta S_2 = 2E\Delta S$$

柱形高斯面内包围的电荷量为 $\sigma\Delta S$, 故由高斯定理

$$2E\Delta S = 4\pi k\sigma\Delta S$$

得 $E = 2\pi k\sigma$

与例 9.2-2 所得结果一致.

例 9.3-2 一半径为 R 的球体均匀带电, 电荷体密度为 $\rho (> 0)$, 求空间场强的分布.

解: 由电荷分布的球对称性, 可知空间各点的场强方向均由球心 O 沿半径指向外, 且与球心相同距离处的场强相同. 为此, 可作以 O 为球心, 半径为 r 的球形高斯面, 如图 9.3-2 所示. 则通过高斯面的电通量为

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E4\pi r^2$$

包围在高斯面内的电量为

$$\sum q = \begin{cases} \rho \frac{4}{3}\pi r^3 & (r \leq R) \\ \rho \frac{4}{3}\pi R^3 & (r > R) \end{cases}$$

故由高斯定理, 即可得

$$E = \begin{cases} \frac{4\pi k\rho r}{3} & (r \leq R) \\ \frac{4\pi k\rho R^3}{3r^2} & (r > R) \end{cases}$$

例 9.3-3 一均匀带电的实心球体内有一球形空腔, 电荷体密度为 $\rho (> 0)$, 两球心间的距离为 d , 试证明球形空腔内的电场为匀强电场, 并求出此场强.

解: 可把球形空腔视为电荷体密度分别为 ρ 和 $-\rho$ 的两个带电球体的复合体, 于是电荷体密度为 ρ 的空腔球体与原实心球体组合成一个完整的均匀带电球体. 这样, 本题的带电体系可视为电荷体密度为 ρ 的实心球体和电荷体密度为 $-\rho$ 的空腔球体的组合. 根据场强叠加原理, 球形空腔内任一点 P 的场强是这两个带电球体在 P 点产生场强的矢量和, 设 P 相对两球心 O_+ 、 O_- 的位矢分别为 r_+ 和 r_- , 由例 2 题可得两球体在 P 点产生的场强分别为

$$\mathbf{E}_+ = \frac{4\pi k\rho}{3} \mathbf{r}_+$$

$$\mathbf{E}_- = -\frac{4\pi k\rho}{3} \mathbf{r}_-$$

于是, P 点的场强 \mathbf{E}_P 为

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_P &= \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = \frac{4\pi k\rho}{3} (\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-) \\ &= \frac{4\pi k\rho}{3} \mathbf{d} \end{aligned}$$

式中 \mathbf{d} 为由球心 O_+ 指向 O_- 的矢量, 由以上计算可知, P 点的场强与 P 点在空腔内的位置无关, 即空腔内任一点的场强均一样, 其大小为 $\frac{4\pi k\rho}{3} d$, 方向为由 O_+ 指向 O_- 的方向, 由此证得球形空腔内的电场为匀强电场.

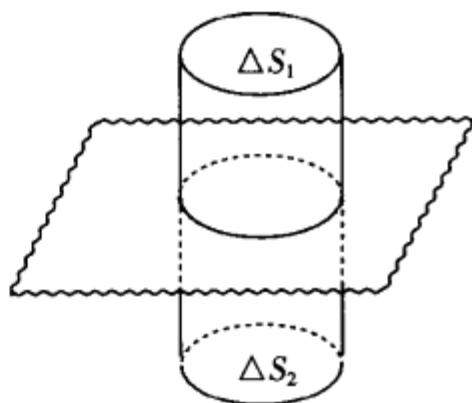


图 9.3-1

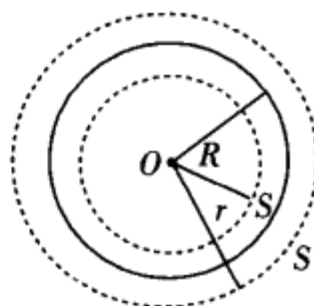


图 9.3-2

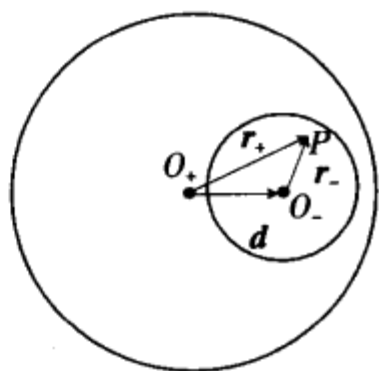


图 9.3-3

§ 9.4 电 势

1. 静电场的环路定理

与重力、弹性力和万有引力一样,静电力也是保守力.这就是说,若有一点电荷 q_0 在静电场中沿任一闭合路线运动一周,其所受的静电力做功为零,可表示为

$$\oint_l q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

上式也可表示为

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (9.4-1)$$

9.4-1 式中 $\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$, 即场强沿任意闭合路径的线积分,称为静电场的环流.上式表明静电场的环流恒为零,这一结论称为静电场的环路定理.

静电场的环路定理与高斯定理一起完整地揭示了静电场的基本性质:即静电场是有源无旋的场.电荷以发散的形式产生电场,故电场线是有头有尾的,而不是头尾相接的闭合曲线.

2. 电势能与电势

保守力做功与物体所经路径无关.凡是保守力,都可引进与之相应的势能.与重力、弹性力和万有引力分别引进重力势能、弹性势能和引力势能一样,静电力也可引进静电势能.

在静电场中把试探电荷 q_0 从 a 点移到 b 点,静电力所作的功 $A_{a \rightarrow b}$ 定义为此过程中静电势能的减少量 $W_a - W_b$, 即

$$A_{a \rightarrow b} = q_0 \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = W_a - W_b \quad (9.4-2)$$

电荷在电场中任两点的电势能差,不仅与电场有关,而且与此电荷量有关,但电势能差与电荷量的比值则与电荷量无关,它仅反映了电场本身在 a, b 这两点的性质,此值称为电场中 a, b 两点的电势差 $U_a - U_b$, 即

$$U_a - U_b = \frac{W_a - W_b}{q_0} = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (9.4-3)$$

这表明:静电场中 a, b 两点的电势差,等于单位正电荷从 a 点沿任意路径移到 b 点过程中,电场力所作的功.

静电场中任意两点的电势差是完全确定的,但场中某点的电势值则取决于电势零参考点的选择,故对于不同零参考点的选取,同一点的电势具有不同的值.对于有限大小的场源电荷,通常选无穷远为电势零参考点,即 $U_\infty = 0$, 故由 9.4-3 式得

$$U_P = \int_P^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (9.4-4)$$

电势的单位为伏特.

$$1 \text{ 伏特} = \frac{1 \text{ 焦耳}}{1 \text{ 库仑}}$$

3. 电势的计算

电势的定义式 9.4-4 式提供了计算电势的一种方法,即若已知空间场强的分布,就可由 9.4-4 式作积分求得各点的电势,且积分可沿任何便于积分的路径.

若场源是电量为 q 的点电荷,则场内离 q 距离为 r 的点 P 的电势为

$$\begin{aligned} U_P &= \int_P^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_r^\infty \frac{kq}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{l} = \int_r^\infty \frac{kq}{r^2} dr \\ &= \frac{kq}{r} \end{aligned} \quad (9.4-5)$$

对于场源为点电荷系或任意有限大小的带电体,还可根据电势叠加原理来计算任一点的电势.若点电荷系各点电荷的电量为 $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots$, 考察点 P 到各点电荷的距离为 $r_1, r_2, \dots, r_i, \dots$, 则 P 点电势为

$$U_P = \sum_i \frac{kq_i}{r_i} \quad (9.4-6)$$

对于有限大小的带电体,则可将其分割成许多小电荷元(可视为点电荷), P 点的电势等于各小电荷元 dq 在 P 点产生电势的代数和,即可表为

$$U_P = \int \frac{k dq}{r} \quad (9.4-7)$$

式中 r 是 P 点到 dq 的距离.

电势叠加原理提供了计算电势的又一种方法.由于电势是标量、电势叠加的计算是求代数和,故比场强矢量的叠加计算要方便得多.

例 9.4-1 一半径为 R 的球面均匀带电,带电量为 Q ,试求空间电势的分布.

解:由例 9.2-4 可知,均匀带电的球面在球内的场强处处为零.由高斯定理也不难求得球外的场强,与球面上的电荷 Q 全部集中在球心处的点电荷产生的场强相同(读者自己去证得),即 $E = \frac{kQ}{r^2} \hat{r}$.

由于球面外的电场强度分布与点电荷的场强分布相同,而球面外对任一考察点 P 的电势等于把单位正电荷从 P 点移至无穷远处过程中电场力作的功.由此可知,球面外的电势分布与点电荷的电势分布相同,即

$$U(r) = \frac{kQ}{r} \quad (r \geq R) \quad \text{①}$$

球面内任一点 P 的电势值,等于把单位正电荷从 P 点移至无穷远的过程中电场力做的功,由于球面内场强处处为零,故在从 P 移至球面处过程中,无电场力做功,这就是说,球面内各点的电势相同,都与球面处的电势相同,由①式可知,均等于

$$U(r) = \frac{kQ}{R} \quad (r < R) \quad \text{②}$$

即球面内为一等势区.

例 9.4-2 两个半径分别为 R_1 和 R_2 的同心球面上,各均匀带电 Q_1 和 Q_2 ,试求空间电势的分布.

解:由电势的叠加原理可知,空间任一点的电势是两个球面各自在该点产生的电势的代数和.根据上题计算结果:一个均匀带电的球面产生的场在球面内是等势区,在球面外区域相当于电荷集中在球心处的点电荷产生的电势.设两球面各自产生的电势分别为 $U_1(r)$ 和 $U_2(r)$,则有

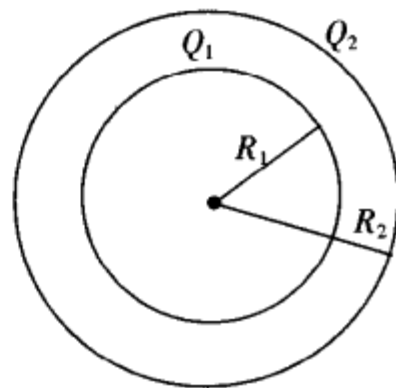


图 9.4-1

$$U_1(r) = \begin{cases} \frac{kQ_1}{R_1} & r \leq R_1 \\ \frac{kQ_1}{r} & r > R_1 \end{cases}$$

$$U_2(r) = \begin{cases} \frac{kQ_2}{R_2} & r \leq R_2 \\ \frac{kQ_2}{r} & r > R_2 \end{cases}$$

故有

$$U(r) = U_1(r) + U_2(r) = \begin{cases} k \left(\frac{Q_1}{R_1} + \frac{Q_2}{R_2} \right) & r \leq R_1 \\ k \left(\frac{Q_1}{r} + \frac{Q_2}{R_2} \right) & R_1 < r \leq R_2 \\ k \left(\frac{Q_1 + Q_2}{r} \right) & r > R_2 \end{cases}$$

例 9.4-3 半径为 R 的细圆环均匀带电,总电量为 Q ,试求圆环轴线上各点的电势.

解:把圆环分割成许多小段,每一小段的长度为 Δl ,电量为 ΔQ ,均可视为点电荷,各小段到考察点 P (到圆心 O 的距离为 z) 的距离均为 $r = \sqrt{R^2 + z^2}$,在 P 点产生的电势 ΔU 均为

$$\Delta U = \frac{k\Delta Q}{r} = \frac{k\Delta Q}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

根据电势叠加原理, P 点的电势是各小段电荷在 P 点产生电势的代数和,即

$$U = \sum \Delta U = \frac{k \sum \Delta Q}{\sqrt{R^2 + z^2}} = \frac{kQ}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

此结果表明,圆环轴线上各点的电势与圆环上电荷的分布无关,即使电荷分布不均匀,甚至电荷全部集中到环上的一点(即为点电荷),轴线上电势的分布仍一样.

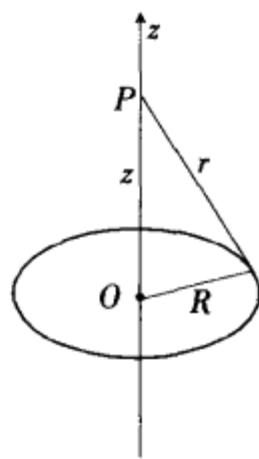


图 9.4-2

§ 9.5 静电场中的导体

1. 导体的静电平衡条件

导体中具有足够多的可以自由移动的电荷,如金属中的自由电子.若把导体放入外电场中,或在导体上加入其他电荷时,导体内部就会出现电场,这时,导体中的自由电荷在电场力作用下作定向运动,从而使电荷在导体上重新分布,这一现象称为静电感应.感应电荷在导体内产生的附加电场的方向总是与原电场的方向相反.与原电场叠加的结果使导体内的电场不断削弱,直至完全抵消时自由电荷才停止定向运动.导体便达到了静电平衡.由此可知,导体达静电平衡的条件是,空间所有电荷(包括导体上的感应电荷)在导体内部产生的总场强处处为零,即导体为一等势体.

2. 导体上的电荷分布及表面附近的场强

处在静电场中的导体,不管它本来是否带电,当它达到静电平衡时,导体上总有一定的电荷分布,这些电荷的分布,以及表面附近的电场具有以下几个特点:

(1) 电荷只能分布在导体的表面,导体内部的电荷体密度处处为零.

(2) 若导体内有空腔,则空腔内表面上有无电荷分布,取决于空腔中是否有其他电荷,如果空腔中没有其他电荷,空腔内表面也无电荷分布;相反,如果空腔中有其他带电体,则空腔内表面一定有等量异号的电荷分布.

(3) 对于孤立导体,其表面上的电荷面密度 σ 的大小与该处的形状有关,大致说来,曲率半径较小(即较尖锐)处的 σ 较大,而曲率半径较大(即较平坦)处的 σ 较小.

(4) 导体表面附近的场强方向垂直于表面,若该处导体表面的电荷面密度 σ 为正,则方向垂直表面指向外;若 σ 为负,则方向垂直表面指向导体内部.场强的大小为

$$E_S = 4\pi k\sigma \quad (9.5-1)$$

这里必须指出,导体表面附近的场强虽与该处表面上的电荷面密度 σ 成正比,但场强 E_S 却是由空间所有电荷共同产生的,而不是仅该处表面上电荷单独产生的.

3. 电容和电容器

电容是描述孤立导体或电容器容纳电荷性能的物理量.而电容器则是组成电路的重要元件之一,有广泛的应用.

(1) 孤立导体的电容 对于周围附近没有其他带电体的孤立导体,当将电荷 q 加于其上,它将具有一定的电势 U ,若所加电量加倍,则其电势也加倍,表明 U 与 q 成正比,此比例关系可写成

$$q = CU \quad (9.5-2)$$

比例系数 C 称为孤立导体的电容,其值只与导体的几何形状有关,而是与 q 、 U 无关的常量.

(2) 电容器的电容

如果导体周围有其他带电体,则导体的电势不仅与其所带电量 q 有关,还取决于这些带电体的位置,形状及所带的电量,这样 $C = q/U$ 不再是一常数.为消除其他带电体的影响,可用一封闭导体壳 B 把此导体 A 包围起来,当 A 带一定电量时, B 的内表面必带等量异号电荷,由于 B 的静电屏蔽作用, A 、 B 间的电势差仅与 A 的电量成正比,而与 A 、 B 周围的其他带电体无关.这种由导体 A 及导体壳 B 构成的导体组称为电容器,电容器极板上的电量与两极板的电势差之比定义为电容器的电容,即

$$C = \frac{q}{U_A - U_B} \quad (9.5-3)$$

电容器的电容完全由其几何结构决定,与其所带电量及周围其他带电体无关.

(3) 几种电容器的电容

(i) 平行板电容器
$$C = \frac{\epsilon_r S}{4\pi k d} \quad (9.5-4)$$

(ii) 圆柱形电容器
$$C = \frac{\epsilon_r l}{2k \ln R/r} \quad (9.5-5)$$

(iii) 同心球形电容器
$$C = \frac{\epsilon_r R_1 R_2}{k(R_2 - R_1)} \quad (9.5-6)$$

式中 ϵ_r 为电容器两极板间所填满的电介质的相对介电常数, S 是平行板电容器极板的面积, d 是板间距离; l, r, R 是圆柱的长度和内、外半径; R_1, R_2 是球形电容器内、外球的半径.

(4) 电容器的串、并联

电容器的性能参数除电容外,还有耐压等.在实际使用时,为使电容及耐压适合需要,可把几个电容器并联或串联起来.

(i) 并联 电容器并联的特点是各电容器两极板间的电压相等,其总电容是各电容器电容之和,即

$$C = \sum_i C_i \quad (9.5-7)$$

(ii) 串联 电容器串联的特点是各电容器极板上的电量绝对值相等,其作用是减小每个电容器承受的电压,以提高电容器组的耐压,同时使总电容减小.串联电容器组的总电容 C 的倒数等于各电容器电容的倒数之和,即

$$\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}$$

例 9.5-1 两块大小,形状都相同的导体平板平行放置,各带电 Q_1 和 Q_2 ,两板的间距远小于板面的线度,试求达静电平衡后两板的四个面上所带的电量.

解: 两块导体板可视为无限大的板,故四个面上的电荷可看成均匀分布,各面上的电荷面密度分别设为 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$,如图 9.5-1 所示.并设板面积为 S ,故由电荷守恒,得

$$\begin{cases} (\sigma_1 + \sigma_2)S = Q_1 & (1) \\ (\sigma_3 + \sigma_4)S = Q_2 & (2) \end{cases}$$

当两导体板达静电平衡后,两导体内的场强为零,由场强叠加原理,可得

$$\begin{cases} 2\pi k\sigma_1 - 2\pi k\sigma_2 - 2\pi k\sigma_3 - 2\pi k\sigma_4 = 0 \\ 2\pi k\sigma_1 + 2\pi k\sigma_2 + 2\pi k\sigma_3 - 2\pi k\sigma_4 = 0 \end{cases}$$

以上二式即为

$$\begin{cases} \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_4 = 0 \\ \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_4 = 0 \end{cases}$$

由①、②、③、④式解得

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_4 = \frac{Q_1 + Q_2}{2S} \\ \sigma_2 = -\sigma_3 = \frac{Q_1 - Q_2}{2S} \end{cases}$$

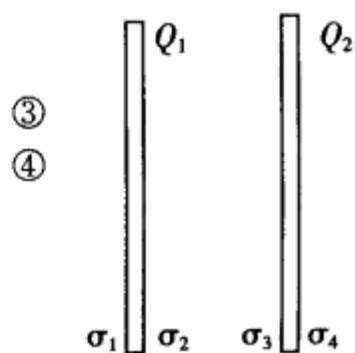


图 9.5-1

故四个面上的电量分别为

$$\begin{cases} Q_{1左} = Q_{2右} = \frac{Q_1 + Q_2}{2} \\ Q_{1右} = -Q_{2左} = \frac{Q_1 - Q_2}{2} \end{cases}$$

若 $Q_1 = -Q_2 = Q$, 则 $Q_{1左} = Q_{2右} = 0$, $Q_{1右} = -Q_{2左} = Q$, 即 Q 与 $-Q$ 的电荷分别分布在两板相对的表面上, 这就是平行板电容器两极板上电荷分布的情形。

例 9.5-2 半径为 R_1 的导体球带电 Q_1 , 其外有一内、外半径分别为 R_2 和 R_3 的同心导体球壳, 导体球壳带电 Q_2 , 如图 9.5-2 所示。

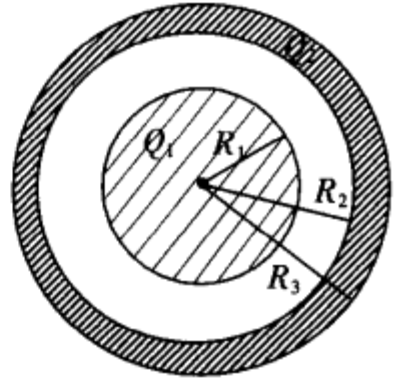


图 9.5-2

- (1) 试求两导体的三个表面上的电荷分布;
- (2) 若将球壳接地, 再求三个表面上的电荷分布;
- (3) 若球壳不接地, 而将导体球接地, 则三个表面上又各带多少电量?

解: (1) 由于电荷均匀分布的球面在球内产生的场强为零, 在球外产生的场强相当于电量集中在球心处的点电荷的场强, 故由两导体静电平衡的条件可知, 导体球表面均匀分布电量 Q_1 , 球壳内、外表面各均匀分布电量 $-Q_1$ 和 $Q_1 + Q_2$ 。

(2) 当球壳接地后, 球壳的电势为零, 而无穷远处电势也为零, 故球壳外表面不能有电荷分布, 否则球壳外的场强将不等于零, 说明球壳与无穷远处不等势, 故球壳外表面的电量为零, 即接地时, 原外表面上 $Q_1 + Q_2$ 的电量沿接地线流入大地, 而球壳内表面及导体球表面上的电荷分布不因接地而变。

(3) 若球壳不接地而导体球接地, 这时导体球的电势为零, 那么导体球表面的电量是否会沿接地线流入大地, 而使表面无任何电荷呢? 如果这样, 则球壳内表面也不带任何电荷, 使球与球壳间无电场, 即球与球壳等势, 同时球壳上的电量 Q_2 将分布在外表面上, 则球壳外将有电场, 使球壳与无穷远处不等势, 这样导致导体球电势也不等于零, 因此导体球表面不能不带电。设球表面所带电量为 Q , 则球壳内、外表面各带电 $-Q$ 和 $Q + Q_2$, 则由导体球电势为零可得

$$k \left(\frac{Q}{R_1} - \frac{Q}{R_2} + \frac{Q + Q_2}{R_3} \right) = 0$$

解出

$$Q = \frac{-R_1 R_2 Q_2}{R_2 R_3 - R_1 R_3 + R_1 R_2}$$

$Q < 0$, 说明在接地时, 导体球表面的电荷沿接地线流入大地的电量比 Q_1 更多, 使导体球带上负电, 所带电量与原带电量 Q_1 无关。

例 9.5-3 在一极板面积为 S , 板间距离为 d (d 远小于板的最短线度) 的平行板电容器中, 插入一块面积为 $\frac{S}{2}$ 、厚度为 $\frac{d}{2}$ 的导体板, 如图 9.5-3 所示。求此电容器的电容。

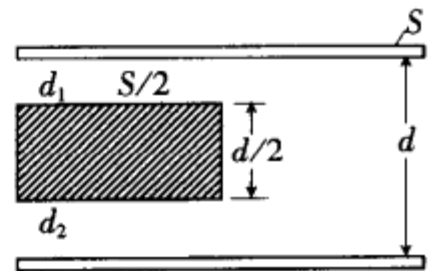


图 9.5-3

解: 解法 1: 设插入的导体板与两极板的间距分别为 d_1 和 d_2 , 则有

$$d_1 + d_2 = \frac{d}{2} \quad \text{①}$$

在电容器两极板上各充有 $\pm Q$ 的电量, 这些电荷将分布在两极板的内表面上, 若忽略边界效应, 电荷在与插入导体板相对和不相对的两部分有不同的均匀分布, 设各带电量 Q_1 和 Q_2 , 则有

$$Q_1 + Q_2 = Q \quad \text{②}$$

电容器内两部分电场的场强分别为

$$E_1 = 4\pi k \sigma_1 = 8\pi k \frac{Q_1}{S}$$

$$E_2 = 4\pi k\sigma_2 = 8\pi k \frac{Q_2}{S}$$

由极板在两部分间的电势差相等,得

$$E_1(d_1 + d_2) = E_2d$$

即

$$Q_1(d_1 + d_2) = Q_2d \quad (3)$$

由①、②、③式可解出

$$Q_1 = \frac{2}{3}Q, \quad Q_2 = \frac{1}{3}Q$$

两极板间电势差 U 为

$$U = E_2d = 8\pi k \frac{Q_2d}{S} = \frac{8\pi kQd}{3S}$$

故此电容器的电容 C 为

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{3S}{8\pi kd}$$

解法 II: 此电容器可看成是由插入导体板和与插入导体板相对的极板部分组成的两电容器 C_1 、 C_2 串联后, 与由极板的另一部分组成的电容器 C_3 并联而成. 三电容器的电容分别为

$$C_1 = \frac{S}{8\pi kd_1}, C_2 = \frac{S}{8\pi kd_2}, C_3 = \frac{S}{8\pi kd} \quad (4)$$

此电容器的电容 C 为

$$C = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2} + C_3 = \frac{S}{8\pi k(d_1 + d_2)} + \frac{S}{8\pi kd}$$

将①式代入, 即得

$$C = \frac{3S}{8\pi kd}$$

例 9.5-4 一同心球形电容器由两同心薄球壳构成, 外球壳半径为 5 厘米, 内球壳半径可任意选择, 两球壳间充满各向同性的均匀介质, 电介质的击穿场强为 $2.0 \times 10^7 \text{V/m}$, 试求该电容器能承受的最大电压.

解: 设电容器内、外球壳的半径各为 R_1 和 R_2 . 当电容器带电量为 Q 时, 电容器中距球心 r 处的场强为

$$E(r) = \frac{kQ}{\epsilon_r r^2} \quad (R_1 < r < R_2) \quad (1)$$

式中 ϵ_r 为电介质的相对介电常数. 电容器的电压为

$$\Delta U = \frac{kQ}{\epsilon_r} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (2)$$

由①、②式消去 Q , 得

$$\Delta U = E(r) \cdot r^2 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (3)$$

由①式可知, 在内球壳处场强最大, 只要此处的场强小于击穿场强即可. 故取 $E(R_1) = E_{\max} = 2.0 \times 10^7 \text{V/m}$, 代入③式, 得

$$\Delta U = E_{\max} \cdot R_1^2 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{E_{\max}}{R_2} (-R_1^2 + R_2 R_1)$$

由题意知, R_1 可任意选择, 为使 ΔU 达最大, 可将上式化为

$$\Delta U = \frac{E_{\max}}{R_2} \left[\frac{R_2^2}{4} - \left(R_1 - \frac{R_2}{2} \right)^2 \right]$$

可见, 取 $R_1 = \frac{R_2}{2}$ 时, 可获最大电压 ΔU_{\max} .

$$\Delta U_{\max} = \frac{E_{\max}}{R_2} \cdot \frac{R_2^2}{4} = \frac{E_{\max} R_2}{4} = \frac{1}{4} (2.0 \times 10^7 \times 0.05) = 2.5 \times 10^5 (\text{V})$$

例 9.5-5 在图示电路中 $C_1 = 5\mu\text{F}$, $C_2 = 3\mu\text{F}$, $C_3 = 2\mu\text{F}$, 两电源的电动势分别为 $\epsilon_1 = 8\text{V}$, $\epsilon_2 = 2\text{V}$. 开始电键断开, 求在闭合电键后, 通过两电源的电量各为多大?

解: 电键 K 断开时, C_1, C_2 串联电路的总电容为

$$C_{ab} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{15}{8} \mu\text{F}$$

故 C_1, C_2 各极板上的电量值为

$$Q_1 = Q_2 = \epsilon_1 C_{ab} = 15 \times 10^{-6} \text{C}$$

C_1, C_2 各极板的极性均为上正, 下负. C_3 极板的极性也是上正, 下负, 其电量为

$$Q_3 = (\epsilon_1 + \epsilon_2) C_3 = 20 \times 10^{-6} \text{C}$$

电键 K 闭合后, C_2 的上极板变为负极板, 而下极板变为正极板, 其电压与电量分别为

$$U_2 = \epsilon_2 = 2\text{V}, \quad Q_2' = C_2 U_2 = 6 \times 10^{-6} \text{C}$$

C_1 极板的极性仍为上正, 下负, 其电压与电量分别为:

$$U_1 = \epsilon_1 + \epsilon_2 = 10\text{V}, \quad Q_1' = C_1 U_1 = 50 \times 10^{-6} \text{C}$$

而 C_3 的电压, 极板上的极性和电量均不发生变化, 即

$$U_3 = \epsilon_1 + \epsilon_2 = 10\text{V}, \quad Q_3' = 20 \times 10^{-6} \text{C}$$

在电键 K 闭合前, d 点处连接的各电容器的极板, 即 C_1 的下极板和 C_2 的上极板上的总电量为零. 而电键 K 闭合后, 虽把 C_3 的下极板也连到 d 点处, 但由于 C_3 上的电量没有变化, 故流过电源 ϵ_2 的电量 ΔQ_2 为 C_1 下极板和 C_2 上极板的电量总和, 即

$$\Delta Q_2 = Q_1' + Q_2' = 56 \times 10^{-6} \text{C}$$

流过电源 ϵ_1 的电量 ΔQ_1 等于 C_1 上极板电量的变化, 即

$$\begin{aligned} \Delta Q_1 &= Q_1' - Q_1 = 56 \times 10^{-6} - 20 \times 10^{-6} \\ &= 36 \times 10^{-6} (\text{C}) \end{aligned}$$

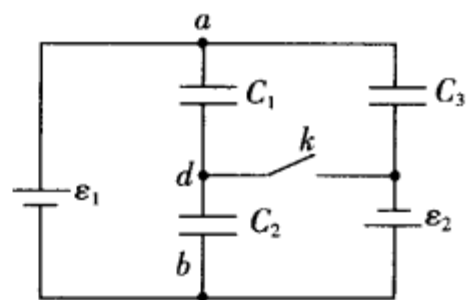


图 9.5-4

§ 9.6 静电能

任何带电体系在形成过程中, 必有外力克服静电力做功. 外力对体系所做的功将转变为体系的静电势能, 也称静电能. 若把带电体系的电荷分割成无限多的小部分, 并取这些小部分彼此相距无限远的状态的静电能为零. 则把这些小部分从相距无限远处移至现有带电体系位置的过程中, 外力克服静电力所做的总功即为体系的静电能.

1. 点电荷系的相互作用能

取带电体系由两个点电荷 Q_1 和 Q_2 组成, 它们之间的距离为 r_{12} . 若先把 Q_1 从相距无限远处移至现有位置的过程中, 外力并不做功, 而把 Q_2 移至现有位置的过程中, 外力所做的功 $A = \frac{kQ_1 Q_2}{r_{12}}$, 这就是此体系的相互作用能 $W_{\text{互}}$, 即

$$W_{\text{互}} = A = \frac{kQ_1 Q_2}{r_{12}}$$

由于 Q_2 在 Q_1 处产生的电势 $U_1 = \frac{kQ_2}{r_{12}}$, 而 Q_1 在 Q_2 处产生的电势 $U_2 = \frac{kQ_1}{r_{12}}$, 故上式也可写成

$$W_{\text{互}} = A = \frac{kQ_1 Q_2}{r_{12}} = Q_1 U_1 = Q_2 U_2 = \frac{1}{2} (Q_1 U_1 + Q_2 U_2) \quad (9.6-1)$$

此结果可推广到任意多个点电荷的体系. 对于由 Q_1, Q_2, \dots, Q_n 组成的点电荷系, 其相互作用能为

$$W_{\text{互}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i U_i \quad (9.6-2)$$

式中 U_i 为除 Q_i 外其他所有点电荷在 Q_i 处产生的总电势. 由于(9.6-1)、(9.6-2)式表示的能量并不计及各点电荷在各自形成过程中外力做的功, 即各点电荷的自能, 故并非总静电能, 只是各点电荷间的相互作用能.

2. 电荷连续分布体系的静电能

若把体电荷连续分布体系分割成许多小体积元 ΔV , 设第 i 个小体积元 ΔV_i 的电荷体密度为 ρ_i , 则此小体积元内的电量为 $\Delta Q_i = \rho_i \Delta V_i$, 由(9.6-2)式, 有

$$W = \frac{1}{2} \sum_i \rho_i \Delta V_i U_i,$$

取 $\Delta V \rightarrow 0$ 的极限, 则上式过渡到积分

$$W = \frac{1}{2} \int \rho U dv \quad (9.6-3)$$

若体系为连续分布的面电荷或线电荷, 则其静电能分别为

$$W = \frac{1}{2} \int \sigma U ds \quad (9.6-4)$$

$$W = \frac{1}{2} \int \lambda U dl \quad (9.6-5)$$

式中 σ 和 λ 分别是电荷的面密度和线密度, 而以上三式中的 U 则是除 dQ 外所有其他电荷在 dQ 处产生的电势. 其实就是所有电荷在 dQ 处产生的电势.

3. 电容器的静电能

电容器由两个导体构成, 而导体达静电平衡时, 是面电荷分布的等势体, 由(9.6-4)式可得每一导体的静电能为

$$W = \frac{1}{2} \int \sigma U dS = \frac{1}{2} U \int \sigma dS = \frac{1}{2} UQ$$

由于电容器两导体极板上各带等量异号电荷 $+Q$ 和 $-Q$, 故电容器的静电能为

$$W = \frac{1}{2} QU_+ - \frac{1}{2} QU_- = \frac{1}{2} Q(U_+ - U_-)$$

设电容器两极板的电势差 $U_+ - U_- = U$, 则电容器的静电能可表示为

$$W = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{Q^2}{2C} \quad (9.6-6)$$

4. 静电场的能量与能量密度

带电体系的静电能既可看成集中在电荷上, 又可看成分布在电场中, 这就是说, 静电能可看成是静电场的能量. 以平行板电容器为例, 设极板面积为 S , 板间距离为 d , 其间的电场强度为 E , 则由(9.6-6)式, 可得

$$W = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \frac{S}{4\pi kd} (Ed)^2 = \frac{E^2}{8\pi k} (Sd)$$

设 $V = Sd$, 为电场空间的体积, 故单位体积的电场能量 W 为

$$w = \frac{W}{V} = \frac{E^2}{8\pi k} \quad (9.6-7)$$

w 称为电场的能量密度. (9.6-7)式虽是从平行板电容器这一特例中导出, 但对任意的电场情况都适用.

例 9.6-1 试求半径为 R , 电量为 Q 的均匀带电球壳的静电能.

解: 由 9-4 例 1 题可知, 均匀带电球壳在球面处的各点的电势相同, 均为

$$U(R) = \frac{kQ}{R}$$

故带电球壳的静电能为

$$W = \frac{1}{2} \int U \sigma dS = \frac{1}{2} U(R) Q = \frac{kQ^2}{2R}$$

例 9.6-2 一平行板电容器极板面积为 S , 板间距离为 d , 现对电容器充电, 使电容器极板上的电量为 Q , 然后断开电源, 再把两极板的间距拉开至 $2d$, 求此拉开过程中外力作的功.

解: [解法 I] 此平行板电容器板间距离为 d 和拉开至 $2d$ 时的电容 C 和 C' 分别为

$$C = \frac{S}{4\pi kd}, \quad C' = \frac{S}{8\pi kd}$$

在板距拉开过程中, 极板上的电荷量保持不变, 故拉开前后, 电容器的静电能 W 和 W' 分别为

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{2\pi kdQ^2}{S}, \quad W' = \frac{Q^2}{2C'} = \frac{4\pi kdQ^2}{S}$$

由功能原理可知: 在极板拉开过程中外力作的功等于电容器静电能的增量, 因此得

$$A_{\text{外}} = W' - W = \frac{2\pi kdQ^2}{S}$$

[解法 II] 当平行板电容器极板上的电量为 Q 时, 极板间的场强为

$$E = 4\pi k\sigma = 4\pi k \frac{Q}{S}$$

故电场的能量密度为

$$w = \frac{E^2}{8\pi k} = \frac{2\pi kQ^2}{S^2}$$

在极板拉开的过程中, 因极板上的电量保持不变, 则板间电场的场强 E 和电场能量密度 w 均保持不变, 只是电场空间的体积增大了 ΔV

$$\Delta V = V' - V = Sd$$

在极板拉开过程中外力作的功等于电容器静电能的增量, 由此得

$$A_{\text{外}} = W' - W = w\Delta V = \frac{2\pi kdQ^2}{S}$$

本章综合例题

例 9-1 一半球面均匀带电, 电荷面密度为 σ .

(1) 试求球心 O 处的电场强度 E_0 ;

(2) 过半球面“口面”上的一条直径作一与“口面”成 α ($\alpha < \frac{\pi}{2}$) 角的平面, 该平面把半球面割出一小瓣球面, 试求此小瓣球面上的电荷在球心 O 处产生的电场强度 E'_0 .

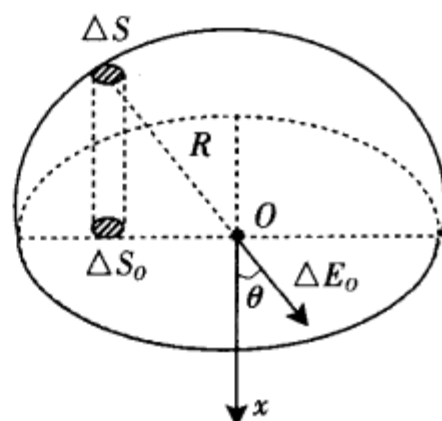
解: (1) 设半球面“口面”的法线方向为 x 方向, 如图例 9-1a 所示, 在半球面上任取一小面元 ΔS , 小面元上带电 $\Delta q = \sigma\Delta S$, 该面元在 O 点处产生的电场强度 ΔE_0 的值为

$$\Delta E_0 = \frac{k\Delta q}{R^2} = \frac{k\sigma\Delta S}{R^2} \quad ①$$

方向与 x 轴的夹角为 θ . 由对称性可知, 半球面上取出的各面元在 O 点产生的总场强 E_0 必沿 x 方向, 故 E_0 等于各面元在 O 点产生的场强沿 x 方向的分量之和, 即

$$E_0 = \sum \Delta E_{0x} = \sum \frac{k\sigma\Delta S}{R^2} \cos\theta \quad ②$$

由图可知, $\Delta S \cos\theta$, 等于 ΔS 在“口面”上的投影的面积, 设为 ΔS_0 , 故由②式得



图例 9-1a

$$E_0 = \frac{k\sigma}{R^2} \sum S \cos\theta = \frac{k\sigma}{R^2} \sum \Delta S_0$$

$$= \frac{k\sigma}{R^2} \pi R^2 = k\pi\sigma$$

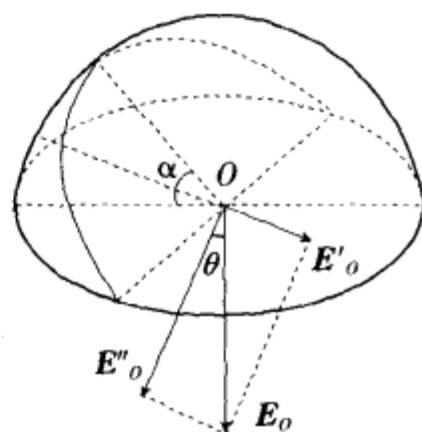
(2)由电荷分布的对称性可知,被割出的小瓣球面上的电荷在 O 点产生的场强 E_0' 一定沿 α 角角平分面与小瓣球面对称面的交线方向,如图例 9-1b 所示.

若把割出的大瓣球面补上,则构成完整的半球面,由(1)小题可知,此半球面在 O 点的场强沿 x 方向,且 $E_0 = k\pi\sigma$. 而大瓣球面上的电荷在 O 点产生的场强 E_0'' 也同样沿其角平分面与对称面的交线方向,且有 $E_0' \perp E_0''$. 由场强叠加原理知, E_0 应是 E_0' 与 E_0'' 的矢量和,即

$$E_0 = E_0' + E_0''$$

由几何关系可知, E_0'' 与 E_0 的夹角 $\theta = \frac{\alpha}{2}$, 于是 E_0' 为

$$E_0' = E_0 \sin \frac{\alpha}{2} = k\pi\sigma \sin \frac{\alpha}{2}$$



图例 9-1b

例 9-2 图例 9-2a 所示为一带电球面,其上一半带有正电荷,另一半带有负电荷,且电荷分布不均匀,电荷面密度可表示为

$$\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos\theta$$

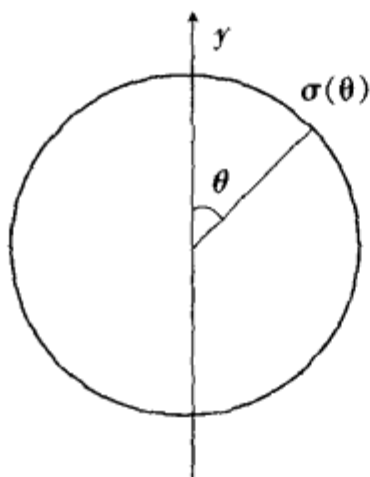
其中 σ_0 为 $\theta=0$ 处的电荷面密度. 试求球面内电场强度的分布.

解:球面上这种电荷的分布,可用以下的模型等效:两个与球面等大的,体内均匀带电的球体,一个带正电,另一个带负电,电荷体密度分别为 $+\rho$ 和 $-\rho$, 它们的球心 O_+ 、 O_- 错开一小距离 d , 如图例 9-2b 所示. 在两球重叠区,正、负电荷抵消,因而呈电中性,而在两球错开区,即本题的球面处才显出各半球面的正、负电荷,且电荷的分布与球面上的分布等效,即

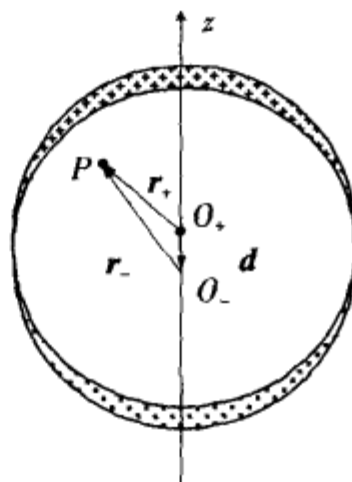
$$\sigma(\theta) = \rho d \cos\theta = \sigma_0 \cos\theta$$

$$\therefore \sigma_0 = \rho d$$

①



图例 9-2a



图例 9-2b

因此,球面内任一点 P 的场强可看成是这两个球体的电荷在该点产生场强 E_+ 和 E_- 的叠加,即

$$E_P = E_+ + E_- \quad \text{②}$$

分别由 O_+ 和 O_- 指向 P 点的矢量设为 r_+ 和 r_- , 则由 9.3 例 2 题的结果可得 E_+ 和 E_- 分别为

$$E_+ = \frac{4}{3} \pi k \rho r_+$$

$$E_- = -\frac{4}{3} \pi k \rho r_-$$

代入②式,得

$$E_p = E_+ + E_- = \frac{4}{3}\pi k\rho r_+ - \frac{4}{3}\pi k\rho r_- = \frac{4}{3}\pi k\rho(r_+ - r_-)$$

$$= \frac{4}{3}\pi k\rho d \quad \text{③}$$

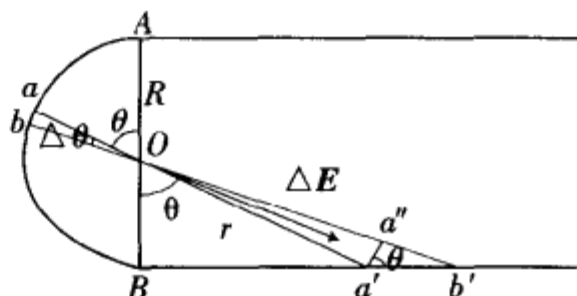
其中 d 为由 O_+ 指向 O_- 的矢量. 由上式可知, 球面内任一点 P 的场强与 P 点的位置无关, 这说明球面内场强处处相等. 为一匀强电场, 场强的方向为 $-z$ 方向, 将①式代入③式, 可得场强 E 为

$$E = \frac{4}{3}\pi k\rho d = \frac{4}{3}\pi k\sigma_0$$

例 9-3 一根无限长均匀带电细线弯成如图例 9-3 所示的形状, 其左侧为半径为 R 的半圆, 右侧为两平行的半无限长直线, 设电荷线密度为 λ , 求半圆圆心 O 处的场强.

解: 在半圆上任取一小段弧 ab , 对应的小圆心角 $\Delta\theta$, 弧长 $\Delta l = R\Delta\theta$, 所带电量 $\Delta q = \lambda R\Delta\theta$, 可视为点电荷, 在 O 点产生的场强 ΔE 方向如图所示, 大小为

$$\Delta E = \frac{k\Delta q}{R^2} = \frac{k\lambda\Delta\theta}{R} \quad \text{①}$$



图例 9-3

延长 aO, bO , 交细线右侧的直线部分于 a', b' , 被割出的 $a'b'$ 段长 ΔS , 该小段所带电量 $\Delta q' = \lambda\Delta S$. 同样可视为点电荷, 它与 O 点相距 r , 在 O 点产生的场强 $\Delta E'$ 为

$$\Delta E' = \frac{k\Delta q'}{r^2} = \frac{k\lambda\Delta S}{r^2} \quad \text{②}$$

作 $a'a''$ 垂直于 ob' , 则 $a'a''$ 线段长 $\Delta l' = \Delta S \cos\theta$, 故 $\Delta S = \frac{\Delta l'}{\cos\theta}$, 代入②式得

$$\Delta E' = \frac{k\lambda\Delta S}{r^2} = \frac{k\lambda\Delta l'}{r^2 \cos\theta} = \frac{k\lambda\Delta l'}{rR} \quad \text{③}$$

由于 $a'b'$ 及 $a'a''$ 都是很小的小段, 故 $a'a''$ 可看成是以 O 为圆心, r 为半径的圆上的小弧段, 于是 $\Delta l' = r\Delta\theta$, 代入③式得

$$\Delta E' = \frac{k\lambda\Delta\theta}{R} \quad \text{④}$$

比较①、④式得

$$\Delta E' = \Delta E$$

由于 $\Delta E'$ 的方向与 ΔE 的方向相反, 因此 ab 段与 $a'b'$ 段电荷在 O 点产生的场强相互抵消. 在半圆上可取出许多小弧段, 用以上相同方法可在右侧两平行直线上找到对应的小段, 这些与小弧段和与之相对应的小段在 O 点的场强均相互抵消, 由此可知整个细线上电荷在 O 点的场强为零, 即

$$E_O = 0$$

例 9-4 半径为 R 的半球面均匀带电, 电量为 q , CD 为过球心 O 的对称轴线, P, Q 为此轴线上位于 O 点两边, 与 O 等距的两点, 如图例 9-4 所示. 已知半球面上电荷在 P 点的电势为 U_P , 求 Q 点的电势 U_Q .

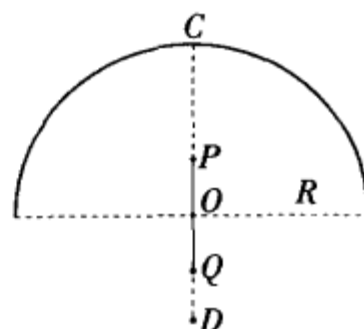
解: 在原半球面上对称地补上与之完全相同的带电半球面, 使之构成一均匀带电的整球面, 其带电量为 $2q$, 则球面内成为一等势区, 电势为

$$U = \frac{2kq}{R} \quad \text{①}$$

此即整球面内 Q 点的电势. 根据电势叠加原理, 此电势是原半球面电荷在 Q 点的电势 U_Q 和补上的半球面电荷在 Q 点电势 U_Q' 的叠加, 即

$$U = U_Q + U_Q' \quad \text{②}$$

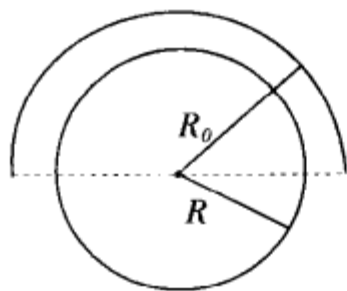
Q 点相对补上的半球面的位置与 P 点相对原半球面的位置完全一样, 故 $U_Q' = U_P$, 代入②式即可解得 U_Q 为



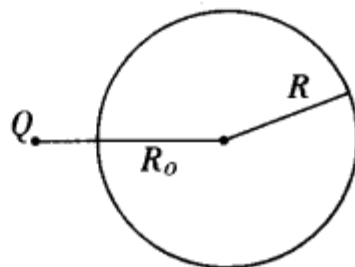
图例 9-4

$$U_Q = U - U_{Q'} = \frac{2kQ}{R} - U_P$$

例 9-5 电荷 Q 不均匀地分布在半径为 R_0 的半球面上, 试求在与半球面同心, 半径为 R ($R < R_0$) 的球面上的平均电势.



图例 9-5a



图例 9-5b

解: 在半球面上任取一小面元, 小面元上电荷 ΔQ 在球面 R 上有一电势分布, 对应有一平均电势. 若把此小电荷 ΔQ 移至半球面上其他位置, 或在半球面其他位置上另取一相同电量 ΔQ 的小电荷, 则其在球面 R 上的电势分布与先前的虽有不同, 但平均电势却是相同的, 这就是说, 半球面上电荷元在球面 R 上对平均电势的贡献与它在半球面上的位置无关. 于是便可把半球面上所有电荷集中到半球面上任一点, 构成点电荷 Q , 点电荷 Q 在球面 R 上的平均电势与原半球面电荷 Q 在球面 R 上的平均电势完全相等.

在球面 R 上可取出无限多的小面元 ΔS , 第 i 个小面元 ΔS_i 处的电势为 U_i , 则点电荷 Q 在球面上的平均电势为

$$\bar{U} = \frac{\sum U_i \Delta S_i}{S} \quad (1)$$

式中 S 为球面 R 的面积.

设想球面 R 均匀带电, 电荷面密度为 σ , 第 i 个小面元 ΔS_i 上的电量 $\Delta Q_i = \sigma \Delta S_i$, 则 $U_i \sigma \Delta S_i$ 为该小面元在点电荷 Q 电场中所具有的电势能, 将分出的所有小面元的电势能求和, 便得整个球面上的电荷在点电荷 Q 电场中的电势能为 W . 即有

$$W = \sum_i U_i \sigma \Delta S_i \quad (2)$$

比较①、②式, 得

$$\bar{U} = \frac{W}{\sigma S} \quad (3)$$

由于球面 R 上的电荷 $Q' = \sigma S$ 产生的电场在点电荷 Q 处的电势 $U_{Q'}$ 为

$$U_{Q'} = \frac{kQ'}{R_0} = \frac{k\sigma S}{R_0}$$

故球面 R 上电荷 Q' 与点电荷 Q 的电势能也可表述为

$$W = QU_{Q'} = \frac{kQ\sigma S}{R_0} \quad (4)$$

将④式代入③式, 即得

$$\bar{U} = \frac{kQ}{R_0}$$

例 9-6 两个具有不同电量的微粒以相同的初速运动. 当在一段时间里加有均匀电场后, 第一个微粒的速度方向偏转了 $\theta_1 = 60^\circ$, 速度大小变为初速的 $\frac{1}{2}$. 而第二个微粒的速度方向则偏转了 $\theta_2 = 90^\circ$. 试问

(1) 第二个微粒的速度大小如何变化?

(2) 如果第一个微粒的荷质比为 γ_1 , 则第二个微粒的荷质比为多大?

解: (1) 设两微粒的质量和电量分别为 m_1, q_1 和 m_2, q_2 , 初速为 v_0 , 所加的均匀电场的场强为 E , 则

两微粒获得的加速度分别为

$$a_1 = \frac{q_2 E}{m_1} = \gamma_1 E, \quad a_2 = \frac{q_2 E}{m_2} = \gamma_2 E$$

设所加电场的时间为 Δt , 则两微粒在这段时间中的速度改变 Δv_1 和 Δv_2 为

$$\Delta v_1 = a_1 \Delta t = \gamma_1 E \Delta t \quad (1)$$

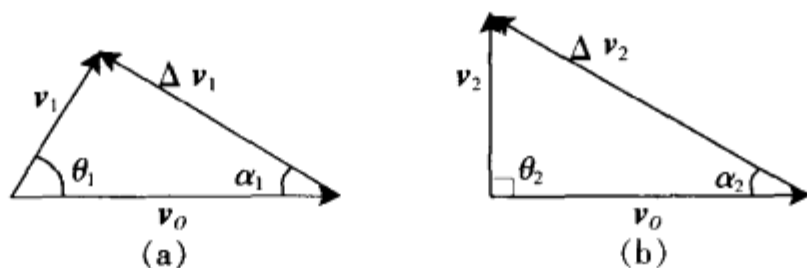
$$\Delta v_2 = a_2 \Delta t = \gamma_2 E \Delta t \quad (2)$$

加电场后, 两微粒的速度分别变为 v_1 和 v_2 , v_1 、 v_2 为

$$v_1 = v_0 + \Delta v_1 = v_0 + \gamma_1 E \Delta t \quad (3)$$

$$v_2 = v_0 + \Delta v_2 = v_0 + \gamma_2 E \Delta t \quad (4)$$

③、④两式的矢量关系可表示为图例 9-6a 和 b, 由题意知图(a)中的 $\theta_1 = 60^\circ$. 而 $v_1 = \frac{1}{2} v_0$, 故 $\alpha_1 = 30^\circ$, 另由于 Δv_1 和 Δv_2 的方向均为场强 E 的方向, 因此图中的 α_2 应与 α_1 相等, 即 $\alpha_2 = 30^\circ$, 于是由图示的几何关系可得



图例 9-6

$$v_2 = v_0 \tan \alpha_2 = v_0 \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} v_0$$

即第二个微粒的速度大小变为初速的 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(2) 同样由图示的几何关系可得

$$\Delta v_1 = v_0 \cos \alpha_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} v_0 \quad (5)$$

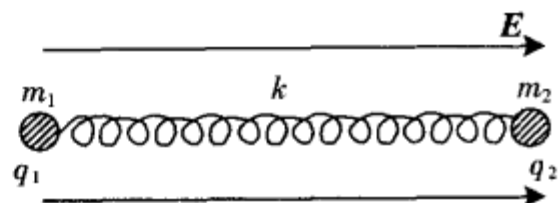
$$\Delta v_2 = v_0 / \cos \alpha_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} v_0 \quad (6)$$

由①、②、⑤、⑥四式便可得

$$\frac{\Delta v_2}{\Delta v_1} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} v_0}{\frac{\sqrt{3}}{2} v_0} = \frac{4}{3}$$

即
$$\gamma_2 = \frac{4}{3} \gamma_1$$

例 9-7 在一根较长的绝缘轻弹簧的两端各系一带正电的小球, 弹簧的原长为 l_0 , 劲度系数为 k , 两小球的质量和电量分别为 m_1, q_1 和 m_2, q_2 . 整个空间加一均匀电场, 场强为 E . 开始弹簧为原长, 方向沿场强 E 的方向, 两小球均静止. 试求在以后运动过程中弹簧的最大长度. 设两小球间的相互电作用可忽略.



图例 9-7

解: 两小球在电场中受到的静电力合力 F 为:

$$F = (q_1 + q_2) E$$

两球系统的质心运动加速度 a_c 为

$$a_c = \frac{F}{m_1 + m_2} = \frac{q_1 + q_2}{m_1 + m_2} E \quad (1)$$

当弹簧处于原长时,质心与两球距离分别设为 l_{01} 和 l_{02} ,有

$$\begin{cases} l_{01} + l_{02} = l_0 & (2) \\ m_1 l_{01} = m_2 l_{02} & (3) \end{cases}$$

由②、③式解得

$$\begin{cases} l_{01} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} l_0 \\ l_{02} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} l_0 \end{cases}$$

在质心系中,质心固定不动,两小球相当于连接在两根原长分别为 l_{01} 和 l_{02} 一端固定的弹簧上作简谐振动,这两根弹簧的劲度系数分别为

$$\begin{cases} k_1 = \frac{l_0}{l_{01}} k = \frac{m_1 + m_2}{m_2} k & (4) \\ k_2 = \frac{l_0}{l_{02}} k = \frac{m_1 + m_2}{m_1} k & (5) \end{cases}$$

设两球在质心系中处于平衡位置时,弹簧为拉伸状态,并设两根弹簧的拉伸量分别为 x_1 和 x_2 . 因质心系为非惯性系,故有

$$\begin{cases} q_1 E + k_1 x_1 - m_1 a_c = 0 & (6) \\ q_2 E - k_2 x_2 - m_2 a_c = 0 & (7) \end{cases}$$

将①、④、⑤式代入⑥、⑦式,可解得

$$\begin{cases} x_1 = \frac{m_2(m_1 q_2 - m_2 q_1) E}{(m_1 + m_2)^2 k} & (8) \\ x_2 = \frac{m_1(m_1 q_2 - m_2 q_1) E}{(m_1 + m_2)^2 k} & (9) \end{cases}$$

讨论:

(1)若 $m_1 q_2 = m_2 q_1$, 则 $x_1 = x_2 = 0$, 说明初始位置就是小球的平衡位置,两球在质心系中不振动,因此弹簧的最大长度 l_{\max} 就是弹簧的原长 l_0 , 即

$$l_{\max} = l_0$$

(2)若 $m_1 q_2 < m_2 q_1$, 则 $x_1 < 0, x_2 < 0$, 说明小球处于平衡位置时,弹簧处于压缩状态,即两球的平衡位置位于两球初始位置的内侧,故开始运动后,两球先向内侧运动,后再向外侧运动,并同时到达最远点. 由于两球作简谐振动的振幅就等于 x_1 和 x_2 的绝对值,所以两球到达的最远位置就是各自的初始位置,于是有

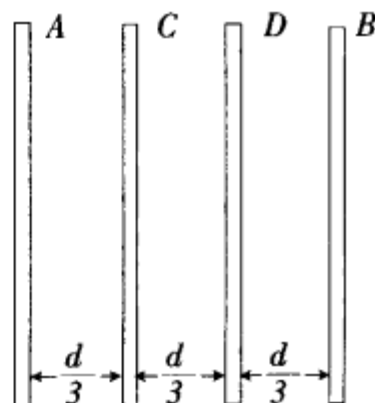
$$l_{\max} = l_0$$

(3)若 $m_1 q_2 > m_2 q_1$, 则 $x_1 > 0, x_2 > 0$, 说明小球处于平衡位置时,弹簧处于拉伸状态,即两球的平衡位置位于两球初始位置的外侧,故两球将在各自初始位置及其外侧 $2x_1$ 和 $2x_2$ 的范围内作简谐振动;由于两球是同时到达各自外侧的最远点,因此弹簧的最大长度 l_{\max} 为

$$l_{\max} = l_0 + 2(x_1 + x_2) = l_0 + \frac{2(m_1 q_2 - m_2 q_1) E}{(m_1 + m_2) k}$$

例 9-8 一平行板电容器的两极板 A、B 的间距为 d , 充电后撤去电源, A、B 间的电势差为 U_0 . 现把两块与极板等大、不带电的导体薄板 C、D 等间距地平行插入 A、B 间, 使相邻两板间距均为 $\frac{1}{3}d$, 如图例 9-8a 所示.

(1)求插入 C、D 后,各相邻两导体板之间的电势差;



图例 9-8a

(2)用导线连接 C 板与 D 板,然后撤去连接线,再求各相邻两板间的电势差;

(3)再用导线连接 A 板与 B 板,然后撤去连接线,则各相邻两板间的电势差又为多大?

解:(1)设 C、D 板未插入前,A 板右侧面和 B 板左侧面上的电荷面密度分别为 $+\sigma_0$ 和 $-\sigma_0$,当 C、D 板插入后,由静电感应和静电平衡条件可知,C、D 板的左、右侧面感应电荷的面密度依次分别为 $-\sigma_0, +\sigma_0, -\sigma_0$ 和 $+\sigma_0$. 这样,A、C 间,C、D 间及 D、B 间的场强与未插入 C、D 前 A、B 间的场强相同,故有

$$U_{AC} = U_A - U_C = \frac{1}{3} U_0$$

$$U_{CD} = U_C - U_D = \frac{1}{3} U_0$$

$$U_{DB} = U_D - U_B = \frac{1}{3} U_0$$

(2)用导线把 C、D 两板连接,这样 C、D 板等势,这要求 C、D 间的场强为零,故 C 板右侧面上的正电荷通过连接线到达 D 板,与 D 板左侧面的负电荷抵消,使这两侧面均不带电,而其他各板侧面的电荷分布均不改变,这样的电荷分布,各导体板的静电平衡条件能够满足. 于是有

$$U_{AC}' = U_A' - U_C' = \frac{1}{3} U_0$$

$$U_{CD}' = U_C' - U_D' = 0$$

$$U_{DB}' = U_D' - U_B' = \frac{1}{3} U_0$$

(3)若再用导线把 A、B 板连接,那么 A、B 板上的电荷会不会抵消,而使两板都不带电呢? 如果这样的话,原分布在 C 板左侧面和 D 板右侧面的负、正电荷会因静电平衡要求而分别分布到 C 板右侧面和 D 板左侧面,于是 A、C 板间和 D、B 板间的场强均为零,导致 A、C 两板等势,D、B 两板等势,另外导线连接 A、B 板,A、B 板也等势,这样四块板都等势,而 C、D 板间的场强不等于零,说明 C、D 板不等势,这是与前面得到四板等势的结果相矛盾. 这表明 A、B 板上的电荷会抵消的假设是不对的.

现设由 A 板右侧面开始从左至右各侧面的电荷面密度分别为 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5$ 和 σ_6 ,由静电平衡要求可得

$$\sigma_1 = -\sigma_2 \quad \text{①}$$

$$\sigma_3 = -\sigma_4 \quad \text{②}$$

$$\sigma_5 = -\sigma_6 \quad \text{③}$$

另由 C、D 板上电荷总量不变,可得

$$\sigma_2 + \sigma_3 = -\sigma_0 \quad \text{④}$$

$$\sigma_4 + \sigma_5 = \sigma_0 \quad \text{⑤}$$

因 A、B 板等势,故有

$$4\pi k(\sigma_1 + \sigma_3 + \sigma_5) \times \frac{d}{3} = 0$$

$$\text{即} \quad \sigma_1 + \sigma_3 + \sigma_5 = 0 \quad \text{⑥}$$

由①、②、③、④、⑤、⑥式解得:

$$\sigma_1 = \frac{1}{3}\sigma_0, \quad \sigma_2 = -\frac{1}{3}\sigma_0, \quad \sigma_3 = -\frac{2}{3}\sigma_0$$

$$\sigma_4 = \frac{2}{3}\sigma_0, \quad \sigma_5 = \frac{1}{3}\sigma_0, \quad \sigma_6 = -\frac{1}{3}\sigma_0,$$

由此可知,A、B 板在导线连接时,板上电荷并未全部抵消,还各剩原板上的 $\frac{1}{3}$ 的电荷量. 各板间场强分布如图例 9-8b 所示. 故各相邻两板间电势差为

$$U_{AC}'' = U_A'' - U_C'' = \frac{1}{9} U_0$$

$$U_{CD}'' = U_C'' - U_D'' = -\frac{2}{9} U_0$$

$$U_{DB}'' = U_D'' - U_B'' = \frac{1}{9} U_0$$

例 9-9 导体球 A、B、C 的半径分别为 $r_A = r_B = 2\text{cm}$, $r_C = 3\text{cm}$, 它们的球心分别位于边长 $l = 50\text{cm}$ 的等边三角形的三个顶点 A、B、C 处, 如图例 9-9a 所示. 三个球开始各带电 $q_A = 12 \times 10^{-9}\text{C}$, $q_B = 24 \times 10^{-9}\text{C}$, $q_C = 30 \times 10^{-9}\text{C}$.

(1) 试计算 B 球电势的近似值, 并估算此近似产生的误差的数量级;

(2) 若用导线将三导体球相连, 忽略连接后导线上的电荷分布, 试确定各球所带的电量;

(3) 过正三角形 ABC 的中点 O 作 OX 轴垂直于三角形所在平面, 在 OX 轴上取一点 P, 使 $OP = OC$, 试求在(2)小题条件下 P 点的电场强度.

解: (1) 导体球达静电平衡后, 其所带电荷都分布在表面上, 但由于各球间的静电感应, 电荷在表面上的分布并不均匀, 这样很难精确计算 B 球的电势. 不过, 由题设条件可知, r_A, r_B, r_C 均远比 l 小, 加之 q_A, q_B, q_C 均较小, 作为一种近似, 可认为三球表面上的电荷都均匀分布, 即忽略因各球间相互静电感应所造成对电荷分布的影响.

导体球 B 是个等势体, 计算它的电势, 只需计算其球心处的电势, B 球的电荷 q_B 分布于其表面上, 这些电荷对 B 球球心处电势的贡献为 $\frac{kq_B}{r_B}$, 而 A、C 球上电荷 q_A, q_C 因近似看成均匀分布在各自球面上, 故它们对 B 球球心处的电势贡献, 与这些电荷集中在各自球心处的点电荷对该处的贡献一样, 即各为 $\frac{kq_A}{l}$ 和 $\frac{kq_C}{l}$. 于是可得 B 球的电势 U_B 为

$$U_B = \frac{kq_B}{r_B} + \frac{kq_A}{l} + \frac{kq_C}{l} = 1.154 \times 10^4 \text{V}$$

上述这种近似方法, 是将导体球面上电荷的不均匀分布用均匀分布替代. 其实, 在计算 B 球电势时, B 球上的电荷分布并不需要替代, 因为 B 球上的电荷不管分布在球面上何处, 它对球心处电势的贡献是一样的. 因此仅 A、C 球面上电荷分布的替代会造成误差, 而 A、C 球面上的电荷因这种替代引起的偏移量不超过球的直径, 加上替代后的均匀分布又与电量集中在球心的点电荷相当, 故此偏移量 Δr 可取略小于球的半径, 即 Δr 估算为 1cm . 另外, A、C 球上的电荷并非全部参与这种偏移; 作为一种估算, 可认为仅有一半参与偏移. 于是, 由此引起的 U_B 计算的绝对误差为

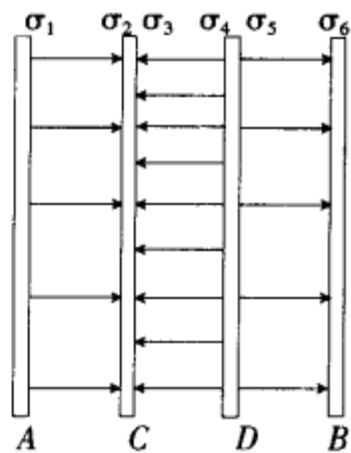
$$\begin{aligned} \Delta U &= \frac{1}{2} \left| \frac{k(q_A + q_C)}{l + \Delta r} - \frac{k(q_A + q_C)}{l} \right| \\ &= \frac{k(q_A + q_C)}{2l} \left| \frac{1}{1 + \frac{\Delta r}{l}} - 1 \right| \\ &= \frac{k(q_A + q_C)}{2l} \left| 1 - \frac{\Delta r}{l} - 1 \right| \\ &= \frac{k(q_A + q_C)}{2l^2} \Delta r \end{aligned}$$

将数据代入, 计算可得

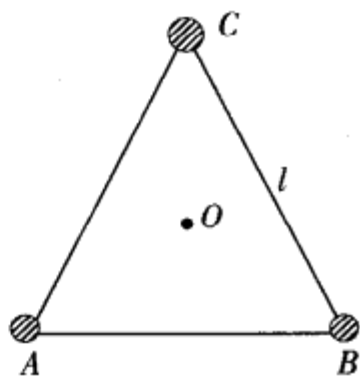
$$\Delta U = 0.007\text{kV}$$

故绝对误差的数量级为 0.01kV .

(2) 用导线将三球连接后, 三球所带电荷将重新分配, 设达平衡后, A、B、C 球所带电量分别为 q_A' , q_B' , q_C' . 由电荷守恒得



图例 9-8b



图例 9-9a

$$q_A' + q_B' + q_C' = q_A + q_B + q_C = 66 \times 10^{-9} \text{C} \quad ①$$

因 A、B 两球大小相同,位置又对称,故有

$$q_A' = q_B' \quad ②$$

仍假设各球的电荷均匀分布在各自球面上,于是 A、C 球的电势分别为

$$U_A' = \frac{kq_A'}{r_A} + \frac{kq_B'}{l} + \frac{kq_C'}{l}$$

$$U_C' = \frac{kq_C'}{r_C} + \frac{kq_B'}{l} + \frac{kq_A'}{l}$$

因 A、C 球等势,即 $U_A' = U_C'$,于是有

$$\frac{q_A'}{r_A} + \frac{q_C'}{l} = \frac{q_C'}{r_C} + \frac{q_A'}{l} \quad ③$$

联立①、②、③式,可解得

$$q_A' = q_B' = 18.685 \times 10^{-9} \text{C}$$

$$q_C' = 28.63 \times 10^{-9} \text{C}$$

(3)取 $O - xyz$ 坐标系如图例 9-9b 所示,其中坐标原点为正三角形的中点 O , y 轴沿 OC 方向,而 AB 平行于 z 轴.由

题意知: $OP = OC = \frac{\sqrt{3}}{3}l$,由图上几何关系知: $\angle CPO = \theta = 45^\circ$

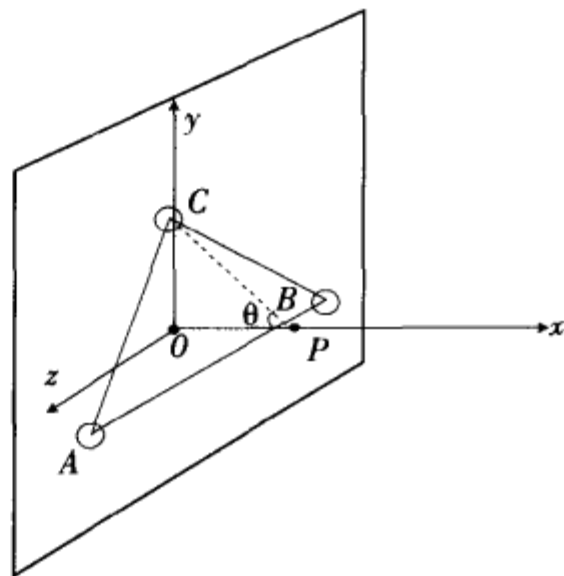
仍设三球球面上的电荷均匀分布.这些电荷在 P 点的场强设为 E_P ,取

$$E_P = E_{Px} \hat{i} + E_{Py} \hat{j} + E_{Pz} \hat{k}$$

由于 C 球电荷在 P 点产生的场强在 Oxy 平面内,故它对 P 点场强的 z 轴分量 E_{Pz} 无贡献.又由于 A、B 球的对称分布,这两球电荷对 P 点场强的 z 轴分量也无贡献.于是可得

$$E_{Pz} = 0$$

同样由于三球位置的对称性,A、B 两球电荷对 E_{Px} 的贡献完全一样,于是有



图例 9-9b

$$E_{Px} = \frac{k(q_A' + q_B' + q_C')}{r_{cp}^2} \cos\theta$$

将 $r_{cp} = \sqrt{2} \overline{OC} = 40.82 \text{cm}$, $\theta = 45^\circ$ 代入上式,得

$$E_{Px} = 2.52 \text{kV/m}$$

若把 C 球上电量 q_C' 分成两份 q_{c1}' 和 q_{c2}' 即

$$q_C' = q_{c1}' + q_{c2}'$$

其中 $q_{c1}' = q_A' = q_B'$,于是由三球位置的对称性可知, q_{c1}' , q_A' 和 q_B' 这三电荷在 P 点产生的场强沿 x 轴,即对 E_{Py} 无贡献.这样仅 $q_{c2}' = q_C' - q_{c1}' = 9.945 \times 10^{-9} \text{C}$ 电量的电荷对 E_{Py} 有贡献.于是 E_{Py} 为

$$\begin{aligned} E_{Py} &= \frac{kq_{c2}'}{r_{cp}^2} \sin\theta \\ &= 0.38 \text{kV/m} \end{aligned}$$

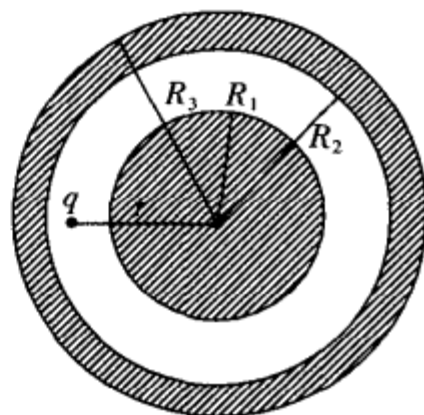
最后,可得 P 点场强 E_P 为

$$\begin{aligned} E_P &= \sqrt{E_{Px}^2 + E_{Py}^2 + E_{Pz}^2} \\ &= 2.55 \text{kV/m} \end{aligned}$$

场强 E_P 与 x 轴的夹角 ϕ 为

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{E_{Py}}{E_{Px}} \right) = 8.55^\circ$$

例 9-10 半径为 R_1 的导体球, 与内、外半径分别为 R_2 和 R_3 的导体球壳同心, 球与球壳均不带电, 在球与球壳之间距球心为 r ($R_1 < r < R_2$) 处有一点电荷 q , 如图例 9-10 所示. 试就以下两种情况求导体球与球壳上各带多少电量.



图例 9-10

(1) 球与球壳用导线相连;

(2) 球与球壳用导线相连后再接地.

解: (1) 当原来不带电的导体球与球壳间有点电荷 q 时, 导体球表面及球壳的内表面会因静电感应而带上一定量的异号电荷, 分别设为 $-q_1$ 和 $-q_2$, 由静电平衡条件可知: q_1, q_2 的总和等于 q , 即

$$q_1 + q_2 = q \quad \text{①}$$

由于球与球壳用导线相连, 故球壳外表面所带电量为 $q_1 + q_2 = q$.

导体球是个等势体, 因此只需计算球心的电势, 即可知道导体球的电势. 在三层面电荷分布中除球壳外表面为均匀分布外, 另两层均为非均匀分布, 但这些电荷不管分布在该层面的何处, 它们对球心处电势的贡献都一样, 于是导体球的电势 $U_{\text{球}}$ 可表示为

$$U_{\text{球}} = \frac{kq}{r} - \frac{kq_1}{R_1} - \frac{kq_2}{R_2} + \frac{kq}{R_3} \quad \text{②}$$

导体球壳也是个等势体, 其电势等于把单位正电荷从球壳外表面上某点处沿任意路径移动到无限远过程中电场力作的功, 因此球壳的电势仅取决于球壳外的电场, 而球壳外表面以内的所有电荷对球壳外电场的总贡献为零, 即球壳外电场仅由其外表面上电荷决定. 这就是说, 球壳的电势与仅有球壳外表面上均匀分布电荷 q 的情况下球壳的电势完全一样. 故有

$$U_{\text{壳}} = \frac{kq}{R_3} \quad \text{③}$$

由导体球与球壳等势, 即 $U_{\text{球}} = U_{\text{壳}}$, 并把②、③式代入可得

$$K \left(\frac{q}{r} - \frac{q_1}{R_1} - \frac{q_2}{R_2} + \frac{q}{R_3} \right) = \frac{kq}{R_3}$$

把①式代入上式, 即可解得

$$\begin{cases} q_1 = \frac{R_1(R_2 - r)}{r(R_2 - R_1)}q \\ q_2 = \frac{R_2(r - R_1)}{r(R_2 - R_1)}q \end{cases}$$

由此可知, 导体球带电为 $-q_1$, 而球壳带电 (即其内、外表面的总电量) 为 q_1 .

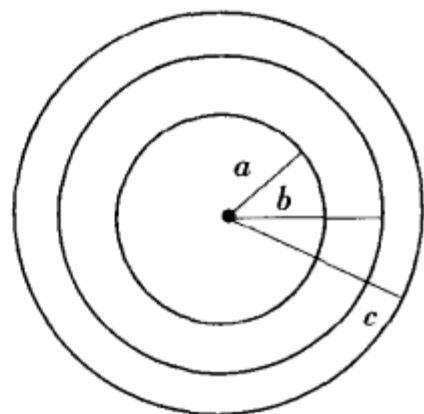
(2) 若球与球壳用导线相连后再接地, 则导体球与球壳的电势为零. 这要求球壳外的场强为零, 这样导体球壳外表面的电荷沿接地线流入大地, 而其内表面及导体球上的电荷分布并不会发生变化. 因此, 导体球上仍带 $-q_1$ 的电量, 而球壳上所带电量为原其内表面上的电量, 即为 $-q_2$.

例 9-11 有三个同心的导体薄球壳, 半径分别为 a, b, c , 其中内、外球壳均接地, 而中间球壳是由两个半球壳拼接而成, 且其上带有一定电量. 试问, 三球壳半径 a, b, c 之间满足什么关系, 才能使中间球壳的两半部分不会相互分离?

解: 设中间球壳上所带电量为 Q , 则内、外球壳上的感应电荷量分别设为 Q_a 和 Q_c , 这些电荷在球壳上为均匀分布. 由电势叠加原理可得三球壳的电势分别为:

$$U_a = k \left(\frac{Q_a}{a} + \frac{Q}{b} + \frac{Q_c}{c} \right) \quad \text{①}$$

$$U_b = k \left(\frac{Q_a}{b} + \frac{Q}{b} + \frac{Q_c}{c} \right) \quad \text{②}$$



图例 9-11

$$U_c = k \left(\frac{Q_a}{c} + \frac{Q}{c} + \frac{Q_c}{c} \right) \quad (3)$$

由于内、外球壳均接地,它们的电势均为零,因此有

$$U_b - U_a = U_b - U_c \quad (4)$$

将①、②、③式代入④式,得

$$\frac{Q_a}{b} - \frac{Q_a}{a} = \frac{Q_a}{b} + \frac{Q}{b} - \frac{Q_a}{c} + \frac{Q}{c}$$

解得

$$Q_a = - \left[\frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{c}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{c}} \right] Q \quad (5)$$

为使中间球壳的两半部分不会相互分离,则要求在此球壳上取出的任一微小面元 ΔS 所受的静电力均应小于或等于零(小于零代表方向指向球心),否则半球壳在相互远离的方向上必将受到不为零的合力,而致使相互分离.球壳上任一微小面元所受的静电力要小于或等于零,就要求除微小面元上的电荷以外的其他所有电荷在微小面元处产生的场强 E_b 小于或等于零.由场强叠加原理可得空间所有电荷(包括微小面元上的电荷)在中间球壳表面处产生的场强 E_0 为

$$E_0 = \frac{kQ_a}{b^2} + \frac{kQ}{b^2} \quad (6)$$

其中外球壳上的电荷在其球内区域产生的场强为零,故它对 E_0 无贡献.而微小面元 ΔS 上的电荷 ΔQ 在面元附近处产生的场强 ΔE 为

$$\Delta E = 2\pi k\sigma \quad (7)$$

这是无限大均匀带电平面的场强表示式.之所以把微小面元看成是无限大平面,是因为考察点无限趋近于微小面元的缘故.于是要求 E_b 小于或等于零,即有

$$E_b = E_0 - \Delta E \leq 0 \quad (8)$$

将⑥、⑦式代入⑧式,并把 $\sigma = \frac{Q}{4\pi b^2}$ 代入⑦式,可得

$$E_b = \frac{kQ_a}{b^2} + \frac{kQ}{b^2} - 2\pi k\sigma = \frac{kQ_a}{b^2} + \frac{kQ}{2b^2} \leq 0$$

即

$$Q \leq -2Q_a \quad (9)$$

将⑤式代入⑨式,得

$$Q \leq \frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{c}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{c}} 2Q$$

故本题所求的条件为

$$\frac{2}{b} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$$

例 9-12 一点电荷 q 置于与一块非常大的接地导体板相距为 d (比板的线度小得多) 处. 试求导体板上感应电荷的分布以及点电荷 q 所受到的静电力. 如果导体板不接地则又如何?

解: 过点电荷作导体板的垂线,取垂足 O 为坐标原点,垂线为 x 轴,如图所示,现考察与导体板右表面(即 $x=0$ 处表面)上 P 点无限靠近的二点 P_1 和 P_2 的电场强度,这两点分别位于导体板内、外两侧,而板上 P 点与 O 相距为 r . 对点电荷 q 而言, P_1 、 P_2 点就是 P 点, q 在该点的场强 E_q 为

$$E_q = \frac{kq}{l^2} \hat{l} = \frac{kq}{d^2 + r^2} \hat{l}$$

式中 \hat{l} 为 q 指向 P 点方向的单位矢量. 当导体板达静电平衡时,位于导体内的 P_1 点的电场强度为零,

这就是说分布于板的右表面上感应电荷在 P_1 点的场强必与 q 在该点的场强大小相等而方向相反。然而对于这些感应电荷来说, P_1, P_2 两点虽靠得很近, 却是位于该面的两侧, 故感应电荷在 P_2 点的场强应与在 P_1 点场强相对该面对称, 即如图例 9-12 所示。于是, P_2 点的场强, 即由 q 和感应电荷在 P_2 点的总场强 E_{P_2} 为

$$E_{P_2} = 2E_q \cos\theta = \frac{2kqd}{(d^2 + r^2)^{3/2}} \quad (1)$$

式中 θ 为 q, P 连线与 x 轴的夹角。由 9.5 节中 9.5-1 式可知, P_2 点的总场强应与 P 点处感应电荷的面密度值 $\sigma(r)$ 的关系为

$$E_{P_2} = 4\pi k\sigma(r) \quad (2)$$

由①、②式, 即可得

$$\sigma(r) = \frac{qd}{2\pi(d^2 + r^2)^{3/2}} \quad (3)$$

由于 E_{P_2} 的方向垂直板面指向导体内, 表明感应电荷为负电荷, 即在与 O 相距为 r 的点其面密度均为 $-\sigma(r)$ 。此外, 点电荷 q 所发出的电场线将全部终止于可视为无限大的导体板右表面, 这就是说, 该面上感应电荷的总量必为 $-q$ 。而导体板的左表面则无电荷分布。这是导体板接地的缘故。

由③式可知, 感应电荷在面上的分布是不均匀的, 靠近 O 点处电荷面密度较大, 而离 O 点越远则越小。但感应电荷在 P_2 点的场强与位于 x 轴上 $x = -d$ 处, 电量为 $-q$ 的点电荷在 P_2 点的场强完全一样。这就是说, 感应电荷在导体板右外侧(即 $x > 0$)区域的电场, 可用该点电荷的电场来等效。而该等效点电荷与 q 相对导体板右表面对称, 且电量等量异号, 这与平面镜成像的情况相类似, 故把等效电荷称为点电荷 q 的电像。由此即可得 q 受到感应电荷对它的作用力 F_q 为

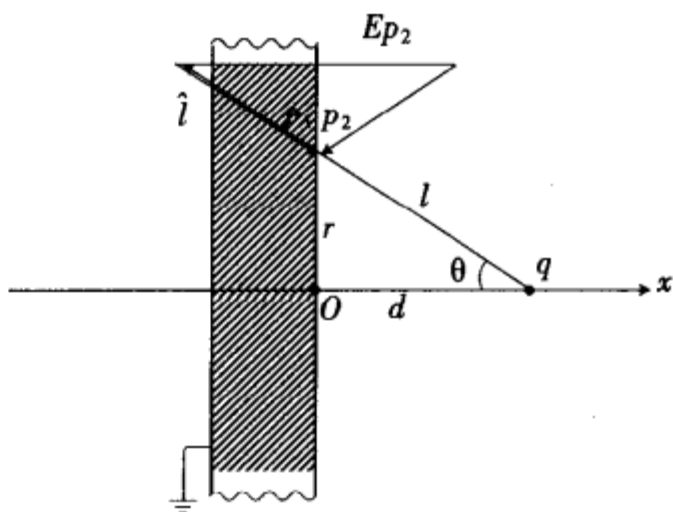
$$F_q = \frac{-kq^2}{4d^2} \hat{i} \quad (4)$$

若导体板不接地, 且不带电, 则其右表面上感应负电荷的分布与前述的一样, 同时还有总电量为 q 的正电荷将各一半均匀分布在左, 右两个表面上, 因为这种电荷分布使静电平衡条件与电荷守恒都得以满足。设导体板的面积为 S , 这些正电荷在两表面上的电荷面密度均为 $\sigma = \frac{q}{2S}$, 因此, 点电荷除受到感应负电荷对它的作用力以外, 还受到这些正电荷的作用力, 其合力 F'_q 为

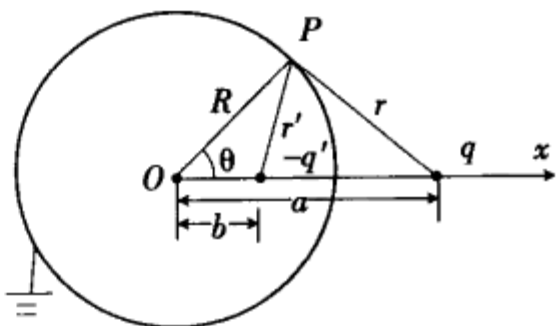
$$\begin{aligned} F'_q &= \left(4\pi k\sigma q - \frac{kq^2}{4d^2} \right) \hat{i} \\ &= \left(\frac{2\pi}{S} - \frac{1}{4d^2} \right) kq^2 \hat{i} \end{aligned}$$

例 9-13 一点电荷 q 置于一半径为 R 的接地导体球外, 与球心相距为 a ($a > R$), 试求空间电势的分布。

解: 取球心 O 为坐标原点, 球心指向点电荷 q 的方向为 x 轴方向。因球外点电荷 q 的存在, 使导体球表面有不均匀分布的感应负电荷, 由于导体球接地, 故感应负电荷在球面上的这种分布, 使它与点电荷 q 在球内任一点的合场强和合电势均为零。而感应负电荷在球外的场, 也可与上题一样, 用 q 在球内的“电像”的场来等效。设此“电像”点电荷的电量为 $-q'$, 位于 x 轴上 $x = b$ 的位置处。现考察球外无限靠近球面的 P 点, 如图例 9-13 所示。设 OP 与 x 轴夹角为 θ , P 与 q 和 $-q'$ 的距离分别为 r 和 r' 。由电势分布的连续性可知, P 点的电势就是导



图例 9-12



图例 9-13

体球面的电势,即为零.于是由电势叠加原理可得

$$U_P = \frac{kq}{r} - \frac{kq'}{r'}$$

$$= \frac{kq}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra \cos\theta}} - \frac{kq'}{\sqrt{R^2 + b^2 - 2Rb \cos\theta}}$$

由 $U_P = 0$, 即可得

$$q \sqrt{R^2 + b^2 - 2Rb \cos\theta} = q' \sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra \cos\theta}$$

两边平方得

$$q^2(R^2 + b^2) - 2q^2Rb \cos\theta = q'^2(R^2 + a^2) - 2q'^2Ra \cos\theta$$

由于所取 P 点所对应的 θ 角是任意的,故上式应对任意的 θ 值都成立,这就要求以下两式应同时成立:

$$\begin{cases} q^2(R^2 + b^2) = q'^2(R^2 + a^2) & \text{①} \\ 2qRb = 2q'Ra & \text{②} \end{cases}$$

联立①、②式,可解出

$$\begin{cases} q' = \frac{R}{a}q \\ b = \frac{R^2}{a} \end{cases}$$

由以上分析可知,整个空间的电势分布为:球内区域是电势为零的等势区;球外区域各点电势为点电荷 q 与它在 $x = b$ 处的“像”电荷 $-q'$ 在该点电势的代数和.

若导体球不接地,且原不带电,则球表面上除有上述不均匀分布的感应负电荷分布外,还有电量为 q' 的正电荷均匀分布,这些正电荷在球外的场可用电荷集中在球心的点电荷来等效,故球外任一点的电势等于点电荷 q ,及其位于 $x = b$ 处的“像”电荷 $-q'$ 和位于球心 O 处的点电荷 q' 在该点的电势的代数和,而球内区域仍为等势区,其电势值 $U_{内}$ 为

$$U_{内} = \frac{kq'}{R} = \frac{kq}{a}$$

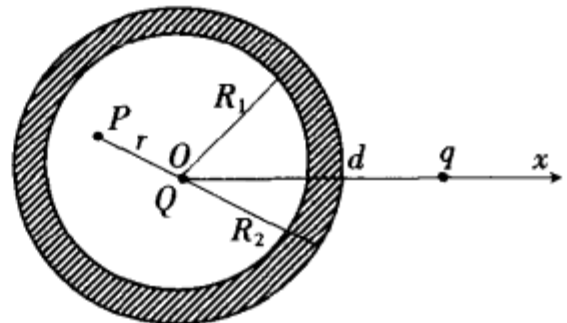
例 9-14 一不带电的导体球壳,其内、外半径分别为 R_1 、 R_2 ,在其球心 O 上置一点电荷 Q ,在球壳外距球心为 d 处置另一点电荷 q ,如图例 9-14 所示,试求:

- (1) 点电荷 Q 对球壳的作用力;
- (2) 点电荷 q 对球壳的作用力;
- (3) 球壳的电势以及球壳内与球心相距为 r ($r < R_1$) 的 P 点的电势;
- (4) 球壳接地时球壳上的电量.

解:(1) 由于球心有点电荷 Q ,则球壳内表面必有电荷 $-Q$,且是均匀分布.而球壳外的点电荷 q 的存在,由上题可知,则球壳外表面会有不均匀分布的感应负电荷 $-q' = \frac{-R^2}{d}q$ 出现.此外,还因球壳原不带电,故另有 $Q + q'$ 的正电荷均匀分布在外表面上.

设 O 与 q 的连线为 x 轴,取 O 指向 q 的方向为 x 正方向.要计算点电荷 Q 对球壳的作用力,只需计算球壳对 Q 的作用力即可.由以上分析可知,球壳上有三种电荷分布,其中内表面上的 $-Q$ 和外表面上 $Q + q'$ 两种电荷都是均匀分布,由于球面上均匀分布的电荷,在球内的场强为零,故这两种电荷对 Q 的作用力为零.而不均匀分布的感应负电荷 $-q'$ 与点电荷 q 在球壳内(包括空腔内)各点的合场强均为零,这就是说 $-q'$ 在球心 O 点的场强与点电荷 q 在该点的场强等值反向,故 $-q'$ 对 Q 的作用力为

$$F_{-q' \rightarrow Q} = \frac{kQq}{d^2} \mathbf{i}$$



图例 9-14

此力即为球壳对点电荷 Q 的作用力。根据牛顿第三定律,点电荷 Q 对球壳的作用力 $F_{Q \rightarrow \text{壳}} = -F_{-q' \rightarrow Q}$,故

$$F_{Q \rightarrow \text{壳}} = \frac{-kQq}{d^2} \hat{i}$$

(2)与(1)小题一样,要计算点电荷 q 对球壳的作用力,只需计算球壳对 q 的作用力。球壳内表面上的 $-Q$ 和外表面上 $Q+q'$ 两种均匀分布的电荷在球壳外的场可用电荷集中在球心处的点电荷的场等效,故此点电荷的电量为 q' ,它对点电荷 q 的作用力为

$$F_{q' \rightarrow q} = \frac{kqq'}{d^2} \hat{i} \quad (1)$$

球壳外表面上不均匀分布的感应负电荷 $-q'$ 在球壳外的场,可用位于 $x = \frac{R_2^2}{d}$ 处,电量为 $-q'$ 的点电荷的场等效,故它对点电荷 q 的作用力为

$$F_{-q' \rightarrow q} = \frac{-kqq'}{\left(d - \frac{R_2^2}{d}\right)^2} \hat{i} = \frac{-kqq'd^2}{(d^2 - R_2^2)^2} \hat{i} \quad (2)$$

把①、②式中的两个力相加即可得球壳对 q 的作用力。而 q 对球壳的作用力与此力等值反向,故为

$$\begin{aligned} F_{q \rightarrow \text{壳}} &= -(F_{q' \rightarrow q} + F_{-q' \rightarrow q}) \\ &= \left(\frac{-kqq'}{d^2} + \frac{kqq'd^2}{(d^2 - R_2^2)^2} \right) \hat{i} \end{aligned} \quad (3)$$

把 $q' = \frac{R_2}{d}q$ 代入③式,得

$$F_{q \rightarrow \text{壳}} = \left(\frac{R_2}{d} \right)^3 \frac{(2d^2 - R_2^2)}{(d^2 - R_2^2)^2} kq^2 \hat{i}$$

(3)球壳的电势等于空间各电荷在球壳处的电势的代数和。首先,由于球壳内表面上均匀分布的电荷 $-Q$ 在该球面外的场可用球心处的点电荷 $-Q$ 的场等效,故它与球心处的点电荷 Q 共同在球壳处的合电势为零。其次,球壳外点电荷 q 与球壳外表面上不均匀分布的感应负电荷 $-q'$ 在外表面以内区域的合场强为零。若设想球壳接地,且球心处的电荷 Q 也不存在,则球壳上只剩 $-q'$ 的电荷,此时球壳电势为零,这说明 q 与 $-q'$ 在球壳内的合电势也为零。因此,球壳的电势就是球壳外表面上均匀分布的电荷 $Q+q'$ 在球壳处的电势。而均匀带电的球面在球内区域的场为等势区,故只需计算球心处的电势,于是,球壳的电势为

$$U_{\text{壳}} = \frac{k(Q+q')}{R_2} = \frac{kQ}{R_2} + \frac{kq}{d} \quad (4)$$

球壳外点电荷 q 与球壳外表面上不均匀分布的电荷 $-q'$ 对球壳空腔内 P 点电势的合贡献同样为零,而外表面上均匀分布的电荷 $Q+q'$ 在 P 点的电势与球心处的电势相等,即由④式所表示之值,球壳内表面上的电荷 $-Q$,由于也是均匀分布,故它对 P 点电势的贡献也与它在球心处的电势相同,由此可得 P 点电势为

$$U_P = \frac{kQ}{r} - \frac{kQ}{R_1} + \frac{kQ}{R_2} + \frac{kq}{d}$$

(4)当球壳接地时,则由静电平衡条件可知,球壳内表面上的电荷 $-Q$ 以及外表面上的不均匀分布的电荷 $-q'$ 分布不变,只是外表面上的电荷 $Q+q'$ 沿接地线流入大地,因此球壳上带电为

$$Q_{\text{壳}} = -(Q+q') = -\left(Q + \frac{R_2}{d}q\right)$$

例 9-15 两个半径均为 R 的导体球相互接触形成一孤立导体,求此孤立导体的电容 C 。

解:将电量为 Q 的电荷加在此孤立导体上,由于此导体不像一个导体球那样具有球对称性,故电荷在两球面上的分布并不均匀,很难求出此导体的电势 U_0 。为此,可采用例 9-13 中所述的镜像法,将两

球面上不均匀分布的电荷在球外的场,用一系列点电荷对的场来等效替代,并用逐步逼近的方法,使这些点电荷对在两球上的电势逐步趋近并准确达到 U_0 的同时,使这些点电荷对的电量总和也达到 Q . 这样 Q 与 U_0 的比值即为此孤立导体的电容 C .

首先在两球心处设置一对点电荷 q_1 , 其实就是假设将电荷 q_1 均匀分布在两球面上,并使电量 q_1 为

$$q_1 = \frac{RU_0}{k}$$

即每个点电荷 q_1 在自己球内产生的电势为 U_0 ,但在另一球内产生了附加电势,为了消除此附加电势,需在另一球内设置第二对点电荷 q_2 ,并使电量 q_2 为

$$q_2 = -\frac{R}{2R}q_1 = -\frac{1}{2}q_1$$

q_2 相当于因球外点电荷 q_1 的存在而使导体球表上感应出不均匀分布的负电荷的像电荷,此像电荷与球心的距离 b_2 为

$$b_2 = \frac{R^2}{2R} = \frac{1}{2}R$$

这样,每一个点电荷 q_1 与另一球上的点电荷 q_2 在另一球上的合电势为零. 同样,这一对点电荷 q_2 又会在各自对方的球内产生附加电势,于是还需设置第三对点电荷 q_3 ,电量 q_3 和设置点到球心距离 b_3 分别为

$$q_3 = -\frac{R}{2R - b_2}q_2 = \frac{1}{3}q_1$$

$$b_3 = \frac{R^2}{2R - b_2} = \frac{2}{3}R$$

于是,为消除上一对点电荷在对方球内产生的附加电势,就需不断设置点电荷对,不过,所设置的点电荷对的电量将越来越小,位置也越来越靠近两球接触点,这表明这些点电荷对在对方球内产生的附加电势将越来越小,直至趋于零. 设第 n 对点电荷的电量为 q_n ,其位置到球心距离为 b_n ,由递推关系可得

$$\begin{cases} q_n = -\frac{R}{2R - b_{n-1}}q_{n-1} & \text{①} \\ b_n = \frac{R^2}{2R - b_{n-1}} & \text{②} \end{cases}$$

将①式除以②式,得

$$b_n = -\frac{Rq_n}{q_{n-1}} \quad \text{③}$$

同理可得

$$b_{n-1} = -\frac{Rq_{n-1}}{q_{n-2}} \quad \text{④}$$

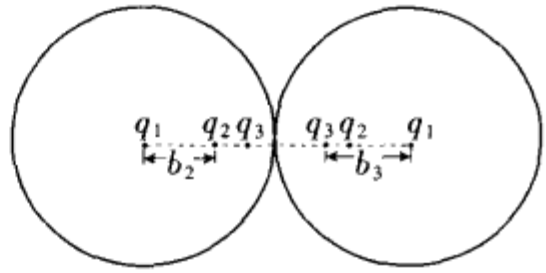
将③、④式代入②式,得

$$-\frac{Rq_n}{q_{n-1}} = \frac{R^2}{2R + \frac{Rq_{n-1}}{q_{n-2}}}$$

即

$$\frac{1}{q_n} + \frac{2}{q_{n-1}} + \frac{1}{q_{n-2}} = 0 \quad \text{⑤}$$

已知 $q_2 = -\frac{1}{2}q_1$, $q_3 = \frac{1}{3}q_1$, 则利用⑤式的关系可求得



图例 9-15

$$q_4 = -\frac{1}{4}q_1$$

同样可求得 $q_5 = \frac{1}{5}q_1$, 并可得到

$$q_n = (-1)^{n+1} \left(\frac{q_1}{n} \right)$$

这些所设置的点电荷对的总电量应等于此孤立导体上所加之电量 Q , 即

$$Q = 2 \sum_{n=1}^{\infty} q_n = 2 \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \right) q_1$$

应用公式 $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$, 并将 $q_1 = \frac{RU_0}{k}$ 代入上式, 得

$$Q = \frac{2RU_0 \ln 2}{k}$$

于是, 此孤立导体的电容 C 为

$$C = \frac{Q}{U_0} = \frac{2R \ln 2}{k}$$

例 9-16 在图例 9-16a 所示的电路中各电容器的电容均为 C , 试分别求 a, b 间, a, c 间和 a, d 间的等效电容 C_{ab} , C_{ac} 和 C_{ad} .

解: 对于 a, b 间的等效电容, 七个电容成简单的串、并联关系. 首先 C_4, C_5, C_6 三电容串联, 其等效电容 $C_{ef}' = \frac{C}{3}$, 再与 C_3 并联后的等效电容 $C_{ef} = \frac{C}{3} + C = \frac{4}{3}C$, 然后与 C_2, C_7 串联, 则等效电容 C_{ab}' 为

$$\frac{1}{C_{ab}'} = \frac{1}{C_{ef}} + \frac{1}{C} + \frac{1}{C}$$

$$C_{ab}' = \frac{4}{11}C$$

a, b 间的等效电容 C_{ab} 为 C_{ab}' 与 C_1 的并联, 由此可得

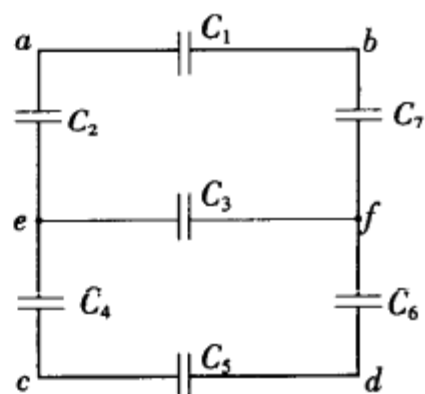
$$C_{ab} = C_{ab}' + C = \frac{15}{11}C$$

对于 a, c 间的等效电容, 七个电容并非成简单的串、并联关系. 但若在 a, c 两点加上电压, 则由电路的对称性可知, e, f 两点为等势点, 即电容 C_3 上无电荷, 故可除去 C_3 , 其等效电路如图例 9-16b 所示. 由图可知 C_1, C_7, C_6, C_5 四容串联的等效电容 $C_{ac}' = \frac{C}{4}$, C_2 与 C_4 串联的等效电容 $C_{ac}'' = \frac{C}{2}$, 故 a, c 间的等效电容 C_{ac} 为 C_{ac}' 与 C_{ac}'' 的并联, 即

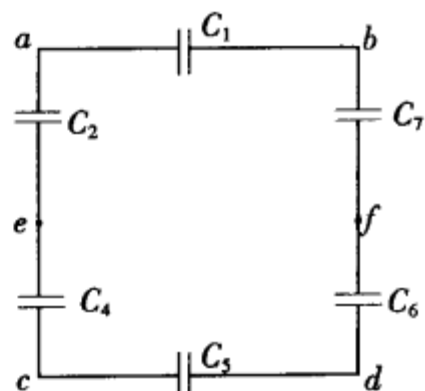
$$C_{ac} = C_{ac}' + C_{ac}'' = \frac{3}{4}C$$

求 a, d 间等效电容时, 可把电路改画成图例 9-16c 所示的形状, 其中 C_{17} 为 C_1 和 C_7 的串联, C_{45} 为 C_4 和 C_5 的串联, 并有 $C_{17} = C_{45} = \frac{C}{2}$. 由于电路无高度对称性, 不能像求 C_{ac} 时那样把电路简化成各电容的串、并联关系. 为此, 可在 a, b 两点加上电压 U , 使各电容器充电, 设从 a, b 两点流入电路的电荷量分别为 $+Q$ 和 $-Q$, 并设 C_{17}, C_2 和 C_3 极板上的电荷量分别为 Q_1, Q_2 和 Q_3 . 由电路的对称性可知 C_{45} 和 C_6 上的电量各为 Q_1 和 Q_2 , 各电容器极板的极性如图所示.

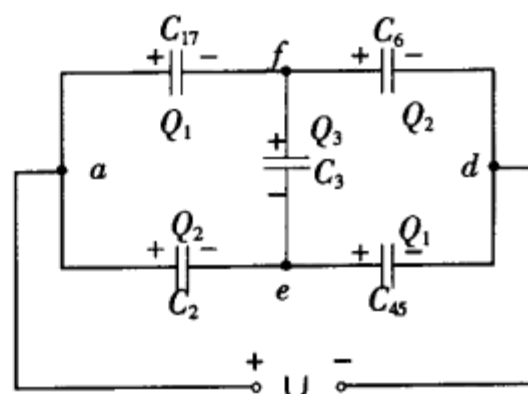
由 a 点流入电路的电荷 Q , 一部分流入 C_{17} , 另一部分流入



图例 9-16a



图例 9-16b



图例 9-16c

C_2 , 故有

$$Q = Q_1 + Q_2 \quad \text{①}$$

由 C_1, C_3, C_6 三电容在 f 点连接的三个极板上的总电量为零, 可得

$$-Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0 \quad \text{②}$$

由 a 点出发沿 $afea$ 方向一圈各电容的电压总和为零, 可得

$$\frac{Q_1}{C/2} + \frac{Q_3}{C} - \frac{Q_2}{C} = 0 \quad \text{③}$$

联立①、②、③式, 可解得

$$Q_1 = \frac{2}{5}Q, \quad Q_2 = \frac{3}{5}Q$$

由于

$$U = U_{af} + U_{fa} = \frac{Q_1}{C/2} + \frac{Q_2}{C} = \frac{7Q}{5C}$$

故

$$C_{ad} = \frac{Q}{U} = \frac{5}{7}C$$

例 9-17 一平行板电容器, 电容 $C_0 = 300\text{pF}$, 极板 A_1 接在一电源的正极, A_2 接在另一电源的负极, 两电源的电动势均为 150V , 另一极均接地. 取一厚金属板 B , 其面积与 A_1 及 A_2 相同, 厚度为电容器两极板间距的 $\frac{1}{3}$, 插入电容器两极板的正中央, 如图例 9-17 所示.

(1) 取一电动势为 50V 的电源 E , 负极接地, 将其正极与金属板 B 相连, 问此时由电源 E 输送到金属板 B 的总电量是多少?

(2) 在上述情况下, 左右平移金属板 B , 改变它在电容器两极板间的位置, 使 B 板上的电量全部送回电源时, 固定 B 板的位置, 然后切断所有三个电源, 并将 B 板从电容器中抽出. 求这时电容器两极板 A_1, A_2 之间的电压.

解: 设金属板 B 与 A_1 和 A_2 相对的面分别为 B_1 和 B_2 , 如图所示. 则 A_1, B_1 和 B_2, A_2 分别形成两电容器, 设它们的电容分别为 C_1, C_2 , 由于这两电容器的极板面积与原电容器的极板面积相同, 而极板间的距离为原电容器的 $\frac{1}{3}$, 故此两电容器的电容为原电容器电容的 3 倍, 即有

$$C_1 = C_2 = 3C_0$$

(1) 当电源 E 接入后, 电容器 A_1B_1 两极板间的电压 U_1 为

$$U_1 = 150 - 50 = 100\text{V}$$

因此 B_1 面上的电量 q_1 为

$$q_1 = -C_1 U_1 = -300C_0$$

同理, 电容器 B_2A_2 两极板间的电压 U_2 为

$$U_2 = 50 - (-150) = 200\text{V}$$

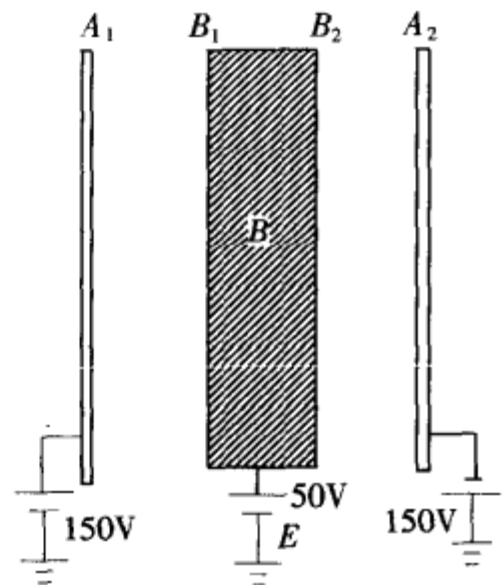
故 B_2 面上的电量 q_2 为

$$q_2 = C_2 U_2 = 600C_0$$

电源 E 输给金属板 B 的总电量 Q 为

$$Q = q_1 + q_2 = 300C_0 = 9 \times 10^{-8}\text{C}$$

(2) 改变 B 板在电容器两极板间的位置, 即改变了电容器 A_1B_1 和 B_2A_2 的电容, 从而也改变了



图例 9-17

B_1, B_2 面上的电量, 当两面上的电量之和为零时, 即是将电源 E 输入的电量全部送回电源 E . 设此时 B_1 和 B_2 面上的电量分别为 $-q$ 和 q , 电容器 A_1B_1 和 B_2A_2 的电容分别为 C_1' 和 C_2' . 由于移动 B 板时电压并不改变, 故有

$$q = C_1'U_1 = C_2'U_2$$

由此得

$$\frac{C_1'}{C_2'} = \frac{U_2}{U_1}$$

设此时 A_1, B_1 间和 B_2, A_2 间的距离分别为 d_1 和 d_2 , 并设 A_1, A_2 间的距离为 d , 则

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{C_1'}{C_2'} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{200}{100} = 2 \quad ①$$

又由题意得

$$d_1 + d_2 = \frac{2}{3}d \quad ②$$

由①、②两式, 解得

$$d_1 = \frac{2}{9}d, \quad d_2 = \frac{4}{9}d$$

由此得

$$C_1' = \frac{9}{2}C_0, \quad C_2' = \frac{9}{4}C_0$$

此时 A_1 板与 A_2 板所带电量分别为 q 和 $-q$, 其值为

$$q = C_1'U_1 = \frac{9}{2}C_0 \times 100 = 450C_0$$

切断三个电源后, A_1, A_2 板上的电量不变, 故抽出 B 板后, 电容器 A_1A_2 上的电压为

$$U = \frac{q}{C_0} = 450V$$

例 9-18 三块面积均为 S 的相同的导体板 A, B, C 平行放置, A, B 间和 B, C 间的距离分别为 d_1 和 d_2 , A 板上带正电 Q , B, C 板不带电, 一电压为 U 的电池的正、负极分别接在 C, B 板上, 再用导线连接 A, C 板, 如图例 9-18a 所示. 试求各板上的电量.

解:(解法 I) 设 A, B, C 三板上的电量分别为 q_A, q_B, q_C , 将三板均看成无限大带电平面, 则由场强叠加原理可得 A, B 板间和 B, C 板间的电场强度 E_{AB} 和 E_{BC} 分别为

$$E_{AB} = \frac{2\pi k}{S}(q_A - q_B - q_C) \quad ①$$

$$E_{BC} = \frac{2\pi k}{S}(q_A + q_B - q_C) \quad ②$$

由于 A, C 板用导线连接, 故 A, C 板电势相等, 因此 A, B 板间和 C, B 板间的电势差均为 U , 即有

$$U_A - U_B = E_{AB}d_1 = U \quad ③$$

$$U_C - U_B = -E_{BC}d_2 = U \quad ④$$

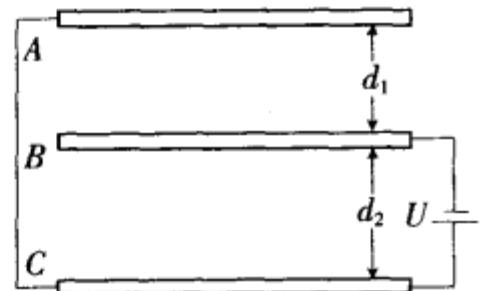
将①、②式分别代入③、④式得

$$\frac{2\pi k}{S}(q_A - q_B - q_C) = U \quad ⑤$$

$$-\frac{2\pi k}{S}(q_A + q_B - q_C) = U \quad ⑥$$

根据电荷守恒定律可得

$$q_A + q_B + q_C = Q \quad ⑦$$



图例 9-18a

由⑤、⑥、⑦式可解得

$$q_A = \frac{Q}{2} + \frac{US}{4\pi kd_1}, \quad q_B = -\frac{US}{4\pi k} \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} \right), \quad q_C = \frac{Q}{2} + \frac{US}{4\pi kd_2}$$

(解法 II) 设三块板共六个面上的电荷面密度分别为 σ_1 、 σ_2 、 $-\sigma_2$ 、 $-\sigma_3$ 、 σ_3 和 σ_4 , 如图例 9-18b 所示. 由高斯定理可求得 A、B 板间和 C、B 板间的电场强度分别为

$$E_{AB} = 4\pi k\sigma_2, \quad E_{CB} = 4\pi k\sigma_3,$$

由解法 I 中分析得

$$U = U_A - U_B = E_{AB}d_1 = 4\pi k\sigma_2d_1 \quad (8)$$

$$U = U_C - U_B = E_{CB}d_2 = 4\pi k\sigma_3d_2 \quad (9)$$

由⑧、⑨式, 可得

$$\sigma_2 = \frac{U}{4\pi kd_1}, \quad \sigma_3 = \frac{U}{4\pi kd_2}$$

由导体静电平衡条件可得

$$\sigma_1 = \sigma_4 \quad (10)$$

根据电荷守恒定律, 有

$$(\sigma_1 + \sigma_4)S = Q \quad (11)$$

联立⑩、⑪式, 可解得

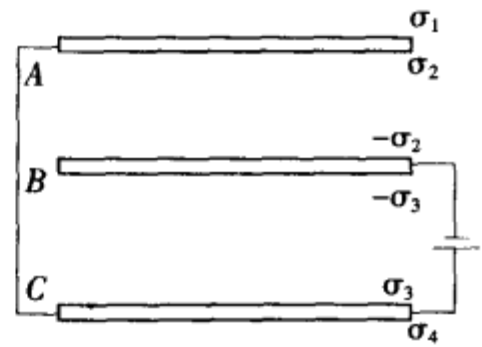
$$\sigma_1 = \sigma_4 = \frac{Q}{2S}$$

由此可得 A、B、C 三板上的电量分别为

$$q_A = (\sigma_1 + \sigma_2)S = \frac{Q}{2} + \frac{US}{4\pi kd_1}$$

$$q_B = (-\sigma_2 - \sigma_3)S = -\frac{US}{4\pi k} \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} \right)$$

$$q_C = (\sigma_3 + \sigma_4)S = \frac{Q}{2} + \frac{US}{4\pi kd_2}$$



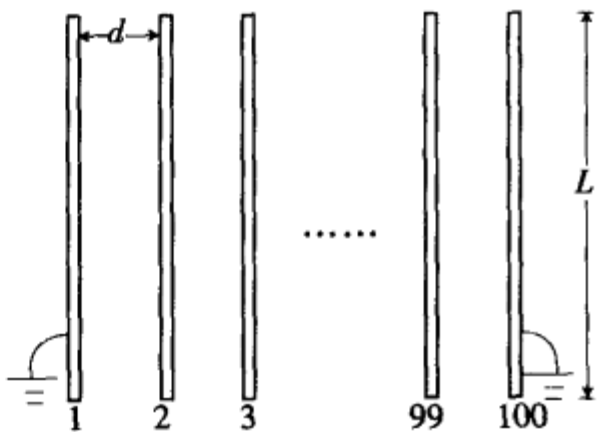
图例 9-18b

例 9-19 有 100 块平行放置的正方形大导体板, 每块边长均为 L , 相邻两板彼此相对的两个表面的间距均为 d , $d \ll L$, 将这些导体板从左至右顺次编号为 1, 2, ..., 100, 开始每板上都带有净电荷, 已知第一块板上的净电量为 q_1 (设 $q_1 > 0$), 第 n 块板上的净电量为 $q_n = nq_1$, 今将第一块和第 100 块导体板接地, 如图例 9-19a 所示. 忽略边缘效应. 问

(1) 从第 1 块和第 100 块导体板上流入大地的电量 Δq_1 和 Δq_{100} 各为 q_1 的多少倍?

(2) 上述两板接地后哪块板上的电势最高? 其电势是多少?

解: (解法 I): (1) 第 1 块和第 100 块导体板接地并达静电平衡后, 第 1 块板左侧面和第 100 块板右侧面上的电量均为零, 即 $Q_{1左} = Q_{100右} = 0$, 其余各板侧面上的电荷分布应满足以下几点: (i) 因 $d \ll L$, 忽略边缘效应, 则各板侧面上的电荷为均匀分布; (ii) 相邻两板相对侧面上的电量大小相等, 符号相反; (iii) 因电荷守恒, 则第 n ($2 \leq n \leq 99$) 块板两侧面上电量总和等于 q_n .



图例 9-19a

设第 1 块板右侧面上的电量 $Q_{1右} = -Q_0$, 则按上述电荷分布原则, 各板侧面上的电量分别为

$$\left. \begin{aligned}
 Q_{1左} &= 0 & Q_{1右} &= -Q_0 \\
 Q_{2左} &= Q_0 & Q_{2右} &= -Q_0 + q_2 \\
 Q_{3左} &= Q_0 - q_2 & Q_{3右} &= -Q_0 + q_2 + q_3 \\
 &\dots & &\dots \\
 Q_{n左} &= Q_0 - q_2 - q_3 - \dots - q_{n-1} & Q_{n右} &= -Q_0 + q_2 + q_3 + \dots + q_n \\
 &\dots & &\dots \\
 Q_{99左} &= Q_0 - q_2 - q_3 - \dots - q_{98} & Q_{99右} &= -Q_0 + q_2 + q_3 + \dots + q_{99} \\
 Q_{100左} &= Q_0 - q_2 - q_3 - \dots - q_{99} & Q_{100右} &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

相邻两板相对侧面构成一平行板电容器,且各电容器的电容值相等,均为

$$C = \frac{L^2}{4\pi kd} \quad (2)$$

取地为零电势,各板上的电势从左至右依次记为 U_1, U_2, \dots, U_{100} , 则 $U_1 = U_{100} = 0$. 相邻两板的电势差各为

$$\left. \begin{aligned}
 U_2 - U_1 &= \frac{Q_{2左}}{C} \\
 U_3 - U_2 &= \frac{Q_{3左}}{C} \\
 &\dots \\
 U_n - U_{n-1} &= \frac{Q_{n左}}{C}
 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

将③中各式的左、右两边分别相加得

$$U_n = \frac{1}{C} (Q_{2左} + Q_{3左} + \dots + Q_{n左}) \quad (2 \leq n \leq 100) \quad (4)$$

将①式及 $q_n = nq_1$ 代入④式,注意到数据间的规律,可得

$$\begin{aligned}
 U_n &= \frac{1}{C} \{ (n-1)Q_0 - (n-2)q_2 - (n-3)q_3 - \dots - [n - (n-1)]q_{n-1} \} \\
 &= \frac{1}{C} \{ (n-1)Q_0 - (n-2) \cdot 2q_1 - (n-3) \cdot 3q_1 - \dots - [n - (n-1)] \cdot (n-1)q_1 \} \\
 &= \frac{1}{C} \{ (n-1)Q_0 - n[2+3+\dots+(n-1)]q_1 + [2^2+3^2+\dots+(n-1)^2]q_1 \} \\
 &= \frac{1}{C} \left\{ (n-1)Q_0 - \left[\frac{n(n+1)(n-2)}{2} - \frac{(n-1)n(n-2)}{6} + 1 \right] q_1 \right\}
 \end{aligned} \quad (5)$$

以上最后一步应用了求和公式:

$$\begin{aligned}
 1+2+3+\dots+n &= \frac{1}{2}n(n+1) \\
 1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)
 \end{aligned} \quad (6)$$

由于 $U_{100} = 0$, 将此条件代入⑤式,得

$$99Q_0 - \left[\frac{100 \times 101 \times 98}{2} - \frac{99 \times 100 \times 199}{6} + 1 \right] q_1 = 0$$

$$\text{可解得: } Q_0 = \frac{5047}{3} q_1 \quad (7)$$

由此可得第 1 块板流入大地的电量 Δq_1 为

$$\Delta q_1 = q_1 - (Q_{1左} + Q_{1右}) = q_1 + Q_0 = \frac{5050}{3} q_1$$

第 100 块板流入大地的电量 Δq_{100} 为

$$\Delta q_{100} = q_{100} - (Q_{100左} + Q_{100右})$$

$$\begin{aligned}
 &= q_{100} - (Q_0 - q_2 - q_3 - \cdots - q_{99}) \\
 &= (2 + 3 + \cdots + 100)q_1 - \frac{5047}{3}q_1 \\
 &= \frac{10100}{3}q_1
 \end{aligned}$$

(2) 设第 n 块板的电势最高, 则该板两侧面上的电荷都应是正电荷, 故有

$$Q_{n左} > 0, Q_{n右} > 0$$

即

$$\begin{cases} Q_0 - q_2 - q_3 - \cdots - q_{n-1} > 0 \\ -Q_0 + q_2 + q_3 + \cdots + q_n > 0 \end{cases}$$

亦即

$$\begin{cases} \frac{5047}{3}q_1 - \frac{(n+1)(n-2)}{2}q_1 > 0 & \text{⑧} \\ -\frac{5047}{3}q_1 + \frac{(n+2)(n-1)}{2}q_1 > 0 & \text{⑨} \end{cases}$$

由⑧、⑨两不等式, 可解得

$$57.5 < n < 58.5 \quad \text{⑩}$$

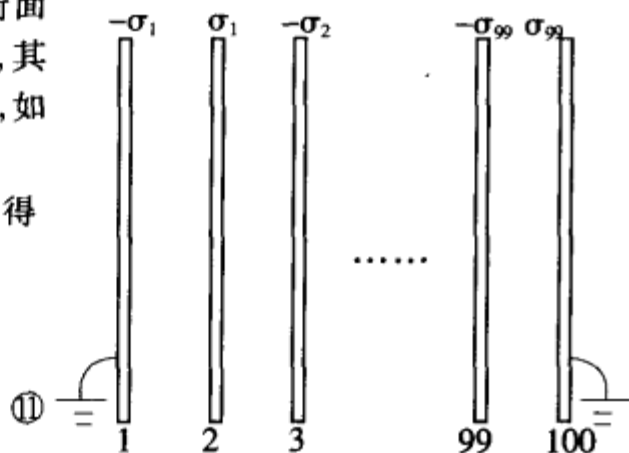
满足⑩式不等式关系的 n 整数值为 58, 即第 58 块板的电势最高, 由⑤、②式就可求得此最高电势为

$$\begin{aligned}
 U_{\max} = U_{58} &= \frac{4\pi kd}{L^2} \left[57Q_0 - \left(\frac{58 \times 59 \times 56}{2} - \frac{57 \times 58 \times 115}{6} + 1 \right) q_1 \right] \\
 &= 63441 \frac{4\pi kdq_1}{L^2}
 \end{aligned}$$

(解法 II) 当第 1 块板和第 100 块板接地并达静电平衡后, 除第 1 块板的左侧面和第 100 块板的右侧面上电量为零外, 其余各板侧面上都带电, 设它们的电荷面密度从左至右依次为 $-\sigma_1, +\sigma_1, -\sigma_2, +\sigma_2, \dots, -\sigma_{99}, +\sigma_{99}$, 其中第 n 块板左、右侧面的电荷面密度分别为 $+\sigma_{n-1}$ 和 $-\sigma_n$, 如图例 9-19b 所示.

(1) 除第 1 块板和第 100 块板外, 其余各板上电荷守恒, 得

$$\begin{cases} (\sigma_1 - \sigma_2)S = 2q_1 \\ (\sigma_2 - \sigma_3)S = 3q_1 \\ \dots \\ (\sigma_{n-1} - \sigma_n)S = nq_1 \\ \dots \\ (\sigma_{98} - \sigma_{99})S = 99q_1 \end{cases}$$



图例 9-19b

将⑪中前 $n-1$ 式左、右边分别相加, 得

$$\begin{aligned}
 (\sigma_1 - \sigma_n)S &= (2 + 3 + \cdots + n)q_1 \\
 &= \left[\frac{1}{2}n(n+1) - 1 \right] q_1
 \end{aligned} \quad \text{⑫}$$

由⑫式即可得

$$\sigma_n = \sigma_1 - \frac{q_1}{S} \left[\frac{1}{2}n(n+1) - 1 \right] \quad \text{⑬}$$

相邻两板间的场强从左至右依次为 $E_1 = 4\pi k\sigma_1, E_2 = 4\pi k\sigma_2, \dots, E_{99} = 4\pi k\sigma_{99}$. 由于第 1 块板和第 100 块板接地, 则这二块板的电势差为零, 故有

$$\begin{aligned}
 4\pi k(\sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_{99})d &= 0 \\
 \sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_n + \cdots + \sigma_{99} &= 0
 \end{aligned} \quad \text{⑭}$$

即

将⑬式改写成

$$\sigma_n = \sigma_1 + \frac{q_1}{S} - \frac{q_1}{2S}(n^2 + n) \quad \text{⑮}$$

分别把 $n=2, n=3, \dots, n=99$ 代入⑮式, 即可得 $\sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_{99}$, 将此代入⑭式, 得

$$99\sigma_1 + 98 \frac{q_1}{S} - \frac{q_1}{2S} [(2^2 + 3^2 + \dots + 99^2) + (2 + 3 + \dots + 99)] = 0$$

由此式及⑥中二式可得

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{99} \left[98 \frac{q_1}{S} - \frac{q_1}{2S} \left(\frac{1}{6} \times 99 \times 100 \times 198 - 1 \right) - \frac{q_1}{2S} \left(\frac{1}{2} \times 99 \times 100 - 1 \right) \right] \\ &= \frac{5047}{3} \frac{q_1}{S} \end{aligned} \quad (16)$$

把⑯式代入⑬式, 得

$$\sigma_{99} = 1682 \frac{1}{3} \frac{q_1}{S} - \frac{q_1}{S} \left(\frac{1}{2} \times 100 \times 99 - 1 \right) = \frac{10100}{3} \frac{q_1}{S} \quad (17)$$

由⑯和⑰式即可求得第 1 块板和第 100 块板流入大地的电量分别为:

$$\Delta q_1 = q_1 - (-\sigma_1 S) = \frac{5050}{3} q_1$$

$$\Delta q_{100} = 100q_1 - (\sigma_{99} S) = \frac{10100}{3} q_1$$

2. 设第 n 块板电势最高. 由以上分析可知, 从第 2 块板开始自左向右直至第 n 块板, 均是左侧面带正电、右侧面带负电, 相邻各板间的场强都是自右向左, 故自左向右各板电势依次升高, 但由⑮式可知, 自左向右各板电荷面密度则不断减小, 到第 $n+1$ 块板的左侧面若带负电, 则说明该板的电势已下降, 这样第 n 块板的电势最高, 因此有

$$\sigma_{n-1} > 0, \quad \sigma_n < 0$$

将⑬式代入得

$$\sigma_1 - \frac{q_1}{S} \left[\frac{1}{2} (n-1)n - 1 \right] > 0 \quad (18)$$

$$\sigma_1 - \frac{q_1}{S} \left[\frac{1}{2} n(n+1) - 1 \right] < 0 \quad (19)$$

将⑯式代入⑱式得

$$\frac{5050}{3} - \frac{1}{2} n(n-1) > 0$$

即

$$n^2 - n - \frac{10100}{3} < 0$$

解此不等式可得

$$n < 58.5 \quad (20)$$

将⑯式代入⑲式得

$$\frac{5050}{3} - \frac{1}{2} (n+1)n < 0$$

即

$$n^2 + n - \frac{10100}{3} > 0$$

可解得

$$n > 57.5 \quad (21)$$

综合⑳、㉑两式, 得

$$n = 58$$

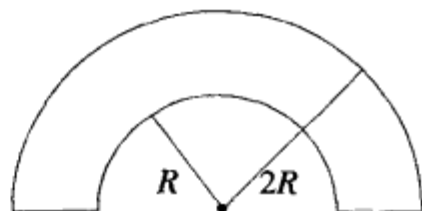
即第 58 块板电势最高, 此最高电势值为

$$\begin{aligned} U_{\max} &= U_{58} = 4\pi kd (\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_{57}) \\ &= 4\pi kd \left[57\sigma_1 + 57 \frac{q_1}{S} - \frac{q_1}{2S} \left(\frac{1}{6} \times 57 \times 58 \times 115 + \frac{1}{2} \times 57 \times 58 \right) \right] \\ &= 4\pi kd \left[57 \times \frac{5047}{3} \frac{q_1}{S} - \frac{q_1}{12S} \times 57 \times 58 \times (115 + 3) \right] \\ &= 63441 \times \frac{4\pi kdq_1}{L^2} \end{aligned} \quad (22)$$

本章习题

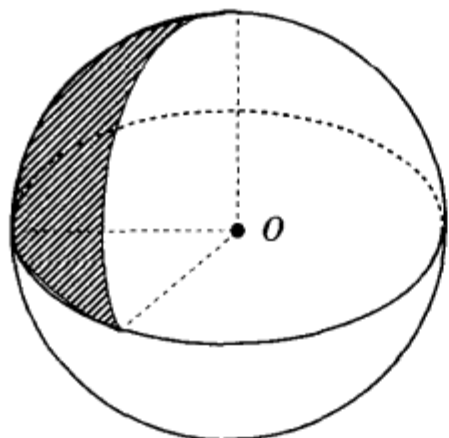
9.1 一无限大平面均匀带电,电荷面密度为 σ ,在平面上挖去一半径为 R 的圆,试求在过圆心 O 垂直于平面的轴线上与 O 点相距为 a 的 P 点的场强.

9.2 一半圆形扇面的内、外半径分别为 R 和 $2R$,如图习 9.2 所示.扇面均匀带电,电荷面密度为 σ ,试求圆心 O 点处的电场强度.[提示]



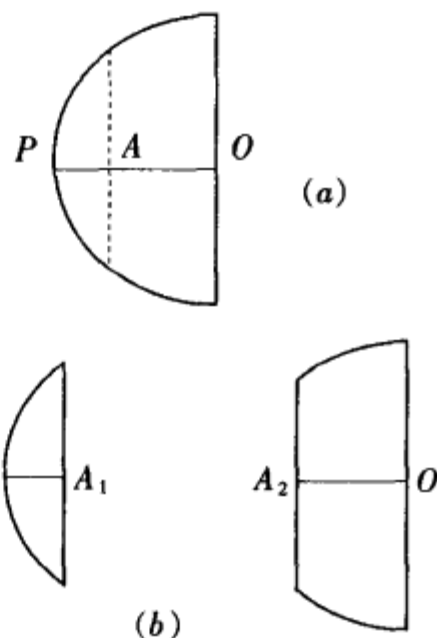
图习 9.2

9.3 一半径为 R 的圆球体内均匀带电,电荷体密度为 ρ ,将该球切成相等的八份,如图习 9.3 所示.试求其中的一份上的电荷在球心 O 点处产生的电场强度.[提示]



图习 9.3

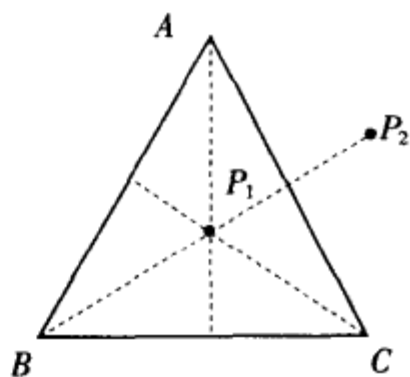
9.4 半径为 R 的半球面均匀带电,如图习 9.4 所示. OP 为过半球面对称轴线的半径,在 OP 上取一点 A ,使 $OA = 2AP$.现过 A 点沿平行于底面的方向将此半球面切成两块,然后将两块移至相距很远处,设 OA 块和 AP 块在各自切割面圆心 A_1 和 A_2 处产生的场强分别为 E_1 和 E_2 ,试比较 E_1 和 E_2 的大小.[提示]



图习 9.4

9.5 半径为 R 的圆环带有电量 Q ,已知圆环的某条直径上(除去两个端点外)所有点的场强均为零,试求环上电荷的分布.[提示]

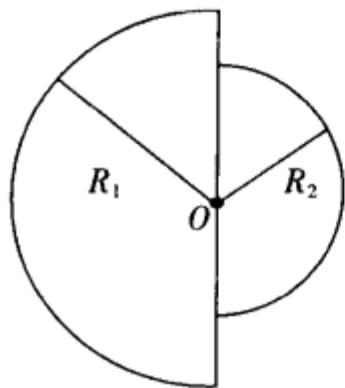
9.6 三根等长的带电绝缘细棒形成如图习 9.6 所示的等边三角形 ABC ,各棒中的电荷分布与将绝缘棒换成等长带电细导体棒时的电荷分布完全相同.图中 P_1 点为此正三角形的中点, P_2 点与 P_1 点相对 AC 边对称.已知 P_1 点的电势为 U_1 , P_2 点的电势为 U_2 ,现将 BC 棒取走,试求此时 P_1 点和 P_2 点的电势.



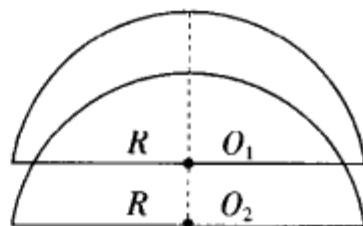
图习 9.6

9.7 半径分别为 R_1 和 R_2 ($R_1 > R_2$) 的两个同心半球面相对放置,如图习 9.7 所示.两个半球面均匀带电,电荷面密度分别为 σ_1 和 σ_2 .试求大的半球面所对应的底面圆直径上的电势分布.

9.8 两个半径为 R 的相同绝缘半球面上均匀带电,带电量均为 Q ,被如图习 9.8 所示地叠放在一起,它们的对称轴线重合,两球心间距离小于 R .已知一球心 O_1 点的电势为 U_0 ,试求另一球心 O_2 点的电势.



图习 9.7



图习 9.8

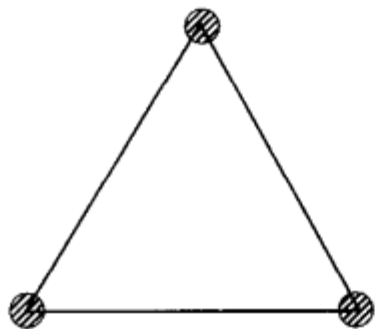
9.9 半径为 R 的半球面均匀带电,过同一直径切出一块两面角为 ϕ 的部分球面,该部分球面带有电量 q ,试求这些电荷产生的场在此直径上的电势分布.

9.10 两个质量和电量均相同的小球,位于同一竖直线上,其高度分别为 h_1 和 h_2 ($h_1 < h_2$). 两球以相同的速度 v ,向同一水平方向同时被抛出,当第一小球(抛出高度为 h_1)落到与抛出点水平距离为 l 的地面上时,求第二小球的高度.[提示]

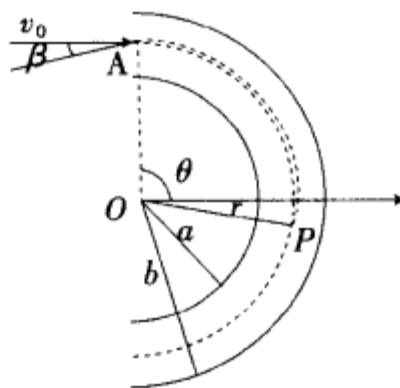
9.11 在空间 $-d \leq x \leq d$ 区域内电荷均匀分布,电荷体密度为 ρ ($\rho > 0$),其他区域均为真空.一质量为 m ,电量为 q ($q < 0$) 的带电质点从 $x = 2d$ 处自静止释放.试问经过多少时间它到达 $x = 0$ 位置.

9.12 三个质量均为 m ,电量均为 q 的相同导体小球,用三根长均为 l 的同样细绳连接,如图习 9.12 所示构成等边三角形,并置于光滑水平面上.现将其中一根绳剪断,试求以后运动过程中当一个小球的最大速度.

9.13 两个同轴的带电无限长半圆柱面,半径分别为 a 和 b ,其横截面如图习 9.13 所示.设在 $a < r < b$ 区域内只有径向电场,电势分布为 $U = k \ln \frac{b}{r}$,其中 k 为常量,由此电势分布可得出场强分布为 $E = \frac{k}{r}$.一质量为 m ,电量为 $-q$ ($q > 0$) 的带电粒子以初速 v_0 从图示 A 点的左方射入两柱面间, v_0 与人射处的端面垂直.



图习 9.12



图习 9.13

(1) 试问 v_0 为何值可使粒子沿半径为 r ($a < r < b$) 的半圆运动?

(2) 若入射方向与上述 v_0 偏离一个很小的角度 β ,其它条件不变,则粒子将偏离(1)中的半圆轨道,设新轨道与原半圆轨道相交于图中的 P 点.试证明,对于很小的角 β ,P 点的位置与 β 角的大小无关,并求出 P 点的方位角 $\angle AOP$ 的值.[提示]

9.14 在边长为 l 的正六边形的各顶点处置有固定点电荷,其中三个点电荷的电量为 $+Q$,另三个为 $-Q$,且 $+Q, -Q$ 相间地排列,如图习 9.14 所示.

(1) 试求此系统的静电相互作用势能;

(2) 若在外力作用下,将其中相邻的一对正、负电荷保持两者之间距离不变地缓慢移至无穷远处,而

其余电荷位置不变，试求外力作的功。

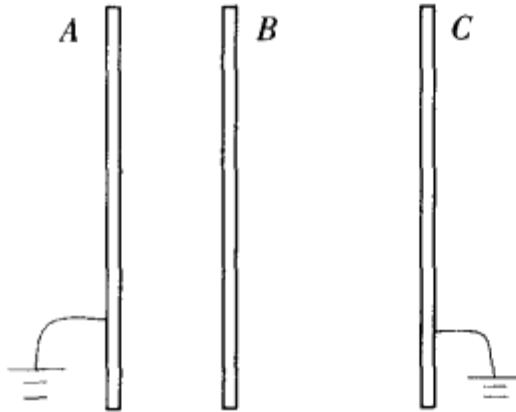
9.15 一金属球借助导电板从起电机上获得电荷，板在每次与球接触后又从起电机上带电至电量 Q ，如果金属球第一次与电量为 Q 的板接触后带电为 q ，求球可获得的最大电量。

9.16 两个半径均为 r 的带电小球 A 、 B ，各带有相同的电量 q ，两球相距 R (R 比 r 大得多)。先将 A 球接地，然后撤去接地线，再把 B 球接地，试求此时 A 球的电势。

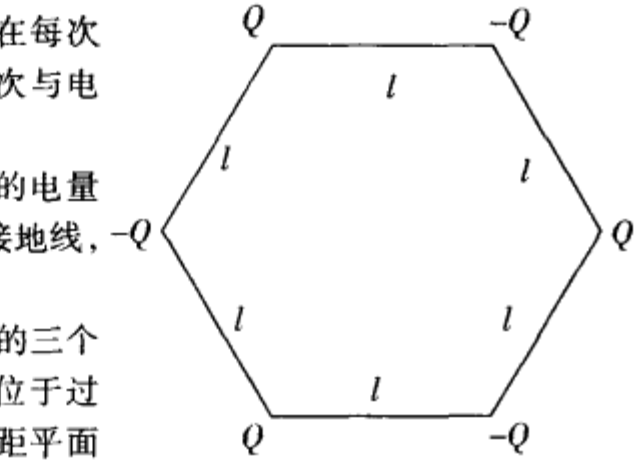
9.17 三个不带电的相同金属小球位于一等边三角形的三个顶点上，三角形的边长比小球的半径大很多。另一带电球位于过此等边三角形中点，垂直于三角形所在的平面的垂线上，且距平面较远。将三个小球用导线依次与带电球连接一次，结果第一个球连接后带电 q_1 ，第二个球连接后带电 q_2 ，试求第三个球连接后所带的电量。设带电球比小球大很多，使它每次与小球用导线连接后其所带电量可视为不变。

9.18 三块平行的导体板 A 、 B 、 C ，面积都是 200cm^2 ， A 、 B 相距 2.0mm ， B 、 C 相距 4.0mm 。已知 B 板上带正电，电量为 $3.0 \times 10^{-7}\text{C}$ ，而 A 、 C 两板均接地，如图习 9.18 所示。若忽略边缘效应，试求：

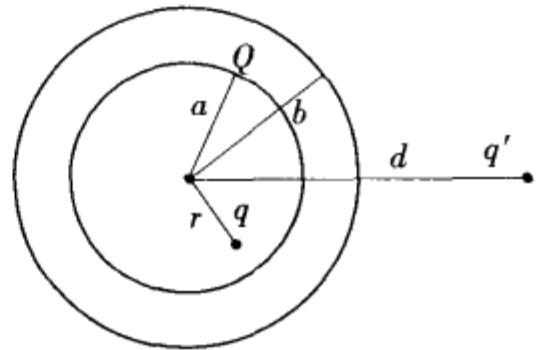
- (1) A 、 C 板各带多少电荷？
- (2) B 板的电势。



图习 9.18



图习 9.14



图习 9.19

9.19 内、外半径分别为 a 和 b 的导体球壳带电量为 Q ，在球腔内距球心 O 为 r ($r < a$) 处置一点电荷 q 。试求：

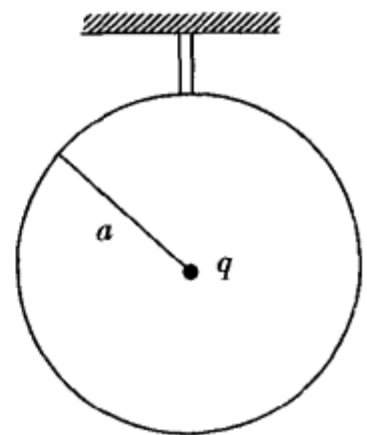
- (1) 球心 O 的电势 U_0 ；

(2) 若在球壳外距球心 O 为 d ($d > b$) 处再置一点电荷 q' ，如图习 9.19 所示。则 O 点电势的改变量 ΔU_0 为多大？[提示]

9.20 半径为 a 的导体薄球壳是由两个半球壳对接而成，用绝缘细线如图习 9.20 所示的那样悬挂，现将点电荷 q 置于球心处，并让球壳带电，试问为使两半球壳互不分离，则球壳上最多可带的电量为多少？[提示]

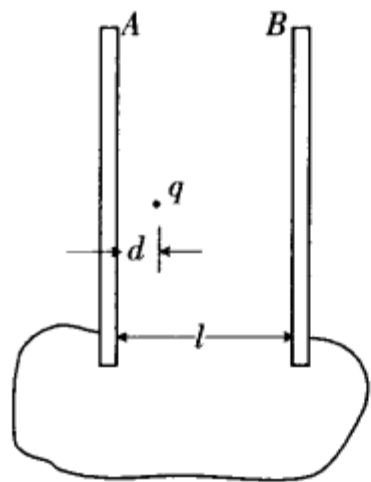
9.21 两块不带电的平行导体板 A 、 B 用导线连接，两板间距为 l (l 远小于板的线度)。在两板间距 A 板为 d 处置一点电荷 q ，如图习 9.21 所示。试问两块板各带多少电量？[提示]

9.22 如图习 9.22 所示，金属球壳上方与带有两个活栓的细长玻璃管连接，管壁外包有金属箔，金属箔与电池组的接地负极连接，管上方槽中的水银则与电池组的正极连接。开始时球壳内无水银且不带电，玻璃管下方活栓关闭，上方活栓打开，管内充满水银，然后关闭上方活栓，移去金属箔，再打开下方活栓，使管内水银注入球内。不断重复此过程，直至球内充满水

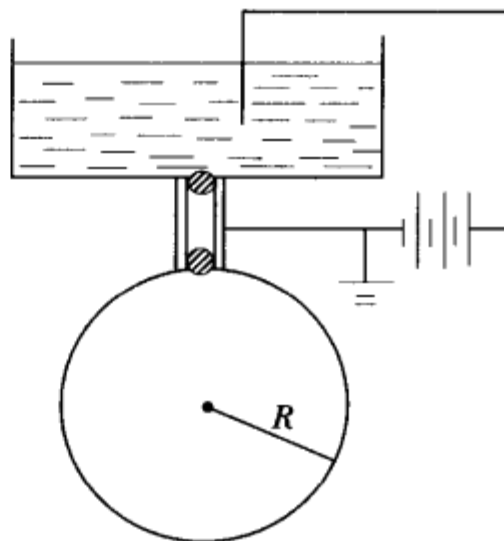


图习 9.20

银,已知电池组的电动势为 V ,玻璃的相对介电常数为 ϵ_r ,管半径为 r ,管壁厚为 d ,球壳半径为 R ,且 $d < r < R$. 试近似计算金属球壳最后相对于地的电势 U .



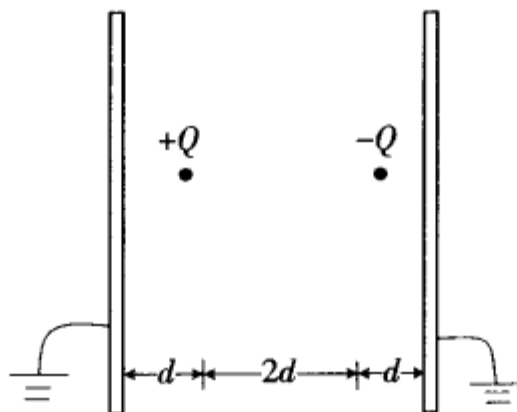
图习 9.21



图习 9.22

9.23 一半径为 R 的导体球的球心与一很大的接地导体平板相距为 d (d 比 R 大得多), 试求导体球与平板间的电容. [提示]

9.24 两块接地的无限大平行导体板相距 $4d$, 其间置有两个点电荷 $+Q$ 和 $-Q$, 分别与其中一块板相距 d 和 $3d$, 如图习 9.24 所示, 试求:



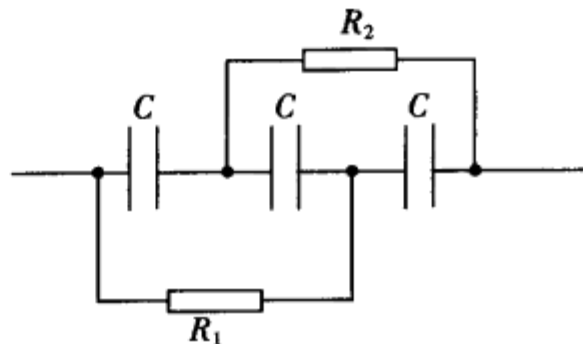
图习 9.24

- (1) 把两点电荷取出并分离到相距无限远过程中外力作的功;
- (2) 每个点电荷所受力的方向和大小;
- (3) 两点电荷对每块板总作用力的方向和大小;
- (4) 每块板受到总作用力的方向和大小;
- (5) 每块板上感应电荷量;
- (6) 移走点电荷 $-Q$ 后, 每块板上感应电荷量. [提示]

9.25 一平行板电容器极板面积为 S , 板间距离为 d , 两板与电压为 U 的电源连接. 现将两极板缓慢拉开至距离为 $2d$, 求此过程中外力做的功.

9.26 三个电容量均为 C 的电容, 串联后接到电动势为 ϵ 的电源上, 后与电源断开, 如图习 9.26 所示接上两个电阻 R_1 、 R_2 , 两电阻的阻值均为 R . 试求:

- (1) 每个电阻上释放的热量 Q 为多少?
- (2) 当中间的电容器电压减小到 $\frac{\epsilon}{10}$ 的瞬间流过两电阻的

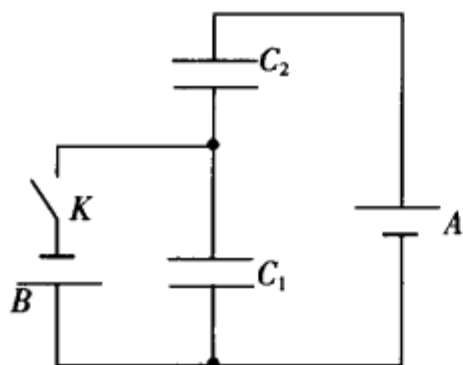


图习 9.26

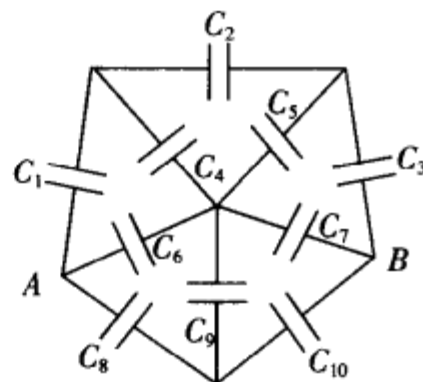
电流 i_1 和 i_2 .

9.27 如图习 9.27 所示的电路中, $C_1 = 2\mu\text{F}$, $C_2 = 3\mu\text{F}$, 两电源 A, B 的电动势分别为 $\epsilon_A = 10\text{V}$, $\epsilon_B = 6\text{V}$, 开始时, 电键 K 断开. 求在闭合电键 K 后, 通过电源 A 的电荷量 Q_A 和通过电源 B 的电荷量 Q_B .

9.28 在图习 9.28 所示的电容网络中, 已知 $C_1 = C_2 = C_3 = C_9 = 1\mu\text{F}$, $C_4 = C_5 = C_6 = C_7 = 2\mu\text{F}$, $C_8 = C_{10} = 3\mu\text{F}$. 试求 A, B 间的等效电容 C_{AB} .



图习 9.27



图习 9.28

稳恒电流

本章讨论直流电路的原理及其应用。首先引进描写电流强弱、分布等性质的物理量：电流强度和电流密度矢量，以及电流的连续性方程等。然后介绍导体的电阻，电源的电动势等概念，以及电路中的电流与电动势、电阻关系的一系列欧姆定律。直流电路可分为简单电路和复杂电路两类。简单电路是由若干个电阻和电源经串、并联构成。对于连接方式不能归结为简单串、并联关系的复杂电路，基尔霍夫方程组则是求解这类问题的基础。此外，还有一些电路定理和等效替代等，为简化复杂电路的求解提供了行之有效的方法。

§ 10.1 电流强度、电流密度与 电流的连续性方程

电荷的定向流动形成电流，形成电流的电荷称为载流子，金属的载流子是自由电子，而在酸、碱盐等电解质溶液中，形成电流的载流子则是正、负离子。在电解质溶液中有电流时，一般都伴随着化学反应，并有质量的迁移。

1. 电流强度

这是描述电流强弱的物理量。定义为单位时间内通过某一截面的电量，这是一个标量，可表示为

$$I = \frac{dq}{dt}$$

2. 电流密度

这是为精确描述导体中电流的分布而引入的物理量。电流密度是矢量，用 j 表示，其方向为导体中该点电流的方向，其大小等于通过该点与电流方向垂直的单位面积的电流强度。若导体中某点的电流密度为 j ，则通过该点的小面元 ds 的电流强度 $dI = j \cdot ds = j ds \cos \theta$ 。其中 θ 为 j 的方向与小面元 ds 法线方向间的夹角。通过任意截面 S 的电流强度为

$$I = \int_S j \cdot ds \quad (10.1-2)$$

j 与 I 的关系与上一章中电场强度 E 与电通量 Φ 的关系相仿。同样，与用电场线来描写电场中电场强度的分布一样，在电流场中用电流线来形象地描写电流密度的分布。

3. 电流的连续性方程

如果有电流通过任一封闭曲面 S ，则由电荷守恒可知，单位时间里 S 内电量的减少应等于单位时间里经 S 流出的电量，即可表示为

$$\oint_S j \cdot ds = -\frac{dq}{dt} \quad (10.1-3)$$

上式称为电流的连续性方程。对稳恒电流，其电流场不随时间变化，这就要求空间电荷分布不随时间变化，即 $\frac{dq}{dt} = 0$ ，于是

$$\oint_S j \cdot ds = 0$$

上式就是稳恒电流的连续性方程。它表明稳恒电流场的电流线是闭合的曲线，任一电流线连续地穿进

和穿出封闭曲线,故电流密度的通量必为零.

§ 10.2 欧姆定律

1. 欧姆定律的微分形式

当导体中存在电场时,就会在其中形成电流.实验表明:导体中某处的电流密度 j 与该处的电场强度 E 成正比,可表示为

$$j = \gamma E \quad (10.2-1)$$

比例系数 γ 称为导体的电导率,其单位是 $(\Omega \cdot \text{m})^{-1}$. 上式称为欧姆定律的微分形式. 它反映了导体内部任一点的电流密度与该点电场强度的关系.

电导率的倒数称为电阻率,用 ρ 表示

$$\rho = \frac{1}{\gamma} \quad (10.2-2)$$

电阻率的单位是 $\Omega \cdot \text{m}$.

2. 一段电路的欧姆定律 电阻

对一段长为 l ,粗细均匀,材料均匀的导线,若其截面积为 S ,电导率为 γ ,当两端面所加的电势差 $U_1 - U_2 = U$ 时,通过截面的电流密度 j 均匀,故电流强度 I 为

$$I = \int_s j \cdot ds = j \cdot s = js$$

将欧姆定律的微分形式 $j = \frac{1}{\rho} E$ 代入上式,有

$$I = js = \frac{1}{\rho} ES = \frac{1}{\rho} \frac{U}{l} S$$

于是得

$$U = U_1 - U_2 = \rho \frac{l}{S} I$$

设 $R = \rho \frac{l}{S}$, R 称为这段均匀导体的电阻. 则上式为

$$U = RI \quad (10.2-3)$$

这就是一段电路的欧姆定律.

3. 焦耳定律

当电流通过导体时,正电荷从高电势向低电势处运动,在此过程中,电场对电荷做功,单位时间内从电势 U_1 处流向 U_2 处的电量值为 I ,故所作的功,即电流的功率 P 为

$$P = I(U_1 - U_2) = IU \quad (10.2-4)$$

电场作的功将转变成其他形式的能量.若这段电路是一台电动机,则电能将转变成机械能.若这一段电路是一电池,则电能将转变成化学能.当这段电路是电阻为 R 的导体时,电能将转变为热能,根据一段电路的欧姆定律 $U = IR$,则电流的功率可表示为

$$P = I^2 R = \frac{U^2}{R} \quad (10.2-5)$$

(10.2-5)式称为焦耳定律.它表明:电流 I 通过电阻 R 时,单位时间内产生的焦耳热为 $I^2 R$,或若电阻 R 两端电压为 U 时,单位时间内产生的焦耳热为 $\frac{U^2}{R}$.

4. 全电路欧姆定律

(1)电源的电动势 由于静电场的作用只能使正电荷从高电势处向低电势处运动,而不能使其朝相

反方向运动,因此在电路中仅有静电场是不能维持稳恒电流的,这就是说,要形成稳恒电流电路中必须要有非静电场的作用,以使正电荷在静电力作用下从高电势处移动到低电势处时,在非静电力的作用下再运动至高电势处,这样稳恒电流才得以维持.凡能产生这类非静电力的装置称为电源.常见的电源有化学电源,温差电源等.

衡量电源非静电力做功本领的物理量为电源的电动势,用 ϵ 表示,其定义为把单位正电荷从电源负极经其内部移至正极时,非静电力所作的功.设非静电场的场强为 \mathbf{K} ,则可表示为

$$\epsilon = \int_{-}^{+} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{l} \quad (10.2-6)$$

(电源内部)

表征电源性能的另一主要参量是电源的内阻,用 r 表示.

(2) 全电路欧姆定律

当闭合电路中有稳恒电流 I 时,单位时间内经过电路中任一截面的电荷量均为 I ,故单位时间内电源非静电力作的功(简称电源作的功)为 ϵI ,而由焦耳定律可知,在外电路电阻 R 和电源内阻 r 上单位时间内产生的焦耳热为 $I^2(R+r)$.根据能量守恒与转化定律,电源作的功应等于在电阻上产生的焦耳热,故有

$$I\epsilon = I^2(R+r)$$

即

$$\epsilon = I(R+r) \quad (10.2-7)$$

这就是全电路欧姆定律.它表明在闭合电路中,电流强度 I 的大小决定于电源的电动势 ϵ .

5. 一段含源电路的欧姆定律

这是描写一段含有电源的电路两端电势差与其中流过的电流 I 和所含电源电动势 ϵ 关系的规律.对于一个实际的电源,除具有电动势 ϵ 外,都具有一定的内电阻 r ,但为了讨论问题的方便,可把它看成是内阻为零的理想电源和电阻 r 的串联.因此任一段含源的电路都可等效为图 10.2-1 所示的电路,其中电阻 R 中包含有电源的内阻 r .从电路上 a 点出发到 b 点的走向,若是顺着电流 I 的方向,经过电阻 R ,电势总是降低 IR ;若是逆着电流 I 的方向,经过电阻 R ,电势总是升高 IR .对于后者,也可认为电势降低了 $-IR$,于是可约定,凡经过电阻,电势总是降低,若走向与电流 I 方向一致,则电势降低 IR ,与电流 I 的方向相反,则电势降低 $-IR$.

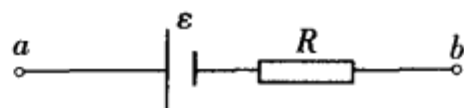


图 10.2-1

对于任何理想电源 ϵ ,当走向是以电源负极经其内部到正极,则因电动势的作用,电势将升高 ϵ .相反,若走向是从其正极经内部到负极,则电势将降低 ϵ .对于后者,也可认为是升高 $-\epsilon$.于是也约定,凡经过电源,电势总是升高的,若走向是从电源的负极到正极,则电势升高 ϵ ,若走向是从电源的正极到负极,则电势升高 $-\epsilon$.因此,从 a 到 b 的电路中若含有若干电源和若干电阻,则总电势差可表示为

$$U_a - U_b = \sum IR - \sum \epsilon \quad (10.2-8)$$

这就是一段含源电路的欧姆定律.

例 10.2-1 在如图 10.2-2 所示的电路中,已知 $\epsilon_1 = 30\text{V}$, $\epsilon_2 = \epsilon_3 = 10\text{V}$, $r_1 = 1\Omega$, $r_2 = r_3 = 2\Omega$, $R_1 = 4\Omega$, $R_2 = R_3 = 3\Omega$,试求:(1) $U_a - U_b$; (2) $U_b - U_c$; (3) $U_c - U_a$.

解:根据全电路欧姆定律可求得回路 $acda$ 中电流 I 为

$$I = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{R_1 + R_2 + r_1 + r_2} = \frac{30 - 10}{4 + 3 + 1 + 2} = 2(\text{A})$$

I 的方向如图所示.故根据一段含源电路的欧姆定律,可得:

$$\begin{aligned} (1) U_a - U_b &= -I(R_1 + r_1) - (-\epsilon_1 + \epsilon_3) \\ &= -2 \times (4 + 1) - (-30 + 10) = 10(\text{V}) \end{aligned}$$

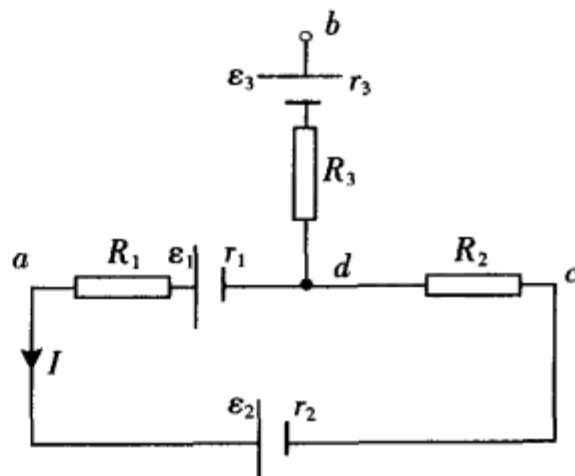


图 10.2-2

$$(2) U_b - U_c = -IR_2 - (-\epsilon_3) = -2 \times 3 + 10 = 4(\text{V})$$

$$(3) U_c - U_a = -I r_2 - \epsilon_2 = -2 \times 2 - 10 = -14(\text{V})$$

§ 10.3 简单电路

简单电路是由若干个电阻和电源经串、并联而组成的电路,实际的直流电路大多属于这一类。

1. 串联、并联电路

(1) 串联电路 把多个电阻一个接一个地联接起来,使电流只有一条通路,这样的联接方式称为串联,如图 10.3-1 所示。串联电路的基本特点是通过各电阻的电流 I 相同,电路两端的总电压等于各电阻两端电压之和,即

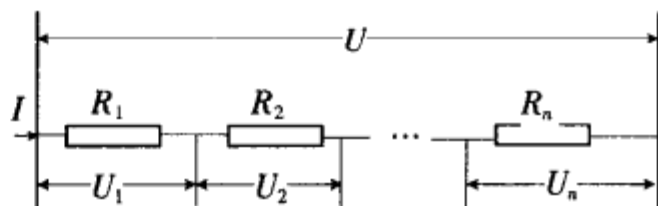


图 10.3-1

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n \quad (10.3-1)$$

串联电路中电压的分配和功率的分配均与电阻成正比,即

$$U_1 = IR_1, U_2 = IR_2, \dots, U_n = IR_n$$

$$P_1 = I^2 R_1, P_2 = I^2 R_2, \dots, P_n = I^2 R_n$$

串联电路的等效电阻等于各电阻之和,即

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n \quad (10.3-2)$$

(2) 并联电路 把多个电阻并排地联接起来,使电路有两个公共联接点和多条通路,这样的联接方式称为并联,如图 10.3-2 所示。并联电路的基本特点是各电阻两端有相同的电压,通过并联电路的总电流等通过各支路电流之和,即

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n \quad (10.3-3)$$

在并联电路中电流的分配和功率的分配均与电阻成反比,即

$$I_1 = \frac{U}{R_1}, I_2 = \frac{U}{R_2}, \dots, I_n = \frac{U}{R_n}$$

$$P_1 = \frac{U^2}{R_1}, P_2 = \frac{U^2}{R_2}, \dots, P_n = \frac{U^2}{R_n}$$

并联电路的等效电阻的倒数等于各电阻的倒数之和,即

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \quad (10.3-4)$$

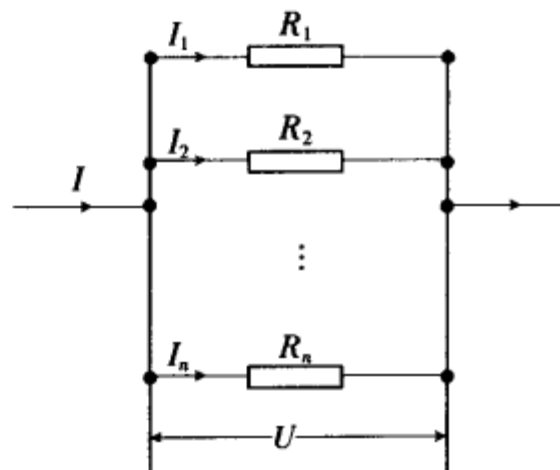


图 10.3-2

2. 简单电路的典型应用

(1) 平衡电桥 把四个电阻 R_1, R_2, R_3, R_4 联接成四边形,在一对角接点间接上电源,在另一对角接点间接上检流计,如图 10.3-3 所示。这样的电路为桥式电路,或称电桥。若四个电阻满足以下关系

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} \quad (10.3-5)$$

则 B 点与 D 点电势相等,此时检流计中电流为零。这样的电桥称为平衡电桥,(10.3-5)式称为电桥的平衡条件。

平衡电桥可用于精确测量电阻,把待测电阻 R_x 接在 R_4 位置,而 R_3 则为可变电阻,调节 R_3 ,使检流计中的电流为零时,电桥达平衡,此时由已知电阻 R_1, R_2 和可变电阻 R_3 的阻值,即可得到待测电阻 R_x 的阻值,其关系为

$$R_x = R_3 \frac{R_2}{R_1} \quad (10.3-6)$$

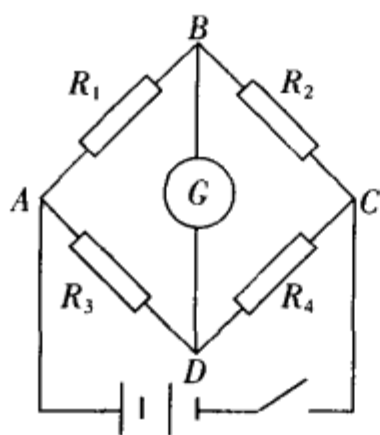


图 10.3-3

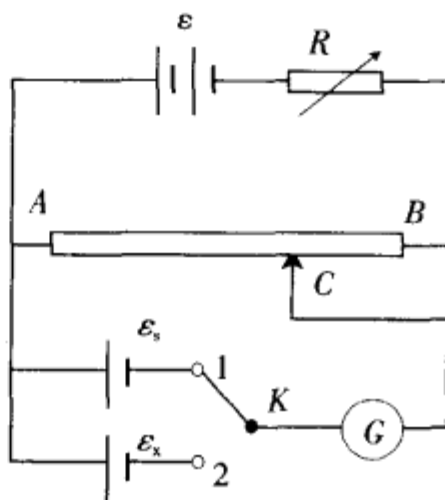


图 10.3-4

(2) 电位差计 这是一种用来精确测量电源电动势的仪器,也可用于精确测量电压、电流和电阻。图 10.3-4 为电位差计测电源电动势的电路图。图中 K 是单刀双掷开关, ϵ 是供电电源, ϵ_s 是已知电动势的标准电池, ϵ_x 为待测电动势的电池, G 为灵敏检流计, R 为制流电阻, AB 是滑线变阻器, C 是其滑动触头。其工作原理是在无电流通过待测电源的情况下测定其路端电压,为此电路中将待测电池的电动势 ϵ_x 和作为校准用的标准电池的电动势 ϵ_s 均与 ϵ 反接,并利用补偿法来测量。

测量时,先将开关 K 拨到位置 1,即把标准电池 ϵ_s 接入 $ACG\epsilon_s$ 回路(称为补偿回路),把滑动触头调到对应于 ϵ_s 数值的位置上,观察检流计的指针有无偏转,如有偏转,再调节制流电阻 R ,直至指针无偏转,这时 ϵRBA 回路中的工作电流准确地达到仪器的设定值,并有 $U_{AC} = \epsilon_s$ 这一步骤称为电位差计的校准。然后,把开关拨到位置 2,即把待测电源接入补偿回路,这时不能再动 R ,而只需拨动滑动触头 C ,使检流计的指针调至无偏转,表明这时有: $U'_{AC} = \epsilon_x$ 。若设 l 和 l' 分别为校准和测量两次调准后滑线变阻器上 A 、 C 间的距离,则有

$$\frac{\epsilon_x}{\epsilon_s} = \frac{U'_{AC}}{U_{AC}} = \frac{l'}{l}$$

即

$$\epsilon_x = \frac{l'}{l} \epsilon_s$$

此值可从仪器面板上直接读出。

§ 10.4 复杂电路 基尔霍夫方程组及电路定理

一些由多个电源和多个电阻构成的电路,若电路的联接方式不能归结为简单的串、并联关系,这种复杂联接的电路称为复杂电路。复杂电路中由电源和电阻串联而成的通路称为支路,在同一支路中电流强度处处相等。三条或更多条支路的联接点叫做节点或分支点。几条支路构成的闭合通路称为回路。复杂电路是由多个支路联接而成的,包括多个节点和多个回路的电路。

求解复杂电路问题的基本公式是基尔霍夫方程组,原则上它可以用来计算任何复杂电路中每一条路中的电流。而一些由基尔霍夫方程组导出的电路定理,抓住了电路的某些特点,使问题的求解更为简便。

1. 基尔霍夫方程组

(1) 基尔霍夫第一方程组 基尔霍夫第一方程组又称节点电流方程组,它指出,汇于节点的各支路电流强度的代数和为零,即

$$\sum I = 0 \quad (10.4-1)$$

上式中可规定,凡流向节点的电流强度取负,而从节点流出的电流强度取正(当然也可取相反的规定)。若复杂电路共有 n 个节点,则共可写出 $n-1$ 个独立的方程。

基尔霍夫第一方程是电流稳恒要求的结果,否则若流入与流出节点电流的代数和不为零,则节点附近的电荷分布必定会变化,这样电流也不可能稳恒.

(2)基尔霍夫第二方程组 基尔霍夫第二方程组又称回路电压方程组.它指出,沿回路环绕一周,电势降落的代数和为零,即

$$\sum IR - \sum \epsilon = 0 \quad (10.4-2)$$

上式是从一段含源电路的欧姆定律(10.2-8)式,把 a 、 b 两重合构成回路,即 $U_a - U_b = 0$ 而得出,故式中电流强度 I 的正、负,及电源电动势 ϵ 的正、负约定,均与一段含源电路的欧姆定律中的约定一致.由此,基尔霍夫第二方程组也可表示为

$$\sum IR = \sum \epsilon \quad (10.4-3)$$

列出基尔霍夫第二方程前,先应选定回路的绕行方向,然后按约定确定电流 I 和电动势 ϵ 的正、负.对每一闭合回路,都可列出一个基尔霍夫第二方程,但要注意其独立性,可行的方法是:从列第二个回路方程起,每个方程中都至少含有一条未被用过的支路,这样可保证所列方程均为独立方程;另外,为使有足够求解所需的方程数,每个方程中还至少含有一条已被用过的支路.

例 10.4-1 在图 10.4-1 中,已知 $\epsilon_1 = 4\text{V}$, $\epsilon_2 = 6\text{V}$, $r_1 = r_2 = 1\Omega$, $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 5\Omega$, $R_3 = 3\Omega$, 试求各支路中的电流.

解: 设各支路中的电流 I_1, I_2, I_3 的方向如图所示,取两个回路: $R_1\epsilon_1R_3$ 回路和 $R_2\epsilon_2R_3$, 回路绕行方向图中也已标出.则可列出一个基尔霍夫第一方程和两个基尔霍夫第二方程,分别为

$$\begin{cases} -I_1 - I_2 + I_3 = 0 \\ I_1(R_1 + r_1) + I_3R_3 = \epsilon_1 \\ I_2(R_2 + r_2) + I_3R_3 = \epsilon_2 \end{cases}$$

将数据代入后,以上三式变为

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = I_3 \\ 2I_1 + 3I_3 = 4 \\ 6I_2 + 3I_3 = 6 \end{cases}$$

由以上三个方程,即可解得

$$I_1 = 0.5\text{A}, \quad I_2 = 0.5\text{A}, \quad I_3 = 1\text{A}$$

例 10.4-2 图 10.4-2 为一电桥电路,其中检流计的内阻为 R_g , 此电路的 A 、 C 两点接上电动势为 ϵ (内阻忽略) 的电源. 试求检流计 G 中流过的电流 I_g .

解: 设 R_1 、 R_2 和检流计三支路中的电流分别为 I_1, I_2 和 I_g , 方向如图所示. 其余各支路电流按基尔霍夫第一方程原理设定, 具体见图. 以下列出三个回路的基尔霍夫第二方程:

$$\text{回路 } ABDA: I_1R_1 + I_gR_g - I_2R_2 = 0$$

$$\text{回路 } BCDB: (I_1 - I_g)R_3 - (I_2 + I_g)R_4 - I_gR_g = 0$$

$$\text{回路 } ABC\epsilon A: I_1R_1 + (I_1 - I_g)R_3 - \epsilon = 0$$

以上三方程经整理后为

$$\begin{cases} I_1R_1 - I_2R_2 + I_gR_g = 0 \\ I_1R_3 - I_2R_4 - I_g(R_3 + R_4 + R_g) = 0 \\ I_1(R_1 + R_3) - I_gR_3 = \epsilon \end{cases}$$

联立此方程组可用行列式表示解出的 I_g , 即

$$I_g = \frac{\Delta_g}{\Delta}$$

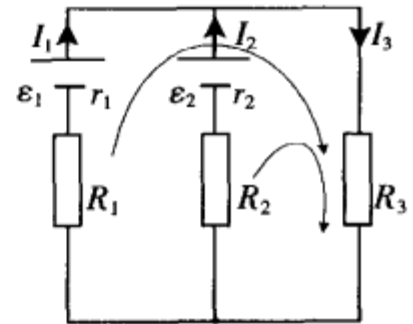


图 10.4-1

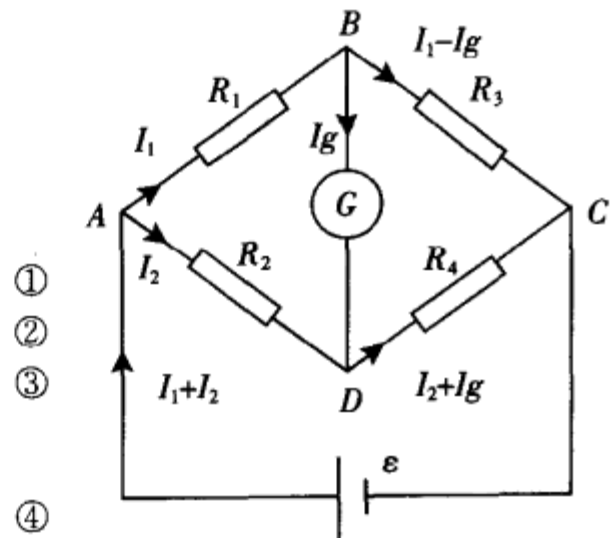


图 10.4-2

$$\text{其中 } \Delta_g = \begin{vmatrix} R_1 & -R_2 & 0 \\ R_3 & -R_4 & 0 \\ R_1+R_3 & 0 & \epsilon \end{vmatrix} = -(R_1R_4 - R_2R_3)\epsilon$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_1 & -R_2 & R_g \\ R_3 & -R_4 & -(R_3+R_4+R_g) \\ R_1+R_3 & 0 & -R_3 \end{vmatrix}$$

$$= R_1R_2R_3 + R_2R_3R_4 + R_3R_4R_1 + R_4R_1R_2 + R_g(R_1+R_3)(R_2+R_4)$$

由④式可知,当 $R_1R_4 - R_2R_3 = 0$ 时,

$\Delta_g = 0$, 即 $I_g = 0$, 这就是 10.3 中平衡电桥的条件。

2. 叠加定理

叠加定理指出:如电路中有若干个电源,则通过电路中任一支路的电流,等于各电源电动势单独存在时在该支路产生的电流之和。

应用叠加定理可以把一个复杂电路分解成若干个简单电路,在每一个简单电路中仅有一个电源电动势在起作用,而其他各电源除去电动势而保留其内阻,即把这些电源用与其内阻相等阻值的电阻来替换,这样计算将较为简便。

例 10.4-3 用叠加定理求例 10.4-1 中通过 R_3 的电流。

解:当 ϵ_1 单独存在时,电路的等效电路如图 10.4-3 所示,由电阻串、并联关系即可求得

$$I_1' = \frac{\epsilon_1}{R_1 + r_1 + \frac{R_3(R_2 + r_2)}{R_3 + R_2 + r_2}} = \frac{4}{1 + 1 + \frac{3(5+1)}{3+5+1}} = 1(\text{A})$$

$$I_3' = I_1' \frac{R_2 + r_2}{R_3 + R_2 + r_2} = 1 \times \frac{5+1}{3+5+1} = \frac{2}{3}(\text{A})$$

当 ϵ_2 单独存在时,电路的等效电路如图 10.4 所示,则

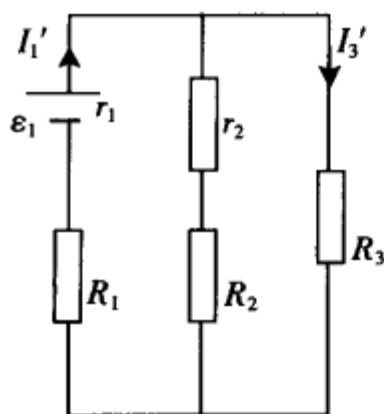


图 10.4-3

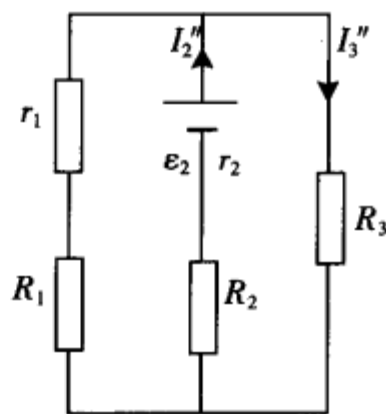


图 10.4-4

$$I_2'' = \frac{\epsilon_2}{R_2 + r_2 + \frac{R_3(R_1 + r_1)}{R_3 + R_1 + r_1}} = \frac{6}{5+1 + \frac{3(1+1)}{3+1+1}} = \frac{5}{6}(\text{A})$$

$$I_3'' = I_2'' \frac{R_1 + r_1}{R_3 + R_1 + r_1} = \frac{5}{6} \times \frac{1+1}{3+1+1} = \frac{1}{3}(\text{A})$$

根据叠加定理,可得通过 R_3 的电流 I_3 为

$$I_3 = I_3' + I_3'' = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1(\text{A})$$

3. 等效电源定理

(1) 电压源与电流源

任何电源都有一定大小的内阻,故当一电源的两端接上外电阻 R 时,其输出电压会随 R 值的不同

而变。设想有种理想电源,其内阻为零,不管外电阻 R 的值多大,其输出电压总是恒定值 ϵ (即其电动势),这种理想电源称为恒压源。一个实际的电源,由于其内阻不为零,因而都不是恒压源,但可把它等效为是由一个恒压源和一个内阻串联而成的装置,这样的电源称为电压源,如图 10.4-5 所示。

任何电源的输出电流也与外电阻 R 有关, R 越大,输出电流越小。如果电源的内阻很大(相当于由电源与很大阻值的电阻串联而成),而电源的电动势也很大,仍有电流输出,这时输出电流与外电阻 R 就几乎无关。设想有种理想电源,不论外电阻 R 多大,其输出电流总是恒定值 I_0 ,这样的理想电源称为恒流源。由于实际电源都不是恒流源,然而根据欧姆定律,可得其输出电流可表示为

$$I = \frac{\epsilon}{R+r} = \frac{\epsilon}{r} \cdot \frac{r}{R+r} = I_0 \frac{r}{R+r}$$

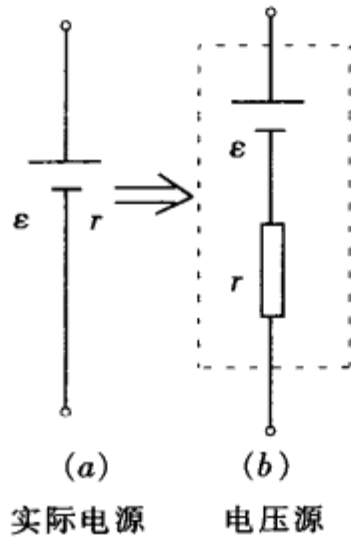


图 10.4-5

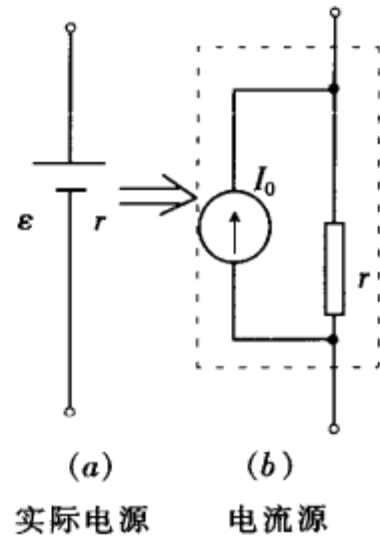


图 10.4-6

故一个实际电源可等效为是由一个电流为 $I_0 = \frac{\epsilon}{r}$ 的恒流源与一内阻 r 的并联而成的装置,这样的电源称为电流源,如图 10.4-6 所示。

一个实际电源既可看作电压源,也可看作电流源,两者是等效的,两者之间的关系是,电压源的电动势 ϵ 等于电流源的电流 I_0 与内阻 r 的乘积,即

$$\epsilon = I_0 r$$

(2) 戴维宁定理

戴维宁定理又称等效电压源定理。它指出:一个两端有源网络可等效为一个电压源,其电动势等于网络开路时的端电压,其内阻等于网络除源情况下的两端电阻。所谓除源,即是将网络中各电源除去电动势而保留其内阻,也就是用一个阻值等于其内阻的电阻来替代此电源。戴维宁定理可用图 10.4-7 表示。

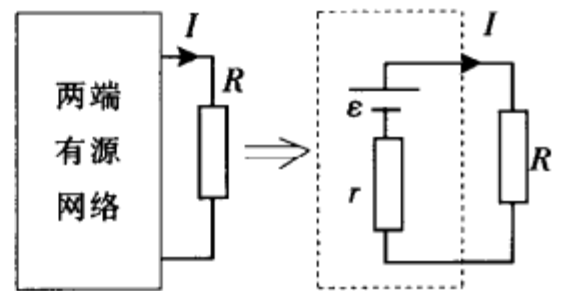


图 10.4-7

(3) 诺尔顿定理

诺尔顿定理又称等效电流源定理。它指出:一个两端有源网络可等效为一个电流源,电流源的电流 I_0 等于网络两端短路时流经两端点的电流,内阻等于网络除源情况下的两端电阻。诺尔顿定理可用图 10.4-8 所示。

例 10.4-4 用戴维宁定理和诺尔顿定理求例 10.4-1 中通过 R_3 的电流。

解:(1)用戴维宁定理求解:

将图 10.4-9 中虚线框内的网络等效为一个电压源。

当网络两端开路时,由全电路欧姆定律可求得电路里电流

I 为

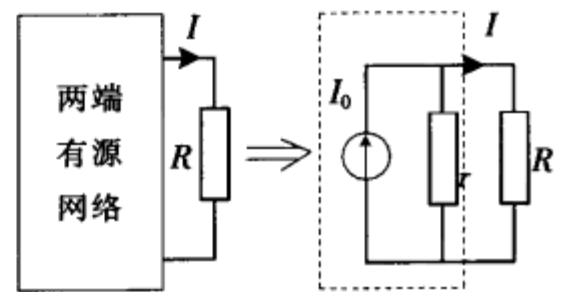


图 10.4-8

$$I = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{R_1 + R_2 + r_1 + r_2} = \frac{6 - 4}{1 + 5 + 1 + 1} = 0.25(\text{A})$$

根据一段含源电路的欧姆定律可求得此时两端的端电压为

$$\begin{aligned} U_a - U_b &= I(R_1 + r_1) - (-\epsilon_1) \\ &= 0.25 \times (1 + 1) + 4 = 4.5(\text{V}) \end{aligned}$$

故电压源的电动势 $\epsilon = 4.5\text{V}$

$$\begin{aligned} \text{电压源的内阻 } r &= \frac{(R_1 + r_1)(R_2 + r_2)}{R_1 + r_1 + R_2 + r_2} \\ &= \frac{(1 + 1) \times (5 + 1)}{1 + 1 + 5 + 1} \\ &= 1.5(\Omega) \end{aligned}$$

于是,通过 R_3 的电流 I_3 为

$$I_3 = \frac{\epsilon}{R_3 + r} = \frac{4.5}{1.5 + 3} = 1(\text{A})$$

(2)用诺尔顿定理求解

将图 10.4-10 中虚线框内的网络等效为一个电流源。当网络两端短路时,流经两端点 a 、 b 的电流

$$I_0 = \frac{\epsilon_1}{R_1 + r_1} + \frac{\epsilon_2}{R_2 + r_2} = \frac{4}{1 + 1} + \frac{6}{5 + 1} = 3(\text{A})$$

内阻 $r = 1.5\Omega$

于是,通过 R_3 的电流 I_3 为

$$I_3 = I_0 \frac{r}{R_3 + r} = 3 \times \frac{1.5}{3 + 1.5} = 1(\text{A})$$

例 10.4-5 用戴维宁定理求解例 10.4-2.

解:把检流计看成是接在两端有源网络的 a 、 b 两端,并将此网络等效为一电压源,如图 10.4-11 所示。

当网络两端 a 、 b 开路时,流过 R_1 和 R_2 的电流 I_1 和 I_2 分别为

$$I_1 = \frac{\epsilon}{R_1 + R_3}, I_2 = \frac{\epsilon}{R_2 + R_4}$$

a 、 b 两端的电压为

$$U_a - U_b = -I_1 R_1 + I_2 R_2 = \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)} \epsilon$$

这就是电压源的电动势 ϵ' ,其内阻 r 为

$$r = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}$$

于是,从检流计流过的电流 I_g 为

$$\begin{aligned} I_g &= \frac{\epsilon'}{r + R_g} = \frac{\frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)} \epsilon}{\frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} + R_g} \\ &= \frac{(R_2 R_3 - R_1 R_4) \epsilon}{R_1 R_3 (R_2 + R_4) + R_2 R_4 (R_1 + R_3) + R_g (R_2 + R_3)(R_1 + R_4)} \end{aligned}$$

与例 2 中解得的结果一样。

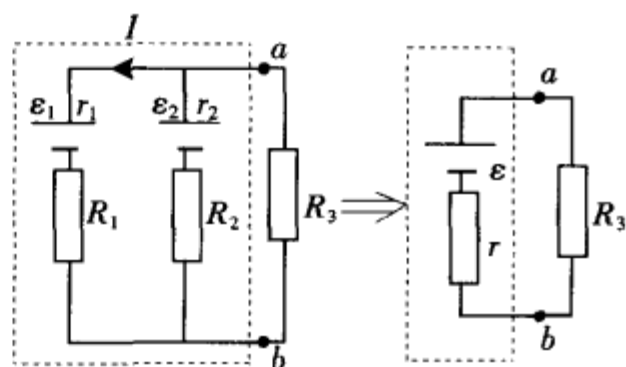


图 10.4-9

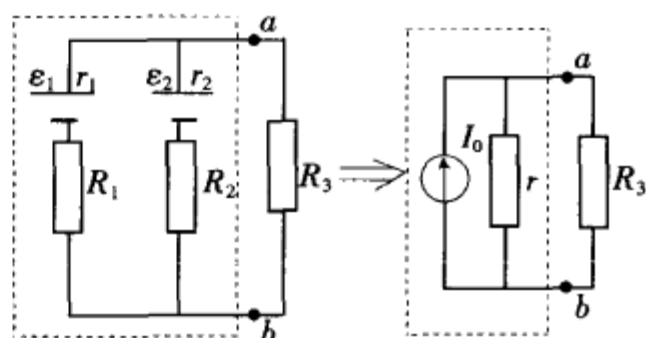


图 10.4-10

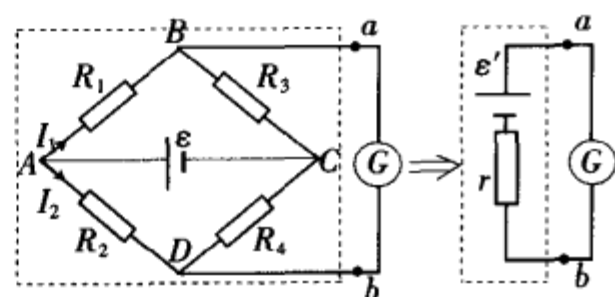


图 10.4-11

5. Y-Δ形电路的等效替换

在某些复杂电路中常会遇到有电阻的 Y 形联接或 Δ 形联接, 求这些电路的等效电阻的计算往往又很困难. 可是, 如果把 Y 形联接替换成等效的 Δ 形联接, 或把 Δ 形联接替换成等效的 Y 形联接, 有时可使电路变为简单的串、并联关系, 从而简化计算. 所谓等效替换, 是指这两种联接之间的相互替换并不改变其余各部分电路的电流和电压, 即要求 Y 形联接的三个端点的电势 U_1 、 U_2 、 U_3 以及流过的电流 I_1 、 I_2 、 I_3 与 Δ 形联接的三个端点的电压和流过的电流相同. 见图 10.4-12.

可以证明: 从 Y 形联接替换到 Δ 形联接, 各电阻之间的关系为

$$\begin{cases} R_{12} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3} \\ R_{23} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1} \\ R_{31} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_2} \end{cases} \quad (10.4-4)$$

从 Δ 形联接替换到 Y 形联接, 各电阻之间的关系为

$$\begin{cases} R_1 = \frac{R_{31} R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \\ R_2 = \frac{R_{12} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \\ R_3 = \frac{R_{23} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \end{cases} \quad (10.4-5)$$

例 10.4-6 在图 10.4-13 所示的电路中, 已知 $R_1 = 12\Omega$, $R_2 = 10\Omega$, $R_3 = 11\Omega$, $R_4 = 50\Omega$, $R_5 = 2\Omega$, $R_6 = 1\Omega$, $R_7 = R_8 = R_9 = 12\Omega$, 试求 A, B 之间的等效电阻 R_{AB} .

解: 利用 Y-Δ 形电路的等效替换公式(10.4-5)把电路中由 R_7, R_8, R_9 三电阻构成的 Δ 形电路变换成由 R_7', R_8', R_9' 三电阻构成的 Y 形电路; 如图 10.4-14 所示.

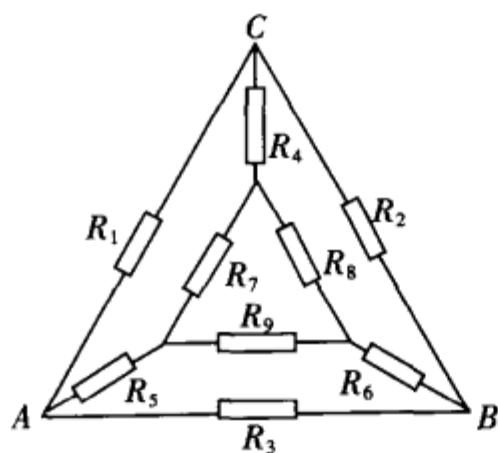


图 10.4-13

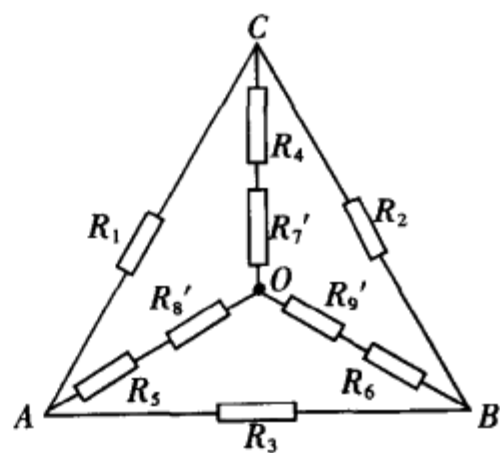


图 10.4-14

$$R_7' = R_8' = R_9' = \frac{12 \times 12}{12 + 12 + 12} = 4(\Omega)$$

此电路可进一步简化成图 10.4-15 所示的电路, 其中

$$R_4' = R_4 + R_7' = 54\Omega, \quad R_5' = R_5 + R_8' = 6\Omega, \quad R_6' = R_6 + R_9' = 5\Omega$$

由图不难看出由 R_1, R_2, R_4', R_5' 和 R_6' 构成的电路为平衡电桥, 因为有

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_5'}{R_6'} = \frac{6}{5}$$

故若 A、B 两点间加上电压后，O、C 两点将等势，即其间无电流通过，可将 O、C 间的电阻 R_4' 拆去，于是电路变成简单的串、并联关系，即可求得

$$R_{AB} = \frac{1}{\frac{1}{R_1+R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5'+R_6'}} = \frac{1}{\frac{1}{12+10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{6+5}} = \frac{22}{5} (\Omega)$$

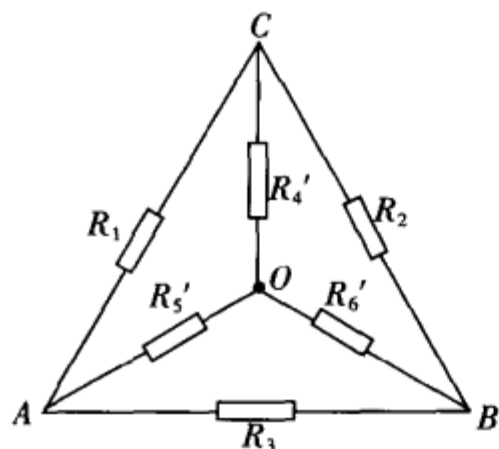


图 10.4-15

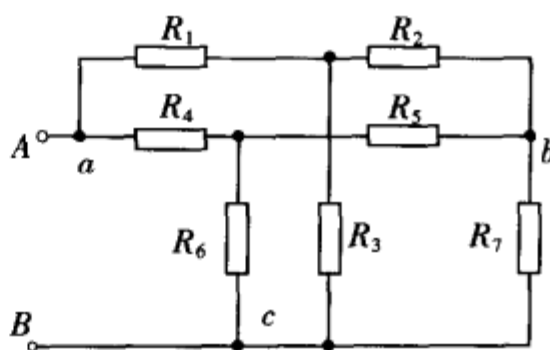


图 10.4-16

例 10.4-7 求图 10.4-16 所示的双 T 形电路 A、B 两点间的等效电阻 R_{AB} ，其中 $R_1 = R_2 = R_6 = 1\Omega$ ， $R_3 = R_4 = R_5 = R_7 = 2\Omega$ 。

解：a、b、c 三点为以 R_1 、 R_2 、 R_3 三电阻构成的 Y 形电路和以 R_4 、 R_5 、 R_6 三电阻构成的 Y 形电路的共同点，将此两 Y 形电路用两 Δ 形电路替代，其中第一个 Δ 形电路的三个电阻分别为

$$R_{12}' = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3} = \frac{1+2+2}{2} = \frac{5}{2} (\Omega)$$

$$R_{23}' = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1} = \frac{1+2+2}{1} = 5 (\Omega)$$

$$R_{31}' = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_2} = \frac{1+2+2}{1} = 5 (\Omega)$$

第二个 Δ 形电路中三个电阻分别为

$$R_{12}'' = \frac{R_4 R_5 + R_5 R_6 + R_6 R_4}{R_6} = \frac{2+2+4}{1} = 8 (\Omega)$$

$$R_{23}'' = \frac{R_4 R_5 + R_5 R_6 + R_6 R_4}{R_4} = \frac{2+2+4}{2} = 4 (\Omega)$$

$$R_{31}'' = \frac{R_4 R_5 + R_5 R_6 + R_6 R_4}{R_5} = \frac{2+2+4}{2} = 4 (\Omega)$$

于是电路变换成图 10.4-17 所示的电路，其中 R_{12} 、 R_{23} 和 R_{31} 分别为 R_{12}' 与 R_{12}'' 的并联电阻， R_{23}' 与 R_{23}'' 的并联电阻和 R_{31}' 与 R_{31}'' 的并联电阻， R_{12} 、 R_{23} 和 R_{31} 的阻值分别为

$$R_{12} = \frac{R_{12}' R_{12}''}{R_{12}' + R_{12}''} = \frac{40}{21} \Omega$$

$$R_{23} = \frac{R_{23}' R_{23}''}{R_{23}' + R_{23}''} = \frac{20}{9} \Omega$$

$$R_{31} = \frac{R_{31}' R_{31}''}{R_{31}' + R_{31}''} = \frac{20}{9} \Omega$$

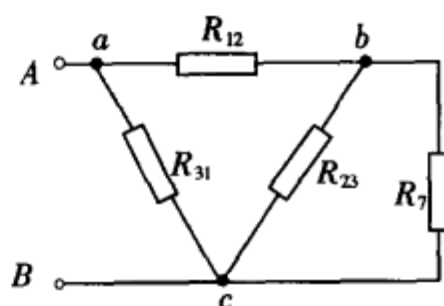


图 10.4-17

由图 10.4-17 即可求得 A、B 两点间的等效电阻 R_{AB} 为

$$R_{AB} = \frac{118}{93} \Omega$$

本章综合例题

例 10-1 由 10 根阻值均为 R 的电阻丝连接而成的电阻网络如图例 10-1 所示, 试求 A 、 B 两点之间的等效电阻 R_{AB} .

解: 设电流 I 从 A 点流进网络, 从 B 点流出. 根据网络的对称性以及基尔霍夫第一方程, 可设各支路的电流如图例 10-1 所示.

由网络的对称性可知, C 、 D 之间和 E 、 F 之间的两电流 I_2 和 $I - I_2$ 应相等, 即

$$I_2 = I - I_2$$

故
$$I_2 = \frac{I}{2} \quad \text{①}$$

由①式可得 C 、 E 之间和 D 、 F 之间的两电流也相等, 都等于 $\frac{I}{2} - I_1$. 其实, 这同样是由网络对称性所致.

沿 $ACEA$ 的绕行方向列出此回路的基尔霍夫第二方程为

$$I_1 2R - \left(\frac{I}{2} - I_1\right) R - (I - I_1) R = 0$$

可解得

$$I_1 = \frac{3}{8} I \quad \text{②}$$

根据一段含源电路的欧姆定律, A 、 B 两点的电势差 U_{AB} 为

$$U_{AB} = I_1 \cdot 2R + I_2 R + (I - I_1) R$$

将①、②式代入, 即可得

$$U_{AB} = \frac{15}{8} IR$$

故 A 、 B 两点之间的等效电阻 R_{AB} 为

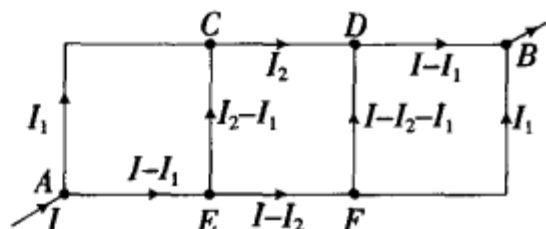
$$R_{AB} = \frac{U_{AB}}{I} = \frac{15}{8} R$$

例 10-2 三个相同的均匀金属圆圈两两正交地连接成图例 10-2a 所示的网络. 已知每一金属圆圈的电阻均为 R , 试求 A 、 B 两点间的等效电阻 R_{AB} .

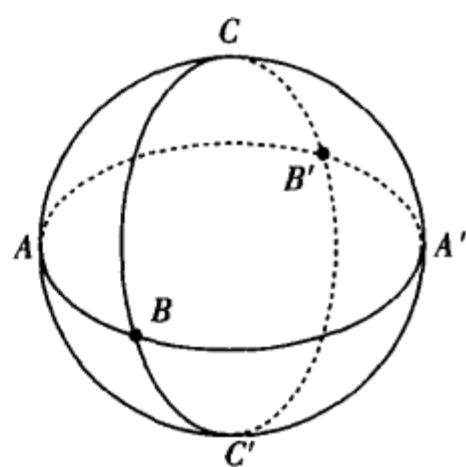
解: 若有电流从 A 点流入此网络, 并从 B 点流出, 则由此网络的对称性, 很容易看出, A 、 B 两点所在平面以上部分电路与以下部分电路的电流相对此平面完全对称, 故 C 与 C' 两点等势, 因此, 可把 C 和 C' 两点用导线连接, 即相当于把上、下两半部分压缩成如图例 10-2b 所示的等效平面电阻网络. 图中 \widehat{AB} 、 $\widehat{BA'}$ 、 $\widehat{A'B'}$ 和 $\widehat{B'A}$ 弧段都是 $\frac{1}{4}$ 圆, 其电阻 r 为整个圆圈电阻 R 的 $\frac{1}{4}$, 即

$$r = \frac{1}{4} R$$

而图例 10-2b 中的 O 点就是图例 10.2-1 中 C 与 C' 的连接点, 而 \overline{AO} 、 \overline{OB} 、 $\overline{OA'}$ 、 $\overline{B'O}$ 则是图例 10

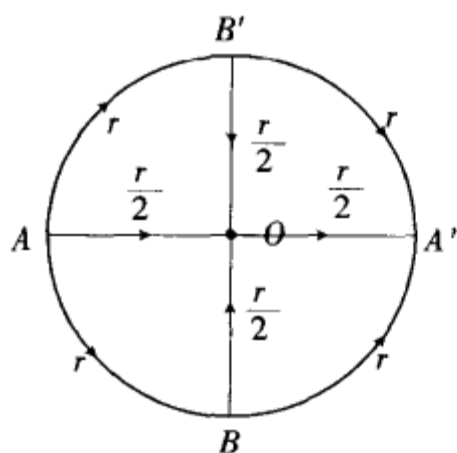


图例 10-1

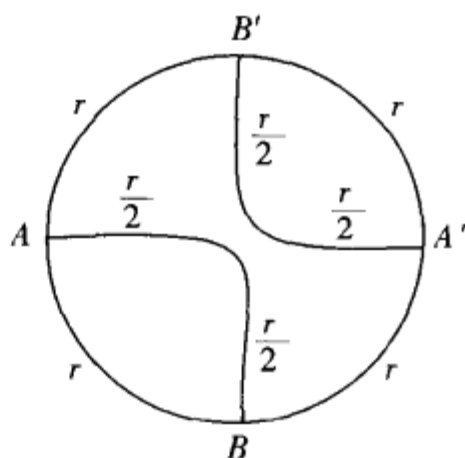


图例 10-2a

-2a 中上、下两部分相应对称段两个 $\frac{1}{4}$ 圆的重叠, 故这四段的电阻为两重叠段电阻的并联, 均为 $\frac{r}{2}$ 。



图例 10-2b



图例 10-2c

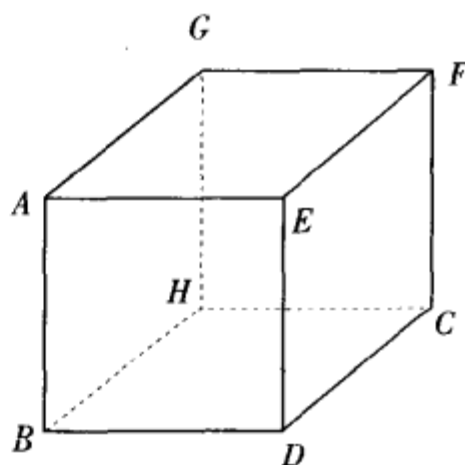
对于图例 10-2b 的平面网络, 电流从 A 点流入, 从 B 点流出, 各支路中电流方向则如图例 10-2b 所示, 由网络的对称性可知, 从 A 点流到 O 点的电流应等于从 O 点流到 B 点的电流, 同样, 从 B' 点流到 O 点的电流应等于从 O 点流到 A' 点的电流。因此, 可将交叉的 AOB 与 A'OB' 从 O 点断开, 等效成图例 10-2c 所示的网络, 这样, 各电阻成简单的串、并联关系。于是, 不难算出 A、B 两点之间的等效电阻 R_{AB} 为

$$R_{AB} = \frac{5}{12}r = \frac{5}{48}R$$

例 10-3 图例 10-3a 所示的为由均匀电阻丝连接而成的正立方体框架网络, 每条边的电阻均为 R , 试求:

- (1) A、B 两点间的等效电阻 R_{AB} ;
- (2) A、C 两点间的等效电阻 R_{AC} ;
- (3) A、D 两点间的等效电阻 R_{AD} 。

解: (1) 若有电流从 A 点流入网络, 并从 B 点流出, 则由电路的对称性, 不难看出, 由 A 点流向 E 点的电流与流向 G 点的电流相等, 同样, 由 D 点流向 B 点的电流与由 H 点流向 B 点的电流也相等。因此, E 点与 G 点的电势相等, D 点与 H 点的电势相等。于是, 可把 E 点与 G 点用导线连接, D 点与 H 点用导线连接, 即可把网络压缩成图例 10-3b 所示平面网络, 其中 E' 点为图例 10-3a 中 E 点与 G 点的重叠点, D' 点为 D 点与 H 点的重叠点。因此, 除 AB 与 FC 两段电阻仍为 R 外, 其余各段的电阻均是



图例 10-3a

正立方体框架中两条边的并联电阻, 故为 $\frac{R}{2}$ 。由图可知, 此平面网络中各段电阻成简单的串、并联关系。

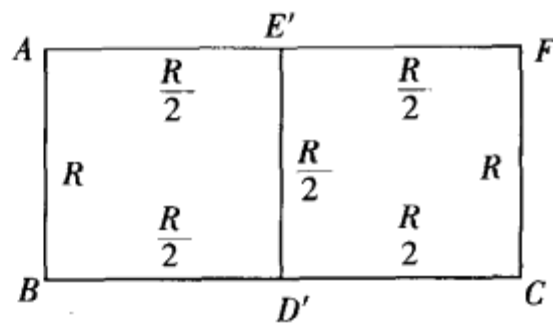
首先, 由 E'FCD' 段电阻 $2R$ 与 E'D' 段电阻 $\frac{R}{2}$ 的并联电阻 $R_{E'D'}$ 为

$$R_{E'D'} = \frac{2R \times \frac{R}{2}}{2R + \frac{R}{2}} = \frac{2}{5}R$$

此电阻 $R_{E'D'}$ 与 AE' 段电阻 $\frac{R}{2}$ 和 D'B 段电阻 $\frac{R}{2}$ 的串联电阻 $R_{AE'D'B}$ 为

$$R_{AE'D'B} = \frac{2}{5}R + \frac{R}{2} + \frac{R}{2} = \frac{7}{5}R$$

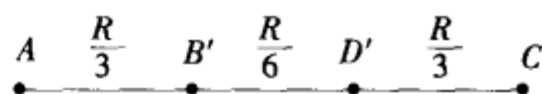
最后, 电阻 $R_{AE'D'B}$ 与 AB 段电阻 R 的并联电阻即为 A、B 两点间的等效电阻 R_{AB} , 故有



图例 10-3b

$$R_{AB} = \frac{\frac{7}{5}R \times R}{\frac{7}{5}R + R} = \frac{7}{12}R$$

(2)若有电流从 A 点流入,从 C 点流出,由于 A、C 两点为正立方体框架的对角顶点,故由网络的对称性可知,从 A 点流向 B 点、流向 E 点与流向 G 点的三条电流应相等,同样,由 D 点、F 点与 H 点流向 C 点的三条电流也应相等.因此, B 点、E 点与 G 点三点电势相等, D 点、F 点与 H 点三点电势也相等,

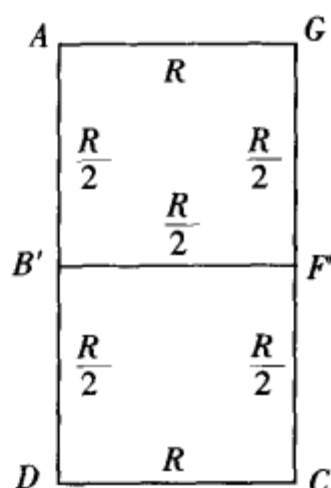


图例 10-3c

故 B、E、G 三点可用导线相连, D、F、H 三点也可用导线相连.于是,网络可用图例 10-3c 中的三段电阻的串联来等效,其中 B' 点为 B、E、G 三点的重叠点, D' 点为 D、F、H 三点的重叠点,故 AB' 段和 D'C 段的电阻均为正立方体三条边的并联电阻,为 $\frac{R}{3}$,而 B'D' 段电阻则为正立方体六条边的并联电阻,为 $\frac{R}{6}$,由此即可求得 A、C 两点间的等效电阻 R_{AC} 为

$$R_{AC} = \frac{R}{3} + \frac{R}{6} + \frac{R}{3} = \frac{5}{6}R$$

(3)若有电流从 A 点流入,从 D 点流出,则由网络对称性可看出,由 A 点流向 B 点的电流与流向 E 点的电流相等,由 G 点流向 F 点的电流与流向 H 点的电流也相等,即 B 点与 E 点等电势,可用导线将 B、E 两点连接,同样 F 点与 H 点等电势,也可用导线将 F、H 点连接.于是,网络可被压缩成图例 10-3d 所示的平面网络,其中 B' 点为 B 点与 E 点的重叠点, F' 点为 F 点与 H 点的重叠点,网络中除 AG 段和 DC 段的电阻仍为 R 外,其余各段均为正立方体中二条边的并联,故各段电阻都是 $\frac{R}{2}$.



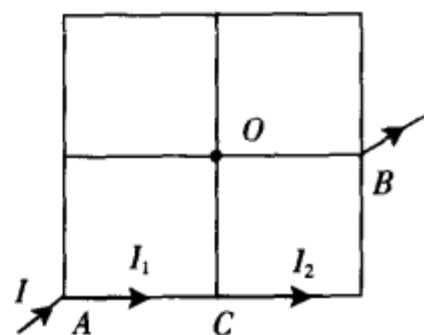
图例 10-3d

不难看出,由图例 10-3d 所示的电路为平衡电桥电路,故 B' 点与 F' 点中所接电阻 $\frac{R}{2}$ 可拆去,于是即可得 A、D 两点间的等效电阻 R_{AD} 为

$$R_{AD} = \frac{3}{4}R$$

例 10-4 由均匀电阻丝连接而成的网络如图例 10-4a 所示,其中每段电阻丝的电阻均为 R,试求 A、B 两点之间的等效电阻 R_{AB} .

解:若有电流从 A 点流入,从 B 点流出,则电流在此网络中的流动并不具有对称性.但若电流从 A 点流入,从 O 点流出,或电流从 O 点流入从 B 点流出,则这后两种情况下电流在网络中的流动都具有对称性.为此,我们可以把电流从 A 点流入从 B 点流出的情况看成是后两种情况的叠加.



图例 10-4a

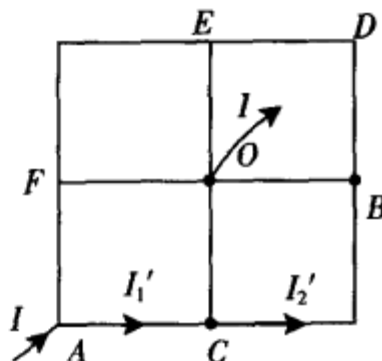
若电流 I 从 A 点流入,从 O 点流出,由于对称性,则从 A 点流向 C 点的电流 I_1' 应与流向 F 点的电流相等,即

$$I_1' = \frac{1}{2}I \quad (1)$$

同样由对称性可知, B 点与 E 点等电势,则图例 10-4b 中的 BDE 部分无电流. 电流 I_1' 在 C 点分流,流向 B 然后再到 O 的电流 I_2' ,可根据电流在并联电路中分流的原理求得,即有

$$I_2' = \frac{1}{4}I_1' = \frac{1}{8}I \quad (2)$$

若有电流 I 从 O 点流入从 B 点流出,由对称性可知,从 O 点流向 C 点的电流与流向 E 点的电流相等,设为 I_3' . 同样,由 O 流向 F 的电流中



图例 10-4b

有一半将流向A点,再到C点,设此电流为 I_1'' ,电流 I_1'' 与电流 I_3'' 在C点汇合成电流 I_2'' 流向B点,如图例10-4c所示.故有

$$I_2'' = I_1'' + I_3'' \quad (3)$$

再设从O点直接流向B点的电流为 I_4'' ,则在节点O点列出基尔霍夫第一方程:

$$2I_1'' + 2I_3'' + I_4'' = I \quad (4)$$

沿OFACO的绕行方向列出此回路的基尔霍夫第二方程为

$$2I_1''R + I_1'' \cdot 2R - I_3''R = 0$$

即

$$I_3'' = 4I_1'' \quad (5)$$

把⑤式代入③式,得

$$I_2'' = 5I_1'' \quad (6)$$

沿OCBO的绕行方向列出此回路的基尔霍夫第二方程为

$$I_3''R + I_2'' \cdot 2R - I_4''R = 0$$

即

$$I_4'' = I_3'' + 2I_2'' = 14I_1'' \quad (7)$$

把⑤、⑦式代入④式,得

$$I_1'' = \frac{1}{24}I \quad (8)$$

把⑧式代入⑥式,得

$$I_2'' = \frac{5}{24}I \quad (9)$$

由电流叠加原理可知,电流 I 从A点流入从B点流出情况下,从A点流向C点的电流 I_1 ,应等于以上两种情况下在此支路中流过电流 I_1' 和 I_1'' 的代数和,故有

$$I_1 = I_1' + I_1'' = \frac{1}{2}I + \frac{1}{24}I = \frac{13}{24}I \quad (10)$$

同理,从C点流向B点的电流 I_2 ,也应等于此两种情况下此支路中电流 I_2' 和 I_2'' 的代数和,故有

$$I_2 = I_2' + I_2'' = \frac{1}{8}I + \frac{5}{24}I = \frac{1}{3}I \quad (11)$$

设A、B两点间所加电压为 U ,则由图例10.4-1可得

$$U = I_1R + I_2 \cdot 2R = \frac{29}{24}IR$$

由此可得A、B两点间的等效电阻 R_{AB} 为

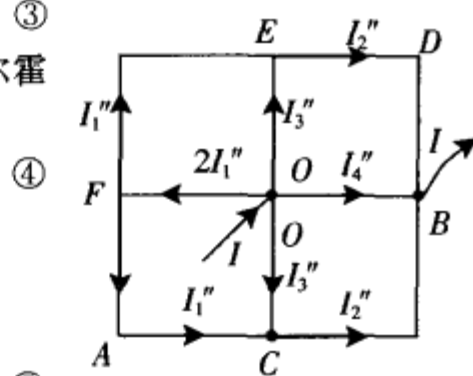
$$R_{AB} = \frac{U}{I} = \frac{29}{24}R$$

例10-5 一个电阻箱的面板上有 n 个接口,任两接口之间的电阻均为 R .已知电阻箱内所用的是阻值相等的相同电阻,试问这些电阻是如何连接的?这些电阻至少有多少个?并求出相应的阻值.

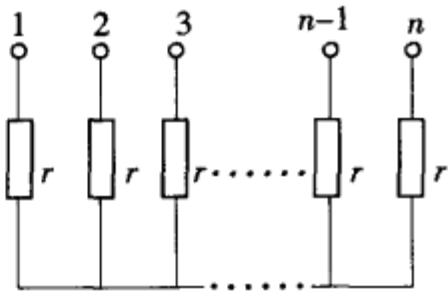
解:连接法I如图例10-5a所示,即每个接口都接一个电阻,共有 n 个电阻,把这 n 个电阻的另一端用导线连接起来,设每个电阻的阻值为 r ,由题意可得

$$r = \frac{R}{2}$$

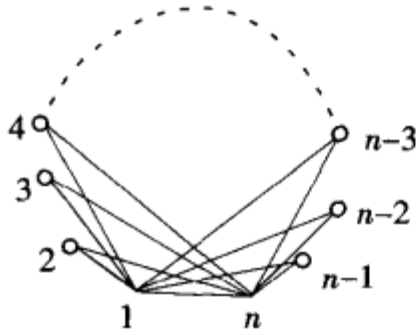
连接法II如图例10-5b所示,即任二接口之间均接一个电阻(图中用二接口间的连线表示,且只画出了接口“1”和接口“ n ”与接口“2”、“3”、“4”……“ $n-3$ ”、“ $n-2$ ”、“ $n-1$ ”的连线).



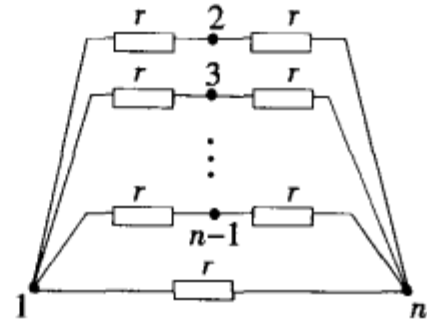
图例10-4c



图例10-5a



图例 10-5b



图例 10-5c

若有电流从接口“1”流入电阻箱,而从接口“n”流出,则由电路的对称性可知,除从接口“1”直接流向接口“n”的电流外,流向其余各接口的电流都相等,故这些接口点均为等势点,因此这些接口点之间连接的各电阻上均无电流,可把这些电阻都看成不存在.于是,电路等效为图例 10-5c 所示的电路.此电路中 $n-2$ 个 $2r$ 电阻的并联等效电阻 R_{n-2} 为

$$R_{n-2} = \frac{2r}{n-2}$$

此并联等效电阻再与接口“1”和接口“n”之间直接连接的电阻 r 并联,故接口“1”和接口“n”之间的等效电阻 R 为

$$R = \frac{R_{n-2} \cdot r}{R_{n-2} + r} = \frac{\frac{2r}{n-2} \cdot r}{\frac{2r}{n-2} + r} = \frac{2r}{n}$$

由此得

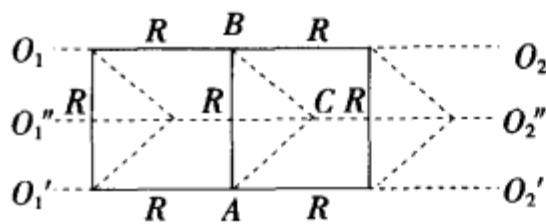
$$r = \frac{n}{2} R$$

由于每个接口之间均接一个电阻 r ,故共需电阻 r 的个数 N 为

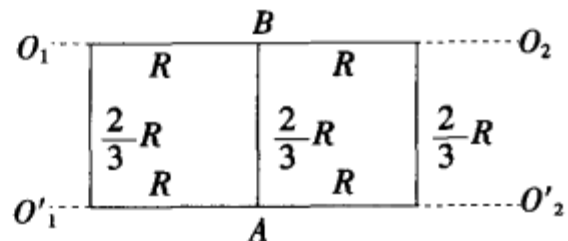
$$N = \frac{1}{2} n(n-1)$$

例 10-6 图例 10-6a 所示的是由均匀电阻丝连接而成的无限电阻网络,已知每一段电阻丝的电阻均为 R ,试求 A 、 B 两点之间的等效电阻 R_{AB} .

解:设想有电流从 A 点流入网络,而从 B 点流出,则由网络的对称性可知,图例 10-6a 中背后那根无限长电阻丝 $O_1'O_2'$ 中无电流通过,故可拆去.于是网络简化为图例 10-6b 所示的等效平面网络,此网络中二根无限长电阻丝 O_1O_2 和 $O_1'O_2'$ 中各段的电阻仍为 R ,而 AB 段的电阻为图例 10-6a 中 AB 段电阻 R 与 AC 、 CB 两段电阻 $2R$ 的并联,故其电阻为 $\frac{2}{3}R$,其余与 AB 平行的各段电阻也一样为 $\frac{2}{3}R$.



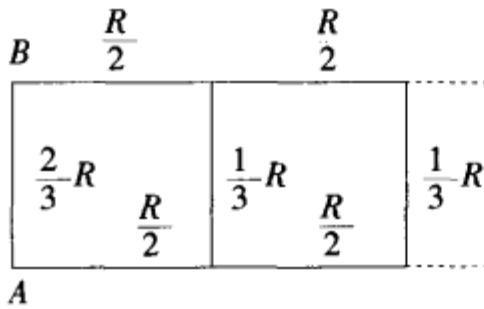
图例 10-6a



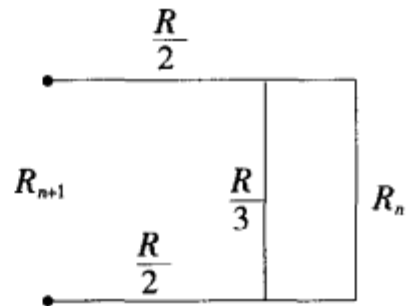
图例 10-6b

由于图例 10-6b 网络相对 AB 左右对称,故可将其折叠成图例 10-6c 所示的等效网络,此网络中二根半无限长电阻丝中,除 AB 段外,其余各段是由图例 10-6b 网络中相应两段的并联,故其电阻为 $\frac{R}{2}$, AB 段电阻仍为 $\frac{2}{3}R$,而与 AB 平行的各段则是由图例 10-6b 网络中相应两段的并联,故电阻为 $\frac{1}{3}R$.

图 10-6c 所示,网络中 AB 段以右的两端半无限电阻网络,是由三个电阻: $\frac{R}{2}$ 、 $\frac{R}{3}$ 、 $\frac{R}{2}$ 连接而成的网络元向单一方向无限联接构成的,设有 n 个网络元构成的网络的等效电阻为 R_n ,而若再加一个网络元,所构成的 $n+1$ 个网络元的网络等效电阻为 R_{n+1} ,如图 10-6d 所示.由图便可算得 R_{n+1} 与 R_n 的关系为



图例 10-6c



图例 10-6d

$$R_{n+1} = \frac{R}{2} + \left(\frac{3}{R} + \frac{1}{R_n} \right)^{-1} + \frac{R}{2} = \frac{4RR_n + R^2}{3R_n + R}$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, R_{n+1} 应与 R_n 相等,用 R_∞ 表示,即有

$$R_\infty = R_{n+1} = R_n = \frac{4RR_\infty + R^2}{3R_\infty + R}$$

解得

$$R_\infty = \left(\frac{3 + \sqrt{21}}{6} \right) R$$

由图例 10-6c 可知, A、B 之间的等效电阻 R_{AB} , 应是 AB 段电阻 $\frac{2}{3}R$ 与 AB 段以右的两端半无限网络电阻 R_∞ 的并联等效电阻,于是可得

$$R_{AB} = \left(\frac{3}{2R} + \frac{1}{R_\infty} \right)^{-1} = \frac{2\sqrt{21}}{21} R$$

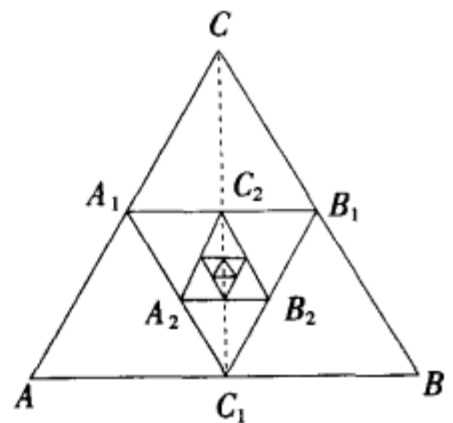
例 10-7 用同种均匀电阻丝连接成的无限内接三角形电阻网络如图 10-7a 所示. 每个内接三角形的顶点为外接三角形三边的中点, 最外面的正三角形的边长为 a , 电阻丝单位长度的电阻为 r . 试求 A、B 两点之间的等效电阻 R_{AB} .

解: 若有电流从 A 点流入网络, 从 B 点流出, 由于网络相对图中虚线 CC_1 左右对称. 故电流分布也相对虚线 CC_1 左右对称, 即从 A 点流向 C_1 点的电流与 C_1 点到 B 点的电流相同, 从 A_2 点流向 C_1 点的电流与从 C_1 点流向 B_2 点的电流相同. 因此, 把无限内接三角形网络 $A_1B_1C_1$ 与外接三角形 ABC 在 C_1 点处断开, 并不影响网络中电流的分布. 于是, 网络可用图例 10-7b 所示的网络等效.

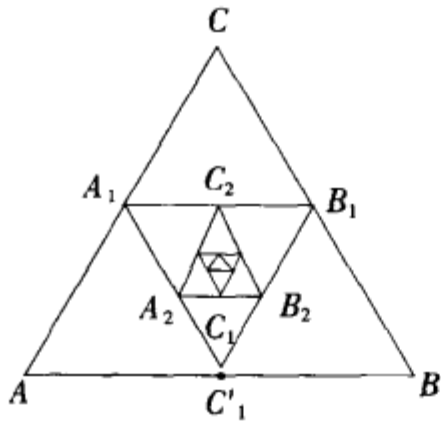
图例 10-7b 所示的网络相当于在三角形 ABC 的 AC 边中点 A_1 点和 BC 边中点 B_1 点间接一无限内接三角形网络 $A_1B_1C_1$. 即可用图例 10-7c 所示的网络等效. 图中电阻 $R_{A_1B_1}$ 为无限内接三角形网络 $A_1B_1C_1$ 的 A_1 点和 B_1 点之间的等效电阻. 而无限内接三角形的网络 $A_1B_1C_1$ 与无限内接三角形网络 ABC 相比, 前者对应各三角形的边长是后者的一半, 故 $R_{A_1B_1}$ 应等于 R_{AB} 的一半, 即有

$$R_{A_1B_1} = \frac{1}{2} R_{AB} \quad \text{①}$$

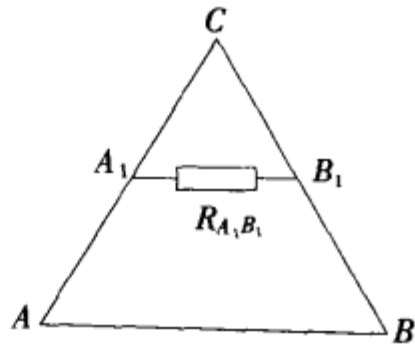
由图例 10-7c 中各电阻的串、并联关系, 很容易算出



图例 10-7a



图例 10-7b



图例 10-7c

$$R_{AB} = \frac{ar + 2R_{A_1B_1}}{2ar + 3R_{A_1B_1}} \cdot ar \quad (2)$$

将①式代入②式,即得

$$R_{AB} = \frac{1}{3}(\sqrt{7} - 1)ar$$

例 10-8 由均匀电阻丝构成的正方形无穷平面电阻网络如图例 10-8 所示. 已知网络中每一段电阻丝的电阻均为 R . 试求:(1) A 点与 B 点之间的等效电阻 R_{AB} ;

(2) 若 A 点与 B 点之间的电阻丝的电阻为 r ($r \neq R$), 其余各段仍为 R , 再求 A 点与 B 点之间的等效电阻 R_{AB}' .

解: (1) 若有电流 I 从 A 点流入网络, 向四面八方流向无穷远处. 由于网络的对称性, 则与 A 点连接的四根电阻丝上各有 $\frac{1}{4}I$ 的电流通过, 故由 A 点流向 B 点的电流 I_{AB}' 为

$$I_{AB}' = \frac{1}{4}I \quad (1)$$

若有电流 I 均匀地从无穷远处四面八方地流向 B 点, 并从 B 点流出, 则同样由网络的对称性可知, 与 B 点连接的四根电阻丝上通过的电流也均为 $\frac{1}{4}I$, 因此从 A 点流向 B 点的电流 I_{AB}'' 为

$$I_{AB}'' = \frac{1}{4}I \quad (2)$$

现设电流 I 从 A 点流入, 从 B 点流出, 则电流在网络中的分布可看成是以上两种情况下电流分布的叠加, 因此, 此情况下从 A 点流向 B 点的电流 I_{AB} 为

$$I_{AB} = I_{AB}' + I_{AB}'' \quad (3)$$

把①、②式代入③式, 得

$$I_{AB} = \frac{1}{4}I + \frac{1}{4}I = \frac{1}{2}I$$

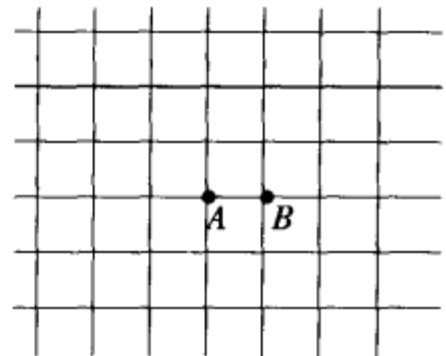
A、B 两点之间的电势差为

$$U_{AB} = I_{AB} \cdot R = \frac{1}{2}IR$$

由此可得 A、B 两点之间的等效电阻 R_{AB} 为

$$R_{AB} = \frac{U_{AB}}{I} = \frac{1}{2}R \quad (4)$$

(2) ①中 A、B 两点之间的等效电阻 R_{AB} , 可看成是连接在 A、B 两点间电阻丝的电阻 R 与以 A、B 为端点的剩余部分两端网络电阻 R_X 的并联等效电阻. 由④式不难得出, 此剩余部分两端网络电阻 R_X



图例 10-8

为

$$R_X = R$$

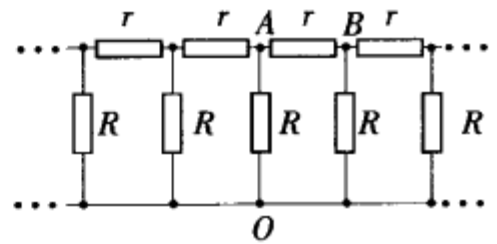
若 A、B 之间电阻丝的电阻为 r ，其余各段电阻丝的电阻仍为 R ，则网络 A、B 两点之间可看成是电阻 r 与电阻 R_X 的并联，故此两点之间的等效电阻 R_{AB}' 为

$$R_{AB}' = \frac{rR_X}{r+R_X} = \frac{rR}{r+R}$$

例 10-9 由电阻 r 和 R 连接而成的无穷电阻网络，如图例 10-9a 所示。试求：

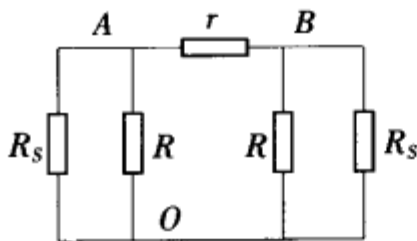
- (1) 相邻两节点 A、B 之间的等效电阻 R_{AB} ；
- (2) 相隔无穷远两节点之间的等效电阻 R_∞ ；
- (3) 当中相隔 n 个电阻 r 的两节点之间的等效电阻 R_n 。

解：(1) 以相邻两节点 A 和 B 为两端点的无穷电阻网络可等效为图例 10-9b 所示的网络，其中 R_s 为 A 点以左或 B 点以右的以 A、O 或 B、O 为两端的无穷电阻网络的等效电阻。此无穷电阻网络是由两个电阻： r 和 R 连接而成的网络元向单一方向无限联接而成，则由网络的无限性可知，此网络若再增加一个网络元（如图例 10-9c 所示），则等效电阻不变，故有

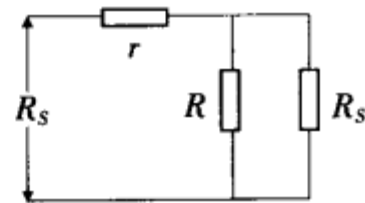


图例 10-9a

$$R_s = r + \frac{RR_s}{R+R_s}$$



图例 10-9b



图例 10-9c

即

$$R_s^2 - rR_s - rR = 0 \tag{1}$$

可解得

$$R_s = \frac{r}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4R}{r}} \right) \tag{2}$$

由图例 10-9b 不难求得 A、B 两点间的等效电阻 R_{AB} 为

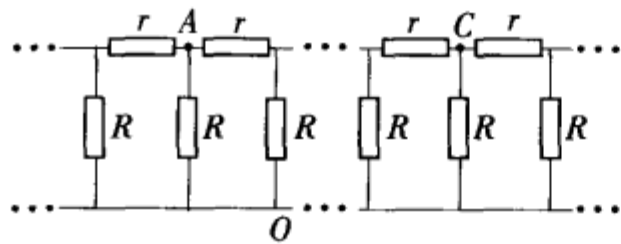
$$R_{AB} = \frac{\frac{2R_s R}{r + R_s + R}}{\frac{2R_s R}{r + R_s + R}} = \frac{2RrR_s}{2RR_s + r(R + R_s)}$$

由①式得 $R_s^2 = r(R + R_s)$ ，将此式和②式代入上式，便得

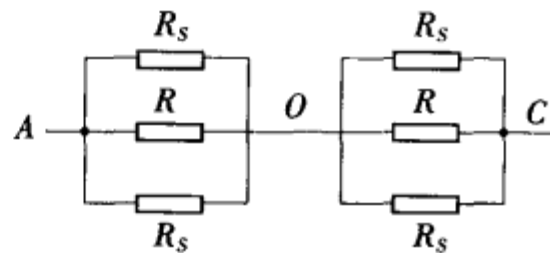
$$R_{AB} = \frac{2Rr}{2R + R_s} = \frac{4Rr}{4R + r \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4R}{r}} \right)}$$

(2) 设节点 C 与节点 A 相隔无穷远，如图 10-9d 所示。则以 A、C 为两端点的无穷电阻网络可等效为图例 10-9e 所示的网络，其中有四个电阻 R_s ，分别是 A 点以左、A 点以右，C 点以左和 C 点以右的以 A、O 或 C、O 为两端的无穷网络的等效电阻。由图例 10-9e 即可求得 A、C 两点间的等效电阻 R_{AC} 为

$$R_{AC} = 2 \times \frac{\frac{R_s}{2} R}{\frac{R_s}{2} + R} = \frac{2RR_s}{2R + R_s}$$



图例 10-9d



图例 10-9e

把①式代入上式, 便得

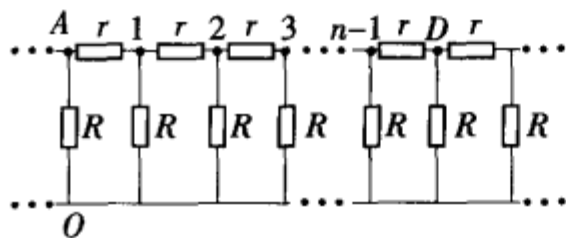
$$R_{\infty} = R_{AC} = \frac{2Rr(1 + \sqrt{1 + \frac{4R}{r}})}{4R + r(1 + \sqrt{1 + \frac{4R}{r}})}$$

(3) 设节点 D 是节点 A 以右与 A 相隔 n 个电阻 r 的节点, 并设 A 点以右第 $1, 2, 3, \dots$ 个节点分别为节点 $1, 2, 3, \dots$, 故节点 n 就是节点 D , 如图例 10-9f 所示。

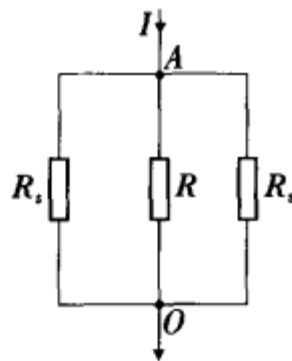
设想在 A, O 两点间加一电压 U_0 , 若取 O 点为零电势点 (即 $U_O' = 0$), 则 A 点的电势 U_A' 为

$$U_A' = U_0$$

此时流入 A 点的电流 I_A' (设为 I) 可由图例 10-9g 所示的等效网络求得, 有



图例 10-9f



图例 10-9g

$$I_A' = \frac{U_0}{\left(\frac{1}{R} + \frac{2}{R_s}\right)^{-1}} = U_0 \left(\frac{1}{R} + \frac{2}{R_s}\right) = I$$

此电流 I 也是从 O 点流出的电流 I_O' 的值, 即

$$I_O' = -U_0 \left(\frac{1}{R} + \frac{2}{R_s}\right) = -I$$

从 A 点流向节点 1 的电流 $I_s = \frac{U_0}{R_s}$, 故节点 1 的电势 U_1' 为

$$U_1' = U_0 - I_s r = U_0 \left(1 - \frac{r}{R_s}\right)$$

从节点 1 流向节点 2 的电流 $I_s' = \frac{U_1'}{R_s}$, 故节点 2 的电势 U_2' 为

$$U_2' = U_1 - I_s' r = U_1' \left(1 - \frac{r}{R_s}\right) = U_0 \left(1 - \frac{r}{R_s}\right)^2$$

由此可推得节点 n (即节点 D) 的电势 U_D' 为

$$U_D' = U_0 \left(1 - \frac{r}{R_s}\right)^n$$

此时并无电流从 D 点流入、流出网络, 故有

$$I_D' = 0$$

再设想在 O 、 D 两点间加电压 U_0 , 同样取 O 点为零电势点, (即 $U_O'' = 0$), 则此时 D 点的电势 U_D'' 为

$$U_D'' = -U_0$$

从前一假设情况的讨论可知, 流入 O 点和流出 D 点的电流 I_O'' 和 I_D'' 的值也为 I , 即

$$I_O'' = U_0 \left(\frac{1}{R} + \frac{2}{R_s} \right) = I$$

$$I_D'' = -U_0 \left(\frac{1}{R} + \frac{2}{R_s} \right) = -I$$

在 D 点左方第 n 个节点, 即节点 A 的电势为

$$U_A'' = -U_0 \left(1 - \frac{r}{R_s} \right)^n$$

同样, 并无电流从 A 点流入, 流出网络, 故有

$$I_A'' = 0$$

现将以上两种设想情况中各相应点的电势和相应电流相加, 则 O 、 A 、 D 三点的电势和各电流分别为

$$U_O = U_O' + U_O'' = 0$$

$$I_O = I_O' + I_O'' = 0$$

$$U_A = U_A' + U_A'' = U_0 \left[1 - \left(1 - \frac{r}{R_s} \right)^n \right]$$

$$I_A = I_A' + I_A'' = I = U_0 \left(\frac{1}{R} + \frac{2}{R_s} \right)$$

$$U_D = U_D' + U_D'' = -U_0 \left[1 - \left(1 - \frac{r}{R_s} \right)^n \right]$$

$$I_D = I_D' + I_D'' = -I = -U_0 \left(\frac{1}{R} + \frac{2}{R_s} \right)$$

由于并无电流从 O 点流入或流出网络, 因此, 这时相当于在 A 、 D 两点间加上一电压 U , 有

$$U = U_A - U_D = 2U_0 \left[1 - \left(1 - \frac{r}{R_s} \right)^n \right]$$

而从 A 点流入, 从 D 点流出的电流值为 I , 由此即可求得 A 、 D 两点间的等效电阻 R_{AD} 为

$$\begin{aligned} R_{AD} &= \frac{U}{I} = \frac{2U_0 \left[1 - \left(1 - \frac{r}{R_s} \right)^n \right]}{U_0 \left(\frac{1}{R} + \frac{2}{R_s} \right)} \\ &= \frac{2RR_s}{2R + R_s} \left[1 - \left(1 - \frac{r}{R_s} \right)^n \right] \end{aligned}$$

上式中的 R_s 由②式给出, R_{AD} 即为本小题要求的 R_n .

例 10-10 一电动势 $\varepsilon = 6\text{V}$, 内阻可忽略不计的电池, 通过滑线变阻器 R 向一灯泡供电, 灯泡的电阻 $R_0 = 2\Omega$, 额定电压 $U_0 = 4.5\text{V}$. 为使系统的效率不低于 $\eta = 0.6$, 试计算滑线变阻器的阻值及它应承受的最大电流, 并求此系统的最大可能效率及其应满足的条件.

解: 灯泡在正常工作时流过的电流 I_0 为

$$I_0 = \frac{U_0}{R_0} = 2.25\text{A}$$

其功率 P_0 为

$$P_0 = U_0 I_0 = \frac{U_0^2}{R_0} = 10.125\text{W}$$

用 I 表示流过电源的电流, 则电源消耗的功率 P 为

$$P = \epsilon I$$

所谓系统的效率就是灯泡的功率 P_0 与电源消耗的功率 P 之比, 即

$$\eta = \frac{P_0}{P} = \frac{U_0^2}{\epsilon I R_0}$$

因 U_0 、 ϵ 、 R_0 均已给定, 故效率 η 与电流 I 成反比. 若要求效率 η 不低于 0.6, 则有

$$I = \frac{U_0^2}{\epsilon R_0 \eta} \leq \frac{(4.5)^2}{6 \times 2 \times 0.6} = 2.81 \text{ A}$$

即变阻器应承受的最大电流 $I_m = 2.81 \text{ A}$.

当系统的效率 $\eta = 0.6$ 时, 由欧姆定律, 不难求出此时滑线变阻器两部分电阻 R_1 和 R_2 的阻值.

$$R_1 = \frac{\epsilon - U_0}{I_m} = \frac{6 - 4.5}{2.81} = 0.53 \Omega$$

$$R_2 = \frac{U_0}{I_m - I_0} = \frac{4.5}{2.81 - 2.25} = 8.03 \Omega$$

由此可得滑线变阻器的阻值 R 为

$$R = R_1 + R_2 = 8.56 \Omega$$

由①式可知, 系统的效率 η 与电流 I 成反比, 故系统的最大效率对应的是最小的电流 I , 而最小的电流 I 应是维持灯泡正常工作的电流 I_0 , 故有

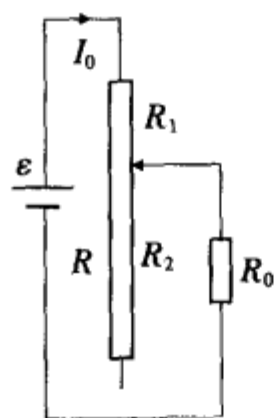
$$\eta = \frac{U_0^2}{\epsilon I R_0} \leq \frac{U_0^2}{\epsilon I_0 R_0} = \frac{4.5^2}{6 \times 2.25 \times 2} = 0.75$$

即系统的最大可能效率为 0.75, 此时滑线变阻器的两部分电阻 R_1 和 R_2 应满足:

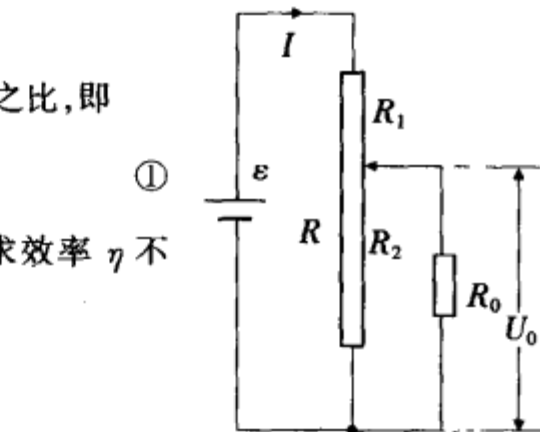
$$R_1 = \frac{\epsilon - U_0}{I_0} = 0.67 \Omega$$

$$R_2 \rightarrow \infty$$

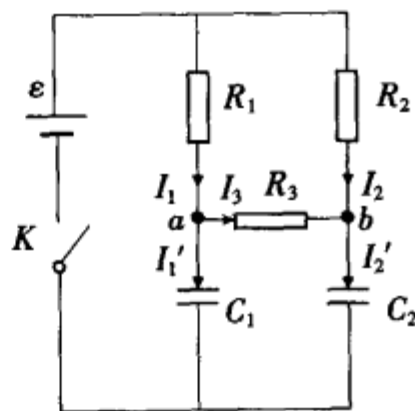
$R_2 \rightarrow \infty$ 相当于滑线变阻器的一端断开, R_1 与 R_0 直接串联, 如图例 10-10b 所示.



图例 10-10b



图例 10-10a



图例 10-11

例 10-11 在图例 10-11 所示的电路中, 电源的电动势为 ϵ , $R_1 = R_3 = R$, $R_2 = 2R$, $C_1 = C_2 = C$, 两电容均不带电. 试求当电键 K 闭合后, 通过电阻 R_3 的电荷量.

解: 设当电键 K 闭合后某瞬间, 各支路电流分别为 I_1 , I_2 , I_3 , I_1' 和 I_2' , 如图例 10-11 所示.

对节点 a 和 b 分别列出基尔霍夫第一方程, 有

$$I_1 = I_1' + I_3 \quad \text{①}$$

$$I_2 + I_3 = I_2' \quad \text{②}$$

对由电阻 R_1 、 R_2 和 R_3 构成的回路(取绕行方向为逆时针方向)列出基尔霍夫第二方程.

$$I_1 R_1 + I_3 R_3 - I_2 R_2 = 0$$

即

$$I_1 + I_3 = 2I_2 \quad (3)$$

将①、②式代入③式,得

$$4I_3 = 2I_2' - I_1' \quad (4)$$

④式表示了当电键 K 闭合后任一瞬时,通过电阻 R_3 的电流 I_3 与电容 C_1 、 C_2 上的充电电流 I_1' 、 I_2' 之间的关系,由此可知,当电容器充完电后, C_1 、 C_2 上的电荷量 Q_1 、 Q_2 与充电过程中通过 R_3 的电荷量 Q_3 之间的关系为

$$4Q_3 = 2Q_2 - Q_1 \quad (5)$$

当电容器充完电后,各支路电流为零,此时两电容上的电压均等于电源电动势 ϵ ,故两电容的电荷量 Q_1 、 Q_2 为

$$Q_1 = Q_2 = C\epsilon \quad (6)$$

将⑥式代入⑤式,即得

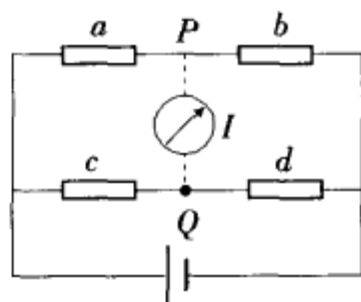
$$Q_3 = \frac{1}{4} C\epsilon$$

例 10-12 有七个外形完全一样的电阻,已知其中六个的阻值相同,另一个的阻值不同,请按照下面提供的器材和操作限制,将那个阻值不同的电阻找出,并指出它的阻值是偏大还是偏小,同时要求画出所用的电路图,并对每步判断的根据予以论证。

提供的器材有:①电池;②一个仅能用来判断电流方向的电流表(量程足够),它的零刻度在刻盘的中央,而且已知当指针向右偏时电流是由哪个接线柱流入电表的;③导线若干。

操作限制:全部过程中电流表的使用不得超过三次。

解:判断所用电路如图例 10-12 所示, a 、 b 、 c 、 d 为四个电阻, P 、 Q 间可接电流计,由电流计中电流 I 的方向可判断出 P 、 Q 两点中哪一点的电势较高,可能出现下列三种情况:



图例 10-12

1. $I=0$ 表示四个电阻阻值相等;

2. I 从 P 到 Q , 表示 P 点电势较高, a 、 b 、 c 、 d 中有一电阻偏大或偏小。有下列四种可能: b 偏大; c 偏大; a 偏小; d 偏小。

3. I 从 Q 到 P , 这表示 P 点电势较低,有四种可能: a 偏大; d 偏大; b 偏小, c 偏小。

应采取的实验步骤和判断:设七个电阻编号分别为①、②、③、④、⑤、⑥、⑦,阻值相同的称为正常电阻,阻值不同的称为特异电阻。

第一次测量:将①、②、③、④分别接入 a 、 b 、 c 、 d 位置,这时可能有以下三种情况:

情况 A: I 向下,则有四种可能:②大;③大;①小;④小。

情况 B: I 向上,则有四种可能:①大;④大;②小;③小。

情况 A 和情况 B 中,其余的三个电阻⑤、⑥、⑦均正常。

情况 E: $I=0$,这时①、②、③、④正常;特异电阻在⑤、⑥、⑦中。

第二次测量:若情况 A 或情况 B 成立,进行第二次测量时将①、②对调,即将②、①、③、④分别接入 a 、 b 、 c 、 d 位置。这时可能有以下两种情况:

情况 C: I 向下,这时有以下四种可能:①大;③大;②小;④小。

情况 D: I 向上,这时有以下四种可能:②大;④大;①小;③小。

若情况 E 成立,特异电阻在⑤、⑥、⑦中。第二次测量取其中两个,例如⑤、⑥分别接入 a 、 b 位置, c 、 d 位置仍用正常电阻,则有以下三种情况:

情况 F: I 向下,这时有二种可能:⑤小;⑥大。

情况 G: I 向上,这时有二种可能:⑥小;⑤大。

情况 H: $I=0$, 这时⑤、⑥均正常, 特异电阻即为⑦.

前二次测量分析:

若情况 A、C 成立, 则只有两种可能: ④小; ③大.

若情况 A、D 成立, 则只有两种可能: ①小; ②大.

若情况 B、C 成立, 则只有两种可能: ②小; ①大.

若情况 B、D 成立, 则只有两种可能: ③小; ④大.

若情况 E、F 成立, 则只有两种可能: ⑤小; ⑥大.

若情况 E、G 成立, 则只有两种可能: ⑥小; ⑤大.

若情况 E、H 成立, 则只有一种可能, 即⑦为特异电阻, 偏小或偏大待定.

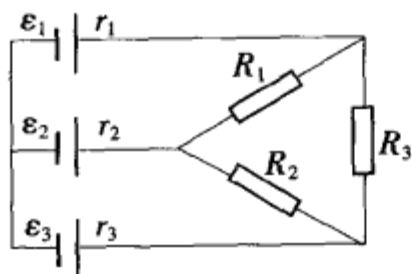
第三次测量: 无论以上前六种情况哪一种情况成立, 特异电阻的范围均缩小为两个, 可能是某一个偏大、或是某一个偏小. 第三次测量可将可能偏小的电阻与三个正常电阻接入电路, 根据电流计的电流方向即可判断出它或者确实偏小或者是正常电阻. 若是前者, 这个电阻就是特异电阻. 若是后者, 则可能偏大的那个电阻, 阻值确实偏大, 是特异电阻.

对于情况 E、H, 只需确定⑦的阻值是偏大或是偏小, 用⑦及三个正常电阻接入电路, 即可根据电流计的电流方向作出判断.

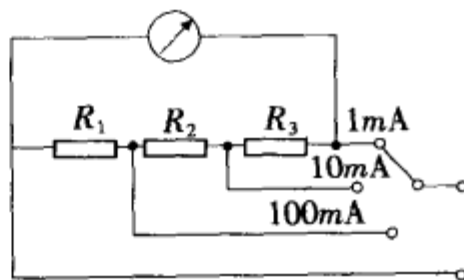
注: 若第一次测量结果为情况 A 或 B, 进行第二次测量时也可利用正常电阻⑤、⑥、⑦中的任意两个代替①、②、③、④中的任意两个, 分析与判断方法与上述相似.

本章习题

10.1 在图习 10.1 所示的电路中, $\epsilon_1 = 6V$, $\epsilon_2 = 4.5V$, $\epsilon_3 = 2.5V$, $r_1 = 0.2\Omega$, $r_2 = r_3 = 0.1\Omega$, $R_1 = R_2 = 0.5\Omega$, $R_3 = 2.5\Omega$, 试求三个电源中各通过的电流.



图习 10.1



图习 10.2

10.2 实验室有一个破损的多量程动圈式直流电流计, 有 1mA, 10mA, 100mA 三档, 由一个单刀三掷开关转换, 其内部电路如图习 10.2 所示. 电流计的表头已烧坏, 无法知道其电特性, 但三个精密分流电阻完好, 测得 $R_1 = 144\Omega$. 现有两个表头 A 和 B, 外形都与原表头相同, 表头 A 的满刻度电流为 0.2mA, 内阻为 660 Ω ; 表头 B 的满刻度电流为 0.5mA, 内阻为 120 Ω . 问在保留分流电阻 R_1 、 R_2 和 R_3 的情况下, 应该用哪个表头修复此电流计? 怎样修复?[提示]

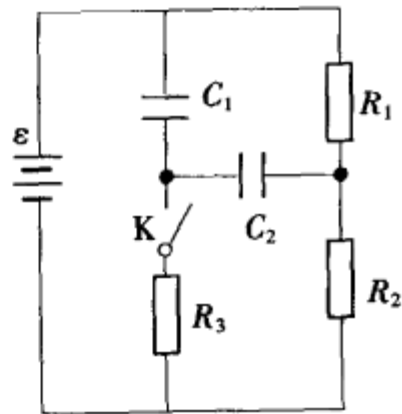
10.3 在图习 10.3 所示的电路中, $\epsilon = 15V$, $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 8\Omega$, $R_3 = 13\Omega$, $C_1 = 3\mu F$, $C_2 = 6\mu F$, 试求:

(1) 当电键 K 刚闭合时, 流过 K 的电流 I ;

(2) 电键 K 闭合后, 流过 K 的总电量.

10.4 滑线变阻器常用来限流和分压, 其原理分别如图习 10.4a 和图习 10.4b 所示. 已知电源端电压为 U (内阻不计), 负载电阻为 R_0 , 滑线变阻器的全电阻为 R , 总匝数为 N , A、C 段的电阻为 R_{AC} .

(1) 在图习 10.4a 中, 当滑动端 C 移动时, 电流 I 的最小改变量 ΔI 为多少? (设变阻器每匝阻值 $\ll R_0$)

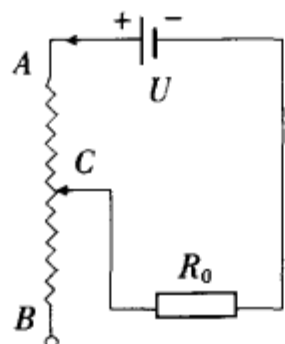


图习 10.3

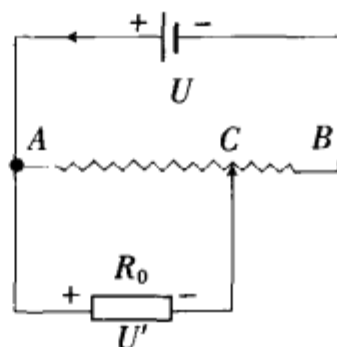
(2)在图习 10.4a 中,为使在整个调节范围内电流 I 的最小改变量 ΔI 不大于 I 的 0.1% ,滑线变阻器的匝数 N 不得小于多少匝?

(3)在图习 10.4b 中,滑线变阻器的额定电流 I_e 不得小于多少?

(4)在图习 10.4b 中,设 $R_0 \gg R$. 证明:负载电压 U' 与 R_{AC} 有简单的正比关系.[提示]



图习 10.4a

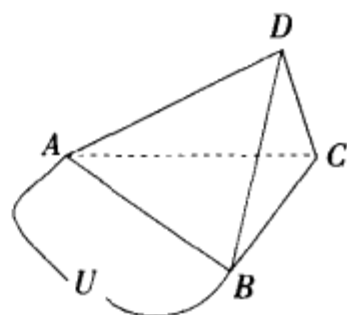


图习 10.4b

10.5 等棱四面形框架 $ABCD$,如图习 10.5 所示,各棱的电阻均为 R . 在 A, B 两点间接上输出电压 U 恒定的电源. 试问从框架上取下哪一条棱,会引起通过电源的电流变化最大? 并求出此最大的电流变化 ΔI_{\max} .

10.6 在图习 10.6 所示的电路中,任两节点间的电阻均为 R ,试求 A, B 两点间的等效电阻 R_{AB} .[提示]

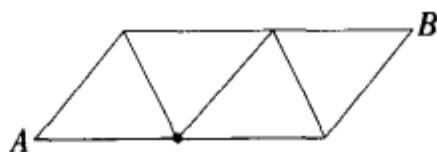
10.7 在图习 10.7 所示的电路中,任两节点间的电阻均为 R ,试求 A, B 两点间的等效电阻 R_{AB} .[提示]



图习 10.5



图习 10.6



图习 10.7

10.8 一无限多级电阻网络如图习 10.8 所示. 其每一级由两个相同电阻构成. 各级两电阻的阻值:第一级为 R ,第二级为 $2R$,第三级为 $4R$,以后每下一级为上一级的二倍. 试求 A, B 间的等效电阻 R_{AB} .

10.9 一无限多级电阻网络,每一级由四个阻值均为 R 的电阻构成,如图习 10.9 所示,试求:

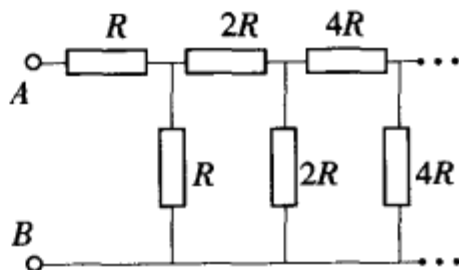
(1) A, B 两点间的等效电阻 R_{AB} ;

(2) A, C 两点间的等效电阻 R_{AC} .[提示]

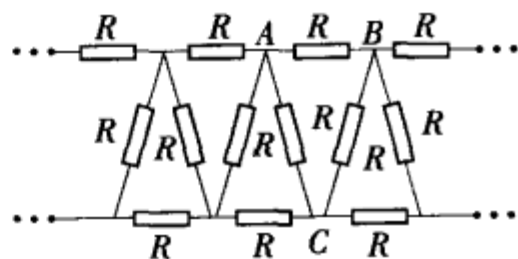
10.10 一无限大平面电阻网络,由大小相同的正六边形网孔构成,如图习 10.10 所示. 各六边形每条边的电阻均为 R . 试求节点 A 和 B 之间的等效电阻 R_{AB} .

[提示]

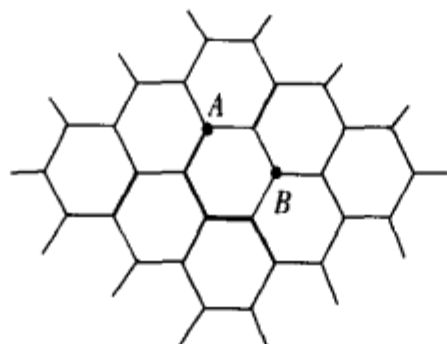
10.11 六个相同的电阻(阻值均为 R)连成一个电阻环,六个接点依次为 1、2、3、4、5 和 6,如图习 10.11a 所示. 现有五个完全相同的这样的电阻环,分别称为 D_1, D_2, D_3, D_4, D_5 .



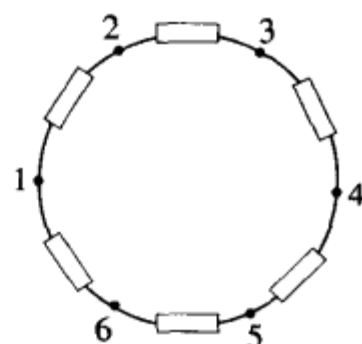
图习 10.8



图习 10.9



图习 10.10



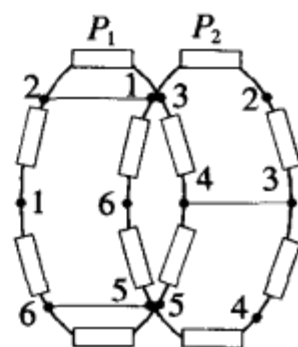
图习 10.11a

现将 D_2 的 1、3、5 三点分别与 D_1 的 2、4、6 三点用导线连接,如图习 10.11b 所示.然后将 D_3 的 1、3、5 三点分别与 D_2 的 2、4、6 三点用导线连接,……依此类推,最后将 D_5 的 1、3、5 三点分别接到 D_4 的 2、4、6 三点上.

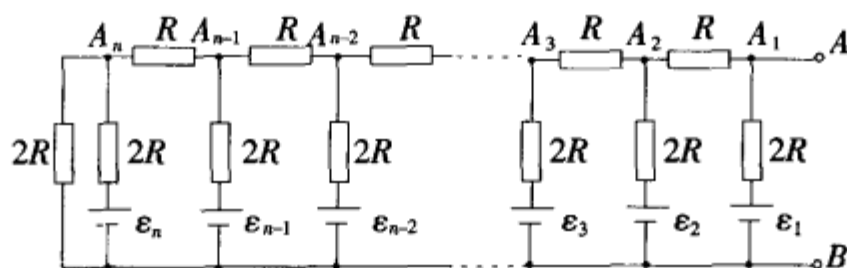
(1) 试证明 D_1 上的 1、3 两点间的等效电阻为 $\frac{724}{627}R$;

(2) 试求 D_5 上的 1、3 两点间的等效电阻. [提示]

10.12 图习 10.12 所示的为一两端(A、B 为端点)有源的有限网络,网络由 n 级构成,每一级均由阻值分别为 R 和 $2R$ 的电阻(第一级只有电阻 $2R$)及一直流电源构成,电源内阻不计,从 A、B 端向左数起,各电源电动势依次为 $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$,在第 n 级上再如图并联一电阻 $2R$.



图习 10.11b



图习 10.12

(1) 此网络可等效为一电压源,试求此电压源的电动势 ϵ 和内阻 r ;

(2) 若取 $n=10$, 设 $\epsilon_i = 10 + i (V) (i=1, 2, 3, \dots, 10)$, 并在 A、B 两端间接一电阻 $2R$. 试问在 A_1 (即 A 点), A_2, \dots, A_{10} 各节点中哪点电势最高? 并求出此最高电势 U_{\max} . [提示]

10.13 由 R_1, R_2, \dots, R_8 八个电阻构成的电路中,有电流从 A 点流入,从 D 点流出,如图习 10.13 所示. 若定义: $\alpha = \frac{R_1}{R_6}, \beta =$

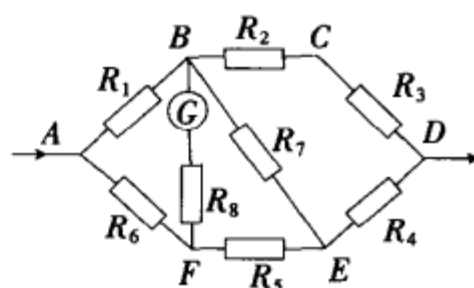
$$\frac{R_2 + R_3}{R_4 + R_5}, \lambda = \frac{R_4}{R_4 + R_5}, \mu = \frac{R_5}{R_7}.$$

(1) 求证: 电流计中若无电流, 则必有以下关系:

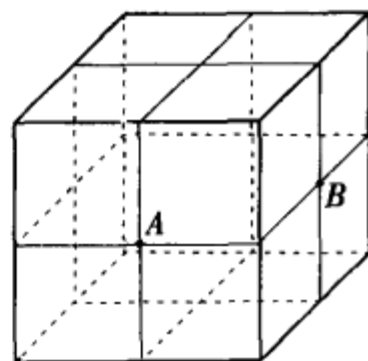
$$\alpha [(\beta + \lambda)\mu + 1] = \beta$$

(2) 在此情况下, 设流过 R_2, R_5, R_7 的电流分别为 i_2, i_5, i_7 , 试求比值 i_5/i_2 和 i_7/i_2 . [提示]

10.14 图习 10.14 所示的正立方体电阻丝框架网络中, 任两节点间电阻丝的电阻均为 R . 试求 A、B 两点间的等效电阻 R_{AB} . [提示]



图习 10.13



图习 10.14

磁 场

§ 11.1 磁场与磁感应强度

磁现象的发现、观察和应用有着悠久的历史,但是真正发现电和磁之间的关系则在 19 世纪.1820 年丹麦物理学家奥斯特在一次电流的实验中偶然发现放在近旁的磁针偏转,这就是电流磁效应的最早发现.他的实验可简述如下:在沿南北方向放置的导线下面放一磁针,当导线中没有电流通过时,磁针在地磁场作用下沿南北取向,与导线平行,如图 11.1-1 所示:当导线中通过电流时,磁针发生偏转.若电流反向,则磁针的偏转也反向.在电流的磁效应发现后,许多物理学家都纷纷进行电与磁关系的研究,同一年,安培发现磁铁和载流导线以及载流导线之间都有相互作用力.人们还发现将导线绕成螺线管形状并通以电流,在螺线管周围的小磁针就呈现与在磁铁棒附近区域相同的取向排列,说明通电螺线管产生了与棒状磁铁相类似的磁效应.

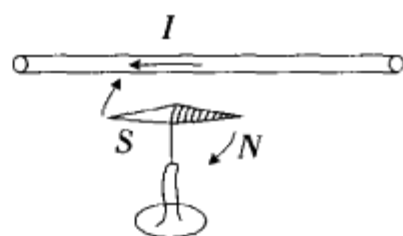


图 11.1-1 电流的磁效应

1826 年,安培提出了著名的“磁性起源假说”:一切物质的磁性皆起源于电流,构成磁性物质的每个微粒都存在着永不停息的环形电流,此环形电流使微粒显示出磁性,N 极和 S 极就分布在环形电流的两侧,对于磁铁和其他能显示磁性的物体来说,每个微粒的环形电流的取向大致上都相同,因此在其两端就显示出磁性.如图 11.1-2 所示.

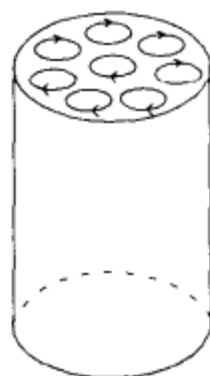


图 11.1-2 磁性起源假说

一些原来不显磁性的磁性物体,其内部微粒的环形电流取向并不一致,但在外磁体的作用下,取向被迫趋向一致,从而也显示出磁性,这就是磁化作用.安培的磁性起源假说很好地解释了通电螺线管两端的磁性现象,也解释了通电螺线管中的铁芯磁化的原因,但在当时,这仅仅是一种假说,无法验证环形电流的存在.

19 世纪末和 20 世纪初,科学家发现了电子并揭开了原子结构的秘密,肯定了磁性起源假说.安培所说的微粒就是物质的原子、分子或其集团.原子、分子内电子的运动形成环形电流.进一步的研究发现电子和核的自旋也引起磁性.原子、分子等微观粒子的运动构成了“分子电流”,物质的磁性就是由其引起的,因此可以说,一切磁现象都可归结为运动电荷之间的相互作用.

静止电荷之间的相互作用是通过电场来传递的,电流之间的磁力作用也同样通过场来传递,这种场称磁场.磁场和电场不同,它由电流(运动电荷)所激发,并对电流(运动电荷)发生作用.静止电荷既不产生磁场,也不受磁场的作用.

恒定电流产生的磁场称为静磁场.磁场的其本性质是它对位于其中的运动电荷有磁场力的作用,和讨论电场的方法类似,我们在磁场中引进运动的带电粒子,观察其受力规律,由此探讨磁场,并引进物理量—磁感应强度 B 来描写磁场的性质.从实验中发现:

(1)运动电荷所受磁场力 F 的方向总是垂直于该电荷运动的速度 v ,即 $F \perp v$,表明磁场力只能改变电荷的运动方向,不改变其速率.

(2)当 v 沿某两个特定方向(相互反平行)时,电荷受到的力 F 为零,我们规定其中一个方向作为磁感应强度 B 的方向,即磁场的方向.

(3)当 v 与磁感应强度 B 的方向垂直时,力 F 具有最大值 F_{\max} ,其数值与运动电荷的电量 q 及速率成正比.由此,规定 B 的数值为

$$B = \frac{F_{\max}}{|q|v}$$

(4)当 v 与 B 的夹角为 $\theta(\theta \leq \pi)$ 时,运动电荷受力的大小为

$$F = |q|vB\sin\theta$$

(5) F 总垂直于 v 与 B 组成的平面,其指向和 v 与 B 满足右手螺旋的关系,即当四指由 v 以小于 π 的角度绕行至 B 时,大拇指的指向即 F 的方向.

以上实验结果可归纳为下式:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (11.1-1)$$

(11.1-1)式中的 F 称为洛仑兹力.(11.1-1)式亦可看成是磁感应强度 B 的定义式,对比电场强度的定义式 $F = qE$,可看出 B 和 E 都是描写场的特征的物理量.

在国际单位制中,磁感应强度 B 的单位是牛顿/安培·米,称为特斯拉,用符号 T 表示

$$1 \text{ 特斯拉} = 1 \text{ 牛}/(\text{安}\cdot\text{米})$$

英国科学家法拉第在研究磁铁周围的磁场时做了一个有趣的实验.在一张薄纸上撒上铁粉,紧贴纸片下方放一根条形磁铁,用手轻轻敲弹纸片时,上面的铁粉就形成有规则的曲线排列,好似有无数条曲线分布在两磁极之间和周围空间,由此他提出用一系列假想的曲线(称为磁感应线)描述磁场:磁场中磁感应线在任一点的切线方向都与该点磁感应强度 B 的方向一致,曲线的疏密程度则表示 B 的大小,并规定,通过垂直于磁场方向的单位面积元的磁感应线的数目与该面元所在处的磁感应强度 B 的数值相等.可归纳出磁感应线具有如下特点:

(1)磁场中每一条磁感应线都是闭合曲线或两头伸向无穷远处.

(2)当磁场系由长直载流导线产生时,磁感应线的环绕方向与电流方向之间服从右手螺旋定则:如果将伸直的右手拇指代表电流的方向,则弯曲四指所指的方向即磁感应线的环绕方向,如图 11.1-3a 所示;而当磁场由圆形电流产生时,如果右手四指弯曲的方向(由指根指向指尖)代表圆形电流的指向,则伸直的拇指即表示圆形电流中心轴线上磁感应线的方向,如图 11.1-3b 所示,几种载流回路的磁场的磁感应线如图 11.1-4 所示.

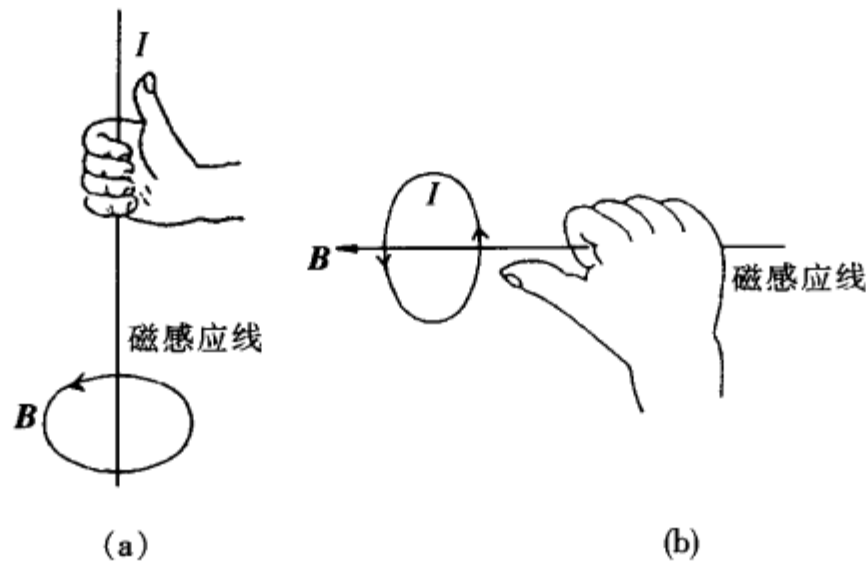
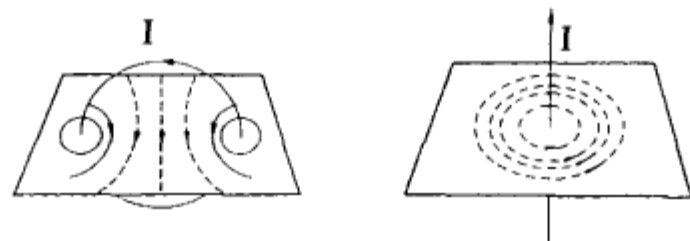


图 11.1-3 磁感应线和电流方向的关系

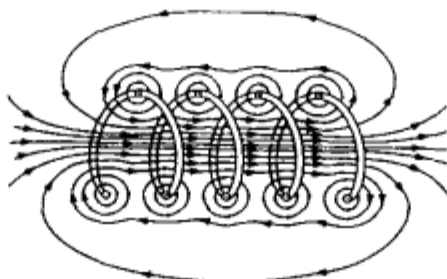
磁场是矢量场,对磁场求通量的方法和电场类似.在磁场中取面元 ds ,如图 11.1-5 所示. ds 的法线方向 n 与 B 的夹角为 θ ,规定通过面元 ds 的磁通量为

$$d\Phi_B = B \cdot \cos\theta \cdot ds = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$$

通过给定曲面 S 的磁通量为



(a)圆电流磁场的磁感线 (b)无限长载流直导线的磁场的磁感线



(c)短螺线管的磁感应线

图 11.1-4 磁感应线

$$\Phi_B = \int_S d\Phi_B = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad (11.1-2)$$

若 S 是闭合曲面, 则规定曲面上任一点的外法线方向为该点周围面元 ds 的方向, 按此规定, 从闭合曲面穿出的磁感应通量为正, 穿进为负. 由此可见, 正像穿过某一曲面的电场线数在数值上与该面的电场通量相等一样, 相应于某一曲面的磁感应通量在数值上也与穿过该面的磁感应线数相等.

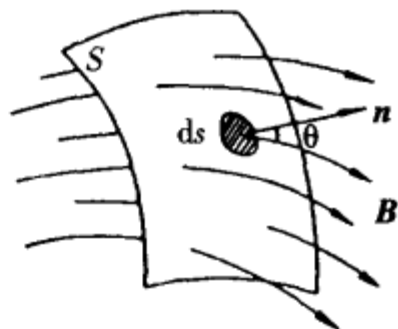


图 11.1-5 磁通量

在国际单位制中, 磁感应通量的单位是韦伯, 符号为 Wb.

$$1 \text{ 韦伯} = 1 \text{ 特斯拉} \cdot \text{米}^2$$

例 11.1-1 有一质点, 质量是 0.5 克, 带电荷 2.5×10^{-8} 库仑. 该质点以 6×10^4 米/秒的水平速度开始运动, 要使它维持在一水平方向运动. 问磁场的最小磁感应强度为多少?

解: 要使质点沿水平方向运动, 必须使洛伦兹力 F 与重力相抵消, F 必方向向上, 由 $F = qv \times B$ 知, B 必在水平方向, 且与 v 垂直, 才可使 B 最小. 因此有

$$mg = qvB$$

$$B = \frac{mg}{qv} = \frac{0.5 \times 10^{-3} \times 9.8}{2.5 \times 10^{-8} \times 6 \times 10^4} = 3.27(\text{T})$$

例 11.1-2 如图 11.1-6 所示, 均匀磁场的磁感应强度 $B = 3 \text{ Wb/m}^2$, 沿 x 轴负方向, 图中为 $\frac{1}{4}$ 个圆柱体, $R = 40 \text{ cm}$, $l = 35 \text{ cm}$, 求通过下列各面的磁通量:

- (1) 平面 $aboe$;
- (2) 平面 $bcdo$;
- (3) $\frac{1}{4}$ 圆柱面 $acde$.

解: 对于均匀磁场, 磁通量可表示为 $\Phi = B \cdot S$

(1) 对 $aboe$ 平面, $B \perp S$, $\Phi = 0$

(2) 对于 $bcdo$ 平面, $B \parallel S$, $S = Rl$

$$\Phi = BS = BRl = 3 \times 0.4 \times 0.35 = 0.42(\text{Wb})$$

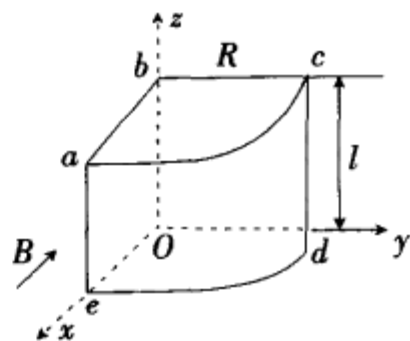


图 11.1-6

(3) 对于 $\frac{1}{4}$ 圆柱面, S 在 x 方向的投影为 Rl , 沿 x 方向,

$$\Phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = -B \cdot Rl = -0.42(\text{Wb})$$

§ 11.2 磁场对电流的作用 磁矩

安培根据大量实验数据总结归纳出磁场中电流元 $I dl$ 所受的磁场力(也称安培力)为

$$d\mathbf{F} = I dl \times \mathbf{B} \quad (11.2-1)$$

上式称为安培公式. 由力的叠加原理, 任意形状的载流导线 L 在磁场中所受的磁场力为该导线上各电流元所受力的矢量和, 即

$$\mathbf{F} = \int_L d\mathbf{F} = \int_L I dl \times \mathbf{B} \quad (11.2-2)$$

例 11.2-1 在图 11.2-1 所示的均匀磁场中(\mathbf{B} 垂直纸面向内), 试证明: 通以相同稳恒电流 I 的直导线 AC 与任意曲线 \widehat{ADC} 所受磁场力相等.

证: 以 A 为原点建立坐标系 Oxy . 在 \widehat{ADC} 上任一点取电流元 $I \Delta l$, 该电流元受力大小为

$$\Delta F = BI \Delta l$$

方向如图所示, 将 ΔF 分解为 x 和 y 方向, 有

$$\Delta F_x = BI \Delta l \cdot \sin\theta = -BI \Delta y$$

$$\Delta F_y = BI \Delta l \cdot \cos\theta = BI \Delta x$$

对整条导线, 有

$$F_x = \sum \Delta F_x = \sum (-BI \Delta y) = 0$$

$$F_y = \sum \Delta F_y = \sum (BI \Delta x) = BI \overline{AC}$$

所以导线 \widehat{ADC} 受力为

$$\mathbf{F}_{\widehat{ADC}} = F_y \mathbf{j} = BI \overline{AC} \mathbf{j}$$

而载流直线 \overline{AC} 所受的力由安培公式得

$$\mathbf{F}_{\overline{AC}} = BI \overline{AC} \mathbf{j}$$

所以

$$\mathbf{F}_{\widehat{ADC}} = \mathbf{F}_{\overline{AC}}$$

下面讨论均匀磁场对平面载流线圈的作用. 如图 11.2-2 所示, 使右手四指弯曲的方向代表线圈中电流的环绕方向, 则伸直的拇指代表该线圈的法线方向, 用单位法向矢量 \mathbf{n} 表示. 设有一矩形线圈 $ABCD$, 边长为 l_1 和 l_2 , 通以电流 I , 放在磁感应强度为 \mathbf{B} 的均匀磁场中, 线圈法线 \mathbf{n} 与 \mathbf{B} 的夹角为 θ , 如图 11.2-3 所示, 线圈的一组对边 AD 和 BC 与 \mathbf{B} 垂直. 分析线圈各边的受力情况, AB 和 CD 受到的磁场力 \mathbf{F}_1 和 \mathbf{F}_1' 量值相等、方向相反, 且在同一直线上, 因而对线圈的作用相互抵消, 可不作具体计算. 另一组对边 DA 和 BC 所受磁场力也是量值相等、方向相反, 但不在同一条直线上, 因此对线圈产生力偶矩. 这两边受磁场力的大小为

$$F_2 = F_2' = IB l_2$$

方向如图 11.2-3b 所示, 该图为从线圈上俯视的图. 线圈所受磁力矩的量值为

$$M = F_2 l_1 \sin\theta = IB l_1 l_2 \sin\theta = IB S \sin\theta$$

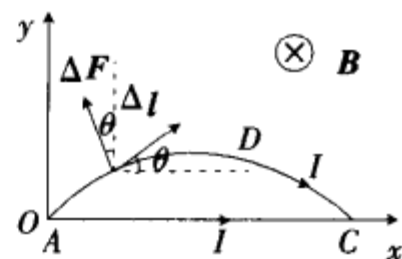


图 11.2-1

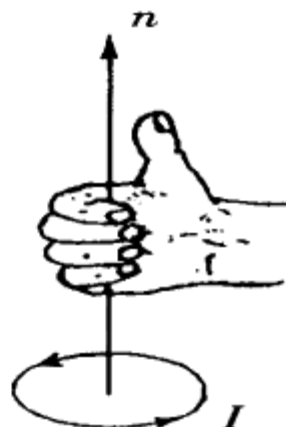


图 11.2-2 平面载流线圈的法线方向

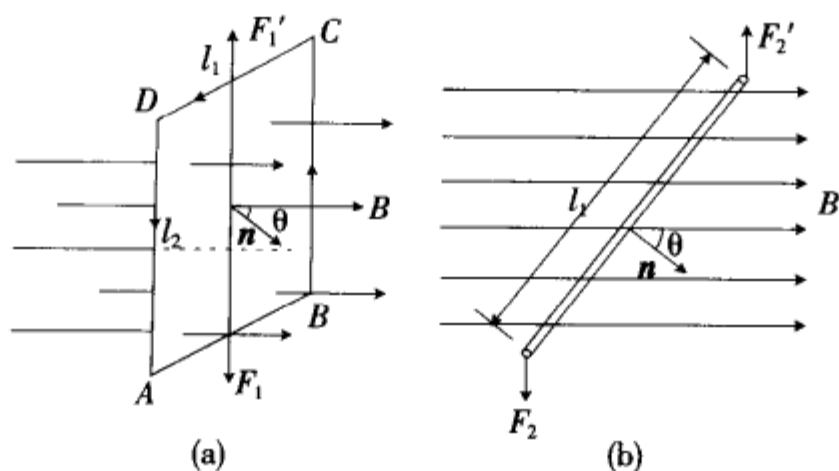


图 11.2-3 均匀磁场对矩形载流线圈的作用

式中 $S = l_1 l_2$ 为矩形线圈的面积,若线圈有 N 匝,则线圈所受磁力矩为

$$M = NISB \sin\theta = P_m B \sin\theta \quad (11.2-3)$$

式中 $P_m = NIS$,是描写平面载流线圈性质的量,用矢量表示,可写成

$$\mathbf{P}_m = NIS \mathbf{n} \quad (11.2-4)$$

P_m 称为线圈的磁矩, \mathbf{n} 为线圈法线的单位矢量,计及 \mathbf{M} , \mathbf{P}_m , \mathbf{B} 三者之间的方向关系,又可写成

$$\mathbf{M} = \mathbf{P}_m \times \mathbf{B} \quad (11.2-5)$$

即平面载流线圈在均匀磁场中受到力矩作用,其方向总是使线圈的磁矩 \mathbf{P}_m 有转到与 \mathbf{B} 方向一致的趋势,由于平面载流线圈在均匀磁场中所受到的磁场力为零,所以不发生线圈的平动,只有转动,对任意形状的平面载流线圈,该结论同样适用。

例 11.2-2 有一圆线圈直径 10cm,共 20 匝,通电流 2A,将此线圈置于磁感应强度为 0.6 特斯拉的均匀磁场中,试求:

- (1)作用在线圈上的最大力矩;
- (2)线圈平面在什么位置时,线圈所受力矩是(1)中的一半.

解:(1) $\mathbf{M} = \mathbf{P}_m \times \mathbf{B}$

$$M_{\max} = P_m B = NISB = 20 \times 2 \times \pi \left(\frac{0.1}{2}\right)^2 \times 0.6 = 0.19(\text{N}\cdot\text{m})$$

$$(2) M = \frac{1}{2} M_{\max} = P_m B \sin\alpha$$

$$\frac{1}{2} P_m B = P_m B \sin\alpha$$

得

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{1}{2} \\ \alpha &= 30^\circ \text{ 或 } 150^\circ \end{aligned}$$

即线圈法线与 \mathbf{B} 成 30° 角或 150° 时 M 为 M_{\max} 的一半。

§ 11.3 磁场的高斯定理和安培环路定理

由前面已知,磁感应线是闭合曲线,表明磁场中不存在磁感应线的首和尾,即磁场是无源场。若在磁场中作一任意形状的封闭曲面 S ,则根据磁感应线的闭合特性,穿进 S 面和穿出 S 面的磁感应线总数必定相等,因而通过磁场中任一闭合曲面 S 的总磁感应通量恒为零,这一结论可表达为

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (11.3-1)$$

此即磁场的高斯定理。该定理说明了磁场是无源场。

既然磁场源于电流,类比静电场中电场的计算方法,可以把任意形状的载流导线看成是由许多电流元所组成,这些电流元单独在某场点产生的磁场叠加起来,就是载流导线整体在该点产生的磁场.理论和实验都表明,载流导线所产生的磁场的磁感应强度的数值与电流 I 成正比,例如,载有电流 I 的无限长直导线、距离导线为 a 处的 P 点的磁感应强度

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \quad (11.3-2)$$

式中 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ 牛·安培⁻²称为真空磁导率.由此可见,在垂直于直导线的平面上,磁感应线为一系列环绕电流的同心圆(见图 11.1-4b).

又如,对于半径为 R 的圆形线圈,当通以电流 I 时,在其中心轴线上离中心为 x 处的点 P 的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 IR^2}{2(x^2 + R^2)^{3/2}} \quad (11.3-3)$$

在圆心处, $x=0$

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R} \quad (11.3-4)$$

下面我们通过长直载流导线产生的磁场,计算磁感应强度的环流.

如图 11.3-1 所示,长直导线垂直于纸面,电流指向纸面上方,在纸面上选择任意包围电流 I 并按逆时针方向绕行的闭合路径 L ,在 L 上任一点 P 处取线元 dl , P 处的磁感应强度大小为 $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, r 为 P 点到导线的距离, B 的方向垂直于矢径 r ,则 B 沿 L 的环流为

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L B \cos\theta dl$$

式中 θ 为 dl 与 B 的夹角.由图知 $dl \cos\theta = r d\varphi$,代入上式

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L B r d\varphi = \oint_L \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot r d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_L d\varphi$$

对于闭合路径 L , $\oint_L d\varphi = 2\pi$,所以, B 在闭合路径 L 上的环流为

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I \quad (11.3-5)$$

上式说明:当闭合路径 L 包围电流时, B 在 L 上的环流仅与电流 I 有关,与路径形状无关.

若电流方向垂直于纸面向里,则 P 点 B 的方向与图 11.3-1 相反,按上述回路 L 计算 B 的环流时,大小与上式相同,但有一负号出现.这说明 B 的环流还与电流 I 的方向有关.通常对电流的正负作如下规定:当电流方向与闭合回路的绕行方向符合右手定则时(右手四指弯曲指向为回路绕行方向,大拇指指向为电流方向),电流为正;反之,电流为负,这样, B 在 L 上的环流可以统一地用(11.3-5)式表示,其中 I 为代数值.

若闭合路径不包围电流 I ,如图 11.3-2 所示,可从长直导线 I 出发作许多射线,将环路 L 分割成一对对的线元,如图中的 dl_1 和 dl_2 ,它们分别与导线相距 r_1 和 r_2 ,且对导线所张的圆心角相同,设为 $d\varphi$,则

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{l}_1 &= B_1 dl_1 \cos\theta_1 = -B_1 r_1 d\varphi \\ &= -\frac{\mu_0 I}{2\pi} d\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{l}_2 &= B_2 dl_2 \cos\theta_2 = B_2 r_2 d\varphi \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\varphi \end{aligned}$$

故对于每一对 dl_1 和 dl_2 ,都有

$$\mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{l}_1 + \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{l}_2 = 0$$

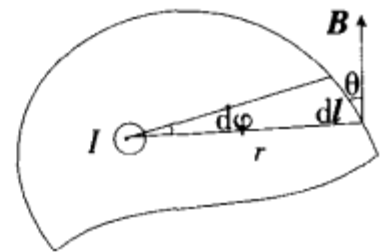


图 11.3-1 磁感应强度的环流

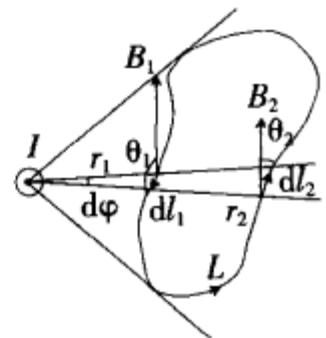


图 11.3-2 闭合路径不包围电流时 B 的环流

因为每对线元对线积分 $\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ 的贡献相抵消, 所以 \mathbf{B} 沿整个环路 L 的积分为零, 即

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

将上述结果推广到任意形状的电及多个电流回路, 得

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum_{L_{\text{内}}} I \quad (11.3-6)$$

式中电流 I 的正、负由前所述. 上式即安培环路定理的数学表达式. 安培环路定理表明磁感应强度沿任意闭合回路的线积分等于穿过该闭合回路的全部电流的代数和的 μ_0 倍. 对于有磁介质存在的情况或非稳恒磁场, 安培环路定理要加以修正.

尽管未被闭合路径所包围的电流对磁场的环流没有贡献, 但对空间各点的磁场是有贡献的.

犹如应用高斯定理易于求解源电荷对称分布的静电场一样, 安培环路定理对解决具有对称性的静磁场问题特别方便, 下面举例说明.

例 11.3-1 设有一无限长直圆柱导线, 截面半径为 R , 电流沿截面均匀分布, 电流为 I , 求导线内外的磁场分布.

解: 如图 11.3-3 所示, 设电流从下往上流动, 由电流的轴对称分布, 可以断定磁感应强度 \mathbf{B} 的大小具有轴对称性, 且与观察点 P 到圆柱体轴线的距离 r 有关, 方向沿圆周的切线, 在圆柱体外部以 r 为半径, 圆柱轴上一点 O 为圆心作圆形回路, 圆平面与导线垂直, 由安培环路定理, 磁感应强度对该圆形回路的环流为

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L B \cdot d\mathbf{l} = B \oint_L dl = 2\pi r B = \mu_0 I$$

由此得

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (r > R)$$

同样, 在圆柱体内任一点距轴心为 r 处, 以 r 为半径作圆形回路, 对该回路有

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r B = \mu_0 I'$$

I' 为回路所包围的电流, $I' = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} I = \frac{r^2}{R^2} I$, 代入上式,

$$2\pi r B = \mu_0 \frac{r^2}{R^2} I$$

由此得

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \quad (r < R)$$

以上结果表明在圆柱体内部 B 与 r 成正比, 在圆柱体外部, B 与 r 成反比.

例 11.3-2 设一无限长螺线管单位长度上的匝数为 n , 电流为 I , 求螺线管内外的磁感应强度.

解: 图 11.3-4 为无限长螺线管的轴向中心剖面图, 由电流分布的对称性可判断管内磁感应强度 \mathbf{B} 只有轴向分量, 作矩形闭合路径, 使两条边与轴线平行, 分别位于管内、外, 另两条边与轴线垂直, 则磁感应强度对这一闭合路径的环流为

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_{ab} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_{bc} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_{cd} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_{da} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$$

上面等式右边的第二、第四项为零, 因为 $\mathbf{B} \perp d\mathbf{l}$, cd 边在螺线管外, 对于无限长的密绕螺线管, 管外的磁场实际上可视为零, 这可由图 11.1-4c 中稀疏的螺线管的 B 线推论. 对非常靠近螺线管某一匝线圈的

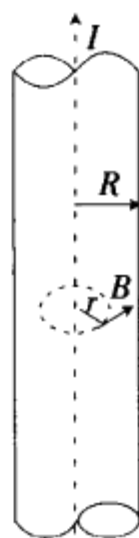


图 11.3-3
无限长载流圆柱导线内外的磁场

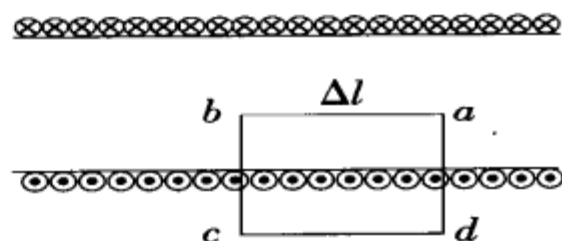


图 11.3-4 无限长螺线管内的磁场

各点来说,导线周围的 B 线是一些同心圆,稍远些的磁场,是组成这个螺线管的所有各匝线圈产生的磁场的矢量和,因而在两导线之间的区域,各匝线圈产生的磁场有互相抵消的趋势,在螺线管外的 P 点,由螺线管各匝上面部分在该点产生的磁场指向左面,而由下面部分在该点产生的磁场则指向右方,两者亦有相互抵消的趋势,在螺线管内离导线较远处的磁场与管轴平行.在导线密绕的极限情况下,螺线管上的电流实际上相当于圆柱形电流片,当螺线管为无限长时,由对称性分析可知螺线管内部的磁场与轴线平行,外部磁场近似为零.由此

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_{ab} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B_{\text{内}} \Delta l = \mu_0 (nI \Delta l)$$

得

$$B_{\text{内}} = \mu_0 nI \quad (11.3-7)$$

既然 ab 是平行于轴线的任一直线,上式表明管内任一点的磁感应强度都是 $\mu_0 nI$,即管内的磁场是均匀的.

§ 11.4 带电粒子在磁场中的运动

在近代科技中,广泛应用磁场对带电粒子的作用力来控制带电粒子的运动.下面讨论带电粒子以不同的速度方向进入均匀磁场后的运动情况.

(1) 带电粒子速度 v_0 的方向和磁感应强度 \mathbf{B} 的方向平行.

由洛伦兹力公式知, $v_0 // \mathbf{B}$ 时,

$$\mathbf{F} = q \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B} = 0$$

故带电粒子在磁场中作匀速直线运动.

(2) 带电粒子速度 v_0 的方向和磁感应强度 \mathbf{B} 垂直

带电粒子在大小不变的法向力作用下,在垂直于 \mathbf{B} 的平面内作匀速圆周运动,如图 11.4-1 所示,洛伦兹力即带电粒子作圆周运动的向心力,若粒子质量为 m ,则有

$$F = qv_0 B = m \frac{v_0^2}{R}$$

可得粒子作圆周运动的轨道半径为

$$R = \frac{mv_0}{qB} \quad (11.4-1)$$

带电粒子沿圆周轨道运行一周所需的时间称为粒子的运动周期 T

$$T = \frac{2\pi R}{v_0} = \frac{2\pi m}{qB} \quad (11.4-2)$$

由(11.4-1)和(11.4-2)式可见,带电粒子在均匀磁场中作圆周运动的半径与粒子的速度成正比,与磁感应强度的数值成反比;而运动周期与速度无关.

(3) 带电粒子入射均匀磁场的速度 v_0 与磁场 \mathbf{B} 的方向成 θ 角

如图 11.4-2 所示,将 v_0 分解为平行于 \mathbf{B} 的分量 $v_{0x} = v_0 \cos \theta$ 和垂直于 \mathbf{B} 的分量 $v_{0y} = v_0 \sin \theta$,由前面讨论知,带电粒子将在垂直于 \mathbf{B} 的平面内以速率 v_{0y} 作匀速圆周运动;并以 v_{0x} 沿 \mathbf{B} 方向作匀速直线运动,可见粒子作以 \mathbf{B} 为轴线的螺旋运动,其半径为

$$R = \frac{mv_{0y}}{qB} = \frac{mv_0 \sin \theta}{qB} \quad (11.4-3)$$

螺旋运动的周期为

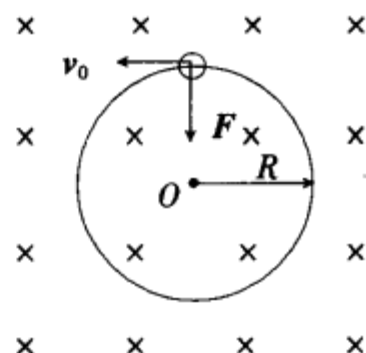


图 11.4-1 回旋运动

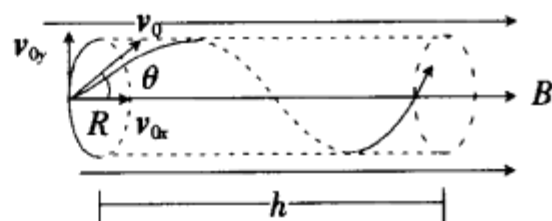


图 11.4-2 螺旋线运动

$$T = \frac{2\pi R}{v_{0y}} = \frac{2\pi m}{qB}$$

与带电粒子在磁场中作匀速圆周运动时的周期相同。在一个周期内,粒子沿磁场方向移动的距离称为螺距 h ,

$$h = v_{0x}T = \frac{2\pi m v_0 \cos\theta}{qB} \quad (11.4-4)$$

以上分析了单个带电粒子在均匀磁场中的运动。若有一类速率近似相等的带同种电荷的粒子在空中运动,并沿同样的方向从一个小孔中射出,则由于库仑斥力的作用,运动过程中粒子束会发散。如我们沿原运动方向施以均匀的磁场,由于各个粒子偏离原运动方向(即磁场方向)的角度 θ 很小,各个粒子平行和垂直于磁场的速度分量 $v_{//}$ 和 v_{\perp} 可表示为

$$v_{//} = v \cos\theta \approx v$$

$$v_{\perp} = v \sin\theta \approx v\theta$$

因而,不同 θ 角的粒子沿 B 方向的运动速度近似相同,而 v_{\perp} 不同。各带电粒子在均匀磁场中就作半径不同、螺距相同的螺旋运动,因为周期相同,结果这些散开的带电粒子在沿各自的螺旋轨道绕行一周后,又重新会聚于同一点,这与透镜会聚光束的作用十分相似,由于这是磁场将发散的粒子束聚焦,所以称为磁聚焦。

利用带电粒子在电场和磁场中的运动规律,可以测定带电粒子所带的电荷与质量的比值 q/m ,即荷质比,这是微观带电粒子的基本参量之一。下面,我们就来介绍一个最典型的测定电子荷质比的方法—汤姆逊实验。

汤姆逊实验的装置如图 11.4-3 所示,玻璃管内抽成真空,阴极 K 和阳极 A 之间加数千伏特的高压,电子由阴极发射后在 K 、 A_1 之间被加速,并通过阳极 A_1 和金属 A_2 中间的小孔形成一束很细的电子流。如果在玻璃管中部区域既没有电场,也没有磁场,则电子流将沿直线匀速前进,一直到达荧光屏 S 的中央 O ,形成光点。如果在中部平行板电容器两极板 P_1 、 P_2 上加电压 U (设 P_1 为正, P_2 为负),则电子流通过 P_1P_2 时,将受到电场力作用而向上偏转,离开电场后,电子以离开 P_1P_2 时的速度继续前进,并到达荧光屏上的 O_1 点。设极板到屏之间的距离是 L ,电场区域的长度为 l ,如图 11.4-4 所示,假设平行板电容器极板之间的均匀电场为 E ,电子以水平方向的初速度 v_0 进入两块平行板之间,则电子受到电场力

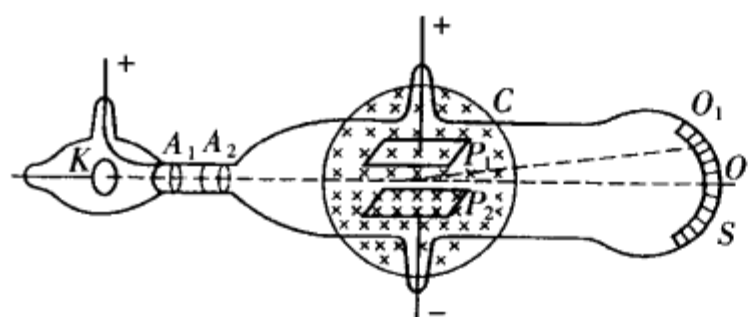


图 11.4-3 汤姆逊实验

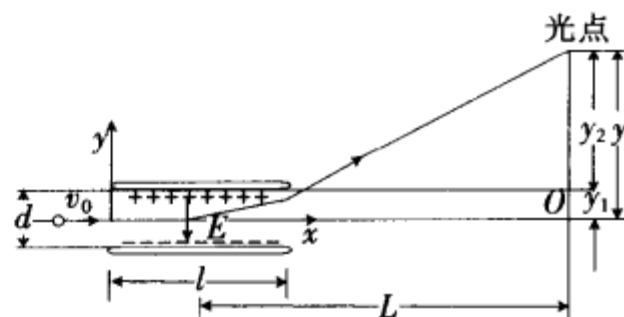


图 11.4-4 电子通过平行板电容器

$$F = -eE$$

方向垂直于速度 v_0 ,其水平方向位移为

$$x = v_0 t$$

竖直方向位移

$$y = \frac{1}{2} a_y t^2 = \frac{eE}{2m} t^2$$

消去 t ,得电子在两个平行电极间的轨迹方程为

$$y = \frac{eE}{2mv_0^2}x^2$$

电子在离开平行电极时,在竖直方向的位移 y_1 为

$$y_1 = \frac{eE}{2mv_0^2}l^2$$

由于电子离开电极后不再受到电场力作用,因而它将以离开平行电极时所具有的速度作匀速直线运动,直到打到荧光屏上.在这一段路程里,电子在水平方向的速度分量仍为 v_0 ,在垂直方向的速度分量为

$$v_y = a_y t_1 = \frac{eE}{m} \cdot \frac{l}{v_0}$$

式中 $t_1 = \frac{l}{v_0}$ 表示电子通过 y 偏转板所需要的时间,电子自离开平行电极后到打到荧光屏上所需的时间为

$$t_2 = \frac{L - \frac{l}{2}}{v_0}$$

这段时间内,电子在竖直方向的位移 y_2 为

$$y_2 = v_y t_2 = \frac{eEl}{mv_0} \cdot \frac{L - \frac{l}{2}}{v_0}$$

因此,电子在竖直方向的总位移,即电子在荧光屏上产生的光点离开荧光屏中点 O 的距离为

$$y = y_1 + y_2 = \frac{eLL}{mv_0^2}$$

平行板间的场强 E 与加在两电极之间的电压 U 成正比

$$E = \frac{U}{d}$$

式中 d 为两平行电极间的距离,因而有

$$y = \frac{eLU}{mv_0^2 d} \quad (11.4-5)$$

若在 P_1P_2 区域中再加一方向垂直于纸面向里的均匀磁场 B ,并调节 B 的大小,使电子流受到垂直向上的电场力和垂直向下的磁场力相等,则荧光屏上的光点又重新回到 O 点,由此应有

$$qE = qv_0B$$

$$v_0 = \frac{E}{B} = \frac{U}{Bd}$$

上式代入(11.4-5)式,得电子的荷质比为

$$\frac{e}{m} = \frac{Uy}{B^2 l d} \quad (11.4-6)$$

汤姆逊通过实验测得 y 值,得到 $e/m = 1.7 \times 10^{11} (\text{C/kg})$

在汤姆逊实验之前,已经有各种实验迹象显示电子的存在.当时,人们对阴极射线也已作过许多研究,但对射线的性质还有争论.汤姆逊在完成这个实验后,断定射线是具有确定电荷和质量的微小粒子流,并从它们的荷质比与各种离子的荷质比相比都要小几个数量级这一事实出发,判断它们是最小的带电粒子,即电子.因此,汤姆逊实验被称为第一次发现电子的实验.但汤姆逊当时还没有分别测出 e 和 m ,1911年密立根用油滴实验测得了电子的电量,于是通过荷质比求出了电子的质量,现代实验测得电子的荷质比为

$$\frac{e}{m} = 1.75881962 \times 10^{11} (\text{C/kg})$$

质谱仪是用来分析同位素的有力工具.它也是根据带电粒子在电磁场中的运动规律而制造的.

自然界中同一种元素的原子核内质子数总是相同的,所以核电荷数也相同,但中子数可以不同,因而原子的质量也可以不同.这些具有相同核电荷数,不同质量数的原子叫做同位素.同一种元素的各种同位素的化学性质相同,所以用化学方法不可能识别它们.但是,由于它们的原子量不同,因此根据这一点可以用物理方法来识别它们.图 11.4-5 是一种常用的磁偏转式质谱仪的原理图,它由三个主要部分组成:离子源、质量分析器(即磁偏转器)和离子接收器.

在离子源中,先将待分析的气态物质(如为液态或固态物质,则需经过加热变成蒸汽再进入离子源)用阴极发射的电子轰击,使它们的原子(或分子)失去电子(一般只失去一个电子)变成正离子,然后经过加速电极加速,再过滤速器的选择,使它们成为具有相同速率并沿同一方向运动的离子束,并引入质量分析器.

质量分析器主要是一段弯成一定弧度的扁平金属管,金属管平放在电磁铁的两极之间,电磁铁的磁极呈扇形,磁场方向垂直纸面向外,正离子被引入分析器后,由于其速度 $v \perp B$,所以它们在磁场力作用下作匀速圆周运动,设圆周半径为 R ,则根据(11.4-1)式可知

$$R = \frac{mv}{qB}$$

由于通过滤速器的正离子的速率 v 都相同,它们所带的电量 q 一般都是一个基本电荷的电量 e ,所以当磁感应强度 B 一定时,轨道半径 R 只跟离子的质量 m 有关,质量大的半径大;质量小的半径小.于是,同一束离子就按照质量的大小被分成几束.这样,不同质量的同位素原子就被分开了.

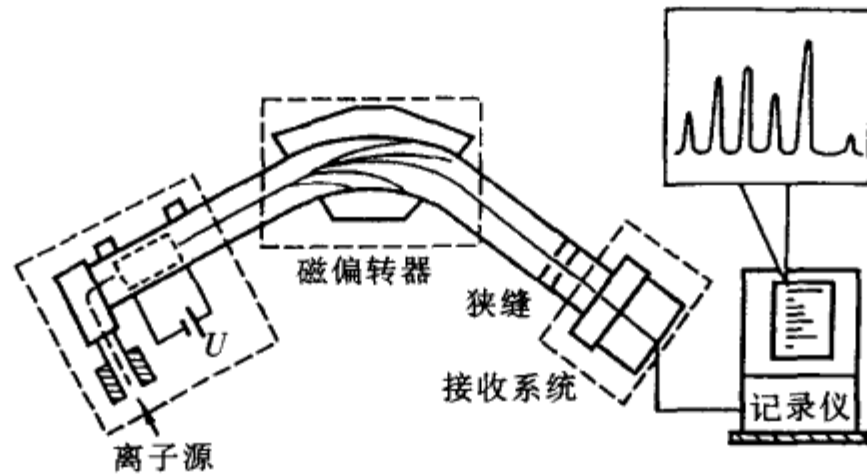


图 11.4-5 质谱仪示意图

离子接收器前装有矩形狭缝,只有轨道集中在一定空间范围内的离子才能通过狭缝进入接收器.离子经过前面的分析器后,轨道已按质量分散成几条,所以轨道相同而能进入接收器的离子,它们的质量必然是相同的,即属于同一种同位素.离子进入接收器后形成电流,电流强度的大小与离子的数目成正比,由此可确定这种同位素的含量.

如果连续地改变磁场的磁感应强度 B ,就可以使被分散的离子束整体横向移动,因而对应于不同质量的离子束,将依次通过狭缝进入接收器,形成强度不同的电流.这些电流经过放大可以用电子记录仪器记录下来,在记录纸上就得到一连串的波形,这就是按质量大小排列的“质谱”.

回旋加速器是一种使带电粒子获得高能量的装置.它的主要部分包括一对接在高频交变电源上作为电极的半圆形空心金属盒,称为 D 形盒,它们封闭在真空室内,安装在一对大型电磁铁的磁极之间.磁铁在垂直于 D 形盒底面的方向产生磁场,高频电源在 D 形盒之间的空隙区域产生交变电场.如图 11.4-6(a)所示.

使用时,把带电粒子(如质子)注入到两 D 形盒之间如图 11.4-6(b)所示,粒子将在电场力作用下被加速,获得能量,然后进入一个 D 形盒,设此时速度为 v ,粒子进入 D 形盒后,不再受到电场加速,而只在磁场的作用下作匀速圆周运动,其轨道半径为 $r = \frac{mv}{qB}$,粒子绕圆周半圈的时间为 $\tau = \frac{1}{2} T_c = \frac{\pi m}{qB}$,是一个与速度无关的值.把交变电压的周期选得与 T_c 恰好相等,这样,当粒子在 D 形盒中绕过半圈而

进入电场区时,电场的方向恰好与上次粒子所遇到的电场方向相反,而与粒子现在的速度方向一致.因而使粒子在穿过电场时又得到加速,又一次获得能量,然后进入对面的 D 形盒,依次进行这样的加速,当粒子的速度达到某一定数值时,粒子在 D 形盒内的圆形轨道将达到磁场的边缘,这时可通过一定的装置引出粒子束,这样获得的粒子最大速率为 $v_m = \frac{eBR}{m}$. 但是,当粒子获得了接近于真空光速 c 的高

速度时, m 不再是常数,根据相对论效应, $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, 其中 m_0 为粒子静止时的质量,这时周期亦将

与速度有关,我们应根据相对论效应调节交变电场的频率,使之与粒子的回旋频率相同,这就是同步回旋加速器的原理.

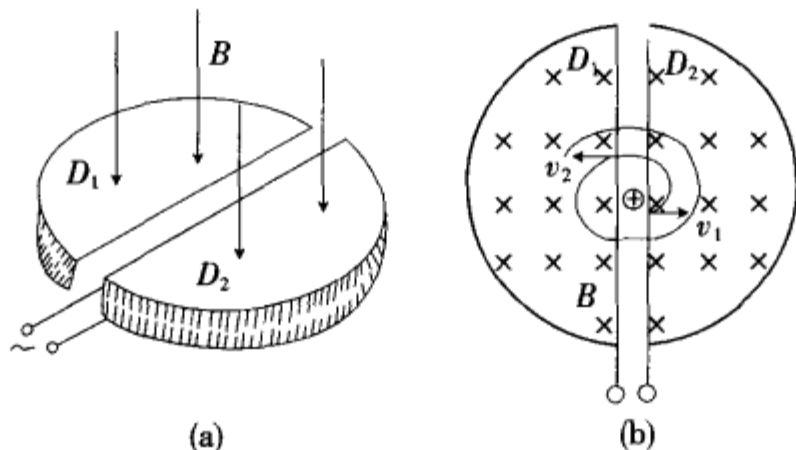


图 11.4-6 回旋加速器

例 11.4-1 如图 11.4-7 所示,从加速管末端的“窗口”射出一束电子,电子的质量为 m ,电量为 e ,动能为 E ,距离窗口为 d 处有一金属板,板与射束方向正交,如果加上磁场可以制止电子束打到板上,试求所需加的磁场 B 至少为多大,方向如何?

解:当所加磁场的方向与电子束的速度方向垂直时,电子将作圆周运动,因此 B 的方向应与纸面垂直,由已知条件知

$$E = \frac{1}{2}mv^2, \quad v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

电子作圆周运动的半径 R 必须小于或等于 d ,即

$$R = \frac{mv}{eB} = \frac{(2mE)^{1/2}}{eB} \leq d$$

得

$$B \geq \left(\frac{2mE}{e^2 d^2} \right)^{1/2}$$

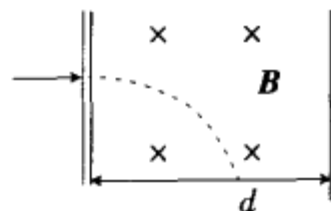
1879年,美国物理学家霍耳在实验中发现,把一载流金属导体板放在均匀磁场中时,如果磁场方向与电流方向垂直,则在磁场和电流两者都垂直的方向上出现电势差,此现象称为霍耳效应,所产生的电势差称为霍耳电势差或霍耳电压,如图 11.4-8 所示.

霍耳效应可以用经典电子论初步解释.如图 11.4-9 所示,当电流通过半导体板时,运动电荷在洛仑兹力作用下偏转,使 a 侧和 b 侧两个面上出现异号电荷分布,从而产生电势差,设半导体中的载流子所带电荷为 $+q$,定向运动的速度为 u ,则载流子受到的洛仑兹力为

$$F_1 = qu \times B$$

在图示的情况下

$$F_1 = quB$$



图例 11.4-7

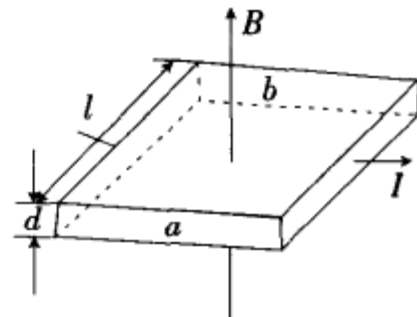


图 11.4-8 霍耳效应

而霍尔电场力的方向与洛伦兹力相反,大小为

$$F_2 = qE = q \frac{U_H}{l}$$

式中 U_H 为霍尔电势差. 当洛伦兹力和霍尔电场力平衡时

$$quB = q \frac{U_H}{l} \quad (11.4-7)$$

载流子不再偏转. 设单位体积的载流子数目为 n , 则电流为

$$I = nldqu \quad (11.4-8)$$

将(11.4-8)式代入(11.4-7)式,得

$$U_H = U_{ab} = \frac{1}{nq} \cdot \frac{BI}{d} = R \cdot \frac{IB}{d} \quad (11.4-9)$$

式中 $R = \frac{1}{nq}$ 称为霍尔系数, R 的符号与载流子所带电荷的正、负一致, $q > 0$ 时, $R > 0$; 反之, $q < 0$, 则 $R < 0$, 所以, 可以根据霍尔系数的正、负来判断载流子电荷的正、负. 另外, 由于 R 与载流子浓度 n 有关, 可以通过测量 R 来确定载流子浓度.

一般金属中载流子是电子, 浓度很大, 约 10^{23}cm^{-3} , 所以霍尔系数很小. 半导体中载流子浓度要小得多, 霍尔系数就大得多, 能产生较大的霍尔电势差, 因此, 霍尔效应对研究半导体材料的性质提供了有力的手段. 另一方面, 可以利用半导体材料制成霍尔元件, 用以测量磁场.

例 11.4-2 在一霍尔效应实验中, 宽 1.0cm , 长 4.0cm , 厚 10^{-3}cm 的导体, 沿长度方向载有 3.0A 的电流, 当有 1.5Wb/s^2 的磁场垂直地通过该薄导体时, 产生 $1.0 \times 10^{-5} \text{V}$ 的横向霍尔电压(在宽度两端, 图 11.4-10), 由这些数据求:

- (1) 载流子的漂移速度;
- (2) 每立方厘米的载流子数目;
- (3) 在图上画出 B , I 和霍尔电压 U_H 的极性之间的关系.

解: (1) 霍尔电场力与磁场力相等

$$quB = q \frac{U_H}{l}$$

得

$$u = \frac{U_H}{Bl} = \frac{10^{-5}}{1.5 \times 10^{-2}} = 6.67 \times 10^{-4} (\text{m/s})$$

$$(2) n = \frac{I}{ldqu} = \frac{3}{10^{-2} \times 10^{-5} \times 1.6 \times 10^{-19} \times 6.67 \times 10^{-4}} = 2.8 \times 10^{29}$$

(3) 霍尔电压的极性如图所示.

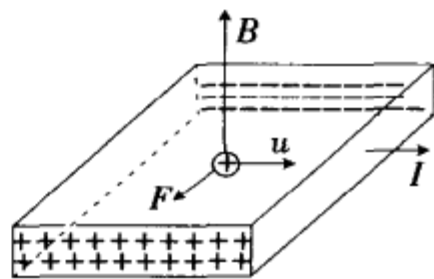


图 11.4-9 霍尔电势差的产生

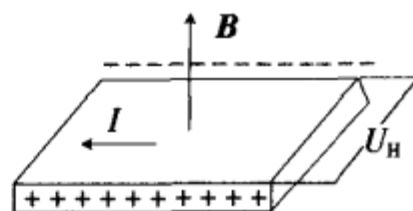


图 11.4-10

本章综合例题

例 11-1 如图例 11-1(a)所示, 一个长为 L_1 , 宽为 L_2 , 质量为 m 的矩形导电线框, 由质量均匀分布的刚性杆构成, 静止放置在不导电的水平桌面上, 可绕与线框的一条边重合的光滑固定轴 ab 转动, 在此边中串接一能输出可变电流的电流源(图中未画出). 线框处在匀强磁场中, 磁场的磁感应强度 B 沿水平方向且与转轴垂直, 现让电流从零逐渐增大, 当电流大于某一最小值 I_{\min} 时, 线框将改变静止状态.

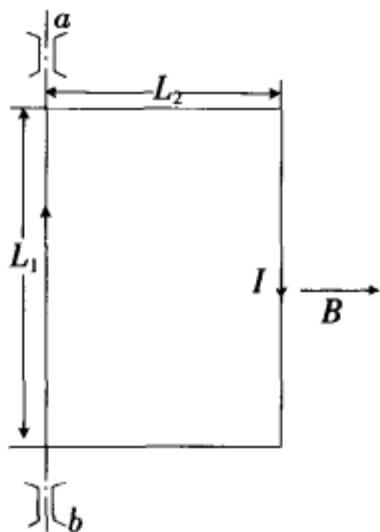
(1) 求电流值 I_{\min} ;

(2) 当线框改变静止状态后, 设该电流源具有始终保持恒定电流值 I_0 不变 ($I_0 > I_{\min}$) 的功能. 已知在线框运动过程中存在空气阻力, 试分析线框的运动状况.

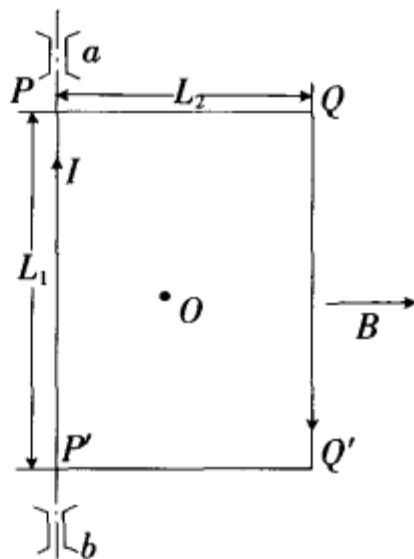
(第 19 届全国中学生物理竞赛题)

解: (1) 如图例 11-1(b) (俯视图) 所示, 导线框放在水平桌面上, 在线框没动以前, 线框的 PQ 边与

$P'Q'$ 边平行于磁场 B , 因而不受磁场力, PP' 边受到安培力的大小为 IBL_1 , 方向垂直于桌面向下, 但此力对轴的力矩为零, QQ' 边受力的大小为



图例 11-1(a)



图例 11-1(b)

$$F_{QQ'} = IBL_1$$

方向垂直桌面向上, 此力对固定轴的力矩为

$$M_0 = IBL_1L_2 \quad (1)$$

除此力矩外, 线框还受到重力矩作用, 重力力矩等于重力乘线框重心 (O 点) 到轴 ab 的距离, 即

$$\tau_0 = mg \left(\frac{L_2}{2} \right) \quad (2)$$

当 $M_0 = \tau_0$ 时, 桌面对线框的支持力矩为零, $M_0 > \tau_0$ 时, 线框将改变静止状态, 开始绕轴 ab 向上翘起. 根据题意及①、②式, 由力矩平衡原理可知

$$I_{\min}BL_1L_2 = \frac{1}{2}mgL_2 \quad (3)$$

得

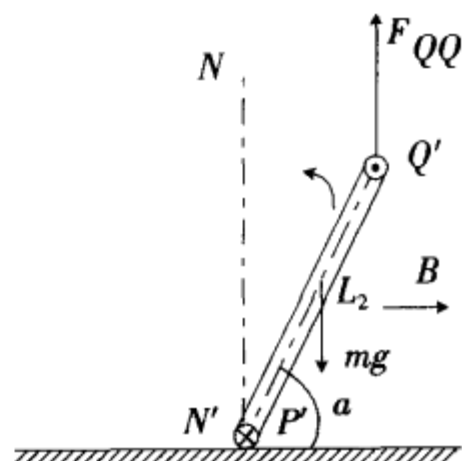
$$I_{\min} = \frac{mg}{2BL_1} \quad (4)$$

(2) 线框处于静止状态时, 若电流 I_0 比 I_{\min} 稍大, 线框所受的电磁力矩 M 将大于重力矩 τ , 使线框绕 ab 轴向上翘起. PQ 边和 $P'Q'$ 边所受电磁力不等于零, 但二者相互抵消, 当保持电流值 I_0 恒定不变时, 线框将从静止状态开始绕固定轴作加速转动, 在此过程中, 由于已设通过线框的电流保持恒定不变, 所以当线框平面转至与桌面成 α 角时, 如图例 11-1(c) 所示, 线框受到的合力矩为

$$M - \tau = (I_0BL_1 - \frac{1}{2}mg)L_2\cos\alpha \quad (5)$$

随着 α 角逐渐增大, 合力矩随之减小, 但 $(M - \tau)$ 始终大于零, 因而线框仍作逆时针加速转动, 角速度不断增大, 当线框平面转到竖直面 NN' 时, 合力矩为零, 角速度达到最大, 由于惯性, 线框将越过 NN' 面作逆时针转动, 此时, 合力矩与线框转动方向相反, 角速度将逐渐减小, 合力矩的大小随着 α 角的增大而增大, 如图例 11-1(d) 所示.

如果没有空气阻力, α 将增至 180° , 当 α 角等于 180° 时, 线框转动的角速度为零, 合力矩将使线框作顺时针加速转动. 结果线框将在 α 角等于 0° 与 180° 之间往复摆动不止. 实际上, 由于空气阻力作用, 线框平面在 NN' 平面两侧摆动的幅度将逐渐变小, 最终静止在 NN' 面处, 此时, 电磁力矩与重力矩均为零, 如果线框稍偏离平衡位置 NN' , 电磁力矩与重力矩的合力矩将使线框回到 NN' 平面处, 故线框处于



图例 11-1(c)

稳定平衡状态。

例 11-2 在半径为 R 的长直圆柱形导体内与轴线平行地挖去一个半径为 r 的圆柱形空腔,如图例 11-2(a)所示。两圆柱形轴线之间的距离为 d ($d > r$)。电流 I 在截面内均匀分布,方向平行于轴线,求:

- (1) 圆柱轴线上磁感应强度的大小;
- (2) 空心部分中任一点的磁感应强度。

解:应用补偿法,任一点的磁感应强度可以看成由实心圆柱形电流 I_1 ,和空腔部分的反向电流 I_2 在该点产生的磁感应强度的叠加,即

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$$

两部分电流密度大小相等,因此

$$j = \frac{I}{\pi R^2 - \pi r^2}$$

$$I_1 = j\pi R^2 = \frac{IR^2}{R^2 - r^2}$$

$$I_2 = j\pi r^2 = \frac{Ir^2}{R^2 - r^2}$$

(1)对圆柱轴线上任一点 O_1 ,由安培环路定理可得实心圆柱形电流 I_1 在 O_1 处产生的 $B_1 = 0$ 。空腔部分的反向电流 I_2 在 O_1 点产生的磁感应强度为 B_2 ,可由安培环路定理解出:

$$\oint \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_2$$

$$B_2 \cdot 2\pi d = \mu_0 I_2$$

得

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d} = \frac{\mu_0 I r^2}{2\pi d (R^2 - r^2)}$$

所以

$$B_{O_1} = B_2 = \frac{\mu_0 I r^2}{2\pi d (R^2 - r^2)}$$

方向垂直于 $\overline{O_1 O_2}$,如图所示。

(2)对空腔内任一点 P ,设 $O_1 P = r_1$, $O_2 P = r_2$,根据安培环路定理可得

$$B_1 = \frac{\mu_0 \pi r_1^2 j}{2\pi r_1} = \frac{\mu_0 r_1 j}{2}$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 \pi r_2^2 j}{2\pi r_2} = \frac{\mu_0 r_2 j}{2}$$

如图例 11-2(b)所示, $\mathbf{B}_1 \perp \mathbf{r}_1$, $\mathbf{B}_2 \perp \mathbf{r}_2$ 。 P 点的磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$$

由余弦定理

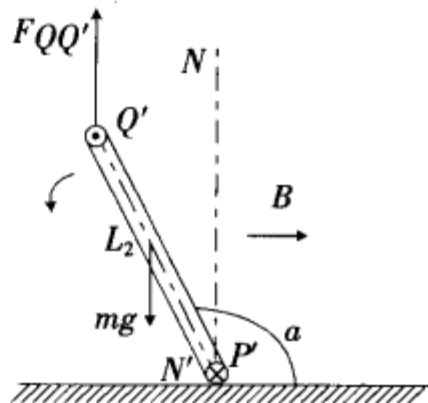
$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \varphi \quad \text{③}$$

$$B^2 = B_1^2 + B_2^2 - 2B_1 B_2 \cos \varphi \quad \text{④}$$

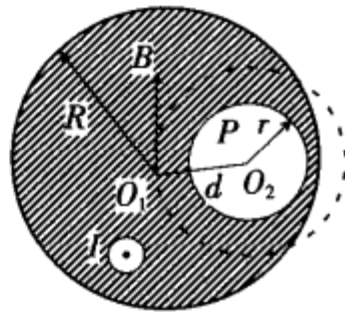
由③式

$$\cos \varphi = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1 r_2} \quad \text{⑤}$$

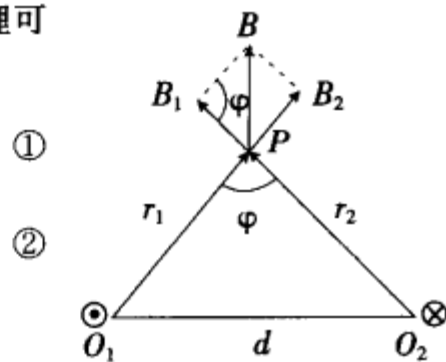
将①②⑤式代入④式,得



图例 11-1(d)



图例 11-2(a)



图例 11-2(b)

$$B^2 = \left(\frac{\mu_0 r_1 j}{2}\right)^2 + \left(\frac{\mu_0 r_2 j}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{\mu_0 r_1 j}{2} \cdot \frac{\mu_0 r_2 j}{2} \cdot \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1 r_2}$$

$$= \frac{\mu_0^2 d^2 j^2}{4}$$

$$B = \frac{\mu_0 d j}{2} = \frac{\mu_0 d I}{2\pi(R^2 - r^2)} = \text{常量}$$

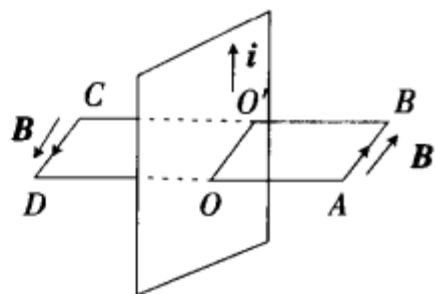
又由 $\triangle O_1 P O_2$ 和 $\triangle B_1 B B_2$ 相似, 且 $B_1 \perp r_1, B_2 \perp r_2$, 所以

$$B \perp d$$

空腔内为方向垂直于 d 的均匀磁场.

例 11-3 一无限大导体平面, 有面电流密度为 i 的均匀电流流过, 求空间任一点的磁感应强度 B .

解: 如图例 11-3 所示, 由对称性分析可知, 无限大均匀载流平面两侧距平面等距离处 B 的大小相等且方向相反, 各处的 B 都平行于电流平面且与 i 垂直, 取矩形环路 $ABCD$ 垂直于 i , 且 $OA = OD$, AB 、 CD 平行于平面, 由安培环路定理.



图例 11-3

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i h$$

其中 $AB = OO' = CD = h$

BC 边和 AD 边都与 B 垂直, $B \cdot dl = 0$, AB 边和 CD 边与 B 平行,

故

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \cdot \overline{AB} + B \cdot \overline{CD} = 2B \cdot h$$

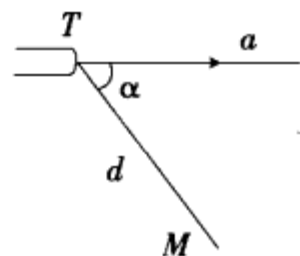
由
得

$$2Bh = \mu_0 i h$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2}$$

可见空间任一点 B 的大小与该点到载流平面的距离无关, 是常数, B 的方向如图所示.

例 11-4 如图例 11-4(a)所示, 经 $U = 1000\text{V}$ 电压加速的电子(加速前电子静止)从电子枪 T 射出, 其初速沿直线 a 的方向, 若要求电子能击中在 $\alpha = 60^\circ$ 方向、与枪口相距 $d = 5.0\text{cm}$ 的靶 M , 试求在以下两种情形, 所需的匀强磁场的磁感应强度 B 的大小.



图例 11-4(a)

- (1) 磁场 B 垂直于直线 a 与靶 M 所确定的平面;
 - (2) 磁场 B 平行于枪口 T 向靶 M 所引的直线 TM .
- (第 10 届国际物理奥赛题)

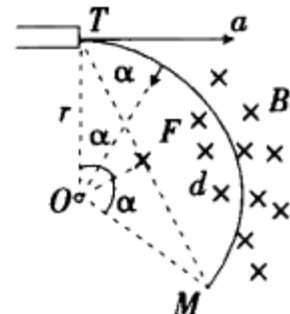
解: (1) 电子带负电, 如图例 11-4(b)所示. 当 B 的方向垂直纸面向里时, 与电子射出枪口时的速度 v 垂直, 电子受垂直向下的洛伦兹力的作用, 作匀速圆周运动. 该圆在纸平面上, 与直线 a 在枪口 T 相切, 设电子从枪口 T 射出的速度为 v , 则

$$\frac{1}{2} m v^2 = eU$$

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$$

式中 m 和 e 分别为电子的质量和电量(绝对值). 为了击中靶 M , 电子运动的圆轨道半径 r 与 d 及 α 应满足下述关系

$$r \sin \alpha = \frac{d}{2}, r = \frac{d}{2 \sin \alpha}$$



图例 11-4(b)

在洛伦兹力作用下电子轨道半径 r 与磁场 B 的关系为

$$evB = \frac{mv^2}{r}$$

即

$$r = \frac{mv}{eB} \quad \text{②}$$

由①和②式可得

$$B = \frac{mv}{er} = \frac{2\sin\alpha \cdot mv}{d \cdot e} = \frac{2\sin\alpha}{d} \sqrt{\frac{2mU}{e}}$$

把 $m = 9.11 \times 10^{-31} \text{kg}$, $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{C}$, $U = 1000 \text{V}$, $\alpha = 60^\circ$, $d = 5.0 \text{cm} = 0.05 \text{m}$ 代入上式, 得

$$B = 3.7 \times 10^{-3} \text{(T)}$$

(2) 当 $B // TM$ 时, 电子做螺旋线运动, 我们把电子枪发射的电子速度分解成平行于磁场方向的分量 $v \cos \alpha$ 和垂直于磁场方向的分量 $v \sin \alpha$, 如图例 11-4(c) 所示, 电子以速度 $v \cos \alpha$ 沿 TM 作匀速直线运动, 到达 M 所需的时间为

$$t = \frac{d}{v \cos \alpha} \quad \text{③}$$

同时, 电子受洛伦兹力作用, 以速度 $v \sin \alpha$ 在垂直于 B 的平面内作匀速圆周运动, 绕一圈的时间(即周期)为

$$T = \frac{2\pi m}{eB} \quad \text{④}$$

为了能够击中靶 M , 要求

$$t = nT, n = 1, 2, \dots \quad \text{⑤}$$

由③、④、⑤式, 有

$$\frac{d}{v \cos \alpha} = n \cdot \frac{2\pi m}{eB}$$

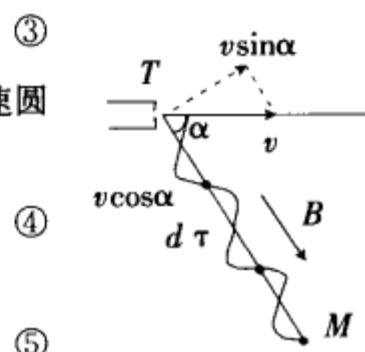
得

$$B = \frac{2\pi m v \cos \alpha \cdot n}{ed}, n = 1, 2, \dots$$

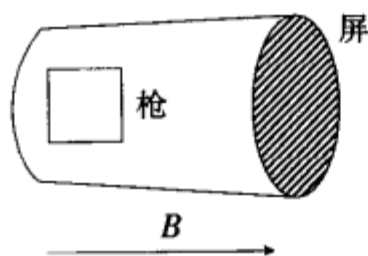
把有关数据代入, 得

$$B = n \times 6.7 \times 10^{-3} \text{(T)}, n = 1, 2, \dots$$

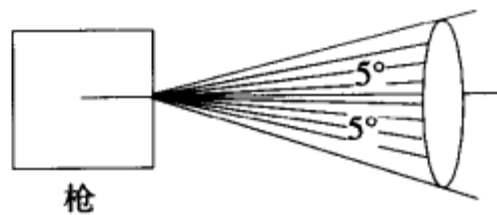
$n = 1$ 时, 电子转一圈后击中靶, $n = 2$ 时, 电子转两圈后击中靶, 依此类推.



图例 11-4(c)



图例 11-5(a)



图例 11-5(b)

例 11-5 (1) 阴极射线管由一个电子枪和一个荧屏组成, 放在磁感强度为 B 的均匀恒定磁场中, 如图例 11-5(a) 所示, 磁场方向平行于电子枪的电子束的轴, 电子束从电子枪的阳极沿轴射出, 但有与轴至多成 5° 的发散角, 如图例 11-5(b) 所示, 通常电子束将在荧光屏上呈现一个弥散的斑点, 但对一定大小的磁场则可得聚焦得很好的光点, 考虑某个电子, 离开电子枪时以角度 β ($0 < \beta < 5^\circ$) 偏离轴运动, 并考虑其垂直于轴和平行于轴的两个分量, 用下列参量导出电子的荷质比 e/m 的表达式; 使电子束聚焦成一点的最小磁感应强度 B ; 电子枪加速电势差 V (注意 $V < 2 \text{kV}$); 从阳极到荧屏的距离 D .

(2) 考虑另一种测量电子荷质比的方法. 图例 11-5(c) 为其实验装置的侧视图和俯视图, 图中还画出磁场 B 的方向, 在这一均匀磁场中放入二块相隔很小距离 t 的铜圆盘, 圆盘的半径为 ρ , 两盘间保

持电势差 V . 两圆盘平行、同轴, 而且它们的轴垂直于磁场, 一照相底片同轴复盖在半径为 $\rho + S$ 的圆柱体的内侧面, 换言之, 底片离圆盘边缘的径向距离为 S , 整个装置放在真空中. 注意 t 远小于 S 和 ρ .

一点状 β 粒子源放置于两圆盘的圆心之间, 沿各个方向均匀发射 β 粒子, 粒子的速率分布在一定的范围内. 同一底片在下列不同的实验条件下曝光:

情况 1 $B=0, V=0$;

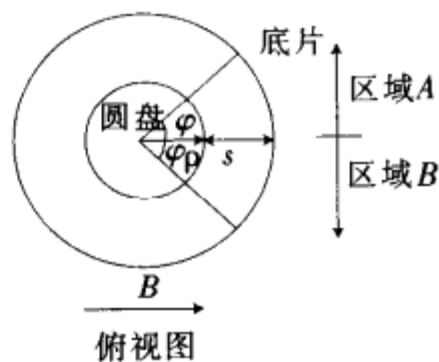
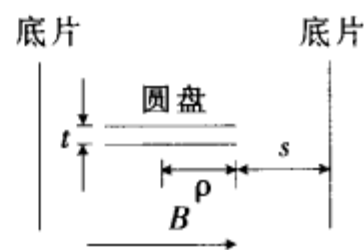
情况 2 $B=B_0, V=V_0$;

情况 3 $B=-B_0, V=-V_0$.

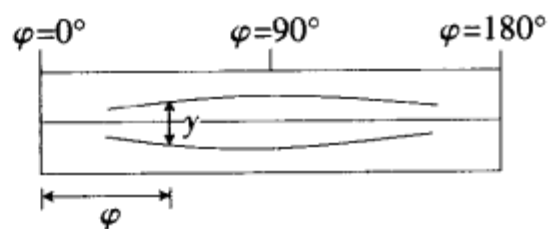
这里 V_0 和 B_0 为正的常数, 注意, 当 $V>0$ 时上面一块圆盘带正电(当 $V<0$ 时上盘带负电). 当 $B>0$ 时, 磁场方向规定为如图例 11-5(c) 所示的方向(当 $B<0$ 时磁场沿相反的方向), 解这个小问题时, 两圆盘的间隔可以忽略不计.

在图例 11-5(c) 中, 底片的两个区域分别用 A 和 B 标出. 底片曝光并冲洗后, 两个区域中的某个区域的底片展开后显示的 β 粒子曝光线条如图例 11-5(d) 所示. 这部分底片是取自什么区域(A 还是 B)? 通过指出作用在电子上的力的方向论证你的答案.

(3) 曝光并冲洗后, 底片的展开图如图 11-5(d) 所示, 利用显微镜测量两条最外面的轨迹的间距[在某一特定角度下的间距(y)已在图 11-5(d) 中标出], 此测量结果由下表给出. 角度 φ 定义为磁场方向与底片上某点和圆盘中心连线间的夹角, 如图例 11-5(c) 所示.



图例 11-5(c)



图例 11-5(d)

与磁场夹角/度	φ	90	60	50	40	30	23
间隔/mm	y	17.4	12.7	9.7	6.4	3.3	轨迹终端

测量系统参数的数值如下:

$B_0 = 6.91 \text{ mT}$, $V_0 = 580 \text{ V}$, $t = 0.80 \text{ mm}$, $s = 41.0 \text{ mm}$ 另外, 真空中光速可取为 $3.00 \times 10^8 \text{ m/s}$, 电子的静止质量为 $9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$. 计算出观测到的 β 粒子的最大动能(以 eV 为单位).

(4) 利用上面(3)部分给出的信息, 求出电子的电荷与静质量的比值. 这应通过在所给的坐标纸上画一合适的图求出. 写出所画图的横轴和纵轴所代表的量的代数表达式. 并写出电子荷质比的量值. 注意, 由于观察的系统误差, 你所得到的答案可能与公认的标准值不同.

(第 31 届国际物理奥赛题)

解:(1) 由题意, 当电子回旋一周恰到达屏时, 将在屏上清晰聚焦, 回旋一周时间 $T = 2\pi m / eB$, 回旋角速度 $\omega = eB / m$. 电子速率 $u = \sqrt{2eV / m}$ (因 $V < 2 \text{ kV}$, 不难算出 $u < 2.65 \times 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, 不必考虑相对论效应).

电子行进距离

$$D = Tu \cos \beta \approx Tu = (2\pi m / eB) \sqrt{2eV / m}$$

故电子荷质比

$$e / m = 8\pi^2 V / B^2 D^2$$

(2) 考虑情况 2, 电子受电场力方向向上.

在区域 A, 电子受磁场力的方向也向上, 故电子打在盘上, 不能到达底片.

在区域 B, 电子受磁场力方向向下, 若磁力与电力相等, 电子将不受净力, 而从盘间射出, 使底片曝光.

情况 3 相仿. 故底片取自区域 B.

(3)由盘间出射的电子受力平衡,电子受电力 eV/t ,受磁力 $euB\sin\varphi$,由

$$eV/t = euB\sin\varphi$$

得电子速率

$$u = V/Bt\sin\varphi$$

最大速率 u_m 对应于最小 φ 角为 23° ,由此得

$$\begin{aligned} u_m &= \frac{V_0}{B_0 t \sin 23^\circ} = \frac{580}{6.91 \times 10^{-3} \times 0.80 \times 10^{-3} \times \sin 23^\circ} \\ &= 2.685 \times 10^8 (\text{m/s}) = 0.895c \end{aligned}$$

为相对论性的,故电子最大动能

$$\begin{aligned} E_m &= (\gamma - 1)mc^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - 1 \right) mc^2 \\ &= 1.02 \times 10^{-13} (\text{J}) = 637 (\text{keV}) \end{aligned}$$

(4)从盘间出射的电子仅受磁力作用,此力近似在竖直方向,因为电子运动速度与水平方向夹角始终很小.

由磁力引起的加速度

$$a = Beu\sin\varphi/\gamma m$$

电子水平初速为 u ,电子从盘间出射到达底片需时 $\frac{s}{u}$

在此时间内竖直方向的位移为

$$y/2 = \frac{1}{2} a \left(\frac{s}{u} \right)^2$$

由以上三式得

$$y = \frac{Bes^2\sin\varphi}{\gamma mu}$$

由(3)题,对从盘间出射的电子应有 $u = \frac{V}{Bt\sin\varphi}$,代入上式消去 u [注意 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$],得

$$y^2 = \left(\frac{eBs\sin\varphi}{m} \right)^2 \left[\left(\frac{Bst\sin\varphi}{V} \right)^2 - \left(\frac{s}{c} \right)^2 \right]$$

以 $(y/Bs\sin\varphi)^2$ 为纵轴, $(Bst\sin\varphi/V)^2$ 为横轴作图,所得直线的斜率为 $(e/m)^2$,在纵轴上截距为 $-(es/mc)^2$.

从所作图上(图略)读得截距为 $-537.7(\text{Cs/kg})^2$,得

$$e/m = 1.70 \times 10^{11} \text{C/kg}$$

读得斜率为 $2.826 \times 10^{22}(\text{C/kg})^2$,得

$$e/m = 1.68 \times 10^{11} \text{C/kg}$$

本章习题

11.1 已知地面上空某处地磁场的磁感应强度 $B = 4 \times 10^{-5}$ 特斯拉,方向向北.若宇宙射线中有一速率 $v = 5 \times 10^7 \text{m/s}$ 的质子(质量为 $1.67 \times 10^{-27} \text{kg}$) 竖直向上通过此处,试求:

(1)洛伦兹力的方向;

(2)洛伦兹力的大小,并与该质子受到的万有引力相比较.

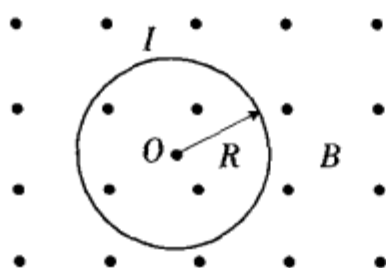
11.2 在一个显象管的电子束中,电子有 12000eV 的能量.这个显象管的取向使电子水平地由南向北运动.地球磁场的垂直分量指向下,其大小为 $B = 5.5 \times 10^{-5} \text{Wb/s}^2$,试求:

(1)电子束将偏向什么方向?

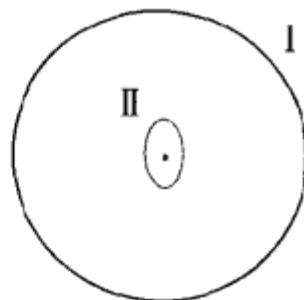
(2)电子的加速度是多少?

(3)电子束在显象管内通过 20cm 时将偏转多远?

11.3 如图习 11.3 所示,一圆线圈的半径为 R ,载有电流 I ,置于均匀外磁场 B 中,在不考虑载流线圈本身所激发的磁场的情况下,求线圈导线上的张力. 已知载流线圈的法线方向与 B 的方向相同. [提示]



图习 11.3



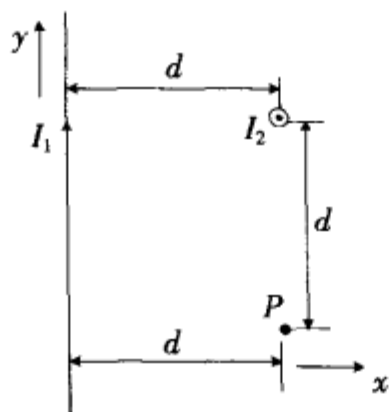
图习 11.4

11.4 一个圆形铜线回路,半径为 10cm,载有电流 15A,在这回路的中心处放着第二个回路,其半径为 1.0cm,共有 50 匝,载有电流 1.0A. 试求:

(1) 第一个回路在其中心处所产生的磁感应强度 B 为多大?

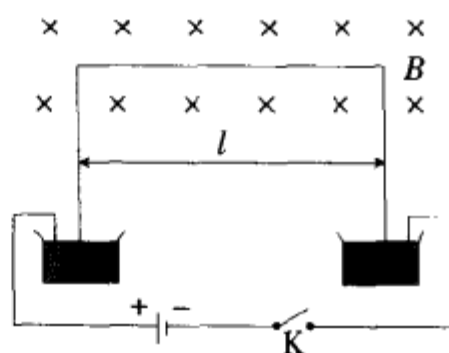
(2) 作用在第二个回路上的磁力矩为多大? 假定两个回路的平面互相垂直,而且由第一个回路所产生的磁感应强度 B 在第二回路所占据的整个体积中基本上是均匀的. [提示]

11.5 如图习 11.5 所示,两条无限长直载流导线互相垂直而不相交,其间最近距离为 $d = 2.0\text{cm}$,电流分别为 $I_1 = 4.0\text{A}$ 和 $I_2 = 6.0\text{A}$,点 P 到两导线的距离都是 d ,求点 P 的磁感应强度 B .



图习 11.5

11.6 如图习 11.6 所示,一段导线弯成“U”形,它的质量为 m ,上面一段长为 l ,处在均匀磁场中,磁感应强度 B 与导线垂直;导线下面两端分别插在两水银杯里,两杯水银与一带开关 K 的外电源联接,当 K 一接通,导线便从水银杯里跳起来.



图习 11.6

(1) 设跳起的高度为 h ,求通过导线的电量 q ;

(2) 当 $m = 10\text{g}$, $l = 20\text{cm}$, $h = 3.0\text{cm}$, $B = 0.10\text{T}$ 时,求 $q = ?$ [提示]

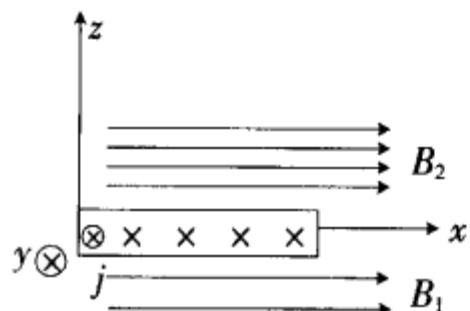
11.7 如图习 11.7 所示,将半径为 R 的无限长导体管壁(厚度可忽略),沿轴向割去一宽度为 h ($h \ll R$) 的无限长缝后,沿轴向均匀地通有电流,其电流面密度为 j ,求轴线上的磁感应强度 B . [提示]



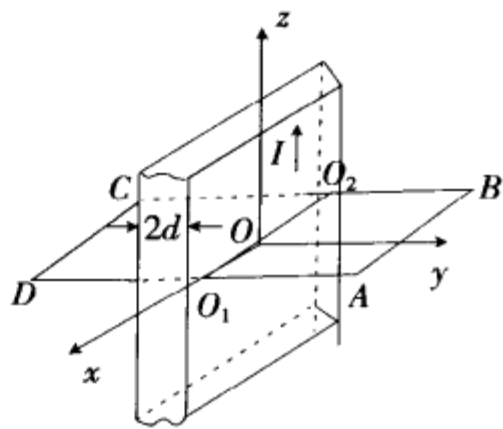
图习 11.7

11.8 将一电流沿 $+y$ 方向的无限大载流平面放入沿 x 方向的均匀磁场中,放入后平面两侧的磁感应强度分别为 B_1 和 B_2 ,都与板面平行并垂直于电流,如图习 11.8 所示,求载流平面上单位面积所受磁场力的大小和方向. [提示]

11.9 如图,厚度为 $2d$ 的无限大导体平板,电流密度 j 沿 z 方向均匀流过导体,求空间磁感应强度 B 的分布.



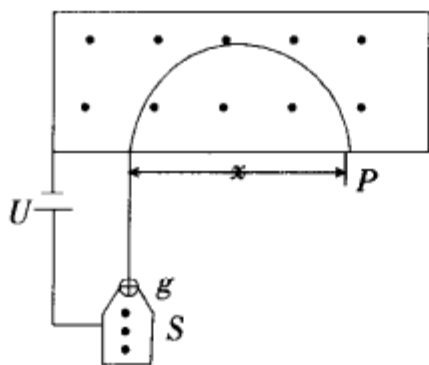
图习 11.8



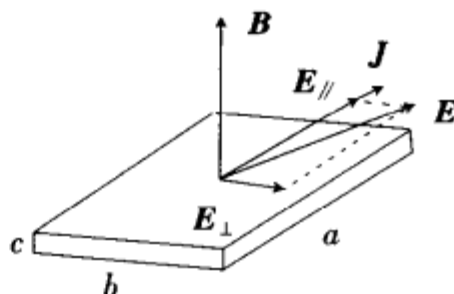
图习 11.9

11.10 一质谱仪的构造原理如图习 11.10 所示,离子源 S 产生质量为 M 、电荷为 q 的离子,离子产生出来时速度很小,可以看作是静止的,离子产生出来后,经过电压 U 加速,进入磁感应强度为 B 的均匀磁场,沿着半圆周运动而到达记录用的照相底片 P 上,测得离子在 P 上的位置到入口处的距离为 x ,试求该离子的质量(用 q 、 B 、 x 、 U 表示).

11.11 边长为 a 、 b 和 c ($a \gg b \gg c$) 的直角平行六面体长棒是由半导体 $InSb$ 制成的,棒中电流 I 平行于 a 边流过.棒放置在平行于 C 边的外磁场 B 中,如图习 11.11 所示.电流 I 产生的磁场可忽略不计,载流子为电子,在只有电场存在时,半导体中电子的平均速度为 $v = \mu E$,式中 μ 称为迁移率.如果同时存在磁场,电场就不再与电流平行,此现象称为霍尔效应.



图习 11.10



图习 11.11

(1) 试确定棒中产生上述电流的电场的大小和方向;

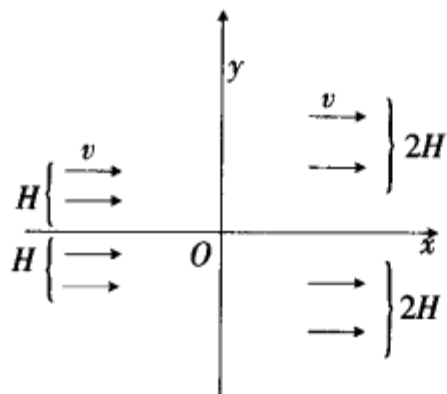
(2) 计算在 b 边方向棒的两个表面上相对两点间的电势差. 已知数据为: $InSb$ 中的电子迁移率是 $7.8 \text{ m}^2/\text{V}\cdot\text{s}$, 电子浓度为 $2.5 \times 10^{22} \text{ m}^{-3}$, $I = 1.0 \text{ A}$, $B = 0.10 \text{ T}$, $b = 1.0 \text{ cm}$, $c = 1.0 \text{ mm}$, $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$.

(第 16 届国际物理奥赛题的一部分)

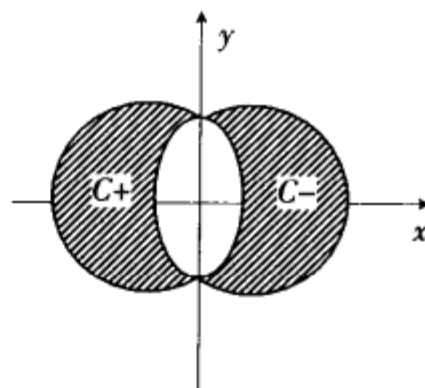
11.12 如图习 11.12 所示,在 xy 平面上有一片稀疏的电子(其间的相互作用可以忽略),在 $-H < y < H$ 范围内,从 x 负半轴的远处以相同的速率 v 沿着 x 轴方向平行地向 y 轴射来,试设计一磁场区,使得(1)所有电子都能在磁场力的作用下通过坐标原点 O ; (2)这一片电子最后扩展到 $-2H < y < 2H$ 范围内,继续沿着 x 轴方向向 x 正半轴的远处平行地以相同的速率 v 射去. [提示]

11.13 如图习 11.13 所示, $C+$ 和 $C-$ 是沿 y 轴放置的两根互相绝缘的长直非磁性导体,其中的电流分别沿 z 轴的正方向和负方向流动,电流强度均为 I ,图中画斜线的部分是两导体的正截面,它们分别是 xy 平面中的部分圆,两圆的直径均为 D ,两圆心的间距为 $\frac{D}{2}$,不难算出,两导体正截面的面积均为 $\left(\frac{1}{12}\pi + \frac{1}{8}\sqrt{3}\right)D^2$,每一根导体中的电流均匀地分布在自身的正截面内,试求两根导体之间空白区域内的磁场分布 $B(x, y)$. [提示]

(第 27 届国际物理奥赛题)



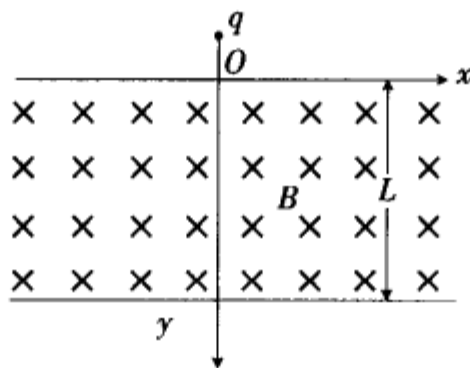
图习 11.12



图习 11.13

11.14 在真空中建立一坐标系,以水平向右为 x 轴正方向,竖直向下为 y 轴正方向, z 轴垂直纸面向里.在 $0 \leq y \leq L$ 的区域内有匀强磁场, $L = 0.80\text{m}$,磁场的方向沿 z 轴的正方向,其磁感应强度大小 $B = 0.10\text{T}$.今把一荷质比 $q/m = 50\text{C/kg}$ 的带正电质点在 $x = 0, y = -0.20\text{m}, z = 0$ 处静止释放,将带电质点过原点的时刻定为 $t = 0$ 时刻,求带电质点在磁场中任一时刻 t 的位置坐标,并求它刚离开磁场时的位置和速度,取重力加速度 $g = 10\text{m/s}^2$. [提示]

(第 17 届全国中学生物理竞赛复赛题)



图习 11.14

电磁感应

§ 12.1 电磁感应定律

电磁感应现象的发现是电磁学领域中最重大的成就之一,它进一步揭示了电与磁的内在联系,为建立完整的电磁场理论奠定了基础.

法拉第在实验中总结出以下几种情况都可以产生感应电流,并把这些现象称为电磁感应.

(1)如图 12.1-1(a)所示,线圈和电流计组成闭合电路 A,用一根磁棒的 N 极(或 S 极)插入线圈或从线圈中抽出时,电流计指示回路中有电流通过,这种电流称为感应电流,电流的方向与磁铁的极性及其运动方向有关,电流的大小与磁铁相对于线圈运动的快慢有关.如果保持磁棒静止,使线圈相对磁棒运动,可以观察到同样的现象.

(2)如图 12.1-1(b)所示,用通有稳恒电流的闭合线圈 B 代替前面所说的磁棒,当线圈之间有相对运动时,在回路 A 中也产生感应电流,现象和第一种情况相同.

(3)如图 12.1-1(c)所示,在第二种情况的闭合线圈回路 B 中串联一个开关,两个线圈互相套合不动,当拨动开关接通或断开电路的瞬间,电流计指针偏转,说明回路 A 的线圈中产生了感应电流,且开和关的两种情况下感应电流的方向相反.当闭合线圈 B 中电流强度发生变化(如在回路中接入一可变电阻)时,可观察到同样的现象.

(4)如图 12.1-1(d)所示,在磁场中放一导体导轨,上面放一活动的导体棒组成闭合回路,当导体棒沿导轨向左或向右运动时,回路中就产生感应电流.运动方向相反时所产生的感应电流方向亦相反.

上面所有的实验都涉及与电流计相连的回路中磁通量的变化,如在产生感应电流的回路中串联不同的电阻,其他条件维持不变,结果发现感应电流的大小反比于回路的电阻,表明对于同样的磁通量变化,感应回路中产生的电动势相同.这一结果证明了感应电动势比感应电流更能反映电磁感应现象的本质.法拉第用实验证明只有通过导体回路的磁通量发生变化时,才会有电磁感应现象发生,即产生感应电动势.而磁通量的变化可以源于磁场发生变化,也可以由于导体回路中的一部分作切割磁感应线的运动.感应电动势的大小与磁通量的变化率成正比,与回路电阻大小无关.

例 12.1-1 试问在下列情况下,哪些会在运动导体中产生感应电动势?

(1)一段导线在载流长直导线周围的磁场中运动[如图 12.1-2(a)、(b)、(c)、(d)所示].

(2)一个矩形线圈在载流长直导线周围的磁场中运动[如图(e)、(f)所示].

答:(1)长直导线周围的磁感应强度 $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, B 的大小与离开导线的距离 r 成反比.在纸平面上导线和线框运动的范围内, B 的方向垂直向里.由此可判断:图(a)和(b)中一段导线在运动中切割磁感应线,产生感应电动势;图

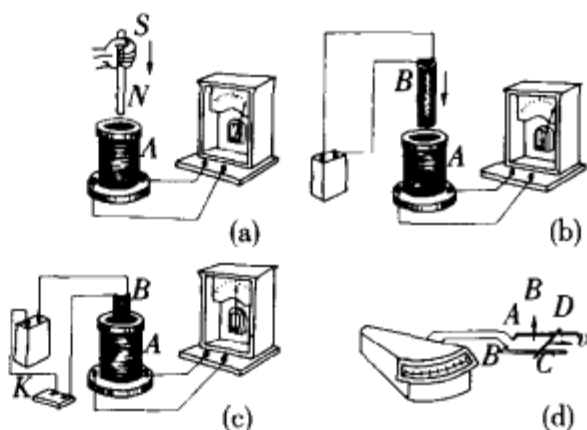


图 12.1-1 电磁感应现象

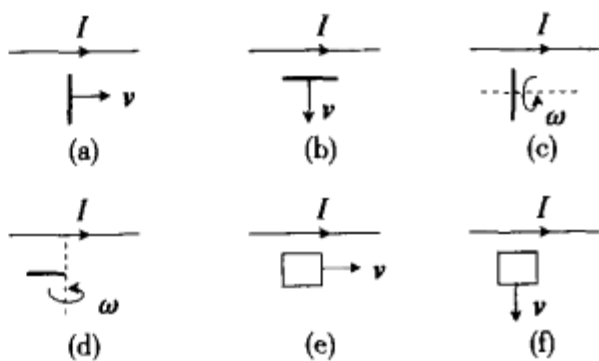


图 12.1-2

(c)和(d)中的一段导线绕轴转动时没有切割磁感应线,不产生感应电动势;图(e)中导线框平行于导线运动,框内磁感应通量不变,故不产生感应电动势;图(f)中导线框向下运动,通过框平面内的磁感应强度逐渐减小,因而磁通量也减少,产生感应电动势。

1833年,楞次提出了直接判断感应电流方向的法则,即楞次定律:闭合回路中产生的感应电流的方向,总是使得感应电流所激发的磁场阻碍引起感应电流的磁通量的变化。

楞次定律是能量守恒定律在电磁感应现象中的具体表现。如图 12.1-3(a)所示,根据楞次定律,当磁棒插入线圈时,线圈内磁通量增加,感应电流所产生的磁场方向应与磁棒的磁感应线方向相反,由右手螺旋法则,感应电流的方向应如图(a)的箭头所示;反之,当磁棒从线圈中抽出时,穿过线圈的磁通量减少,因此线圈中产生的感应电动势方向与图(a)相反,如图(b)所示。感应电流产生后,由于回路上有电阻,要消耗电能变为焦耳热,但此时并未接电源,电能从何而来?从上面图(a)中看,线圈中的感应电流所产生的磁场方向和一个磁棒 N 极所产生的磁场方向相似,因此和磁铁的 N 极互相排斥。当磁铁靠近线圈时,外力必须克服斥力做功,此功转变为回路中的能量,符合能量守恒定律。若感应电流方向和以上所述相反,则只要给磁棒一点推力,在图 12.1-3(a)的情形磁棒就会向着线圈作加速运动,同时感应电流也会不断增加,形成正反馈,能量越变越多,这显然是不可能的。应该指出的是,电磁感应现象正是现代发电机的原理所在。

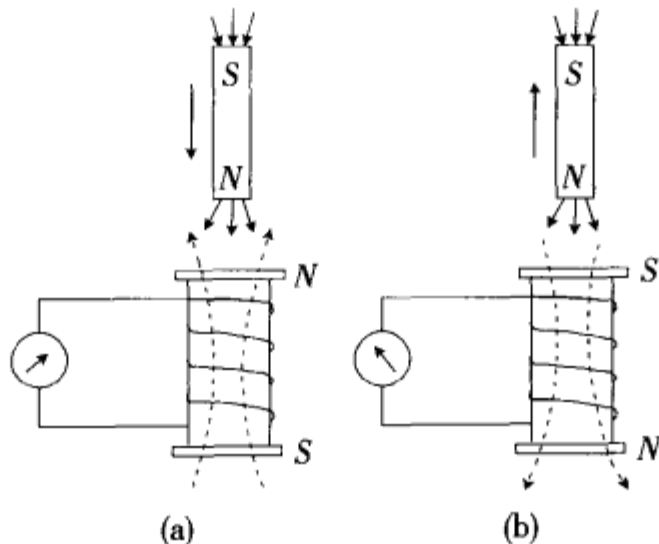


图 12.1-3 楞次定律

法拉第根据大量实验结果将电磁感应现象的规律用数学式表示为

$$\epsilon = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (12.1-1)$$

式中 ϵ 为感应电动势, Φ 为导体回路的磁通量。上式为法拉第电磁感应定律,它表明:导体回路中感应电动势的大小与穿过导体回路磁通量的变化率成正比,负号表示感应电动势的方向总是反抗磁感应通量的变化。其实,负号正表示楞次定律。对于有 N 匝线圈的回路,因每匝线圈之间是串联的,整个电路的电动势等于各匝线圈的电动势之和,即

$$\begin{aligned} \epsilon &= \epsilon_1 + \epsilon_2 + \cdots + \epsilon_N \\ &= -\frac{d}{dt}(\Phi_1 + \Phi_2 + \cdots + \Phi_N) = -\frac{d}{dt}(N\Phi) \\ &= -\frac{d\Psi}{dt} \end{aligned} \quad (12.1-2)$$

$\Psi = N\Phi$ 称为磁通匝链数,简称磁通链。

在应用法拉第电磁感应定律确定电动势方向时,必须事先选定回路 L 绕行的正方向,并且规定,回路绕行正方向与该回路所围面积的正法线 n 方向构成右手螺旋关系。若 B 与 n 成锐角,则磁通量 Φ 为正值;若 B 与 n 成钝角, Φ 为负值。如图 12.1-4(a)所示, B 与 n 为锐角时, Φ 为正,当穿过回路的磁通量增大时, $\frac{d\Phi}{dt} > 0$, 由 12.1-1 式,感应电动势为负值,表明感应电动势的方向与选定的回路绕行方向相反。如

果穿过回路的磁通量减少, $\frac{d\Phi}{dt} < 0$, 则 ϵ 为正, 表明感应电动势 ϵ 的方向与选定回路的绕行方向一致, 如图 12.1-4(b) 所示. 同理可分析图 12.1-4(c) 和 (d) 的情形.

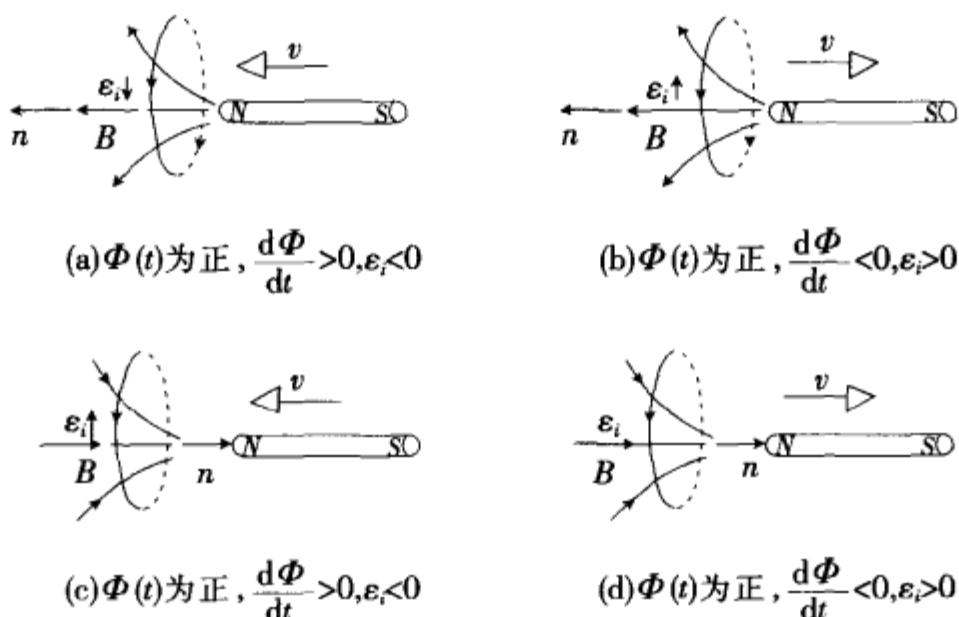


图 12.1-4 电磁感应定律中感应电动势的方向

例 12.1-2 如图 12.1-5 所示, 有一非均匀磁场 B , 其大小为 $B = kx$, k 为常量, B 的方向垂直于纸面向里, 沿 y 轴正方向 (图中未画出 y 轴), 在 xz 平面内有一矩形线圈, 其左右两边与 z 轴平行, 边长为 b , 另外两边长为 a , 共有 N 匝. 线圈在其平面内以速度 v 沿 x 轴正方向作匀速运动, 求当矩形线圈最左边离开坐标原点为 l 时, 线圈中感应电动势的大小和方向.

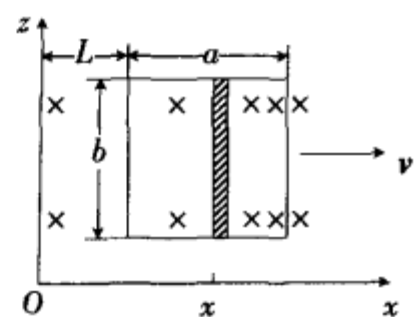


图 12.1-5

解: 非均匀场 $B = kx$, 越往右边磁感应强度越大, 将线圈所围面积分解为许多小长条, 坐标为 x 处的长条面积为 $dS = bdx$, dx 为长条的宽度. 该处 $B = kx$. 选线圈绕行方向为顺时针, 则其正法线方向 n 与 B 的方向一致, 通过 x 处的小长条形面积的磁通量 $d\Phi$ 为

$$d\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = BdS = kx \cdot bdx$$

如设线圈某时刻最左边离开坐标原点为 l , 则通过整个线圈所围面积的磁通量为

$$\begin{aligned} \Phi &= \int d\Phi = \int_l^{l+a} kbx dx = \frac{kb}{2} [(l+a)^2 - l^2] \\ &= \frac{kb}{2} (2al + a^2) \end{aligned}$$

根据法拉第电磁感应定律, 线圈中的感应电动势为

$$\epsilon = -N \frac{d\Phi}{dt} = -N \cdot \frac{kb}{2} \frac{d}{dt} (2al + a^2) = -Nkab \frac{dl}{dt}$$

注意此处 l 为变量, $\frac{dl}{dt} = v$, 故上式为

$$\epsilon = -Nkabv$$

上式表明感应电动势是常量. $\epsilon < 0$, 说明 ϵ 的方向与所设方向相反, 即 ϵ 的方向沿线圈回路绕行的反方向——逆时针方向.

若用楞次定律判断 ϵ 的方向, 因为离开 x 轴正方向 x 越大, 线圈所在处的 B 越大, 所以穿过回路的磁通量随着线圈的运动而增加, 感应电流在线圈中产生的磁场的方向应与原磁场的方向相反, 以阻碍磁通量的增加, 这样得出的感应电动势方向也是逆时针方向.

§ 12.2 动生电动势和感生电动势

法拉第电磁感应定律说明,通过以闭合回路为周界的任意曲面的磁通量发生变化时,在闭合回路中就有感应电动势产生.下面我们讨论两种具体的情况:一是磁场本身恒定不变,但导体回路或回路上的一部分导体在磁场中运动,引起其中磁感应通量的变化,如此产生的感应电动势称为动生电动势;二是导线回路本身固定不变,磁场发生变化,回路中也能产生感应电动势,称为感生电动势.

我们从前面已知,电动势起源于非静电力的作用,为了说明产生动生电动势的非静电力,考察如图 12.2-1 所示的例子.长为 l 的导体棒 ab 与导轨组成矩形回路,均匀磁场 B 垂直于纸面向里.当导体棒以速度 v 沿导轨向右滑动时,导体棒内的自由电子也以速度 v 随之一起向右运动,磁场作用于每个自由电子的洛伦兹力为

$$\mathbf{F} = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

沿着导线的方向由 a 指向 b ,结果使自由电子向下运动.如果导轨是绝缘体,则电子在 b 端堆积,靠近 a 端一侧就有较多的正电荷分布,直到分布在导体棒上的电荷在棒内产生的电场 E 对电子的作用力与磁场的洛伦兹力相平衡,即

$$|\mathbf{E}| = \left| \frac{\mathbf{F}}{-e} \right| = |\mathbf{v} \times \mathbf{B}| \quad (12.2-1)$$

这时自由电子不再沿导体棒定向运动,导体棒上出现稳定的电荷分布,两端呈现一定的电势差. a 端电势高于 b 端,如果导轨是导体,回路中就出现沿逆时针方向的感应电流.由此可见,引起感应电流的电动势源分布在运动的导体棒内,产生电动势的非静电力就是磁场的洛伦兹力.我们把产生电动势的非静电作用以等效电场表示,其场强记为 \mathbf{E}_k^* ,大小等于作用于单位正电荷上的洛伦兹力.由(12.2-1)式知,

$$\mathbf{E}_k^* = \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (12.2-2)$$

于是回路中的感应电动势,即动生电动势为

$$\epsilon = \oint \mathbf{E}_k^* \cdot d\mathbf{l} = \oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad (12.2-3)$$

注意到本例中 \mathbf{E}_k^* 只存在于导体棒内,上式又可写成

$$\epsilon = \int_a^b \mathbf{E}_k^* \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = Blv \quad (12.2-4)$$

当任意形状的回路在任意分布的恒定磁场中运动时,可以证明,(12.2-3)式的右边可以用通过回路所围面积的磁感应通量 Φ 随时间的变化率来表示,即

$$\oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (12.2-5)$$

由上面的讨论我们知道,如导轨框也是导体,则与导体棒组成闭合回路,当导体棒向右(或向左)运动时回路中就有感应电流产生,因而在回路中产生焦耳热,这一能量是由导体棒运动的机械能转化而来的.事实上,由楞次定律,感应电流必产生阻碍导体棒运动的效果,此阻力就是导体棒中通过感应电流时在磁场中所受的安培力.设感应电流大小为 I ,则安培力的大小为

$$F' = I l B$$

安培力的方向与 v 的方向相反,因而是运动的阻力,为了保持导体棒向右作匀速运动,必须加一个外力以克服此阻力

$$F_{\text{外}} = -F'$$

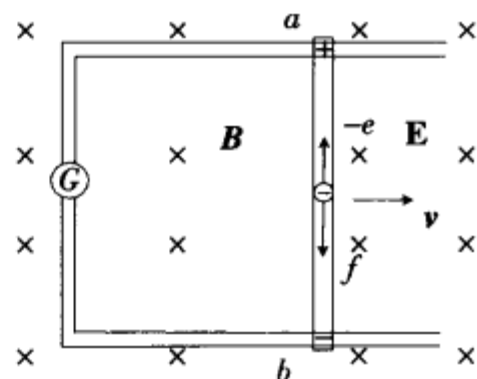


图 12.2-1 动生电动势

在导体棒运动过程中外力消耗的功率为

$$P_{\text{外}} = \mathbf{F}_{\text{外}} \cdot \mathbf{v} = Blv$$

在导线回路中的电功率为

$$P = \epsilon I = BlvI$$

因此

$$P_{\text{外}} = P$$

在导体棒匀速运动的情形,外力克服阻力(安培力)所作的功(机械功)全部转化为回路中的电能.由于导体棒所受的安培力是棒中所有自由电子受到的总洛仑兹力在向左方向的一个分力,如图 12.2-2 所示,因此,虽然洛仑兹力不做功,但此时起了传递能量的作用.由图 12.2-2 可见,当导体棒在均匀磁场中以速度 v 向右运动产生感应电流时,自由电子还有相对于导体向下的定向运动速度 u ,电子的总定向运动速度为 $(u+v)$,一个电子所受的洛仑兹力就成为

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_L &= -e(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{B} \\ &= -e\mathbf{u} \times \mathbf{B} - e\mathbf{v} \times \mathbf{B} \\ &= \mathbf{f}' + \mathbf{f} \end{aligned}$$

该力与合速度 $(\mathbf{u} + \mathbf{v})$ 垂直,因而不做功.实际上在这一情形洛仑兹力 \mathbf{F}_L 对电子做功的功率为

$$\begin{aligned} P_L &= \mathbf{F} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (\mathbf{f}' + \mathbf{f}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \\ &= \mathbf{f}' \cdot \mathbf{u} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

根据前面 \mathbf{f}' 与 \mathbf{f} 的定义,得

$$P_L = e\mathbf{v}B\mathbf{u} - e\mathbf{u}B\mathbf{v} = 0$$

可见洛仑兹力的一个分力 \mathbf{f}' 作负功,另一个分力 \mathbf{f} 作正功,大小相等,总功为零.这当然符合洛仑兹力做功的事实.但外力克服 \mathbf{f}' 对每个电子做功的功率为

$$\mathbf{f}'_{\text{外}} \cdot \mathbf{v} = -\mathbf{f}' \cdot \mathbf{v} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}$$

即外力克服洛仑兹力的一个分力 \mathbf{f}' 所作的功转化为洛仑兹力的另一个分力 \mathbf{f} 所作的正功,这些功全部转化为感应电流的能量.

例 12.2-1 一细导线弯成直径为 d 的半圆形状,如图 12.2-3 所示,均匀磁场 \mathbf{B} 垂直纸面向上通过导体所在平面,当导体绕着 A 点垂直于半圆面逆时针以角速度 ω 旋转时,求导体 AC 间的电动势 $\epsilon_{\widehat{ABC}}$.

解:在半圆 \widehat{ABC} 之间连一辅助线(虚线) \overline{AC} ,当闭合的 ABC 半圆线圈在磁场中旋转时,由于转动过程中 Φ 不变,

$$\epsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = 0$$

即

$$\epsilon = \epsilon_{\widehat{ABC}} + \epsilon_{\overline{CA}} = 0$$

所以

$$\epsilon_{\overline{AC}} = \epsilon_{\widehat{ABC}}$$

$$\epsilon_{\overline{AC}} = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \int_0^d B\omega l dl = \frac{1}{2} B\omega d^2$$

得

$$\epsilon_{\widehat{ABC}} = \frac{1}{2} B\omega d^2$$

导体回路不动,磁场发生变化而产生的是感生电动势,显然此时非静电力不可能是洛仑兹力.实验表明,不论回路的形状和导体的性质如何,只要磁场的变化导致穿过回路的磁通量发生了变化,就会在回路中产生感应电动势.这说明感生电动势的根源只是磁场本身的变化.图 12.2-4 所示的实验就是一

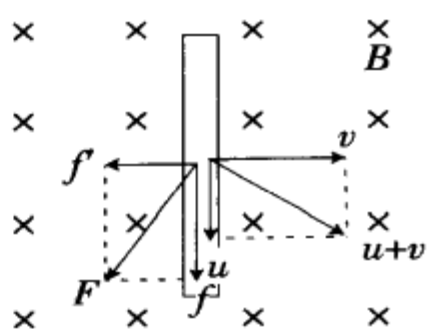


图 12.2-2 洛仑兹力传递能量的作用

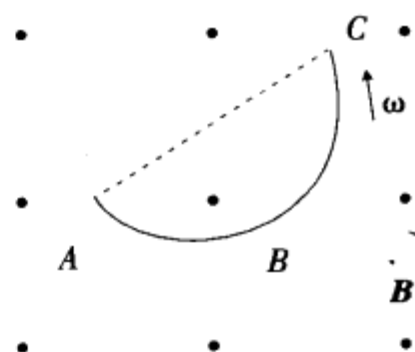


图 12.2-3

个典型的例子.导线回路 C 包围一个密绕的螺线环,当螺线环通以电流时,电流产生的磁场几乎集中在环内,环外磁场近似为零,根据法拉第电磁感应定律,当螺线环中的电流变化时,通过回路 C 所围面积的磁感应通量发生变化,因此当螺线环中的电流接通或断开时,回路中应出现感应电流,实验中通过观察电流计的指针转动证明这是正确的.但此时导线回路 C 并未移动,且回路所在处亦不存在磁场,不存在磁场力作用.因此感应电流的出现表明,导线中必存在电场.为此,麦克斯韦假设,变化的磁场可以产生电场,称为感生电场,图 12.2-4 回路中的感应电流就是由感生电场驱动的.不难想到感生电场也是一种非静电效应,相应的电动势称为感生电动势.

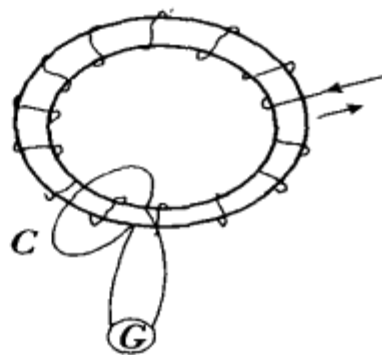


图 12.2-4 感生电场实验

$$\epsilon = \oint_L \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{l}$$

式中 \mathbf{E}_k 为感生电场强度,由法拉第电磁感应定律

$$\oint \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

式中 L 是任一闭合路径,可以是导线回路,也可以是任一想象的闭合积分路径,即感生电场产生的电动势并不需要与真实的导体相联系, S 是以闭合路径 L 为周界的任意曲面,由于回路是固定不变的,上式又可改为

$$\oint_L \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{l} = -\int \frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot d\mathbf{S} \quad (12.2-6)$$

上式中的 $\mathbf{B} = \mathbf{B}(t)$,是时间的函数,若 \mathbf{B} 还是位置坐标的函数,则仍只需要对时间求导数.上式表明,感生电场对任意闭合路径的线积分等于磁感应强度的变化率对这一闭合路径所围面积的通量. \mathbf{E}_k 和 $\frac{d\mathbf{B}}{dt}$ 组成左手螺旋关系,如图 12.2-5 所示.

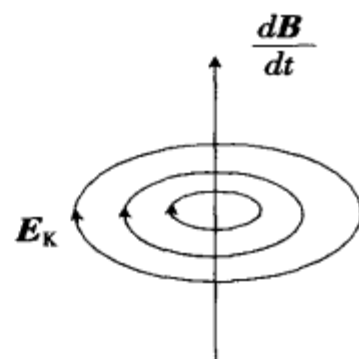


图 12.2-5 \mathbf{E}_k 与 $\frac{d\mathbf{B}}{dt}$ 组成左手螺旋

感生电场与静电场有区别,静电场是由静止电荷激发的,是保守势场,满足 $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$,而感生电场是由变化的磁场所激发的,其电场线是呈涡旋状的闭合曲线,无起点和终点,因而也称涡旋场,其环流不为零,感生电动势为

$$\epsilon = \oint_L \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{l}$$

显然感生电场强度的线积分与路径有关,一般情形不能用电势差或电压的概念,但可以把

$$\int_{A,B} \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{l} \quad \int_{A,B} \mathbf{E}_k d\mathbf{l}$$

A、B 两点间沿给定路径 A、B 两点间沿给定路径

称为 A、B 两点间沿给定路径的电势差.另外,当导体处于感生电场中时,若导体上出现恒定的电荷分布,则由这些电荷所激发的电场仍是静电场,与这部分电场相应仍可用电势和电势差的概念.

感生电场对电荷的作用力与静电场相同,可用

$$\mathbf{F} = q \mathbf{E}_k$$

表示电荷 q 所受的力,因此空间任一点的电场都可表示为感生电场 \mathbf{E}_k 和静电场 \mathbf{E}_s 的叠加:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_k + \mathbf{E}_s$$

静电场的环流为零,所以总电场 \mathbf{E} 满足

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int \frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot d\mathbf{S} \quad (12.2-7)$$

运动导体中的感应电动势应计及感生与动生两个分量,

$$\epsilon = \oint_L (\mathbf{E}_k + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

例 12.2-2 如图 12.2-6 所示,在一半径为 a 的圆柱形空间中有均匀磁场,方向垂直于纸面(截面)向里,磁场的变化率 $\frac{dB}{dt}$ 为大于零的常数,求距圆柱轴为 r 处 ($0 < r < \infty$ 范围内)的涡旋电场的场强.

解:由于磁场均匀分布在圆柱形空间,因此空间的涡旋电场必是轴对称的,即 E_k 的电场线应是一系列以圆柱轴为圆心的同心圆.作半径为 r ,与圆柱同心的圆形回路,其绕行方向为逆时针方向,因 $\frac{dB}{dt} > 0$,故 $\frac{d\mathbf{B}}{dt}$ 与回路所围面积的法线方向相反,因而有

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dB}{dt} \cdot dS$$

取 $d\mathbf{l}$ 与回路切线方向一致,则

$$E_k \cdot d\mathbf{l} = E_k dl$$

由(12.2-7)式,得

$$\oint E_k \cdot d\mathbf{l} = \int \frac{dB}{dt} \cdot dS$$

当 $0 < r \leq a$, 上式为

$$2\pi r E_k = \pi r^2 \frac{dB}{dt}$$

$$E_k = \frac{r}{2} \cdot \frac{dB}{dt}$$

$E_k > 0$, 说明其方向与回路假设的方向一致.

当 $a < r < \infty$, 因磁场只存在于半径为 a 的圆柱形空间,所以同样的分析可得

$$2\pi r E_k = \pi a^2 \frac{dB}{dt}$$

$$E_k = \frac{a^2}{2r} \cdot \frac{dB}{dt}$$

E_k 线都是沿逆时针方向.

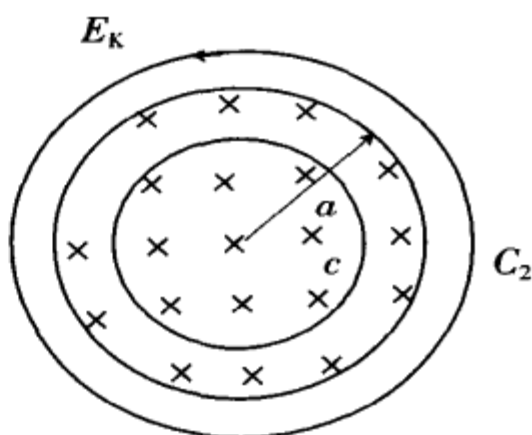


图 12.2-6

§ 12.3 自感与互感

当导体回路中的电流发生变化时,电流所激发的磁场通过回路本身所包围面积的磁通量也发生变化,使回路中产生感应电动势,这种因回路自身电流的变化而引起的感应电动势称为自感电动势,这一现象称为自感现象.

可以用图 12.3-1 所示的实验演示自感现象. S_1 和 S_2 是两个完全相同的灯泡, L 是有铁芯的线圈(铁芯可大大增加磁感应强度).调节电阻器的电阻,使之与线圈 L 的电阻相等,则在电路接通并达到稳定后,通过两个灯泡的电流相等.但在接通电路的瞬间, S_1 立即达到最大亮度,而 S_2 则要延迟一段时间才达到最大亮度.这是因为在接通电路的瞬间,回路中的电流由零起迅速增长,线圈 L 中的变化电流产生变化的磁场,使通过线圈的磁感应通量发生变化,因此在线圈中产生较大的自感电动势,其作用是阻碍电流的增长,结果 S_2 支路中的电流的增长较 S_1 支路中慢(S_1 支路中电流的磁场及磁

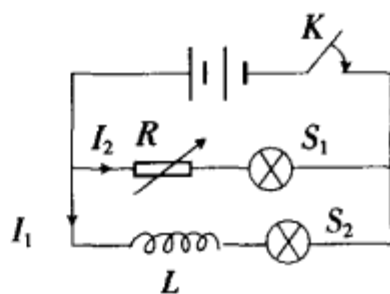


图 12.3-1 自感现象

感应通量都很小,几乎无自感电动势)。

现在定量讨论在无铁磁质存在时回路的自感电动势,设回路由 N 匝线圈构成,因为电流所激发的磁感应强度与回路中的电流成正比,所以整个线圈的磁通链 $N\Phi$ 也与电流 I 成正比,可写成

$$N\Phi = LI$$

式中比例系数 L 称为线圈的自感系数,简称自感,其值仅与线圈的尺寸、几何形状及匝数有关.上式也可写成

$$L = \frac{N\Phi}{I} \quad (12.3-1)$$

上式表明,自感 L 在量值上等于线圈中通过单位电流时的磁通链.

当线圈中的电流随时间变化时,线圈中的自感电动势为

$$\epsilon_L = -\frac{d(N\Phi)}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt}$$

通常情况下,线圈的自感系数 L 不随时间变化,因此

$$\epsilon_L = -L \frac{dI}{dt} \quad (12.3-2)$$

由上式可见,对于相同的电流变化率,回路中的自感系数 L 越大,自感电动势 ϵ_L 就越大,阻碍电流变化的作用也越大,因此自感系数反映回路保持其中电流不变的本领,也即可作为回路电学“惯性”的量度.

在国际单位制中,自感系数的单位是亨利,用字母 H 表示

$$1 \text{ 亨} = 1 \text{ 伏特} \cdot \text{秒} / \text{安培} \quad \text{或} \quad 1\text{H} = 1\text{V} \cdot \text{S} / \text{A}$$

例 12.3-1 设一长螺线管的长度为 l ,密绕有 N 匝导线,螺线管的长度比半径大得多,其截面积为 S ,求线圈的自感系数.

解:当忽略其端点效应时,管内磁场可看作是均匀分布的,磁感应强度为

$$B = \mu_0 nI = \mu_0 \frac{N}{l} I$$

螺线管的自感系数为

$$L = \frac{N\Phi}{I} = \mu_0 \frac{N^2}{l} S$$

如果有两个互相靠近的线圈 1 和 2,如图 12.3-2 所示,当回路 1 中的电流发生变化时,它所激发的变化磁场将在线圈 2 中产生感应电动势;同样,当回路 2 中的电流发生变化时,也必在回路 1 中引起感应电动势.这一现象称为互感现象,所产生的感应电动势称为互感电动势.

设回路 1 和 2 分别有 N_1 和 N_2 匝密绕线圈,如线圈厚度不大,可认为同一回路中每匝线圈通过的磁通量都相同,当回路 1 中通以电流 I_1 时,通过回路 2 所包围面积的磁通量 Φ_{21} 与 I_1 成正比,因而回路 2 的磁通匝链数 $N_2\Phi_{21}$ 也正比于 I_1 ,可写成

$$N_2\Phi_{21} = M_{21}I_1 \quad (12.3-3)$$

式中比例系数 M_{21} 称为回路 1 对回路 2 的互感系数,其数值仅与两线圈的尺寸、几何形状、匝数及两线圈的相对位置有关.

同样,当回路 2 中通以电流 I_2 时,回路 1 的磁通链也与 I_2 成正比,可写成

$$N_1\Phi_{12} = M_{12}I_2 \quad (12.3-4)$$

M_{12} 为回路 2 对 1 的互感系数.从理论和实验上都可证明:

$$M_{12} = M_{21} = M \quad (12.3-5)$$

M 称为两个回路的互感系数.

设互感系数 M 不随时间变化,根据法拉第电磁感应定律,回路 1 中的电流变化在回路 2 中产生的

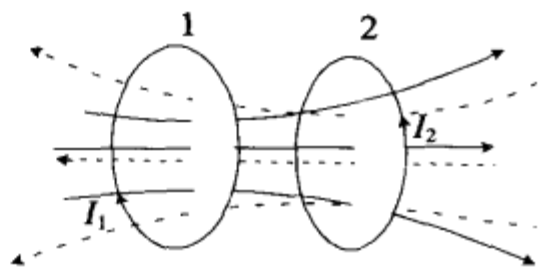


图 12.3-2 两线圈的互感

互感电动势为

$$\epsilon_{21} = -\frac{d(N_2\Phi_{21})}{dt} = -M\frac{dI_1}{dt} \quad (12.3-6)$$

同样,回路2中的电流变化在回路1中产生的互感电动势为

$$\epsilon_{12} = -\frac{d(N_1\Phi_{12})}{dt} = -M\frac{dI_2}{dt} \quad (12.3-7)$$

互感系数和两个回路之间相互耦合的紧密程度有关,在一般情况下互感系数很难通过计算求出,通常均由实验测定,其单位与自感系数相同.

例 12.3-2 如图 12.3-3 所示,两个共轴螺线管的长度和匝数分别为 l_1, N_1 和 l_2, N_2 ,螺线管 2 绕在螺线管 1 的中部, $l_2 \ll l_1$,螺线管的截面积都是 S ,求它们的互感系数.

解:由于 $l_2 \ll l_1$,在线圈 1 中产生的磁感应强度在线圈 2 内部是均匀的,大小为

$$B = \mu_0 \frac{N_1}{l_1} I_1$$

通过螺线管 2 的磁通链和互感系数分别为

$$N_2\Phi_{21} = N_2BS = N_2\mu_0 \frac{N_1}{l_1} I_1 S$$

$$M = \frac{N_2\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S}{l_1}$$

当两个线圈中的每一个线圈所产生的磁感应线全部穿过另一个线圈的每一匝时,称为无漏磁.这种情况下两个线圈之间的耦合最紧密,是理想耦合,此时有

$$M = \sqrt{L_1 L_2}$$

若两线圈之间为非理想耦合时,

$$M = K \sqrt{L_1 L_2}$$

式中 K 称为耦合系数,取值范围为 $0 \leq K \leq 1$,其值与两个线圈的相对位置有关,可由实验测定.

在上例中,两个螺线管的自感系数分别为

$$L_1 = \mu_0 \frac{N_1^2}{l_1} S$$

$$L_2 = \mu_0 \frac{N_2^2}{l_2} S$$

所以

$$K = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \sqrt{\frac{l_2}{l_1}}$$

由于 $l_1 \gg l_2$,虽然 l_1 的磁感应线全部穿过 l_2 的每一匝,但 l_2 的磁感应线并不穿过 l_1 的每一匝.因此本例并非理想耦合.

在配电系统中,为了安全和设备的有效设计,在发电端(发电厂)和接受端(住宅或工厂)两处都希望和较低的电压打交道,反之,从发电厂向用户输送电能时,则要求尽可能低的电流(因而要求尽可能高的电压),以减小输电线中的能量损耗,我们需要一种装置能按照设计要求来升高或降低电路中的电压,同时使乘积 iV 基本上保持不变,变压器就是一种改变交流电压的设备,把低电压变成高电压的变压器称为升压变压器,把高电压变成低电压的称为降压变压器,变压器的原理如图 12.3-4 所示.在闭合的铁芯上,分别绕有两组线圈,一组线圈与电源相接,

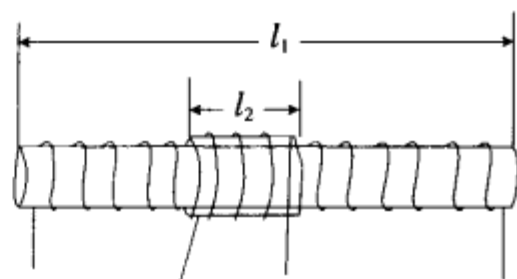


图 12.3-3

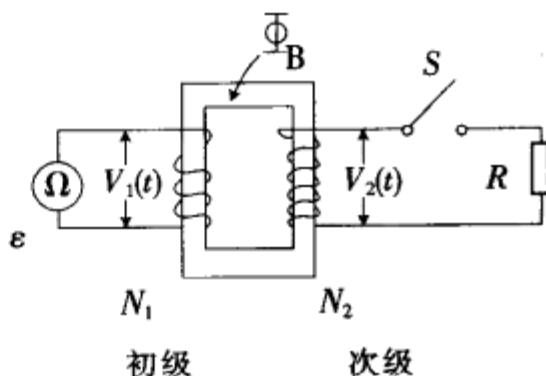


图 12.3-4 变压器原理图

称为原线圈或初级线圈;另一组与负载相接,称为副线圈或次级线圈.当原线圈中通有交流电(大小和方向都随时间作周期性变化的电流、电压和电动势的总称)时,原线圈中电流产生的磁场引起副线圈磁感应通量的变化,使副线圈中产生互感电动势,从而在副线圈两端建立起交变的电压;当副线圈中有电流时,副线圈中的电流产生的磁场亦引起原线圈的磁感应通量的变化,因而在原线圈中也会产生互感电动势.变压器的铁芯由一种软磁材料制成,可大大增加线圈的自感系数.假定磁场几乎全部集中在铁芯中,则通过线圈每一匝所围面积的磁感应通量都相等.在图 12.3-3 中初级绕组有 N_1 匝,与电动势为 $\epsilon(t) = \epsilon_m \sin \omega t$ 的交流发电机相连,绕组两端电压为 V_1 ;次级绕组有 N_2 匝,在开关 S 打开的情况下处于开路,两端电压为 V_2 ,因此不存在次级电流,在上述条件下,初级绕组是一个纯电感,交变的初级电流在铁芯中感生交变的磁通量 $\Phi_B(t)$,假定这是理想变压器,次级绕组的每一匝线圈通过的磁通量都相同,由法拉第电磁感应定律可知,初级和次级绕组的每匝电动势 ϵ_i 是相同的,因此,可以有如下关系:

$$\epsilon_i = -\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{V_1}{N_1} = \frac{V_2}{N_2}$$

上式中 ϵ_i , $-\frac{d\Phi_B}{dt}$, V_1 和 V_2 都表示“有效值”(见 12.4 节),由此得到

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1} \quad (12.3-8)$$

如果 $N_2 > N_1$,上述变压器为升压变压器,如果 $N_2 < N_1$,则为降压变压器.

现在如果将图 12.3-3 中的开关 S 闭合,这时次级绕组与电阻负载 R 相连,电阻负载中就有功率消耗,这就要求发电机向(理想的)变压器提供同样的功率,即

$$\epsilon \cdot i_1 = \frac{V_2^2}{R} \quad (12.3-9)$$

例 12.3-3 变压器的初级绕组的电压有效值为 $V_1 = 8.0$ 千伏特(参看图 12.3-3),次级电压有效值 $V_2 = 120$ 伏特.

(1)试求变压器的匝数比 $\frac{N_1}{N_2}$;

(2)次级电压向许多住宅供给电能,消耗的平均功率为 70 千瓦特,试求变压器的初级和次级绕组中的电流有效值.(假定变压器是理想的,负载为电阻性的);

(3)试求次级电路中的等效电阻负载 R .

解:(1)变压器的匝数比 $\frac{N_1}{N_2} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{8.0 \times 10^3}{120} = \frac{200}{3}$

(2) $i_1 = \frac{P}{V_1} = \frac{70 \times 10^3}{8.0 \times 10^3} = 8.8(\text{A})$

$i_2 = \frac{P}{V_2} = \frac{70 \times 10^3}{120} = 580(\text{A})$

注意,在理想变压器中,初级电路一边的电源所提供的功率恰好等于次级电路一边的电阻负载所消耗的功率.

即

$$i_1 V_1 = i_2 V_2 = 70\text{kW}$$

(3)等效电阻为

$$R = \frac{(V_2)^2}{P} = \frac{(120)^2}{70 \times 10^3} = 0.21(\Omega)$$

§ 12.4 交流电

当电路中电源的电动势随时间作周期性变化时,电路上的电流和电压也随之作周期性变化,这种电路称为交流电路.交流电是大小和方向都随时间作周期性变化的电流、电压和电动势的总称.交流电的

类型有多种,其中最简单而又最基本的是随时间作简谐变化的交流电,称为简谐交流电.简谐交流电中的电压、电流和电动势均可写成余弦函数形式:

$$\begin{aligned} u &= U_m \cos(\omega t + \varphi_u) \\ i &= I_m \cos(\omega t + \varphi_i) \\ e &= \epsilon_m \cos(\omega t + \varphi_e) \end{aligned} \quad (12.4-1)$$

其中 U_m 、 I_m 和 ϵ_m 分别为电压、电流和电动势在变化过程中出现的最大瞬时值,称为交流电压、交流电流和交流电动势的峰值或最大值, ω 为简谐交流电的圆频率或角频率,与频率 f 的关系为

$$\omega = 2\pi f \quad (12.4-2)$$

频率与周期 T 的关系为

$$T = \frac{1}{f} \quad (12.4-3)$$

频率的单位是赫兹,用 Hz 表示,市电的频率是 50Hz,交流电的瞬时值由 $(\omega t + \varphi)$ 决定, $(\omega t + \varphi)$ 称为交流电的相位, φ 为 $t=0$ 时刻的相位,称为初相位.

在实际工作中,使用交流电的目的是使用交流电产生的效应,如电灯、电炉等利用交流电的热效应,因此可以通过电流所产生的效应来衡量交流电的大小,即用有效值来表示交流电效应的大小.

我们规定:在相同的电阻中,分别通以直流电和交流电,如果在交流电的一个周期 T 内,二者消耗的电能相等,则该直流电流 I 称为交流电流的有效值,相应的直流电压值称为交流电压的有效值,瞬时值为 i 的交流电流通过电阻 R 时,在一个周期 T 内的总功为

$$Q_{\text{交}} = \int_0^T i^2 R dt = \int_0^T I_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi_i) R dt = \frac{1}{2} I_m^2 RT$$

电流为 I 的直流电通过电阻 R 时,在一个周期 T 内的总功为

$$Q_{\text{直}} = I^2 RT$$

根据有效值的规定

$$\frac{1}{2} I_m^2 RT = I^2 RT$$

交流电流的有效值为

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} I_m = 0.707 I_m \quad (12.4-4)$$

用类似的方法可得电压和电动势的有效值和峰值的关系:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{\sqrt{2}} U_m = 0.707 U_m \\ \epsilon &= \frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon_m = 0.707 \epsilon_m \end{aligned} \quad (12.4-5)$$

各种交流电表的读数几乎都是有效值.

简谐交流电可以用振幅矢量法表示.用一个逆时针旋转的矢量在 x 轴上的投影表示简谐交流电.矢量的大小等于交流电的峰值,矢量旋转的角速度等于交流电的圆频率,在 $t=0$ 时,该矢量与 x 轴的夹角等于交流电的初相位,满足上述条件的旋转矢量称为振幅矢量,按上面定义,在任一时刻 t ,交流电流的瞬时值为振幅矢量在 x 轴上的投影,即

$$i = I_m \cos(\omega t + \varphi)$$

如图 12.4-1 所示,用振幅矢量法可以形象地表示出简谐交流电的三个参量,且可以方便直观地计算两个同频率的简谐交流电的叠加.

例12.4-1 两同频率的交流电流,其电流的峰值分别为 3A 和 4A,初相位分别为 30° 和 120° ,频率都是 50Hz,试求这两个交流电流的和的峰值、角频率和初相位,并求出其瞬时值的表达式.

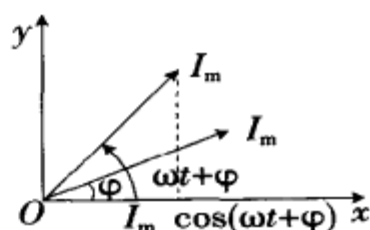


图 12.4-1 振幅矢量法

解:如图 12.4-2 所示,作两交流电的振幅矢量 I_{1m} 和 I_{2m} ,在 $t=0$ 时刻,振幅矢量如图所示,合电流的振幅为 I_m ,由平行四边形法则,有

$$\begin{aligned} I_m &= \sqrt{I_{1m}^2 + I_{2m}^2 + 2I_{1m}I_{2m}\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \\ &= \sqrt{3^2 + 4^2 + 2 \times 3 \times 4 \cos(120^\circ - 30^\circ)} = 5(\text{A}) \\ \operatorname{tg}(\varphi - \varphi_1) &= \frac{4}{3} = 1.333, \varphi - \varphi_1 = 53^\circ 9' \\ \varphi &= 53^\circ 9' + \varphi_1 = 53^\circ 9' + 30^\circ = 83^\circ 9' \\ \omega &= 2\pi f = 2\pi \times 50 = 100\pi \end{aligned}$$

所以两电流和的瞬时值的表达式为

$$i = 5\cos(100\pi t + 83^\circ 9')$$

由交流电源和电阻组成的电路称为纯电阻电路,如图 12.4-3 所示,当交变电流通过电路时,电阻两端的电压为

$$u = U_m \cos \omega t$$

上式中设 $t=0$ 时 $\varphi=0$. 根据欧姆定律,电阻中电流的瞬时值为

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_m}{R} \cos \omega t = I_m \cos \omega t$$

式中 $I_m = \frac{U_m}{R}$ 是电流的峰值,两边除以 $\sqrt{2}$,即可得电流有效值 I 与电压有效值 U 之间的关系

$$I = \frac{U}{R}$$

可见,纯电阻电路中电流 i 和电压 u 同频率,它们的有效值之间的关系满足欧姆定律.且电流和电压的相位相同.

如果电路中只有电源和电感,电阻可以忽略不计,则为纯电感电路,如图 12.4-4 所示,当电路中电流发生变化时,电感便产生自感电动势以反抗电流的变化.设电路中通过的电流为

$$i = I_m \cos \omega t \quad (12.4-6)$$

在电感中产生的自感电动势为

$$\varepsilon_L = -L \frac{di}{dt} = L\omega I_m \sin \omega t = L\omega I_m \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

由于电阻为零,电感两端的端电压和自感电动势大小相等,但因电动势的方向规定为由负极指向正极,而端电压则由高电势指向低电势,因而电压和电动势的符号相反,即电感两端的电压为

$$u = -\varepsilon_L = L\omega I_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = U_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (12.4-7)$$

上式中 $U_m = L\omega I_m$,比较(12.4-6)和(12.4-7)式,可看出纯电感两端的电压与通过的电流频率相同,但电压的相位比电流超前 $\frac{\pi}{2}$.把电压峰值和电流峰值之关系式两边除以 $\sqrt{2}$,

$$\frac{U_m}{\sqrt{2}} = L\omega \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

得到电流有效值 I 和电压有效值 U 之间的关系为

$$U = L\omega I$$

或写成

$$\frac{U}{I} = L\omega \quad (12.4-8)$$

上式中 $L\omega$ 称为电感元件的阻抗,或称感抗,用 X_L 表示.

$$X_L = L\omega = 2\pi fL \quad (12.4-9)$$

上式表明,感抗的大小不仅与 L 成正比,还与交流电的频率 f 成正比,在直流电情况下, $f=0$,这时 $X_L=0$,这

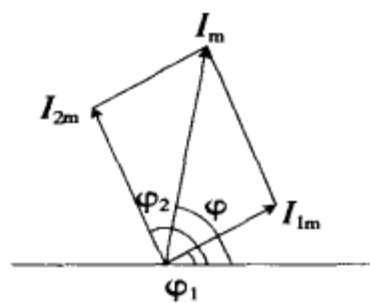


图 12.4-2

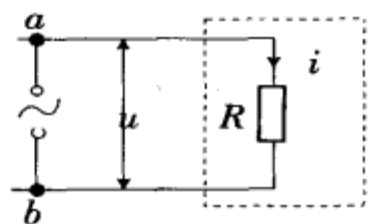


图 12.4-3 纯电阻电路

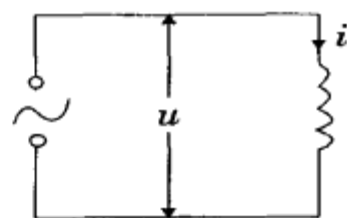


图 12.4-4 纯电感电路

是电感与电阻不同之处.

纯电感电路的电压和电流的矢量关系可用图 12.4-5 表示.

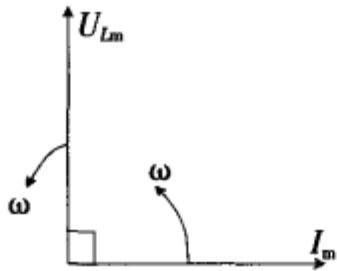


图 12.4-5 纯电感电路中的电压和电流

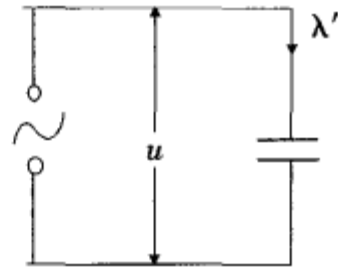


图 12.4-6 纯电容电路

由电源和电容组成的电路称为纯电容电路.如图 12.4-6 所示.当电容器两端接上交流电源时,由于电容器两端的电压 u' 不断地变化,电容器两极板上所充的电量也相应地发生变化,设电容器两端的电压为

$$u = U_m \cos \omega t \quad (12.4-10)$$

则电容器两极板所充电量为

$$q = Cu = CU_m \cos \omega t$$

通过电流为

$$i = \frac{dq}{dt} = -CU_m \omega \sin \omega t = I_m \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \quad (12.4-11)$$

式中

$$I_m = CU_m \omega \quad (12.4-12)$$

比较(12.4-10)和(12.4-11)式可知,电容两端的电压和电流频率相同,但电流的相位比电压的相位超前 $\frac{\pi}{2}$,可用图 12.4-7 表示纯电容电路中电压和电流的矢量关系.

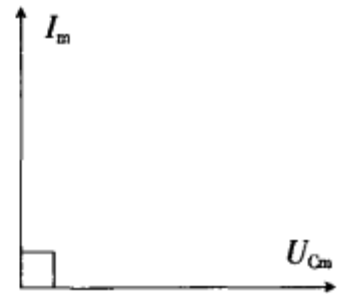


图 12.4-7 纯电容电路中的电压和电流

(12.4-12)式两边除以 $\sqrt{2}$,得电流有效值与电压有效值之间关系为

$$I = C\omega U$$

或

$$\frac{U}{I} = \frac{1}{C\omega} \quad (12.4-13)$$

上式中 $\frac{1}{C\omega}$ 称为电容元件的阻抗,或称为容抗,用 X_C 表示.

$$X_C = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{2\pi fC} \quad (12.4-14)$$

上式表明,容抗与交流电的频率 f 和电容 C 成反比,对于直流电, $f=0$,容抗为无穷大,相当于断路.

总结以上三种情况,电流与电压的有效值之间的关系和直流电路的欧姆定律相同,满足

$$U = IZ \quad (12.4-15)$$

式中 Z 称为交流电路中各元件的阻抗.电阻、电感和电容的阻抗分别为

$$Z_R = R$$

$$Z_L = X_L = L\omega$$

$$Z_C = X_C = \frac{1}{C\omega}$$

例 12.4-2 一电容 $C = 3.2\mu\text{F}$,与一电阻 $R = 100\Omega$ 串联,接在简谐交流电源上,电源的电压为 10V ,频率 $f = 50\text{Hz}$,求电流及电容两端的电压与电阻两端电压之比.

解:因电容和电阻串联,如图例 12.4-8(a)所示

$$u_R + u_C = u$$

矢量图如图(b)所示,由平行四边形法则,得

$$U_R + U_C = U$$

$$I^2 R^2 + I^2 X_C^2 = U^2$$

即

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{2\pi fC}\right)^2}} = \frac{10}{\sqrt{100^2 + \left(\frac{1}{2 \times 3.14 \times 50 \times 3.2 \times 10^{-6}}\right)^2}} = 0.01(\text{A})$$

$$\frac{U_C}{U_R} = \frac{IX_C}{IR} = \frac{1}{2\pi fCR} = \frac{1}{2 \times 3.14 \times 50 \times 3.2 \times 10^{-6} \times 100} = 10$$

由 U_C/U_R 可知,当频率 f 增大时,电容两端的电压降低,对于直流电, $f=0$, $U_C/U_R = \infty$,而当 f 很大时, $U_C/U_R \rightarrow 0$,反映了电容在电路上有隔直流,通交流,阻低频,通高频的特性.

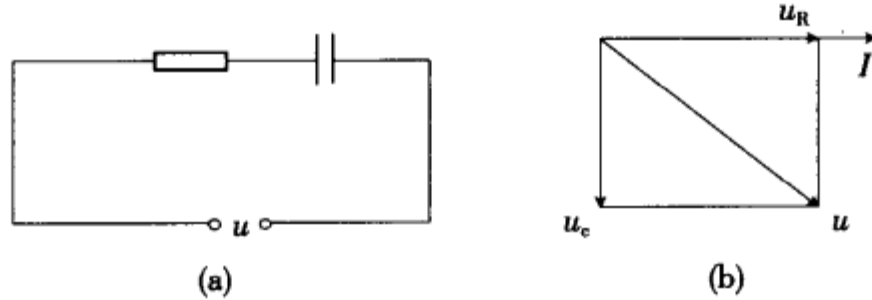


图 12.4-8

简谐交流电还可以用波形图表示,图 12.4-9 表示交流电流的波形图;图 12.4-10 表示纯电阻的电压和电流波形;图 12.4-11 表示纯电感的电压和电流波形;图 12.4-12 表示纯电容的电压和电流波形图.

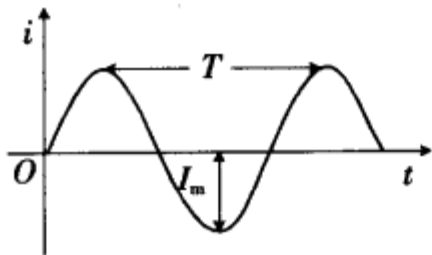


图 12.4-9 交流电流的波形

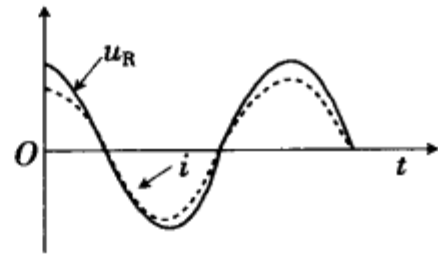


图 12.4-10
纯电阻的电压和电流波形

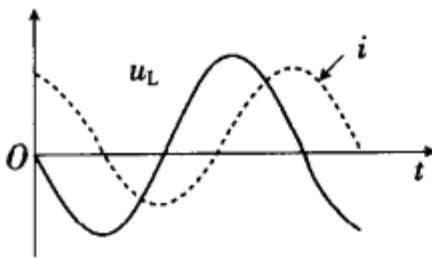


图 12.4-11
纯电感的电压和电流波形

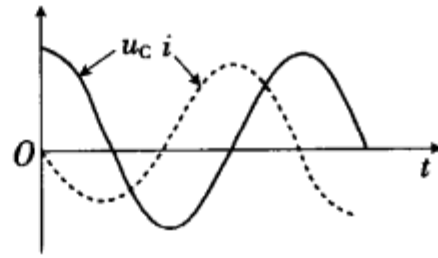


图 12.4-12
纯电容的电压和电流波形

电子设备中常需要把交流电变为直流电,可以用整流电路实现这一变换.整流电路是利用半导体二极管的单向导电性把交流电变为直流电的电路.二极管用符号 $\text{—}|>$ 表示.二极管的性能常用加到二极管两端的电压与流过二极管电流之间数量关系的曲线表示,称为二极管的伏安特性曲线.通过图 12.4-13 所示的实验方法,描绘出如图 12.4-14 所示的某种硅二极管的伏安特性曲线.图中曲线表明:当二极管两端接正向电压(图 12.4-11(a))时,随着电压由零开始逐渐升高,最初,电流增加得很慢,二极管呈现很大的电阻,当硅二极管的外加电压超过 0.5V 时,电流显著上升,二极管电阻变小,二极管处于正向导通状态,这时硅二极管两端压降约 0.7V.当二极管接上反向电压(图 12.4-13(b))时,随着反向电

压的逐渐加大,反向电流很快达到饱和,称反向饱和电流,硅管一般在几十微安以下,如图 12.4-14 所示,当反向电压值达到 C 点时,反向电流突然增大,出现反向击穿现象,这个电压称为反向击穿电压.二极管正常工作时,所加的反向电压不能超过击穿电压,否则将导致二极管损坏.

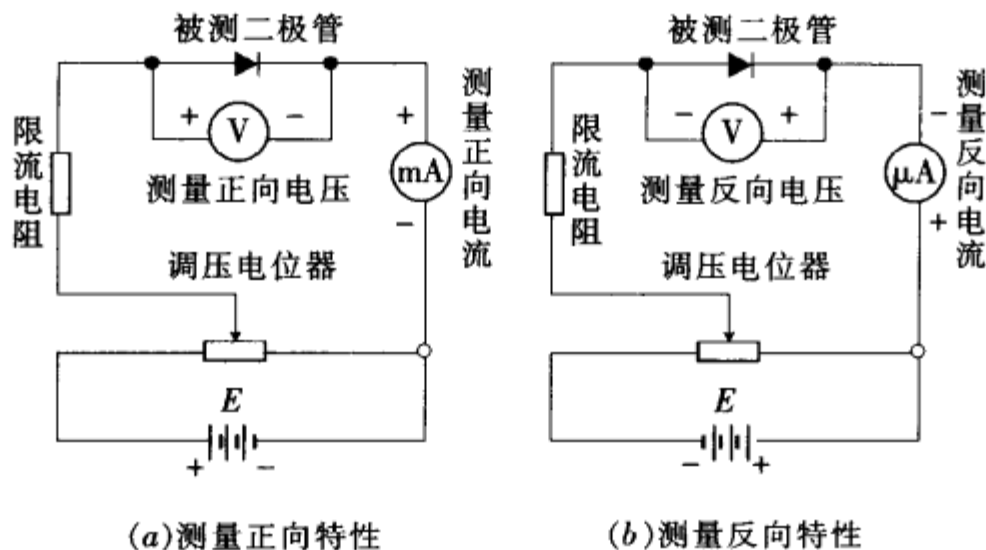


图 12.4-13 测量二极管的伏安特性的电路

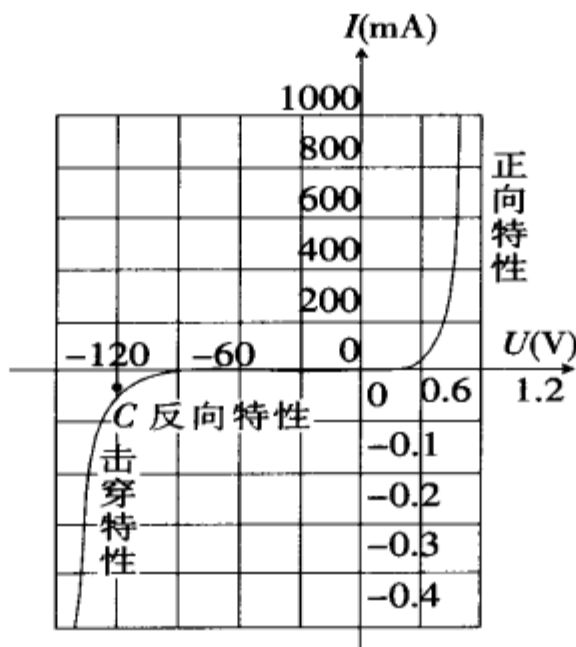


图 12.4-14 硅二极管的伏安特性曲线

下面介绍两种常用的整流电路

1. 半波整流电路

半波整流电路如图 12.4-15(a)所示,图中 D 为整流二极管, R_L 为负载电阻, B 为变压器,其作用是将电源电压 u_1 变换成整流电路需要的电压 u_2 ,变压器次级电压可表示为

$$u_2 = U_{2m} \cdot \sin \omega t = \sqrt{2} U_2 \sin \omega t$$

由图 12.4-15(a)可知,当 u_2 为正半周时,二极管 D 导通,负载 R_L 上的电压(输出电压) U_0 与 u_2 相同,如图 12.4-15(b)所示,当 u_2 为负半周时, D 截止, U_0 为零.次级电压全部加到 D 上.因此,负载电压 U_0 (或电流 I_0)为方向不变、大小发生变化的脉动直流,可表示为

$$U_0 = \begin{cases} \sqrt{2} U_2 \sin \omega t & 0 \leq \omega t \leq \pi \\ 0 & \pi \leq \omega t \leq 2\pi \end{cases}$$

通过计算, U_0 中的直流分量(平均电压)为 $\overline{U_0} = 0.45 U_2$ (U_2 为 u_2 的有效值).流过二极管的平均电流 $\overline{I_D}$ 等于负载平均电流(即直流分量) I_0 ,即

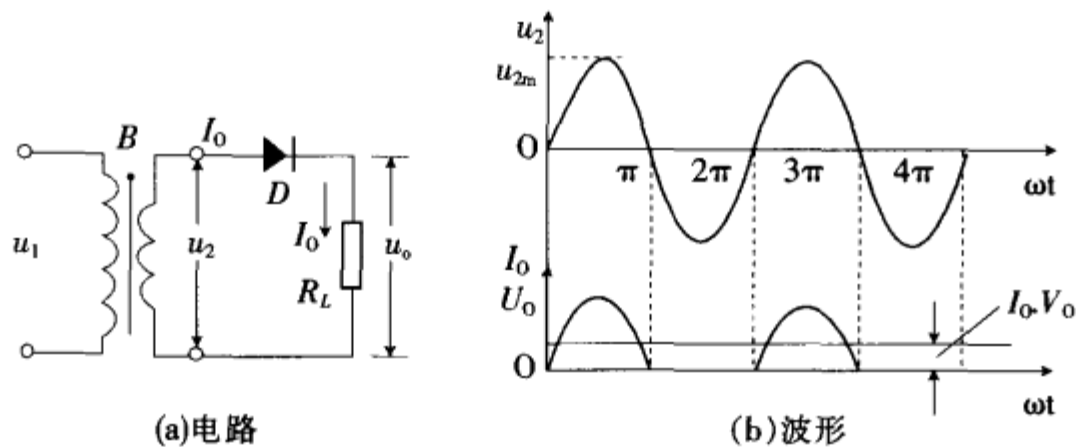


图 12.4-15 半波整流电路及波形

$$\overline{I_D} = \overline{I_0} = \frac{\overline{U_0}}{R_L}$$

当二极管不导电时,加于其上的最大反向电压为

$$U_{Dm} = \sqrt{2} U_2$$

因此,在选用二极管时,其反向击穿电压必须大于加在其上的最大反向电压。

上述讨论表明:半波整流的特点是输出波形为正弦波的半周,故直流分量较小,整流效果不好,但线路简单,在输出电流较小(几十毫安以下)时,常被采用。

2. 桥式全波整流电路

桥式全波整流电路由变压器和四个二极管构成。如图 12.4-16(a)所示,当 u_2 为正半周时,即“1”端为正,“2”端为负时,二极管 D_1 、 D_3 导通, D_2 、 D_4 截止。电流方向如图所示。当 u_2 为负半周时,二极管 D_2 、 D_4 导通, D_1 、 D_3 截止。电流由变压器“2”端流出,经 D_2 、 R_L ,再通过 D_4 流回到“1”端。因此,无论 u_2 处于正半周或负半周都有电流分别通过两对二极管而同方向地流过负载 R_L 。整流波形图如图 12.4-16(b)所示。它的直流分量为半波整流的两倍。即

$$\overline{U_0} = 2 \times 0.45 U_2 = 0.9 U_2$$

桥式整流电路的优点是整流效率高,脉动较小,应用很广,图 12.4-16(c)是桥式全波整流电路常见的表示法。

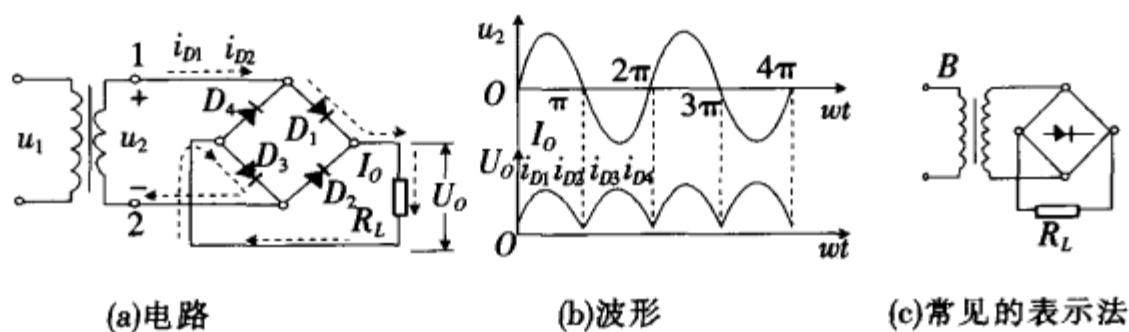


图 12.4-16 桥式全波整流电路及波形

本章综合例题

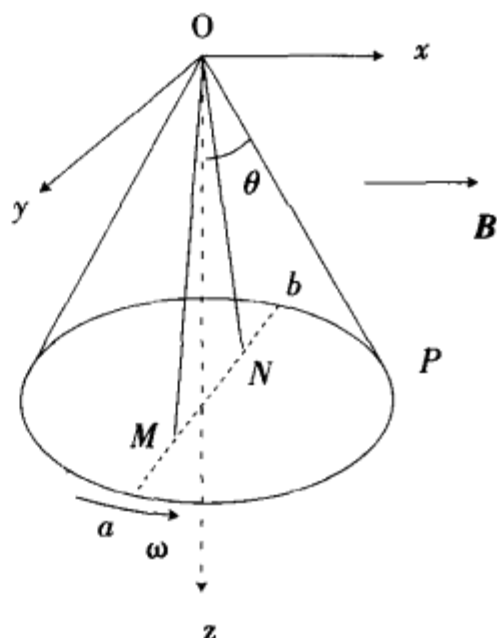
例 12.1 在如图 12-1 所示的直角坐标系中,有一塑料制成的半锥角为 θ 的圆锥体 Oab 。圆锥体的顶点在原点处,其轴线沿 Z 轴方向,有一条长为 l 的细金属丝 OP 固定在圆锥体的侧面上,金属丝与圆锥体的一条母线重合。整个空间中存在磁感应强度为 B 的均匀磁场。磁场方向沿 x 轴正方向。当圆锥体绕其轴沿图示方向做角速度为 ω 的匀角速转动时,

- (1) OP 经过何处时两端的电势相等?
 (2) OP 在何处时 P 端的电势高于 O 端?
 (3) 电势差 $U_P - U_O$ 的最大值是多少?
 (第 7 届全国中学生物理竞赛预赛题)

解(1): 当 OP 经过 YOZ 平面的瞬间, 两端的电势相等. 因为此时 OP 的运动方向和磁场方向平行(同向或反向)

(2) 只要 OP 处在 YOZ 平面的右侧, P 点的电势总是高于 O 点.

(3) 当 OP 处于 YOZ 平面的右侧且运动方向和磁场方向垂直时, 即通过 XOZ 平面的瞬间(如图 12-1 所示), $U_P - U_O$ 的值最大. 其值等于在此瞬间很短时间间隔 Δt 内, OP 切割的磁感应线数 $\Delta\Phi$ 除以 Δt , 由几何投影可知, $\Delta\Phi$ 也等于 Δt 内 OP 在 YOZ 平面上的投影切割的磁感应线的数目. P 在 YOZ 平面上的投影为沿 Y 轴方向做圆频率为 ω 、振幅为 $l\sin\theta$ 的简谐振动, 此简谐振动在 Z 轴附近时其速度为 $\omega l\sin\theta$, 因此 OP 的投影切割的面积为一小三角形 $\triangle MON$ 的面积, 即



图例 12-1

$$\Delta S = \frac{1}{2} l \cos\theta \cdot \omega l \sin\theta \cdot \Delta t \quad ①$$

切割的磁感应线数即磁通量为

$$\Delta\Phi = B\Delta S = \frac{1}{2} l^2 \omega B \cos\theta \sin\theta \cdot \Delta t \quad ②$$

根据法拉第电磁感应定律

$$U_P - U_O = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{1}{2} l^2 \omega B \cos\theta \sin\theta \quad ③$$

例 12-2 如图例 12-2 所示, 导体 ab 的 a 端可以在水平圆环的轨道上滑动, 滑动摩擦力为 f , b 端可以绕 O 点无摩擦地转动, 磁场平行于转动轴 OO' , 方向向上. 磁感应强度为 B ; 导体 ab 跟磁场夹角为 θ , 长为 L , 电阻为 R ; 电源电动势为 ϵ , 内阻为 r , 圆环导轨的电阻不计. 求:

- (1) 导体 ab 的转动方向;
 (2) 导体 ab 匀速转动的角速度.

解:(1) 通电导体 ab 受到磁场力作用, 力 F 的方向如图所示, 导体在安培力的力矩作用下绕转动轴 OO' 沿顺时针方向转动.

(2) 导体 ab 转动时还受到滑动摩擦力作用, 当安培力的力矩等于摩擦力的力矩时, 导体作匀速转动

$$F \cdot \frac{L \sin\theta}{2} = f \cdot L \sin\theta$$

得 $F = 2f \quad ①$

导体 ab 转动过程中切割磁力线产生感生电动势 $\epsilon' = BLv \sin\theta$, 式中 v 为导体 ab 中点线速度. 这时通过导体 ab 的电流为

$$I = \frac{\epsilon - \epsilon'}{R + r}$$

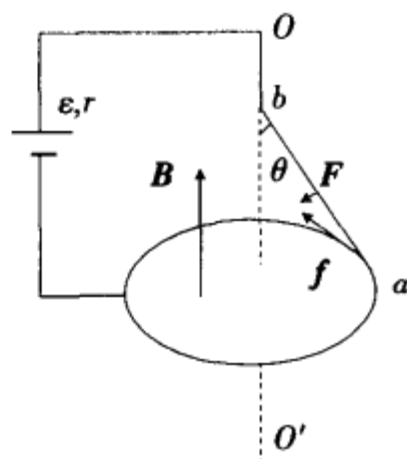
于是作用在导体 ab 上的安培力 F 为

$$F = BIL \sin\theta$$

将 ϵ' , I 的式子代入上式, 得

$$F = B \cdot \frac{\epsilon - BLv \sin\theta}{R + r} \cdot L \sin\theta \quad ②$$

①式和②式相等, 即



图例 12-2

$$B \cdot \frac{\epsilon - BLv \sin \theta}{R+r} \cdot L \sin \theta = 2f$$

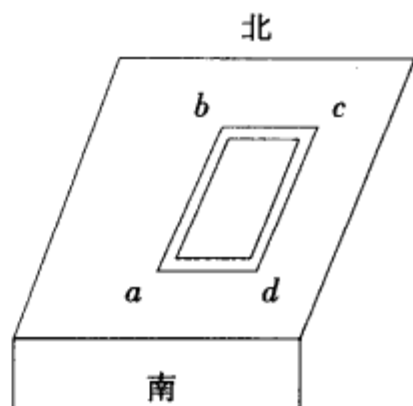
得

$$\bar{v} = \frac{B\epsilon L \sin \theta - 2f(R+r)}{B^2 L^2 \sin^2 \theta}$$

因此,匀速转动的角速度为

$$\omega = \frac{v}{L \sin \theta / 2} = \frac{2\epsilon L B \sin \theta - 4f(R+r)}{B^2 L^3 \sin^3 \theta}$$

例 12-3 如图例 12-3 所示,一个电阻为 R 的长方形线圈 $abcd$ 沿磁针所指的南北方向平放在北半球的一个水平桌面上, ab 边长为 l_1 , bc 边长为 l_2 . 现突然将线圈翻转 180° , 使 ab 与 dc 互换位置, 可设法测得导线中流过的电量为 Q_1 , 然后维持 ad 边不移动, 将线圈绕 ad 边转动, 使之突然竖直, 这次测得导线中流过的电量为 Q_2 . 试求该处地磁场的磁感应强度的大小.



图例 12-3

(第 2 届全国中学生竞赛预赛题)

解:根据地磁场的特点,可知在北半球磁感应强度 B 矢量与水平面有一夹角 θ , $B = B_{//} + B_{\perp}$, 且 B_{\perp} 的方向向下.

第一次翻转时, $B_{//}$ 分量与线圈处在同一平面内, 对线圈产生的磁通量为零. 线圈在翻转过程中 B_{\perp} 分量引起穿过线圈平面的磁通量变化 $\Delta\Phi_1$, 设在 Δt_1 时间内完成翻转, 面积的变化是线圈面积的两倍, 所以有

$$\epsilon_1 = \frac{\Delta\Phi_1}{\Delta t_1} = \frac{B_{\perp} \cdot 2S}{\Delta t_1}$$

$$Q_1 = I_1 \Delta t_1 = \frac{\epsilon_1}{R} \cdot \Delta t_1 = \frac{B_{\perp} \cdot 2S}{R}$$

由此得

$$B_{\perp} = \frac{Q_1 R}{2S} = \frac{Q_1 R}{2l_1 l_2}$$

第 2 次翻转时, $B_{//}$ 分量与 B_{\perp} 分量都引起磁通量的改变, 与 $B_{//}$ 分量相对应的磁通量是从零增大到 $B_{//} S$, 与 B_{\perp} 分量对应的磁通量是从 $B_{\perp} S$ 减少到零, 因此在第二次翻转中, 总的磁通量变化是 $B_{//} S - B_{\perp} S$, 于是得到

$$Q_2 = I_2 \Delta t_2 = \frac{\epsilon_2}{R} \cdot \Delta t_2 = \frac{\Delta\Phi_2}{\Delta t_2} \cdot \frac{\Delta t_2}{R} = \frac{B_{//} S - B_{\perp} S}{R}$$

得

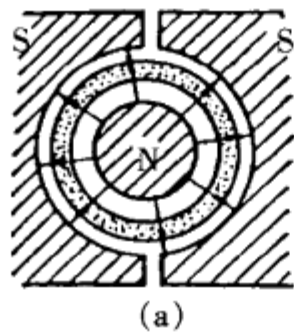
$$B_{//} = \frac{RQ_2}{S} + B_{\perp} = \frac{RQ_2}{l_1 l_2} + \frac{RQ_1}{2l_1 l_2}$$

$$B = \sqrt{B_{//}^2 + B_{\perp}^2} = \sqrt{\left(\frac{RQ_2}{l_1 l_2} + \frac{RQ_1}{2l_1 l_2}\right)^2 + \left(\frac{Q_1 R}{2l_1 l_2}\right)^2}$$

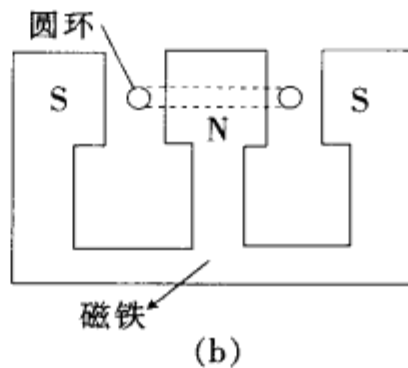
$$= \frac{R}{2l_1 l_2} \sqrt{2Q_1^2 + 4Q_1 Q_2 + 4Q_2^2}$$

$$\theta = \text{tg}^{-1} \frac{B_{\perp}}{B_{//}} = \text{tg}^{-1} \frac{Q_1}{Q_1 + 2Q_2}$$

例 12-4 (1) 有一半径为 r 的圆环落入磁感应强度为 B 的径向磁场中, 圆环的截面积为 A , 密度为 d , 电阻率为 ρ , 如图例 12-4(a)、(b) 所示, 如果圆环在某一时刻的速度为 v , 试求环的感应电流和环的加速度.

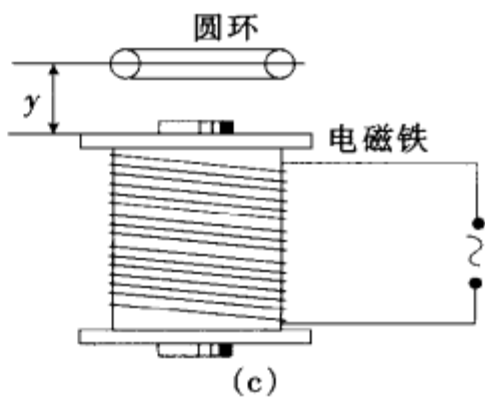


图例 12-4



图例 12-4

(2) 有一金属圆环, 它的轴垂直向上, 今将它放置在离电磁铁上方 y 距离处, 电磁铁中电流 $I = I_0 \cos \omega t$, 如图例 12-4(c) 所示, 假定 M 为在此位置的圆环和电磁铁之间的互感系数, 圆环的电阻为 R , 试求金属圆环内的感应电流, 并说明当圆环由此下落时作用于圆环的电磁力的方向



图例 12-4

解: (1) 考虑一段圆环 dl , 当速度为 v 时, 该段圆环两端的感应电动势为

$$d\epsilon = Bvdl$$

沿着圆环的切线方向, 整个圆环的感应电动势为

$$\epsilon = \sum d\epsilon = \sum Bvdl = Bv \cdot 2\pi r$$

式中 r 表示圆环的平均半径, 如图例 12-4(d) 所示.

感应电流为

$$I = \frac{\epsilon}{R} = \frac{2\pi r B v}{R}$$

式中 R 为圆环的总电阻, 忽略电感的影响.

$$R = \rho \frac{l}{A} = \rho \frac{2\pi r}{A}$$

A 为截面积, 因此

$$I = \frac{2\pi r B v}{\rho 2\pi r / A} = \frac{B v A}{\rho}$$

作用于圆环的电磁力

$$F = BIl = B \cdot \frac{B A v}{\rho} \cdot 2\pi r$$

方向向上, 与圆环向下运动的方向相反, 根据牛顿第二定律

$$mg - F = ma$$

$$a = g - \frac{F}{m} = g - \frac{B^2 2\pi r A v}{m\rho}$$

密度

$$d = \frac{m}{2\pi r A}$$

代入上式得

$$a = g - \frac{B^2 v}{\rho d}$$

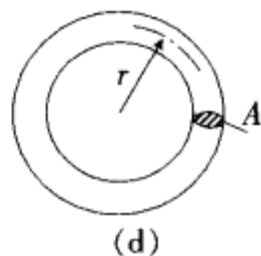
(2) 设 Φ 为通过圆环总的磁通量, 根据互感定义

$$M = \Phi / I, \quad I = I_0 \cos \omega t$$

则

$$\Phi = M I_0 \cos \omega t$$

感应电动势为



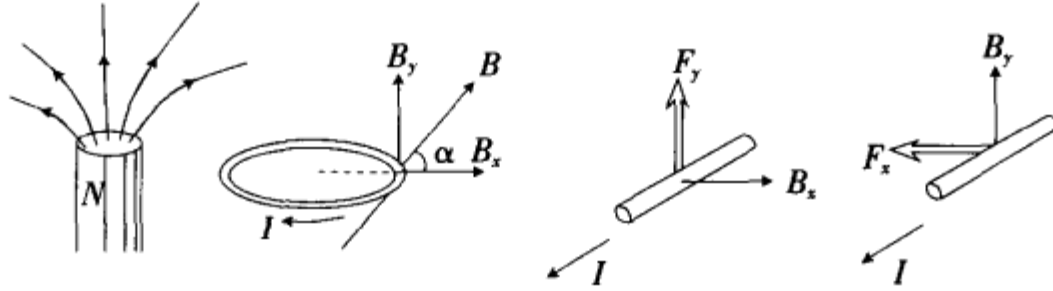
图例 12-4

$$\epsilon_1 = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(MI_0 \cos \omega t) = \omega MI_0 \sin \omega t$$

感应电流为

$$I_i = \frac{\epsilon_i}{R} = \frac{MI_0 \omega \sin \omega t}{R}$$

当圆环向电磁铁下落时,磁通量增加,感应电流如图例 12-4(e)所示.圆环在某一特殊位置时,磁感应强度 B 可分解为两个分量.



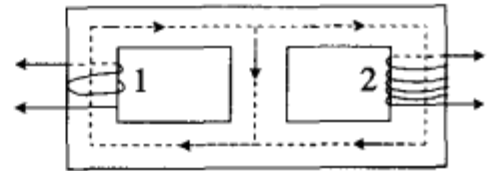
图例 12-4(e)

$$B_y = B \sin \alpha, B_x = B \cos \alpha.$$

电流 I 的方向如图(e)所示, B_y 分量产生作用于电流元的电磁力为 F_x , 方向沿圆环的半径, 根据对称性, 作用于整个圆环的 $\sum F_x$ 为零. B_x 分量产生的电磁力 F_y 方向垂直于圆环向上, 作用于圆环的合电磁力方向垂直向上, 根据楞次定律, 此力必定与圆环向下运动的方向相反.

例 12-5 在对称的铁芯上绕两个线圈, 如图例 12-5 所示, 当线圈 1 接入交流电网中时, 线圈 2 上电压 $U_2 = 13.2$ 伏; 当线圈 2 接入同一电网中时, 线圈 1 上电压 $U_1 = 120$ 伏. 求两个线圈的匝数之比. 可以认为每个线圈产生的磁通量都没有穿出铁芯.

解: 如果一个线圈产生的磁感应线全部穿过另一个线圈, 那么有 $\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2}$, 式中 N_1 和 N_2 分别是线圈 1 和 2 的匝数. 本题铁芯中只有一部分磁感应线穿过第二个线圈, 所以这个比例有所变动, 穿过这个线圈的磁通量为前一个线圈所产生的磁通量的若干分之一, 则在未接入电网的线圈里所激发的电压也是如此.



图例 12-5

在第一种情况中, 线圈 1 接入电网,

$$\frac{U_2}{U_1} = k_1 \frac{N_2}{N_1}$$

在第二种情况中, 线圈 2 接入电网

$$\frac{U_1}{U_2} = k_2 \frac{N_1}{N_2}$$

由题意, 铁芯是对称的, 因此 $k_1 = k_2$, 由上面两式有

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2^2}{N_1^2}$$

得

$$\frac{N_1}{N_2} = \sqrt{\frac{U_1}{U_2}} = \sqrt{\frac{120}{13.2}} \approx 3$$

例 12-6 一辆自行车上装有直流发电机, 它包括一个装在半径为 r 的车轮的中心轴上的永久磁铁, 和一个固定在车架上的自感系数为 L 的线圈, 穿过线圈的磁通量按照规律 $\varphi_0 \cos \omega t$ 随时间变化, ω 为车轮转动的角速度, 线圈两端接有电阻为 R 的小灯泡.

(1) 如果流经线圈的电流为 $I_0 \cos(\omega t + \theta)$, 求满足 I_0 与 θ 关系的方程, 并证明 $\tan \theta = Rr/vL$. 式中 v 为自行车的车速;

(2) 求灯泡的功率与车速 v 之间的关系, 并证明功率不会超过 $R\varphi_0^2/2L^2$.

解:(1)线圈因磁通量变化而产生的感应电动势为

$$\epsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(\Phi_0 \cos \omega t) = \omega \Phi_0 \sin \omega t$$

由于电流 $I = I_0 \cos(\omega t + \theta)$ 既经过线圈又流经小灯泡,因此有

$$\epsilon = L \frac{dI}{dt} + RI$$

即

$$\omega \Phi_0 \sin \omega t = -LI_0 \omega \sin \theta \cdot \cos \omega t - LI_0 \omega \cos \theta \sin \omega t + RI_0 \cos \theta \cos \omega t - RI_0 \sin \theta \sin \omega t$$

等式两边 $\sin \omega t$ 和 $\cos \omega t$ 的系数应分别相等,即得

$$\begin{cases} \omega \Phi_0 = -L\omega I_0 \cos \theta - RI_0 \sin \theta \\ 0 = -L\omega I_0 \sin \theta + RI_0 \cos \theta \end{cases}$$

以上两方程即为题目所要求的方程.

由第二个方程可得

$$\tan \theta = \frac{R}{\omega L}$$

自行车的速度 v 与角速度 ω 之间关系为

$$v = \omega r$$

代入上式,得

$$\tan \theta = \frac{Rr}{vL}$$

(2)灯泡的功率为(一周平均)

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T RI_0^2 \cos^2(\omega t + \theta) dt = \frac{1}{2} RI_0^2$$

电动势为

$$\epsilon = \omega \Phi_0 \sin \omega t = \epsilon_0 \sin \omega t$$

式中

$$\epsilon_0 = \omega \Phi_0$$

由于电阻两端的电压与通过电阻的电流同相位,而电感两端的电压超前电流 $\pi/2$,所以

$$I_0 = \frac{\epsilon_0}{\sqrt{R^2 + (L^2 \omega^2)}} = \frac{\omega \Phi_0}{\sqrt{R^2 + (L^2 \omega^2)}}$$

灯泡的功率为

$$P = \frac{1}{2} \frac{\omega^2 \Phi_0^2 R}{\omega^2 L^2 + R^2} = \frac{1}{2} R v^2 \Phi_0^2 (L^2 v^2 + R^2 r^2)^{-1}$$

由上式可知灯泡功率 P 随着 v 的增大而增大,但它有一极限.

$$\lim_{v \rightarrow \infty} P = \frac{R \Phi_0^2}{2L^2}$$

所以功率不会超过 $\frac{R \Phi_0^2}{2L^2}$.

本章习题

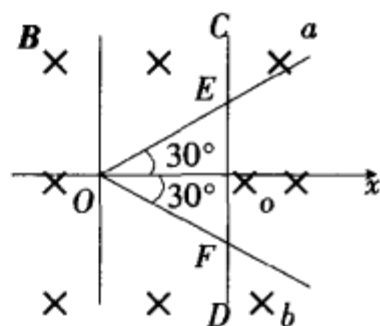
12.1 有一巨型喷气飞机,机翼长 80m,机身高 60m,高 8m,估计当飞机的时速为 720km/h 时,在下列情况下飞机表面的电势差

- (1)通过北极;
- (2)通过赤道向北;
- (3)沿着赤道向西;

(4)通过伦敦向正西北方向.

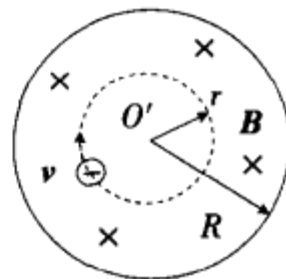
地磁场在赤道处为 $3 \times 10^{-5} \text{T}$, 在伦敦为 $5 \times 10^{-5} \text{T}$, 在北极为 $6 \times 10^{-5} \text{T}$. 伦敦的磁倾角为 66° . [提示]

12.2 如图习 12.2 所示, 在垂直于图面的空间内有一随时间均匀变化的匀强磁场, $\frac{dB}{dt} = k > 0$. (k 为常量), 磁感应强度的方向垂直于图面向里, 在图面内有三根直导线 oa 、 ob 和 CD . CD 垂直于 x 轴, oa 和 ob 都与 x 轴夹角为 30° , CD 以速度 v 向 x 轴负方向匀速滑动, 在某时刻 t , 直导线 CD 在 x 轴上的坐标为 x_0 , 磁感应强度的大小为 B_0 , 求此时由这三根导线所围成的闭合回路 $OEFO$ 中的感应电动势. [提示]



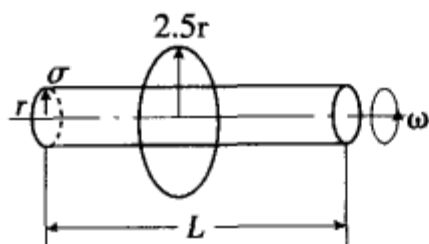
图习 12.2

12.3 如图习 12.3 所示, 设电子感应加速器的磁场是局限在半径为 R 的圆柱体区域内的均匀磁场. 一电子沿半径为 $r = 1.0 \text{m}$ 的同心轨道作圆周运动 ($r < R$), 若它每转一周动能增加 500eV , 试计算该轨道内的磁通量变化率及该轨道上各点的感生电场场强. [提示]



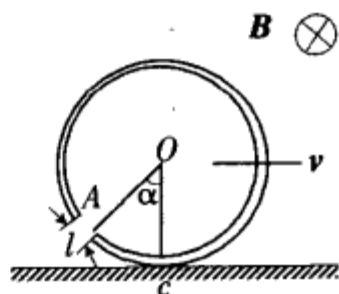
图习 12.3

12.4 如图习 12.4 所示, 在半径为 r , 长为 L ($L \gg r$) 的绝缘薄壁长圆筒表面上均匀分布着电荷面密度为 σ 的正电荷, 圆筒以角速度 $\omega = \omega_0 t$ (ω_0 为常量, t 为时间) 绕中心轴旋转, 一半径为 $2.5r$ 、电阻为 R 的单匝圆形线圈套在圆筒上, 求圆形线圈中感应电流的大小和流向. [提示]



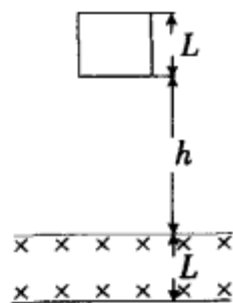
图习 12.4

12.5 如图习 12.5 所示, 在磁感应强度为 B 的均匀磁场内, 有一个细金属丝环以速度 v 作无滑动的滚动, 环上有长度为 l 的很小的缺口, 磁场方向垂直于环面, 求当角 AOC 为 α 时环上产生的感应电动势. [提示]



图习 12.5

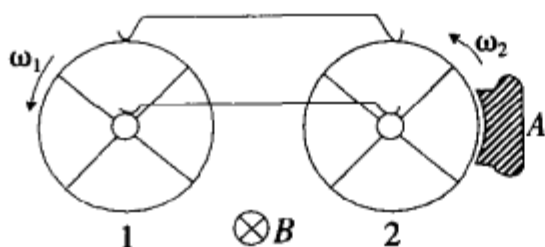
12.6 如图习 12.6 所示, 用密度为 D , 电阻率为 ρ 的导线做成正方形线框, 线框平面在竖直平面内, 从高处自由落下, 初速度为零, 有一沿水平方向的匀强磁场区域, 在竖直方向其线度与线框边长相等, 磁感应强度的大小为 B , 方向与线框平面垂直, 若要线框通过磁场区域时速度恒定, 试求线框开始下落时的高度 h (不计空气阻力) [提示]



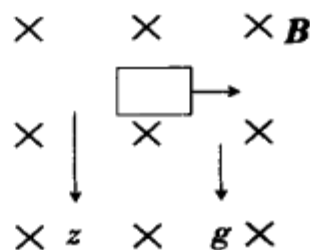
图习 12.6

(第 9 届全国中学生竞赛题)

12.7 如图习 12.7 所示, 转轮 1 和 2 的轮缘都是很薄的良导体, 每个转轮都有四根轮辐, 每条轮辐的长度都为 l , 电阻为 r , 两轮可绕各自的轮轴转动, 两轮的边缘



图习 12.7



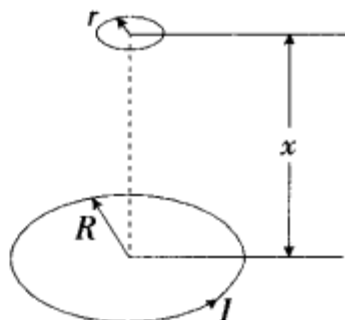
图习 12.8

通过电刷用导线连接,整个装置放在磁感应强度为 B 的均匀磁场中,磁场的方向垂直纸面向里,转轮 2 的边缘与阻力闸 A 接触,今设法使转轮 1 以恒定的角速度 ω_1 旋转,设电刷的阻力和导线的电阻都可忽略不计,设阻力闸 A 与转轮 2 之间的阻力恒为 F ,则在转轮 2 转动起来并达到稳定时,试求:

- (1) 转轮 2 的角速度 ω_2 ;
 - (2) 使转轮 1 以恒定角速度 ω_1 旋转所需的功率 P . [提示]
- (第 3 届全国中学生竞赛预赛题)

12.8 如图习 12.8 所示,一个边长为 a ,质量为 m 的金属丝方框在水平方向具有某一初速度,框在重力场中运动,并且总是位于垂直于框面的磁场中,磁感应强度按照规律 $B(z) = B_0 + kz$ 变化,式中 k 为常量,框的电阻为 R ,经过一段时间框开始以恒定速度 v 运动.试求框的水平初速度.(自由落体加速度为 g). [提示]

12.9 有两个具有相同轴线的圆形回路,小圆回路在大圆回路上方 x 处,如图习 12.9 所示.大、小回路的半径分别为 R 和 r , $x \gg R$,故当大回路中有电流 I 按图示方向流动时,小回路所围面积内的磁场可视为均匀的.设

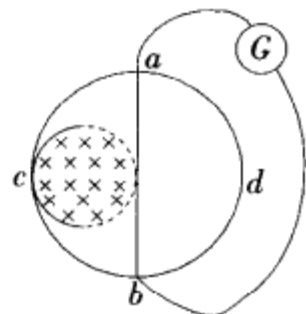


图习 12.9

大小回路的间距 x 以匀速 $v = \frac{dx}{dt} > 0$ 变化,并保持同轴.试求:

- (1) 穿过小回路的磁通量 Φ_B 和 x 之间的关系;
- (2) 当小回路离开大回路为 x 时,小回路中的感应电动势;
- (3) 确定小回路中感应电动势的方向;
- (4) 小回路离开大回路为 x 时,两回路的互感系数. [提示]

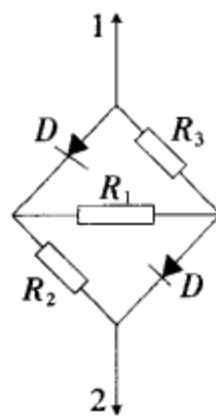
12.10 一导线围成半径为 D 的圆环 adb ,在圆环所围的区域内有一半径为 $D/2$ 的圆形区域,其周界与圆环内切于 C 点,此区域内有均匀磁场,磁感应强度 B 垂直于圆面,其指向如图习 12.10 所示.磁感应强度的变化率 $\Delta B/\Delta t = k = \text{常量}$ ($k > 0$),导线 ab 是圆环的一条直径,与有磁场分布的圆形区域的周界相切.设导线 ab 以及被其所分割成的两个半圆环的电阻都是 r ,今用一电流计 G 接在 a 、 b 两点之间,电流计位于纸面内,电流计的内阻亦为 r (连接电流计的导线的电阻忽略不计),设圆形区域外的磁场可忽略不计,试问在下列情况下,通过电流计的电流 I_0 为多少?



图习 12.10

- (1) 半圆环 acb 与 adb 都位于纸面内,并分别位于直径 ab 的两侧;
 - (2) 半圆环 adb 绕直径 ab 转过 90° ,折成与纸面垂直;
 - (3) 半圆环再绕直径转 90° ,折成与 acb 重合. [提示]
- (第 2 届全国中学生物理决赛题)

12.11 在图习 12.11 所示的交流电路中,加在 1、2 两端的电压 $V = 127$ 伏,求电阻器 R_1 上消耗的功率.各电阻器的电阻为: $R_1 = 10$ 千欧, $R_2 = R_3 = 5$ 千欧. D 是理想的二极管. [提示]

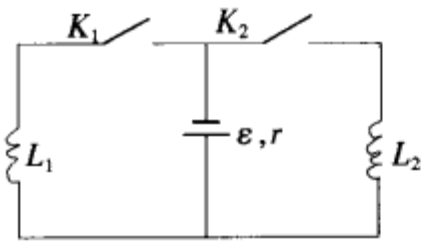


图习 12.11

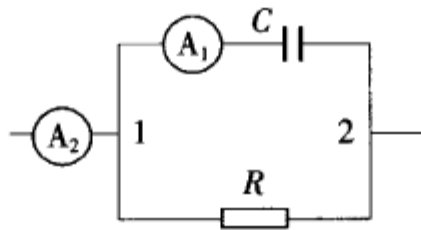
12.12 自感系数分别为 L_1 和 L_2 的两个线圈,通过电键 K_1 和 K_2 接入电动势为 ϵ 和内阻为 r 的电源上,如图习 12.12 所示,开始两个电键都断开,当电键 K_1 闭合并且通过线圈 L_1 的电流达到某个值 I_0 后,电键 K_2 闭合.求当电键 K_2 闭合后通过线圈 L_1 和 L_2 的稳定电流,线圈的电阻不计. [提示]

12.13 如图习 12.13 所示,电阻 $R = 200$ 欧的电阻器和电容 $C = 5 \times 10^{-6}$ 法的电容器并联,通过这并联电路的交流电的圆频率 $\omega = 10^3$ 弧度/秒,交流安培表 A_1 的读数 $I_1 = 1$ 安,其内阻很小,试求交流安培表 A_2 的读数. [提示]

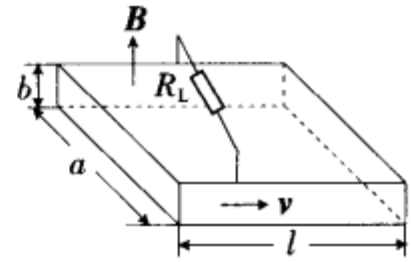
12.14 磁流体发电机的工作原理如图习 12.14 所示,横截面为矩形的管道长为 l ,宽为 a ,高为 b ,上、下两个侧面是绝缘体,相距为 a 的两个侧面是电阻可略的导体,这两个侧面与负载电阻 R_L 相连,整个管道处于匀强磁场区域, B 垂直于上、下侧面指向上,管道内沿长度方向流有电阻率为 ρ 的电离气体,



图习 12.12



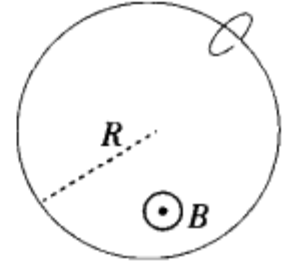
图习 12.13



图习 12.14

气体流速处处相同,所受摩擦阻力的大小与流速成正比,今在管的两端维持恒定的压强差 P ,无磁场存在时气体的流速为 v_0 ,试求有磁场存在时,此发电机的电动势 ϵ . [提示]

12.15 在半径为 R 的无限长圆柱形区域内有匀强磁场,磁场 B 的方向与圆柱的轴平行,在图习 12.15 中 B 垂直纸平面向外.将半径也是 R 的光滑绝缘细环固定在纸平面上,并正好套住磁场区,在细环上串有一个质量为 m ,电量为 q ($q > 0$) 的带电小珠.设 $t = 0$ 时,磁场 $B = 0$,小珠在环上静止, $0 < t < T$ 时, B 随时间 t 均匀地增长; $t \geq T$ 时, $B = B_0$ 不变,试定量地讨论 $t > 0$ 时小珠的运动状态及小珠对圆的正压力(沿图中小珠径向),设图中的纸平面为水平面,小珠所受重力与圆环支持力抵消. [提示]



图习 12.15

光的反射与折射

光对人类的一切活动都是至关重要的. 圣经旧约创世纪中说, 神在创世的第 1 天, 首先就创造了光. 据统计, 人类从外部世界获得的信息中, 有 90% 以上来自视觉, 即来自光. 人类对光的认识, 一直可追溯到远古时代, 并一直延续至今.

§ 13.1 光的直进性

光在均匀媒质中沿直线传播, 这一规律称为光的直线传播定律. 这可从小孔成像、物体受光照时形成与物体形状相似的影子等现象得到证明. 公元前 4 世纪, 我国墨家最早对针孔成像现象作出了正确的分析和解释: “光之人, 煦若射. 下者之人也高; 高者之人也下.” (图 13.1-1) 当物体受扩展光源照射时, 在屏上会形成本影和半影, 这一现象也可用光的直进性给予说明.

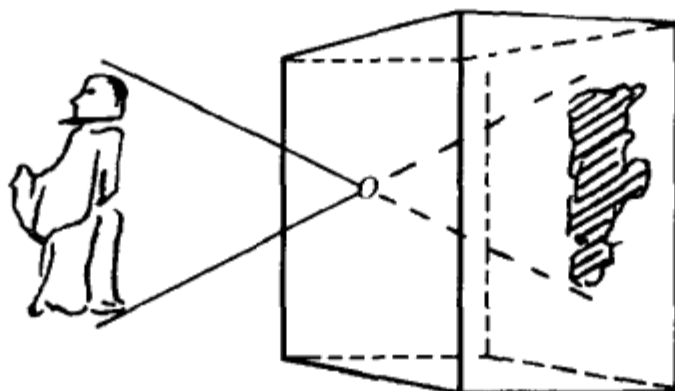


图 13.1-1 小孔成像

光的直进性是在通光孔或遮光物的线度比光的波长大得多的情况下的一种近似. 当通光孔或遮光物的线度与光的波长可以比拟时, 光的直进性不再成立, 这时在原来受不到光的地方也会有光, 这就是衍射(即绕射)现象, 我们将在第 15 章中介绍. 在本章与下一章中, 我们的讨论主要限于衍射可以忽略的情况.

例 13.1-1 太阳直径为 $D = 1.39 \times 10^6 \text{ km}$, 月球直径为 $d = 3.48 \times 10^3 \text{ km}$, 太阳与地球距离变化不大, 平均为 $L = 1.5 \times 10^8 \text{ km}$, 而月球中心与地球表面的距离在 $3.57 \times 10^5 \text{ km}$ 至 $3.90 \times 10^5 \text{ km}$ 之间变动. 试问何时有日全食, 何时有日环食?

解: 日食总是在太阳、月球、地球三者的中心成一直线, 且月球处于中间时发生(忽略黄道与白道的交角, 近似认为月球与地球在同一平面内运动), 如图 13.1-2 所示. 从该直线与地球表面的交点 E 引两条直线, 使其与月球边缘相切, 若此两直线的延长线落在太阳内, 则发生日环食(图中情形), 若落在太阳以外, 则发生日全食. 临界情况是此两直线恰好落在太阳边缘上. 设月球中心与地球表面的距离为 l , 临界时, 此距离为 l_0 , 由几何关系有

$$\frac{l_0}{L} = \frac{d}{D}$$

由此得

$$l_0 = \frac{d}{D} L = \frac{3.48 \times 10^3}{1.39 \times 10^6} \times 1.5 \times 10^8 = 3.76 \times 10^5 (\text{km})$$

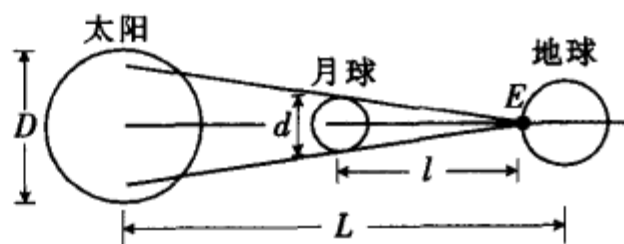


图 13.1-2 日食

所以,当 $l > l_0 = 3.76 \times 10^5 \text{ km}$ 时发生日环食,当 $l < l_0 = 3.76 \times 10^5 \text{ km}$ 时发生日全食.

§ 13.2 光的反射与折射

1. 反射定律与折射定律

当光入射到两种媒质的交界面上时,一部分光返回原媒质,一部分光透入第二种媒质.前者称为反射光,后者称为透射光或折射光.它们都将偏离原入射光的方向.

先考察光从真空射向某种媒质这一最简单情况.设真空与媒质的交界面为平面,以 MM' 表示之, NN' 为其法线,如图 13.2-1 所示.当入射光沿 AO 方向自真空射向媒质时,一部份光沿 OB 方向返回真空,一部分光沿 OC 方向进入媒质,入射光线与交界面法线构成的平面称为入射面,入射光线与法线的夹角 i 称为入射角,反射光线与法线的夹角 i' 称为反射角,折射光线与法线的夹角 r 称为折射角.实验表明,反射光仍在入射面内,且反射角等于入射角,即

$$i' = i \quad (13.2-1)$$

此结论称为反射定律.实验表明,折射光也在入射面内,且入射角的正弦与折射角的正弦之比与入射角无关,是一个只与媒质有关的常量,即

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n \quad (13.2-2)$$

其中 n 称为该媒质的折射率.此结论称为折射定律.

光作为一种波动,其反射和折射所遵循的规律——反射定律和折射定律很容易由惠更斯原理得到解释(见第 6 章),其中的折射率实际上就是光在真空中传播速度 c 与光在媒质中传播速度 v 的比值:

$$n = \frac{c}{v} \quad (13.2-3)$$

所以,对一定媒质而言, n 为一常量.同一媒质,对不同颜色(频率)的光,其折射率略有不同,这种现象称为色散.通常,折射率随光的频率增大而增大(正常色散).因而,讲到折射率,应指明是对哪种频率(或波长)的光而言的.大多数媒质在可见光范围内,折射率的变化并不大.下表列出几种媒质的折射率(对波长为 $0.5893 \mu\text{m}$ 的钠黄光而言).由表可见,折射率一般介于 1~3 之间.折射率大的媒质称为光密媒质,折射率小的则称光疏媒质.显然,真空的折射率为 1.

常见媒质折射率表

气体(0℃, 1 大气压)		液体(20℃)		固体(室温)	
材料	折射率	材料	折射率	材料	折射率
空气	1.000293	水	1.333	金刚石	2.419
氦气	1.000036	乙醇	1.361	熔石英	1.458
氢气	1.000131	甘油	1.495	冕玻璃 K ₉	1.516
二氧化碳	1.00045	加拿大树胶	1.530	重火石玻璃	1.755
		甲苯	1.495	氟化镁(MgF ₂)	1.38

当光从一种媒质(设为媒质 1)射向折射率不同的另一种媒质(设为媒质 2)时,也会发生反射和折射现象.反射光和折射光的方向仍满足反射定律和折射定律.但这时(13.2-2)式应以下式代替:

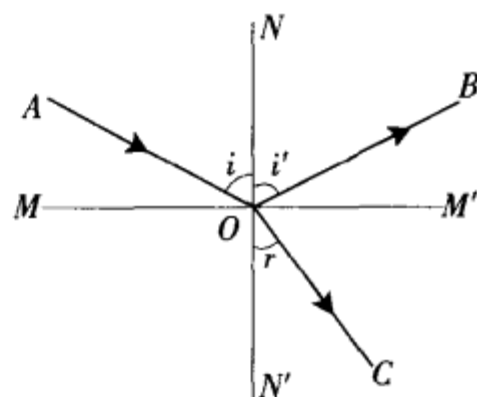


图 13.2-1 光的反射与折射

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1} \quad (13.2-4)$$

式中 n_1 为媒质 1 的折射率, n_2 为媒质 2 的折射率. 媒质 2 的折射率与媒质 1 的折射率之比称为媒质 2 对媒质 1 的相对折射率, 用 n_{12} 表示:

$$n_{12} = \frac{n_2}{n_1} \quad (13.2-5)$$

不难看出,

$$n_{12} = \frac{v_1}{v_2} \quad (13.2-6)$$

其中 v_1, v_2 分别表示光在媒质 1, 2 中的传播速度. 这样, (13.2-4) 式也可写成

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n_{12} \quad (13.2-7)$$

2. 全反射

当光从光密媒质射向光疏媒质时, 由折射定律, 折射角将大于入射角. 由 (13.2-4) 式, 当入射角增大至某一值

$$i_c = \sin^{-1} \left(\frac{n_2}{n_1} \right) \quad (13.2-8)$$

时, 折射角 $r = 90^\circ$, 当入射角大于 i_c 时, 折射光消失, 光全部被反射. 这种现象称为全反射, i_c 称为临界角.

临界角因相对折射率而异. 当光从水射向空气时, 临界角 $i_c = \sin^{-1} \frac{3}{4} \approx 49^\circ$, 当光从玻璃射向空气时, 临界角 $i_c = \sin^{-1} \frac{1}{1.5} = 42^\circ \sim \sin^{-1} \frac{1}{2} = 30^\circ$, 当光从金刚石射向空气时, 临界角 $i_c = \sin^{-1} \frac{1}{2.42} = 24^\circ$.

全反射现象可增强反射光的强度, 减少光因透射造成的能量损失, 广泛应用于全反射棱镜、光导纤维等光学仪器中.

3. 光路可逆性原理

由反射定律和折射定律可知, 若光逆着反射光方向入射, 则其反射光必沿着入射光原路的反方向传播; 当光逆着折射光方向由媒质 2 射向媒质 1, 则折射光也必沿着原入射光路的反方向传播. 也就是说, 若光线方向逆转, 光将沿同一路径反向传播. 这一结论称为光路可逆性原理.

4. 棱镜与色散

棱镜是由透明材料(如玻璃)制成的棱柱体, 截面是三角形的棱镜叫三棱镜, 与棱边垂直的平面叫棱镜的主截面. 棱镜可使光发生偏折, 由于色散, 不同波长的光偏折的情况也不同; 一束白光经棱镜折射后, 不同波长的光将沿不同的方向出射, 形成彩色光谱. 因而棱镜可制成摄谱仪, 分析光源的频率分布.

现以三棱镜为例, 来分析棱镜对光的偏折. 图 13.2-2 中 $\triangle ABC$ 表示三棱镜的主截面, 顶角为 A . 沿主截面入射的光线 DE 经界面 AB 折射后成光线 EF , 再经界面 AC 折射后成光线 FG . 光经两次折射后传播方向从 DE 变为 FG , DE 的延长线和 FG 的延长线的夹角称为偏向角, 用 δ 表示. 用 i_1 和 i_2 表示光在界面 AB 上的入射角和折射角, i_2' 和 i_1' 表示光在界面 AC 上的入射角和折射角, 由图不难看出

$$\begin{aligned} \delta &= (i_1 - i_2) + (i_1' - i_2') \\ &= (i_1 + i_1') - (i_2 + i_2') \end{aligned}$$

而 $i_2 + i_2' = A$

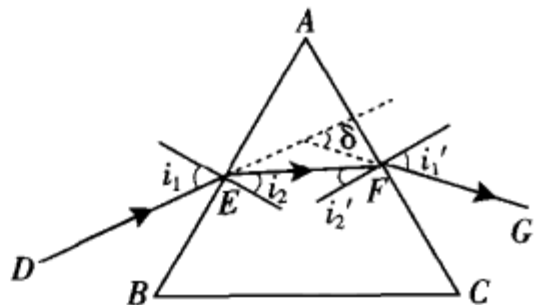


图 13.2-2 三棱镜对光的偏折

所以

$$\delta = (i_1 + i_1') - A \quad (13.2-9)$$

上式表明在 A 一定的情况下,偏向角 δ 随入射角 i_1 而变.图 13.2-3 对一块具体的棱镜画出了 δ 随 i_1 而变的曲线.可以证明,当光路成对称情形,即当

$$i_1 = i_1'$$

(这时必有 $i_2 = i_2'$)时, δ 有极小值 δ_m ,称为最小偏向角.这时, $i_2 = i_2'$
 $= \frac{A}{2}$, $\delta_m = 2i_1 - A$, 而 $\sin i_1 = n \sin i_2$, 于是有

$$n = \frac{\sin \frac{\delta_m + A}{2}}{\sin \frac{A}{2}} \quad (13.2-10)$$

因而,只要用实验测出 δ_m ,在 A 已知情况下,可用上式计算出棱镜材料的折射率 n .

对一定的人射角,偏向角与折射率 n 有关.当一束白光以一定角度入射时,由于色散,不同颜色的光将沿不同方向出射,如图 13.2-4 所示.这就是棱镜分光的原理.

在讲述了光的直进性、光的反射、折射和色散现象及其规律后,简单回顾一下人类对光的传播及其规律认识的历史,也许是有益的.

人类对反射现象的观察和应用可追溯到二千年之前.据《周礼·考工记》记载,我国周朝已经会用“金燧”(铜凹面镜)取火;先秦时代的《墨经》中,除有上文提及的对小孔成象的记载外,还有关于平面镜、凹面镜和凸面镜反射成象的系统而完整的记载.但对反射定律的明确表述,却要归功于欧几里得和他的著作《反射光学》(公元前 300 年).和反射定律相比,光的折射定律的发现要晚得多.尽管人类对折射现象

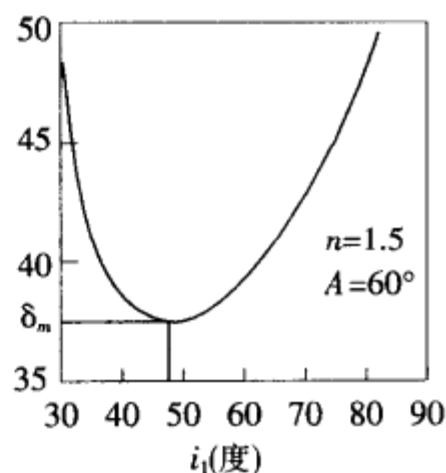


图 13.2-3 偏向角 δ 对入射角 i_1 的变化曲线

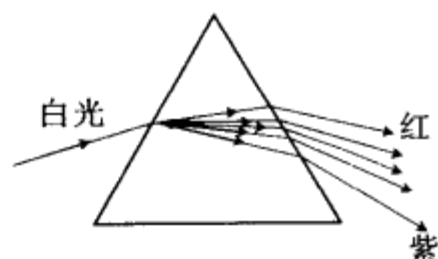


图 13.2-4 棱镜的色散

的观察也可追溯到二千年前,但对光的折射规律的研究一直延续了数百年,其间有托勒密、罗吉尔·培根、伽利略和开普勒等人的工作,但折射定律的正确表述则是由荷兰的斯涅耳在 1621 年从实验得到的,比反射定律的发现几乎晚了二千年.所以,(13.2-2)式表述的折射定律又称为斯涅耳定律.开普勒虽然没能发现正确的折射定律,但他得到了折射定律在小角下的近似(这时折射角与入射角成正比),还发现了全反射.为了解释这些规律的机理,牛顿提出了微粒说,惠更斯则提出了波动说,在此之前,费马则提出了最短时间原理,这些学说都从不同侧面加深了人类对光的本性及其行为的认识.至于色散现象,我国早在唐代就已有“日照雨滴则虹生”的记载,北宋则有“菩萨石”(即石英)“日光射之有五色”的记载.17 世纪欧洲有些科学家用棱镜对色散现象作了一些观察,但首次明确对色散进行研究的应推牛顿.牛顿在 1672 年向皇家学会提出的一篇文章中,正确指出白光是由不同颜色的光混合而成的,折射过程与颜色有关.他用三棱镜折射展示日光色带的实验是大家所熟知的.

例 13.2-1 两平面镜 1,2 夹角 α ,光沿垂直于其交线的平面入射,依次经 1,2 两镜面反射,求入射光与反射光的偏向角 δ .

解:如图 13.2-5 所示,入射光 AB 经镜面 1 反射后成光线 BC ,再经镜面 2 反射后成光线 CD ,所求偏向角

$$\delta = \angle EBC + \angle ECB = 2(\angle OBC + \angle OCB) = 2\alpha$$

此结果与入射光的方向无关,只要入射光依次经两镜面反射.对于互相垂直的两平面镜, $\alpha = 90^\circ$,则 $\delta = 180^\circ$,即反射光与入射光反向.

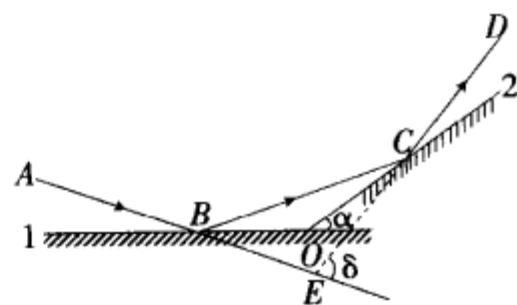


图 13.2-5

例 13.2-2 光导纤维(简称光纤)由折射率为 n_1 的玻璃芯和折射率为 n_2 ($n_2 < n_1$) 的同轴外套构成,它可将从其横截端面入射的光无能量损失地沿光纤传播.光导纤维过轴线的截面图如图 13.2-6 所示.设外部媒质的折射率为 n ,求能使从端面外入射的光无损

失地沿光导纤维传播的最大孔径角 i_1 ,并说明外套的作用.

解:只要使从端面入射的光在玻璃芯与外套的交界面上发生全反射,即可使光无损失地沿光纤传播.设光在端面外以最大孔径角 i_1 入射,经端面折射后的折射角为 r ,在芯与外套交界面上的入射角为 i_2 ,如图所示,则由折射定律有

$$\frac{\sin i_1}{\sin r} = \frac{n_1}{n} \quad (1)$$

由几何关系

$$\sin i_2 = \cos r \quad (2)$$

为使光在芯与外套交界面上发生全反射,应有

$$\sin i_2 = \frac{n_2}{n_1} \quad (3)$$

由①,

$$\sin r = \frac{n}{n_1} \sin i_1$$

由此及②,

$$\cos r = \sqrt{1 - \frac{n^2}{n_1^2} \sin^2 i_1} = \sin i_2$$

代入③

$$\sqrt{1 - \frac{n^2}{n_1^2} \sin^2 i_1} = \frac{n_2}{n_1}$$

由此解得

$$\sin i_1 = \frac{1}{n} \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad (4)$$

$$n \sin i_1 = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad (5)$$

$n \sin i_1$ 常称为光纤的数值孔径,它是光纤性能的一种标识.

外套的作用是保护玻璃芯,避免其受到磨损.因为一旦玻璃芯表面磨损,表面不再光洁,射到表面的光将不再满足全反射条件,大量光将从表面射出,使光能量流失,光纤的作用不复存在.

例 13.2-3 利用光路可逆性原理证明:光线对棱镜的偏向角在光线相对于棱镜对称时取极值.

解:作对称光路 $1-1'$,其偏向角为 δ_1 ,如图13.2-7所示.在光路 $1-1'$ 附近作另一光路 $2-2'$,使光线2的入射角比光线1略增大.再作与 $2-2'$ 对称的光路 $3'-3$;由光路可逆原理知,当光沿3入射时,将沿 $3'$ 射出.光线3的入射角则比光线1略减小.由于光路 $2-2'$ 和 $3'-3$ 对称, $2-2'$ 和 $3-3'$ 的偏向角 δ_2 和 δ_3 必相等: $\delta_2 = \delta_3$.而光线2和3的入射角分别比光线1增大和减小,由此可知光路 $1-1'$ 的偏向角 δ_1 必取极值.若 $\delta_2 = \delta_3 > \delta_1$, δ_1 取极小值;若 $\delta_2 = \delta_3 < \delta_1$, δ_1 取极大值.(进一步讨论证明, δ_1 取极小值,见例13-6).

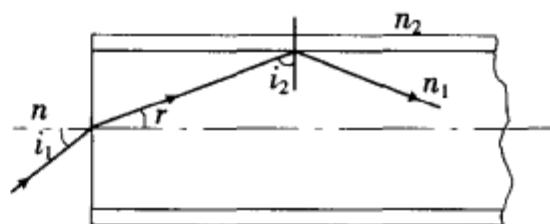


图 13.2-6 光导纤维

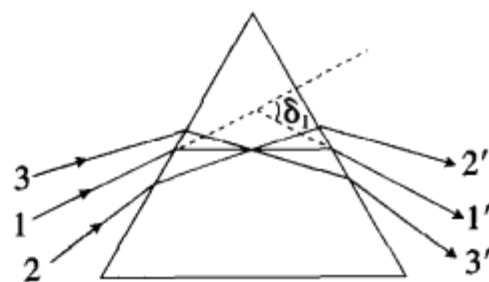


图 13.2-7 棱镜的最小偏向角

§ 13.3 费马原理

1. 费马原理

光的直线传播定律、反射定律和折射定律这三个实验定律是几何光学的基础.这三个定律可由光的波动性而由惠更斯原理得到解释(顺便指出,用光的微粒说也能解释这三个定律,但由微粒说解释折射定律时必须假定光在折射率较大的媒质中传播速度较快,而这与实验不符).1679年,法国科学家费马(P. Fermat)则将它们概括为一个统一的原理,称为费马原理.现在,费马原理可表述如下:光线在两点间的实际路径是使所需的传播时间为极值的路径.在大部分情况下,此极值为极小值,但有时为极大值,有时为恒定值.

设光从 P 点沿路径 L 行进至 Q 点, 在路径的微元 Δl_i 上所需时间 $\Delta t_i = \frac{\Delta l_i}{v_i}$, 其中 v_i 为光在该段元路径上的传播速度, 则从 P 点至 Q 点所需总时间为

$$t = \sum_i \Delta t_i = \sum_i \frac{\Delta l_i}{v_i} = \int_{(L)P}^Q \frac{dl}{v} \quad (13.3-1)$$

费马原理要求在 P 点至 Q 点的所有路径中, 光的实际路径是使上述积分取极值. 但 $v_i = \frac{c}{n_i}$, 代入上式得

$$t = \sum \Delta t_i = \sum \frac{\Delta l_i}{c/n_i} = \sum \frac{n_i \Delta l_i}{c} = \int_{(L)P}^Q \frac{ndl}{c}$$

由于 $c = \text{常量}$, 上式又可写成

$$t = \frac{1}{c} \sum n_i \Delta l_i = \frac{1}{c} \int_{(L)P}^Q n dl \quad (13.3-2)$$

折射率与路径长的乘积称为光程, 上式中的积分就是从 P 点沿路径 L 至 Q 点的光程. 上式将时间化为了光程. 于是费马原理又可表述为: 光线在两点之间的实际路径, 是使光程为极值的路径. 用微积分语言来说, 某函数 $y = f(x)$ 在某处取极值, 是指它的一阶微分为零, 即 $dy = \frac{dy}{dx} \cdot dx = 0$. 这里函数可以有极小值(这时 $d^2y > 0$), 也可以有极大值(这时 $d^2y < 0$), 还可有其他情况(如拐点, 常数等). 在费马原理中的极值与此相仿, 但它所指的是当光线的路径偏离实际路径少许时, 其光程的改变为零, 记为

$$\delta \int_{(L)P}^Q n dl = 0$$

这里“ δ ”表示对路径“ L ”的偏离.

2. 由费马原理推导几何光学三定律

由费马原理可以导出几何光学三定律.

在均匀媒质中光的直线传播定律是费马原理的显然推论, 不必赘述. 下面讨论如何由费马原理导出反射定律和折射定律.

先看反射定律. 设光由 P 点经反射面 MM' 到达 Q 点, 如图 13.3-1 所示. 找出 P 点相对于平面 MM' 的对称点 P' , 从 P 点经平面 MM' 上任一点 R 到达 Q 点的路径 PRQ 的长度与路径 $P'RQ$ 的长度相等. 显然, 在所有可能的路径中, 以直线路径 $P'RQ$ 的长度为最短, 根据费马原理, PRQ 为光线的实际路径. 由对称性不难看出, 此路径满足反射定律, 而有 $i = i'$, 即反射角等于入射角.

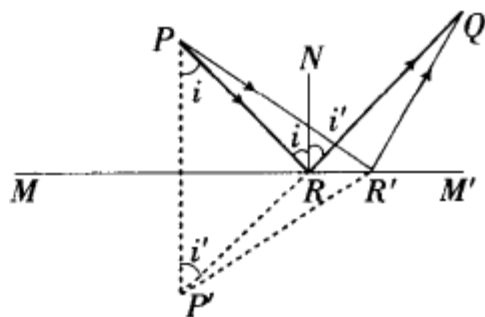


图 13.3-1
由费马原理推导反射定律

再看折射定律. 设光从媒质 1 中 P 点经两种媒质的交界面 MM' 到达媒质 2 中的 Q 点, 如图 13.3-2 所示, 这里图面即为过 P, Q 而又垂直于 MM' 的平面(即入射面). 设光从 P 点到 Q 点的某条路径为 PDQ , 只要使 PDQ 的光程为极值, 根据费马原理, PDQ 即为实际路径. 由此, D 点必在图面上. 为使 PDQ 的光程为极值, 只要使其十分邻近的路径 $PD'Q$ 的光程与 PDQ 的光程几乎相等即可. 由 D 点向 $D'Q$ 作垂线 DD_2 , 由 D' 点向 PD 作垂线 $D'D_1$, PD' 的光程比 PD 的光程减小了 $n_1 \overline{D_1D}$, 而 $D'Q$ 的光程比 DQ 的光程增加了 $n_2 \overline{D'D_2}$, 其中 n_1 和 n_2 分别为媒质 1 和 2 的折射率, 而 $\overline{D_1D} = \overline{D'D} \sin i$, $\overline{D'D_2} = \overline{D'D} \sin r$, 其中 i 和 r 分别为 PD 和 DQ 与 MM' 的法线 NN' 的夹角. 令 $n_1 \overline{D_1D} = n_2 \overline{D'D_2}$, 即

$$n_1 \overline{D'D} \sin i = n_2 \overline{D'D} \sin r$$

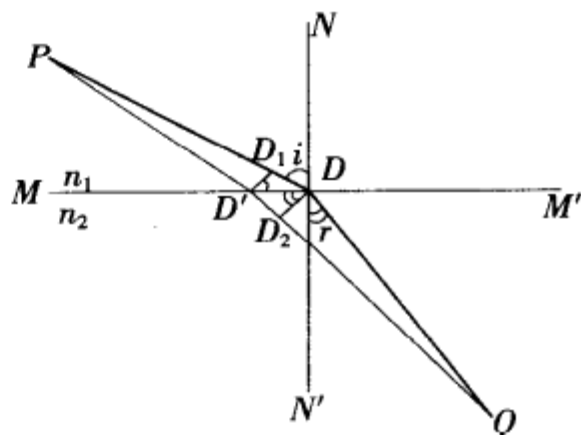


图 13.3-2 由费马原理推导折射定律

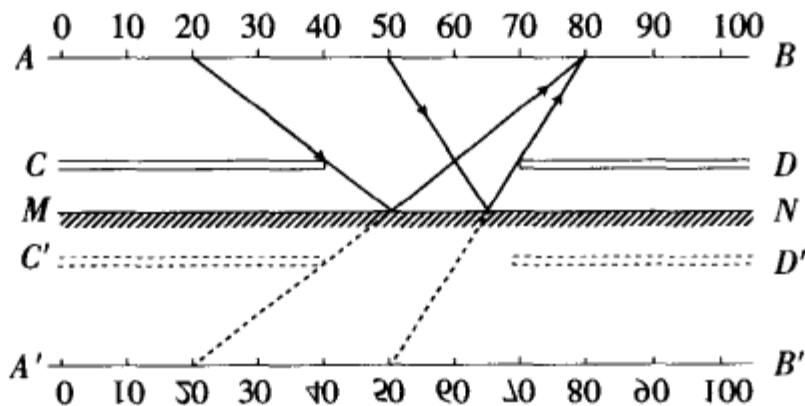
即得

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r$$

此即折射定律. 可见, 根据费马原理, 光的实际路径满足折射定律.

本章综合例题

例 13-1 一支米尺 AB 置于平面镜 MN 前 30cm 处, 在平面镜前 10cm 处放有一块挡板 CD , 档板上开有宽为 30cm 的缝, 缝的边缘与米尺垂直, 边缘至米尺的垂线与米尺分别交于 40cm 和 70cm 两刻线处, 如图所示. 一人使眼睛位于米尺的 80cm 刻度处, 当他向镜中米尺的像观察时, 他能看到的米尺范围是什么?



图例 13-1 镜中的米尺

解: 米尺和挡板经平面镜反射将分别成像于 $A'B'$ 和 $C'D'$ 处, 如图所示. 从米尺的 80cm 刻度处分别向挡板边缘或其像引直线, 只要此直线不被挡板或其像挡住, 它们的延长线与米尺的像的交点, 即为他能看到的米尺范围的边界. 由光路可逆性原理, 从米尺上对应点发出的光将进入人眼. 由图不难看出, 此范围为 $20\sim 50\text{cm}$. 图上带箭头的直线即表示从米尺上 20cm 和 50cm 刻线至人眼的光线.

例 13-2 将表面镀银的玻璃立方体沿三相邻面对角线构成的平面切下一角, 得到一直角四面体棱镜, 如图所示. 证明从切面(未镀银)射入的光线经其他三镀银面反射后, 出射光线的方向总是与入射光线的方向相反. 这样的棱镜可以在什么场合下应用?

解: 取棱镜的直角顶 O 为坐标原点, 三条直角棱为坐标轴 x, y, z , 如图所示. 用 r 表示入射光经切面折射后的光线矢量, 它可以表为

$$r = xi + yj + zk$$

经面法线为 i 的面反射后, 只有该方向的分矢量反向, 其余分量不变, 而成

$$r_1 = -xi + yj + zk$$

再经面法线为 j, k 的面依次反射后, 得

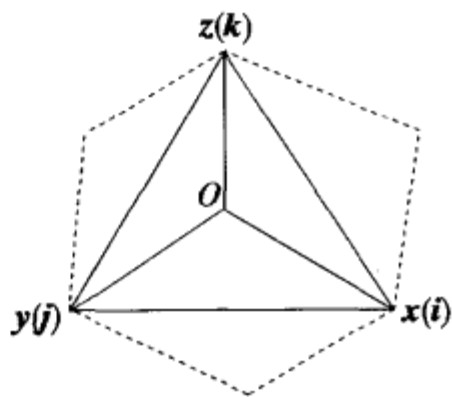
$$r_2 = -xi - yj + zk$$

$$r_3 = -xi + yj - zk = -r$$

再经切面折射后, 出射光与原入射光方向相反, 得证. 显然, 此结果与各面反射的次序无关, 也与入射光的方向无关(只要保证其有三次反射). 这种棱镜可用来使光线反向. 由于这种反向作用与入射方向无关, 故棱镜的少许转动, 不会改变出射光的方向和路径(只要保持锥顶不动).

例 13-3 在水面下深为 h 处有一发光点 P , 该发光点发出的光经水面折射后能否成一点像? 试讨论之, 设水的折射率为 $n \approx \frac{4}{3}$.

解: 由 P 点作水面的垂线, 垂足为 O , 考察从 P 发出的某一条光线 PM (如图例 13-3a), 该光线的人射角为 i , 折射角为 r , 由折射定律,



图例 13-2 直角四面体棱镜

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{1}{n}$$

设折射光线与 PO 相交于 P' , 则 P' 与水面距离

$$\begin{aligned} h' &= \overline{OM} \cdot \tan r = h \tan i / \tan r \\ &= h \frac{\sin i \cos r}{\cos i \sin r} = h \frac{\sqrt{1-n^2 \sin^2 i}}{n \cos i} \end{aligned} \quad (1)$$

上式表明 h' 与入射角 i 有关. 这就是说, 由 P 发出的不同方向的光线, 折射后的延长线不再交于同一点, 因而不能成一点像. 但对于接近于正入射的光线 ($i \approx 0$), 若忽略二级以上小量, 则 $\sin^2 i \approx 0$, $\cos i \approx 1$, 我们有

$$h' \approx \frac{h}{n} \quad (2)$$

这时 h' 与入射角 i 无关, 即在 P 点的正上方看 (这时进入眼睛的所有光线均有 $i \approx 0$), P 点成像于一点, 该点的深度为原发光点深度的 $\frac{1}{n} \approx \frac{3}{4}$.

当眼睛对着以折射角 r 出射的光束看时, P 点的成像情况还要复杂. 由于眼睛瞳孔有一定大小, 进入眼睛的光束的方向并不是单一的, 其折射角介于 r 至 $r + \Delta r$ 之间 (对应于入射角介于 i 至 $i + \Delta i$ 之间); 即使对同一折射角, 光束也以 PO 为轴展开一小的方位角 $\Delta \varphi$. 对折射角都是 r , 方位角不同的光线, 它们的延长线显然交于同一点 P' ; 但对折射角为 r 和 $r + \Delta r$ 的两条光线 (及折射角介于 r 至 $r + \Delta r$ 之间的所有光线) 的延长线, 则并不交于 P' , 而交于前方的 P'' . 如图所示. 于是, 进入眼睛的光束的延长线将形成互相垂直的两条焦线, 一条为位于 PO 轴上的 $P'P_1'$, 称为弧矢焦线, 一条为位于 P'' 处而垂直于纸面的线, 称为子午焦线, 如图例 13-3b 所示. 这种现象称为像散.

例 13-4 光线在玻璃半圆柱体主截面内以 45° 角射到其平面上, 如图例 13-4 所示. 已知玻璃的折射率 $n = \sqrt{2}$, 试问光线将在何处离开半圆柱体的圆柱形表面射出?

解: 设光经平面折射后的折射角为 β , 由折射定律, 有

$$\begin{aligned} \frac{\sin 45^\circ}{\sin \beta} &= \sqrt{2} \\ \sin \beta &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \\ \beta &= 30^\circ \end{aligned}$$

光经平面折射后, 折射角均为 30° , 但光射到圆柱面上的位置不同, 入射角也不同, 只有在圆柱面上不发生全反射的光才能从圆柱面射出.

以 φ 角表示光射到圆柱面上的位置, 由图, 光在圆柱面上的入射角

$$i = 180^\circ - (90^\circ - \beta) - \varphi = 120^\circ - \varphi$$

从玻璃到空气的临界角

$$i_c = \sin^{-1} \frac{1}{n} = \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} = 45^\circ$$

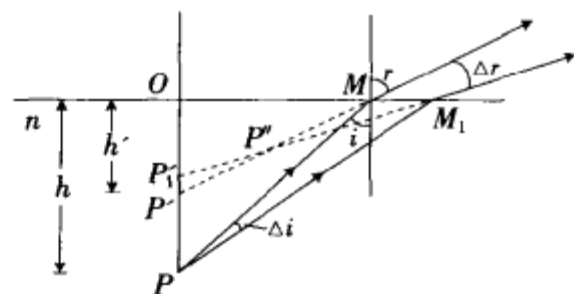
于是, 只有当

$$\begin{aligned} -45^\circ &< 120^\circ - \varphi < 45^\circ \\ 75^\circ &< \varphi < 165^\circ \end{aligned}$$

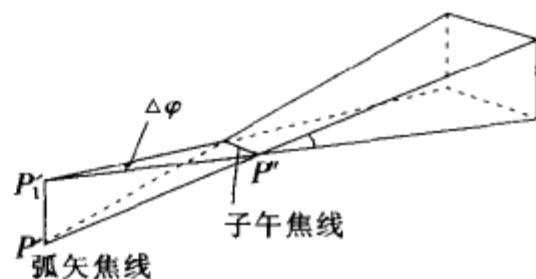
即

时, 光才可从圆柱面射出.

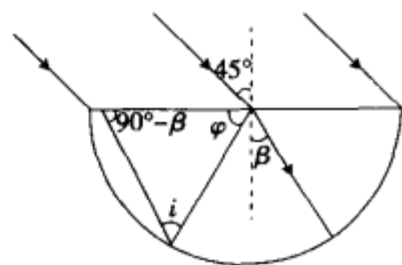
例 13-5 阿米西棱镜由两个对称放置的相同棱镜和中间一个棱镜组合而成, 其主截面如图例



图例 13-3a 水中发光点



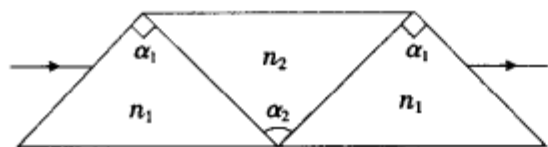
图例 13-3b 象散光束



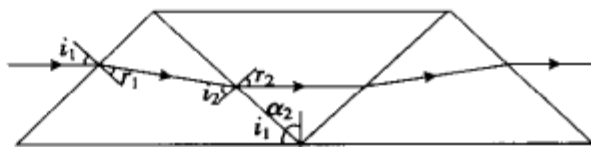
图例 13-4

13-5a 所示. 对于 $\alpha_1 = 90^\circ$ 的情况, 为使平行底面入射的光不发生偏折和位移地出射, α_2 应等于多少? 折射率 n_1 和 n_2 为已知 ($n_2 > n_1$).

解: 由对称性, 光经中间棱镜时必与底面平行, 如图例 13-5b 所示. 于是, $r_2 = \frac{\alpha_2}{2}$, 由折射定律,



图例 13-5a 阿米西棱镜



图例 13-5b 通过阿米西棱镜的光路

$$\frac{\sin i_2}{\sin \alpha_2 / 2} = \frac{n_2}{n_1} \quad (1)$$

同理,

$$\frac{\sin i_1}{\sin r_1} = n_1 \quad (2)$$

但

$$r_1 = \frac{\pi}{2} - i_2, i_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha_2}{2}$$

代入②式得

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha_2}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - i_2\right)} = n_1$$

即

$$\frac{\cos \frac{\alpha_2}{2}}{\cos i_2} = n_1 \quad (3)$$

由①式得

$$\sin i_2 = \frac{n_2}{n_1} \sin \frac{\alpha_2}{2} \quad (4)$$

由③式得

$$\sin i_2 = \sqrt{1 - \frac{1}{n_1^2} \cos^2 \frac{\alpha_2}{2}} \quad (5)$$

由④、⑤式得

$$\frac{n_2^2}{n_1^2} \sin^2 \frac{\alpha_2}{2} = 1 - \frac{1}{n_1^2} \cos^2 \frac{\alpha_2}{2}$$

由此解得

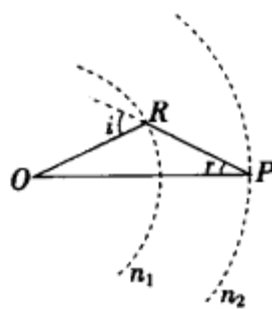
$$\sin \frac{\alpha_2}{2} = \sqrt{\frac{n_1^2 - 1}{n_2^2 - 1}}$$

$$\alpha_2 = 2 \sin^{-1} \sqrt{\frac{n_1^2 - 1}{n_2^2 - 1}}$$

或

$$\alpha_2 = 2 \cos^{-1} \sqrt{\frac{n_2^2 - n_1^2}{n_2^2 - 1}} = 2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{n_1^2 - 1}{n_2^2 - n_1^2}}$$

例 13-6 (1) 图例 13-6a 表示求折射光线方向的追迹作图法. 以 O 为圆心画两个同心圆弧, 使它们的半径分别与入射介质 1 和折射介质 2 的折射率 n_1, n_2 ($n_2 > n_1$) 成正比, 作 OR 平行于入射光线, 作 RP 平行于两种介质交界的法线, 则 OP 即为折射光线的方向. 试论证此法的依据. (2) 试用追迹作图法求棱镜偏向角, 并证明最小偏向角与对称光路相对应.



图例 13-6a 追迹作图法

解: (1) 由题意, OR 与 RP 延长线的夹角即为入射角 i , 而 RP 与 OP 的夹角

即为折射角 r . 在 $\triangle ORP$ 中应用正弦定理:

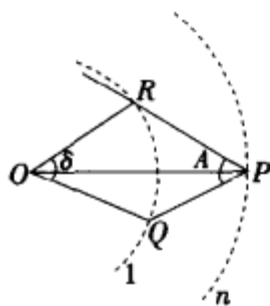
$$\frac{\sin i}{OP} = \frac{\sin r}{OR}$$

得

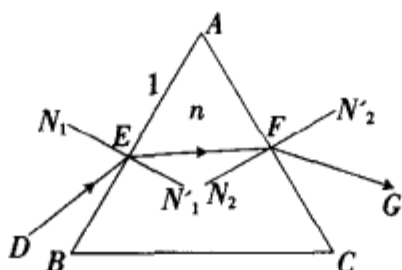
$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{OP}{OR} = \frac{n_2}{n_1}$$

得证.

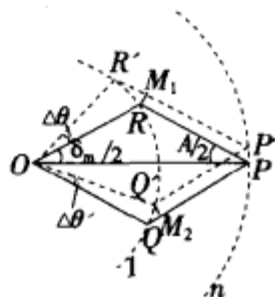
(2) 设棱镜折射率为 n , 顶角为 A , 放在空气中, 如图例 13-6c 所示. 以 O 为圆心作同心圆弧, 使它们半径之比为 n , 如图例 13-6b 所示. 作 OR 平行于入射光线 DE , 作 RP 平行于交界面 AB 的法线 N_1N_1' , 连接 OP , 即为折射光线 EF 的方向. 作 PQ 平行于交界面 AC 的法线 N_2N_2' , 连接 OQ , 即为出射光 FG 的方向. $\angle ROQ$ 即为偏向角. 不难看出, $\angle RPQ$ 即为棱镜的顶角 A .



图例 13-6b



图例 13-6c



图例 13-6d 证明
对称光路时 δ 为极小值

在对称光路情况下, 对应的追迹光路如图例 13-6d 所示, 这时 OP 与棱镜底面平行(沿水平方向), 入射光 OR 和出射光 OQ 对称地位于 OP 的上下两边, $\angle ROP = \angle QOP = \delta_m/2$, $\angle RPO = \angle QPO = A/2$. 如果入射角增加一小量 $\Delta\theta$, 使入射光成 OR' , 对应的出射光可由作图法求出, 为 OQ' , 使出射角减少一小量 $\Delta\theta'$. 为比较 $\Delta\theta$ 与 $\Delta\theta'$ 的大小, 只要比较对应的弧 $\widehat{RR'}$ 和 $\widehat{QQ'}$ 或弦 $\overline{RR'}$ 和 $\overline{QQ'}$ 即可. 从 R 作 $RM_1 \perp RP$, 从 Q' 作 $Q'M_2 \perp PQ$, 显然, $RM_1 = PP' \cos \frac{\alpha}{2} = Q'M_2$. 由几何关系不难看出 $\angle R'RM_1$ 大于 $\angle QQ'M_2$,

$$\widehat{R'R} \approx \overline{R'R} = \frac{RM_1}{\cos \angle R'RM_1} > \frac{Q'M_2}{\cos \angle QQ'M_2} = \overline{Q'Q} \approx \widehat{Q'Q}$$

即

$$\Delta\theta > \Delta\theta'$$

亦即现在的偏向角 $\delta = \angle R'OQ' > \angle ROQ = \delta_m$, 所以 δ_m 为极小值.

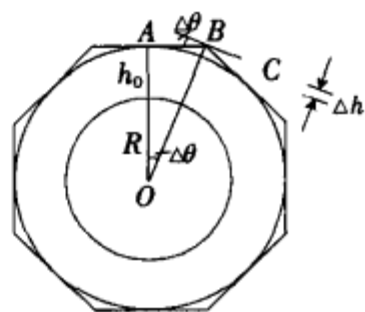
例 13-7 某行星上大气的折射率 n 随着离表面高度 h 的增大而线性减小, 即 $n = n_0 - ah$, 行星的半径为 R , 行星表面某一高度处有一光波道, 它始终在恒定的高度, 光线沿光波道环绕行星传播. 试求此恒定高度 h_0 . (这种现象称为圆折射, 在金星的大气中可观察到)

解: 可将光沿圆形光波道的传播近似看成是沿多边形光波道的传播, 当多边形的边数非常多时, 就与圆无异. 此情形如图例 13-7 所示(图中为简单起见, 只画了八个边). 光在多边形上的每一次弯折, 都可看成光从光密媒质至光疏媒质交界面的全反射. 如图, 当光线从 A 射到 B 点时, 犹如从 (A 处) 折射率较大的光密媒质射到 (B 处) 折射率较小的光疏媒质的交界面, 于是发生全反射. 光在 B 处入射角即该处的全反射角为 $\angle ABO$, 由折射定律有

$$\sin \angle ABO = \frac{n_B}{n_A}$$

① 图例 13-7 光波道

设 A 点的高度为 h_0 , B 点高度为 $h_0 + \Delta h$, 则 $n_A = n_0 - ah_0$, $n_B = n_0 - a(h_0 + \Delta h)$, 代入上式, 得



$$\sin \angle ABO = \frac{n_0 - ah_0 - \alpha \Delta h}{n_0 - ah_0} \quad (2)$$

但由几何关系,

$$\sin \angle ABO = \frac{R + h_0}{R + h_0 + \Delta h} \quad (3)$$

代入②式得

$$(R + h_0)(n_0 - ah_0) = (R + h_0 + \Delta h)(n_0 - ah_0 - \alpha \Delta h)$$

略去二级小量,化简得

$$\Delta h(n_0 - ah_0) - \alpha \Delta h(R + h_0) = 0$$

即

$$\alpha(R + h_0) = n_0 - ah_0$$

由此解得

$$h_0 = \frac{n_0}{2\alpha} - \frac{R}{2}$$

以上我们是用折射定律求解.其实可用费马原理来解本题,将更简洁.当光沿高度为 h 的圆轨道传播时,其光程是 $\Delta = 2\pi(R + h) \cdot n(h) = 2\pi(n_0 - ah)(R + h)$,如果它是光的实际行进路径,它的光程应取极值,即 Δ 作为 h 的函数应取极值.将 Δ 表式展开,可得

$$\begin{aligned} \Delta &= 2\pi(n_0 - ah)(R + h) = 2\pi(Rn_0 - aRh + n_0h - ah^2) \\ &= 2\pi(-\alpha) \left[h^2 + \left(R - \frac{n_0}{\alpha} \right) h - \frac{1}{\alpha} Rn_0 \right] \\ &= 2\pi(-\alpha) \left\{ \left[h^2 - \left(\frac{n_0}{2\alpha} - \frac{R}{2} \right) \right]^2 - \left(\frac{n_0}{2\alpha} - \frac{R}{2} \right)^2 - \frac{1}{\alpha} Rn_0 \right\} \end{aligned}$$

可见当 $h = \frac{n_0}{2\alpha} - \frac{R}{2}$ 时 Δ 有极大值,因而所求的高度

$$h_0 = \frac{n_0}{2\alpha} - \frac{R}{2}$$

结果相同.

例 13-8 一人站在直长跑道上,因温差,跑道上方的空气折射率随高度线性变化,即 $n = n_0(1 + \alpha y)$,其中 $|\alpha| = 1.5 \times 10^{-6} \text{m}^{-1}$,结果他无法看见距离 d 远处的跑道($y=0$).若他的眼睛离跑道高 1.7m,求 d 之值.又问,温度随高度如何变化?

解:建立如图例 13-8 所示的坐标,不难看出,由跑道上水平射出的光逐渐向上弯曲.由折射定律,在任一高度处有

$$n \sin \theta = C$$

即

$$n \cos \varphi = C$$

式中 θ 和 φ 的意义如图所示.常数 C 值可由地面处的值求得:

$$C = n(y=0) \cdot \cos 0^\circ = n_0$$

$$\therefore n \cos \varphi = n_0$$

可将 $\cos \varphi$ 与光线路径曲线的斜率联系起来:

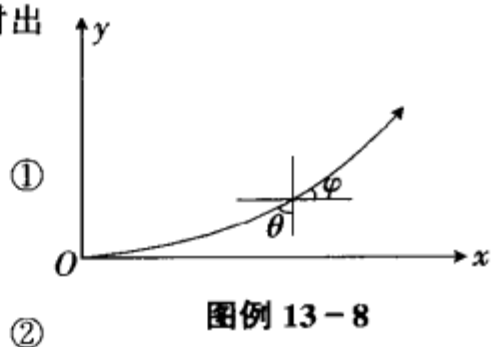
$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2}} \quad (3)$$

以①、③及 $n = n_0(1 + \alpha y)$ 代入②式,得

$$n_0(1 + \alpha y) \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2}} = n_0$$

即

$$1 + \alpha y = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2} \quad (4)$$



由于 $|\alpha| \ll 1$, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 也远小于 1, 上式变为

$$1 + \alpha y = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 \quad (5)$$

可见 $\alpha > 0$, 且

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \sqrt{2\alpha y} \quad (6)$$

即

$$\frac{\Delta y}{\sqrt{y}} = \sqrt{2\alpha} \Delta x \quad (7)$$

两边求和:

$$\sum \frac{\Delta y}{\sqrt{y}} = \sqrt{2\alpha} \sum \Delta x$$

化为积分:

$$\int_0^{1.7} \frac{dy}{\sqrt{y}} = \sqrt{2\alpha} \int_0^d dx$$

即

$$2\sqrt{y} \Big|_0^{1.7} = \sqrt{2\alpha} d$$

$$\therefore d = \frac{2\sqrt{1.7}}{\sqrt{2\alpha}} = \frac{2\sqrt{1.7}}{\sqrt{2 \times 1.5 \times 10^{-6}}} = 1505(\text{m})$$

由于折射率随空气密度增大而增大, 而由 $p = nkT$, 在 p 一定情况下, $n \propto 1/T$, 既然这里 n 随高度增大, 可见温度随高度而降低.

本章习题

13.1 半径为 r 的圆盘形发光面与一半径为 R 的不透光圆盘共轴放置, 相距 l_1 , 求在与不透光圆盘相距 l_2 的光屏上得到的本影的半径 r_1 和半影的最大半径 r_2 .

13.2 试求北纬 λ 处冬至和夏至这两天的日长及中午太阳光与地面的夹角. 并以北京 ($\lambda = 40^\circ$) 为例求出数值解. [提示]

13.3 太阳与月球的直径分别是 $1.39 \times 10^6 \text{km}$ 和 $3.48 \times 10^3 \text{km}$, 太阳到地面的距离为 $1.50 \times 10^8 \text{km}$, 某次日全食时月球到地面距离为 $3.60 \times 10^5 \text{km}$. 试计算地面上能见到日全食区域的面积. (可把该区域的地面视为平面)

13.4 由光源发出的光通过孔之后, 在孔后的屏上成像. 观察表明, 当孔小时, 屏上成光源的像; 孔大时, 屏上成孔的像. 试解释之.

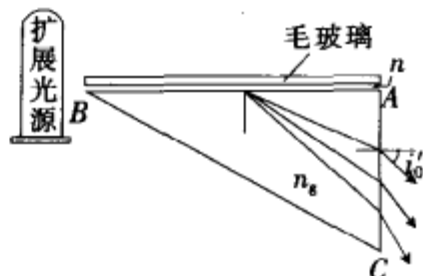
13.5 高为 H 的人站在平面镜前, 为使他从镜中能看到全身, 镜至少多高?

13.6 两平面镜成 φ 角, 并设 $m = 2\pi/\varphi$ 为整数, 求镜间物体像的数目. [提示]

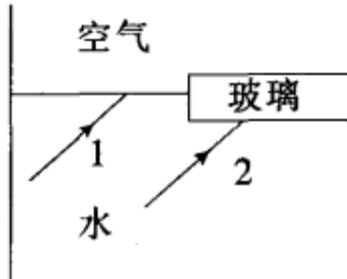
13.7 极限法测液体折射率的装置如图习 13.7 所示. ABC 是直角棱镜, 其折射率 n_g 为已知. 将待测液体涂一薄层于其上表面 AB , 覆盖一块毛玻璃, 用扩展光源在掠入射方向照明毛玻璃, 从棱镜的 AC 面出射的光线的折射角将有一下限 i_0' (用望远镜观察, 则在视场中出现有明显分界线的半明半暗区). 试求待测液体的折射率 n . 用这种方法测液体的折射率, 测量范围有何限制?

13.8 如图所示, 在水中有两条平行光线 1 和 2, 光线 1 射到水和空气分界面上, 光线 2 射到水和平行平板玻璃分界面上. 问:

(1) 两光线射到空气中是否还平行?



图习 13.7

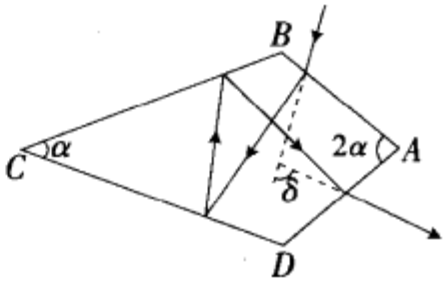


图习 13.8

(2)如果光线 1 发生全反射,光线 2 能否进入空气?

13.9 一个立方玻璃块的中心有一个斑点,要使人们无论从哪个方向看都看不见这个斑点,必须把这立方块表面的哪些部分遮盖起来?被遮盖的面积占立方块表面积的百分比必须有多大?设立方块边长为 1.0cm,玻璃的折射率为 1.50.(不考虑光线受到内反射以后的行为)

13.10 在如图所示的折射棱镜中,光线在垂直于棱的平面内由 AB 面入射,依次经由 CD 面和 BC 面反射,然后从 AD 面射出.角 C 和角 A 分别等于 α 和 2α ,而角 B 和角 D 彼此相等.试证明:出射光对入射光的偏向角 δ 与入射方向无关,并求 δ .并说明在如图所示的光的行程下,棱镜能否产生色散?[提示]



图习 13.10

13.11 试证明:若忽略地球表面的弯曲(当星体距地平线不太近时成立),则天文折射将与空气折射率随高度变化的规律无关,仅与地面附近空气的折射率 n_0 和星的视角 α_0 有关.并求出在这种情况下天文折射 $\alpha_\infty - \alpha_0$ 的近似表式.[星的视角是指星的方向与地面法线的夹角,天文折射指星体表观视(角)位置与实际视(角)位置之差][提示]

13.12 圆筒形玻璃容器的内半径为 r ,外半径为 R ,容器内盛有一种液体,它在紫外线照射下会发出绿色荧光,液体的每一质元都将成为绿光的点光源.试问,内外半径之比等于多少时,从侧面看,容器壁的厚度为零?已知对绿光,玻璃的折射率为 n_1 ,液体的折射率为 n_2 . [提示]

13.13 用显微镜观察 3 毫米厚的平面玻璃板.首先,调节显微镜以看清板的上表面,然后将显微镜筒向下移动,直到看清下表面为止(为便于观察,表面做有标记),镜筒移动了 2 毫米,求玻璃折射率 n . [提示]

13.14 一物体放在表面平行的玻璃板后表面后 $l_1 = 15\text{cm}$ 处,观察者透过玻璃板观察,且视线垂直于玻璃板面,求物体的像与玻璃板前表面的距离 l_2 ,已知板厚 $d = 4.5\text{cm}$,玻璃折射率 $n = 1.5$.

13.15 当一条光线通过平行平面玻璃板时,出射光线方向不变,但产生侧向位移.当入射角为 θ ,玻璃板厚度为 d ,折射率为 n 时,求此侧向位移.

13.16 一发光点位于折射率为 n 的液体表面下深 h 处,求其以 i 角入射到液面表面的光束的弧矢焦线和子午焦线与该光束和液面交点的距离 l_1 和 l_2 . [提示]

13.17 设三棱镜的顶角为 A ,折射率为 n . (1)将偏向角 δ 表示为 A , n 和入射角 i 的函数. (2)从式 (13.2-9) 出发,用解析法证明当 $i = i'$ 时 δ 取极值. [提示]

13.18 设棱镜的顶角 A 很小,折射率为 n . 试计算最小偏向角:(1)只计算到一级小量;(2)只计算到二级小量.(相对于 A) [提示]

13.19 写出棱镜在最小偏向角范围的角色散表达式,即 $\frac{d\delta}{d\lambda}$ 表达式.在最小偏转范围内,两条平行光入射到棱镜上出来时,两条光线将分开多大角度?已知棱镜对第一条光线的折射率等于 1.500,而对另一条光线的折射率等于 1.501. [提示]

13.20 通过棱镜观察远方物体,一般来说,它们的形状会失真,其中之一是象在垂直于棱的方向上会展宽或压扁.为了不发生上述失真,应当使棱镜处于什么样的状态? [提示]

13.21 将大气层看成折射率均匀的透明媒质,日出时间将因此而比不考虑大气存在时提早还是推迟?设大气折射率 $n = 1.00028$,大气层有效高度 h 为 5km,估算此提早或推迟的时间.已知地球半径 $R = 6400\text{km}$.

13.22 将大气看成折射率随高度线性减小的媒质,即设 $n = n_0 - \alpha(r - R)$, ($R < r < R + 20$) 式中 n_0 为地面的空气折射率, r 为至地球中心的距离, R 为地球半径, r 和 R 均以千米为单位,当 $r - R = 20\text{km}$ 时,可认为 $n = 1$. 已知 $n_0 = 1.00028$, $R = 6400\text{km}$,计算日出提早的时间. [提示]

13.23 根据笛卡尔理论,虹是由太阳光线在水滴内反射而形成的.在水滴内经受一次反射的光线产生所谓虹,或者一级虹;经受二次反射的光线产生霓,或者二级虹.虹的角半径可由使入射光线在水滴内反射及折射后出射时获得最大强度的要求来确定.将小水滴看成球形,折射率为 n ,求虹的角半径 α . 已知水对红光和紫光的折射率分别为 $n_{\text{红}} = 1.329$, $n_{\text{紫}} = 1.343$,试求虹对于红光和紫光的角半径 $\alpha_{\text{红}}$ 和 $\alpha_{\text{紫}}$. [提示]

透镜成像

§ 14.1 单球面折射

设想半径为 R 的球面将两种媒质分开, 左边媒质的折射率视为 1, 右边媒质的折射率为 n , 如图 14.1-1 所示, 实验发现, 自左方一点 S 发出的细光束经球面折射后将聚焦于右方另一点 S' , 我们称 S' 为 S 的像. 由光路可逆性可知, 自 S' 点发出的光经球面折射后将聚焦于 S , 这时, S 就成为 S' 的像. 当左方有一发光物体时, 其上每一点发出的光经球面折射后都将聚焦于某一对应的像点, 这些像点就组成原来物体的像, 反之亦然. 下面我们就来讨论这一成像过程.

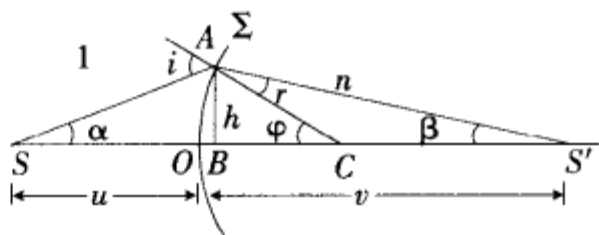


图 14.1-1 单球面折射成像

1. 物像公式

自 S 点发出通过球面的球心 C 的光不发生折射. S 与 C 的连线称为主轴. 主轴与球面的交点设为 O . 我们只考察自 S 发出而与主轴夹角很小的光线的折射情况, 并设光线与球面的交点离主轴的距离比球面半径小得多, 这样的光线叫做近轴光线. 考察某一条近轴光线 SA , 经球面折射后沿 AS' 行进, 与主轴交于 S' . 设点 A 与主轴的距离为 h (图 14.1-1). 由于 SA 为近轴光, 图中所标出的角度均为小角, 而有 $\sin x \approx \tan x \approx x$, 折射定律可表为

$$i = nr$$

但由几何关系有

$$i = \alpha + \varphi,$$

$$r = \varphi - \beta$$

令 $SO = u$, $OS' = v$, 将以上两式代入前式, 并利用 $\alpha \approx \frac{h}{u}$, $\varphi \approx \frac{h}{R}$, $\beta \approx \frac{h}{v}$, 得

$$\frac{h}{u} + \frac{h}{R} = n \left(\frac{h}{R} - \frac{h}{v} \right)$$

即

$$\frac{1}{u} + \frac{n}{v} = \frac{n-1}{R} \quad (14.1-1)$$

上式表明, 自 S 发出的光, 只要是近轴光, 都将聚焦于和 O 点相距 v 的 S' 点, 因而 S' 点就是 S 点的像. u 称为物距, v 称为像距. (14.1-1) 式就是单球面折射的物像公式. 在上面讨论的情况中, u, v, R 都取正值.

有时, 自 S 发出的光并不实际交于一点, 而是它们的延长线交于一点, 如图 14.1-2a 所示, 这时的像 S' 称为虚像, 而图 14.1-1 中的像则称实像. 当 S' 为虚像时, 与 S 同在 O 点的左方, 这时 v 为负值. 也有时发光光束并不发自某一点, 而是其延长线会聚于某一点 S , 如图 14.1-2b 所示, 这时的发光点 S 称为虚物. 当 S 为虚物时, 它位于 O 点的右方, 这时 u 取负值.

同理, 当球心 C 位于 O 点左方时, 半径 R 应取负值.

由 (14.1-1) 式, 当

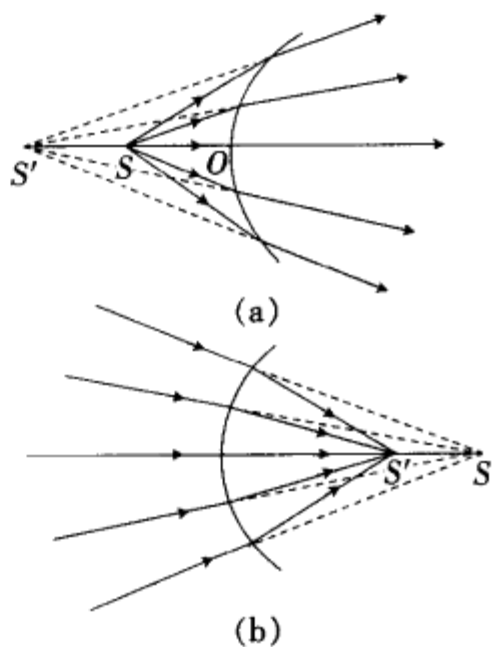


图 14.1-2 虚像(a)和虚物(b)

$$u = \frac{R}{n-1} = f \quad (14.1-2)$$

时,像距 $v \rightarrow \infty$,这时的物点称为物方焦点,用 F 表示, F 与 O 点的距离称为物方焦距,用 f 表示.当 $u \rightarrow \infty$ 时,

$$v = \frac{n}{n-1}R = f' \quad (14.1-3)$$

这时的像点称为像方焦点,用 F' 表示, F' 与 O 点的距离称为像方焦距,用 f' 表示.由(14.1-2)、(14.1-3)式可知,

$$\frac{f'}{f} = n$$

用焦距表示,物像公式可写成另一形式

$$\frac{f}{u} + \frac{f'}{v} = 1 \quad (14.1-4)$$

反射定律可看成折射定律在 $n = -1$ 时的特例,因此,球面反射镜的物像公式可从单球面折射物像公式令 $n = -1$ 得到.由于反射光的行进方向逆转,像距 v 和球面半径 R 的正、负规定应与折射时相反:当 S' 、 C 在 O 点左方时 v 和 R 取正, S' 、 C 在 O 点右方时 v 、 R 取负.因而,在公式(14.1-1)中令 $n = -1$, $v \rightarrow -v$, $R \rightarrow -R$,即可得球面镜物像公式:

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{2}{R} \quad (14.1-5)$$

对凹面镜($R > 0$)有

$$f = \frac{R}{2} = f'$$

(14.1-5)式又可写成

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f} = \frac{2}{R} \quad (14.1-6)$$

对凸面镜上式也适用,但式中 R 取负值.

2. 放大率

在图 14.1-1 中,将 S 点以 C 为中心转动一小的角度至 S_1 点,不难看出,自 S_1 点发出的细光束将成像在直线 S_1C 的延长线与过 S' 以 C 为圆心的圆弧的交点 S_1' ,如图 14.1-3 所示.只要 $\angle SCS_1$ 很小, S_1 可近似看成在过 S 点且与主轴垂直的平面上, S_1' 则在过 S' 点且与主轴垂直的平面上.前一平面称为物平面,后一平面称为像平面.物平面上任一离 S 点很近的点均将成像在像平面上某一对应点.当物平面上存在以 $SS_1 = y$ 为高的物时,经球面折射后将在像平面上形成高为 $S'S_1' = y'$ 的像.像高 y' 与物高 y 之比称为横向放大率.当物或像在主轴上方时, y 或 y' 视为正,在主轴下方时,视为负.用 K 表示横向放大率,由图 14.1-3 和物像公式(14.1-1)不难得到:

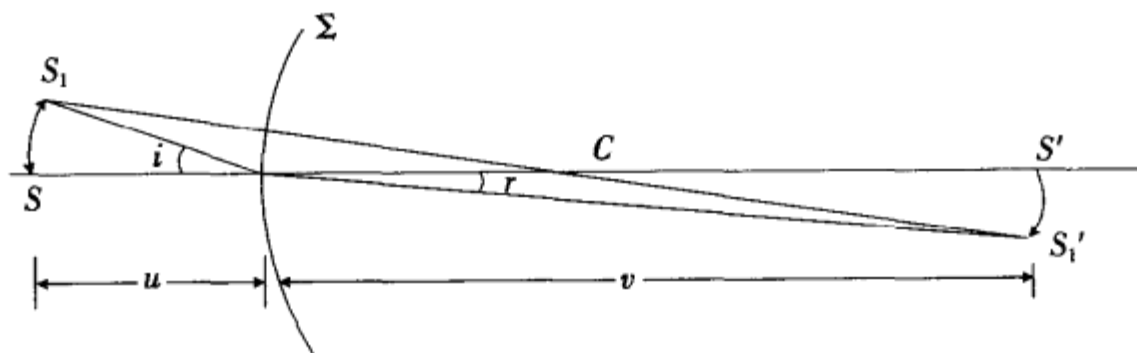


图 14.1-3 轴外一点经单球面成像

$$K = -\frac{S'S_1'}{SS_1} = -\frac{v-R}{u+R} = -\frac{v}{u} \frac{1}{n} \quad (14.1-7)$$

上式也可由折射定律得到:

$$K = -\frac{v \sin r}{u \sin i} \approx -\frac{v r}{u i} = -\frac{v}{u} \frac{1}{n}$$

以 $n = -1, v \rightarrow -v$ 代入上式即得球面镜放大率公式

$$K = -\frac{v}{u} \quad (14.1-8)$$

例 14.1-1 一薄壁球状玻璃鱼缸充满水 ($n = 4/3$), 观察者沿着该球的直径观察, 见一小鱼沿同一直径由远端向近端游来, 求小鱼视位置及大小的变化. 已知球的直径为 10cm.

解: 现在物在水中, 为利用公式 (14.1-1), 只要将式中的 n 与 1 对调即可, 而成

$$\frac{n}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1-n}{R}$$

由题意, u 的值由 10cm 变到 0cm, $n = \frac{4}{3}, R = -5\text{cm}$ (参见图 14.1-4), 代入上式得

$$\frac{1}{v} = \frac{1-n}{R} - \frac{n}{u} = \frac{1-\frac{4}{3}}{-5} - \frac{\frac{4}{3}}{u} = \frac{1}{15} - \frac{4}{3u}$$

$$v = -\frac{15u}{20-u}$$

当 u 从 10→0(cm) 时, v 从 -15→0(cm). 横向放大率为

$$K = -\frac{v}{u} \frac{n}{1} = \frac{15 \cdot \frac{4}{3}}{20-u} = \frac{20}{20-u}$$

当 u 从 10→0(cm) 时, K 从 2→1.

例 14.1-2 一凸面镜半径为 R , 一物体位于镜前 u 处. (1) 求像的位置与性质, 并作光路图. (2) 若物体沿轴以速度 V_0 向镜靠近, 求像的速度与运动方向.

解: (1) 由式 (14.1-6):

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{2}{-R}$$

因是凸面镜, 式中半径取负值. 由此得

$$v = -\frac{Ru}{R+2u} \quad (1)$$

$v < 0$, 可见恒为虚像. 横向放大率

$$K = -\frac{v}{u} = \frac{R}{R+2u} \quad (2)$$

$1 > K > 0$ 说明像是正立、缩小的. 综上, 像恒为正立缩小的虚像. 光路图如图 14.1-5. 其中光线 1 平行主轴入射, 反射后延长线通过焦点 F , 光线 2 的延长线通过焦点 F , 反射后成平行主轴的光, 光线 3 的延长线通过球心 C , 反射后方向逆转.

(2) 经短时间 Δt 后, 物体向镜靠近 $\bar{V}_0 \Delta t$, 使物距变为 $u - \Delta u = u - \bar{V}_0 \Delta t$, 设像距由 v 变为 $v + \Delta v$, 由物像公式 (14.1-6),

$$\frac{1}{u - \Delta u} + \frac{1}{v + \Delta v} = \frac{2}{-R}$$

$$\frac{1}{u - \Delta u} - \frac{1}{u} + \frac{1}{v + \Delta v} - \frac{1}{v} = 0$$

由于 $\Delta u \ll u, \Delta v \ll v$, 保留一级小量, 上式变为

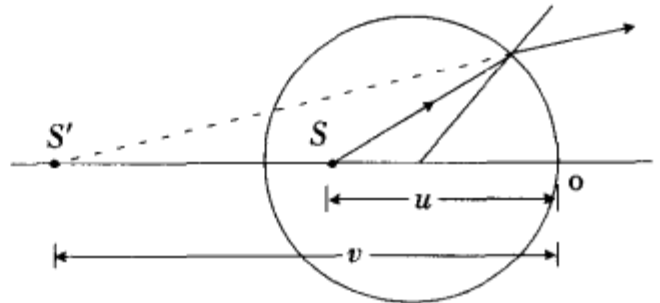


图 14.1-4 观察鱼缸中的小鱼

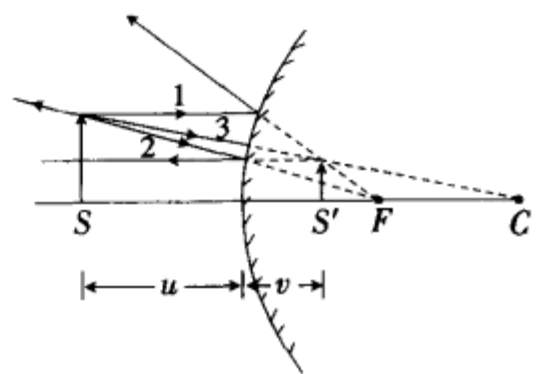


图 14.1-5 凸面镜成像

$$\frac{\Delta u}{u^2} - \frac{\Delta v}{v^2} = 0$$

得

$$\Delta v = \frac{v^2}{u^2} \Delta u = \frac{v^2}{u^2} \bar{V}_0 \Delta t$$

$\Delta v > 0$ 说明像远离镜面, 即与物运动同方向, 像运动速度

$$V_i = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{u^2} \bar{V}_0$$

以②式代入, $\bar{V}_i = \left(\frac{R}{R+2u}\right)^2 \bar{V}_0 < \bar{V}_0$

可见像的速度比物的速度慢了.

§ 14.2 薄透镜

两底面为共轴球面的圆盘形光学器件称为透镜, 通常用玻璃制成. 厚度比直径小得多(也比球面半径小得多)的透镜称为薄透镜, 边缘比中心薄的称为凸透镜, 边缘比中心厚的称为凹透镜.

透镜可看成两个单折射球面, 因而它也可以成像, 它的成像过程就是连续两次的单球面成像过程的组合. 下面讨论薄透镜的成像.

1. 物像公式

透镜两球面中心的连线称为主轴, 如图 14.2-1 中的 SS'' . 设左球面的半径为 R_1 , 右球面的半径为 R_2 , 透镜材料的折射率为 n , 考察主轴上一点 S 的成像. 自 S 发出的近轴光经左球面折射后设成像于 S'' . 由于透镜很薄, 两球面顶点可视为一点, 设为 O , 设 $SO = u$, $OS'' = v'$, 由(14.1-1)式:

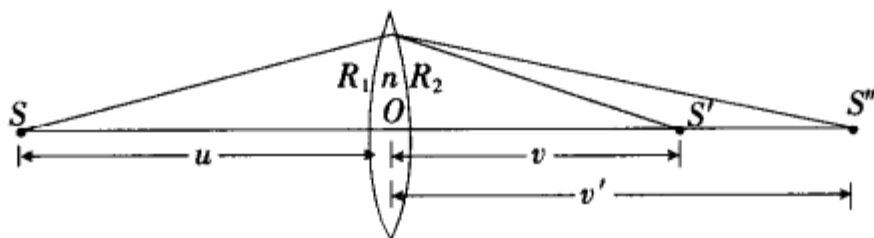


图 14.2-1 薄透镜成像可看成两次单球面成像的组合

$$\frac{1}{u} + \frac{n}{v'} = \frac{n-1}{R_1}$$

原应成像于 S'' 的光束在尚未聚焦于 S'' 前又被第二个球面(即右球面)折射, 又第二次成像, 这时 S'' 成为物(这里是虚物), 折射后成像于 S' . 现在的物距是 $-v'$, 像距是 v , 代入与(14.1-1)式相应的公式, 得

$$-\frac{n}{v'} + \frac{1}{v} = \frac{1-n}{R_2}$$

以上二式相加得

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (14.2-1)$$

这就是薄透镜物像公式, 其中 u, v, R_1, R_2 均有正、负, 规则同上(对图中情况, u, v, R_1 均为正, R_2 为负). 根据(14.2-1)式, 当

$$u = f = \frac{1}{(n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)} \quad (14.2-2)$$

时, $v \rightarrow \infty$, 这时的物点称为物方焦点, 用 F 表示, F 与 O 点的距离称为物方焦距, 用 f 表示. 当 $u \rightarrow \infty$ 时,

$$v = f' = \frac{1}{(n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)} \quad (14.2-3)$$

这时的像点称像方焦点,用 F' 表示, F' 与 O 的距离称为像方焦距,用 f' 表示. 当透镜两边处于同一媒质中(现均为空气)时,有 $f = f'$.

f 和 $f' > 0$ 的透镜称为会聚透镜,它可将平行光会聚于一点. 由(14.2-2,3)可知,当 $\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) > 0$ 时, $f, f' > 0$,是为会聚透镜. 可见,(薄)凸透镜必为会聚透镜.

f 和 $f' < 0$ 的透镜称为发散透镜,它使平行光束成为发散光束,它们的反向延长线交于一点. 由(14.2-2,3)可知,当 $\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) < 0$ 时, $f, f' < 0$,是发散透镜. 可见,(薄)凹透镜为发散透镜.

用焦距表示,可将透镜物像公式写成更常用形式. 当 $f = f'$ 时,该公式为

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f} \quad (14.2-4)$$

上式常称为高斯公式. 图 14.2-2 就是按高斯公式绘制的 $u \sim v$ 曲线,图(a)对会聚透镜而言,图(b)对发散透镜而言. 当 $f \neq f'$ 时,高斯公式应写成

$$\frac{f}{u} + \frac{f'}{v} = 1 \quad (14.2-5)$$

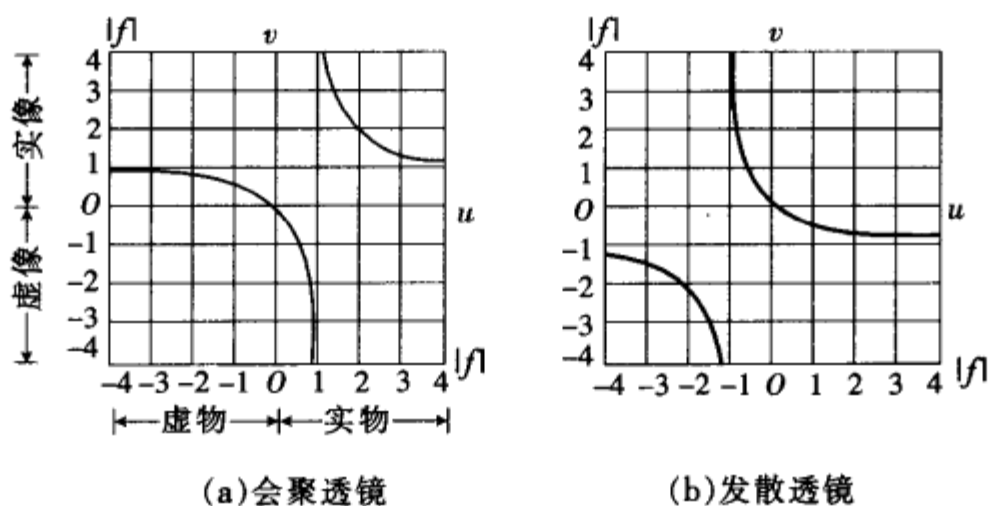


图 14.2-2 薄透镜的 $u \sim v$ 曲线

2. 放大率

过 S 点作与主轴垂直的平面,即为物平面,在此平面上靠近 S 的任意点的成像与 S 点相仿,仍满足物像公式,其像必在过 S' (S 的像)点且垂直于主轴的平面(像平面)上. 像的(横向)放大率可看成两次单球面成像放大率的乘积:

$$K = K_1 K_2 = -\frac{v''}{u} \frac{1}{n} \left(-\frac{v}{-v''} \cdot n \right) = -\frac{v}{u} \quad (14.2-6)$$

由上式可见,像必在物点与 O 点的连线(或其延长线)上.

3. 牛顿公式

透镜物像公式还可以写成其他形式. 用物点 S 与物方焦点 F 的距离 x 表示物的位置, x 以物在焦点 F 左(右)方为正(负);用像点 S' 与像方焦点 F' 的距离 x' 表示像的位置, x' 以像在焦点 F' 的右(左)方为正(负),如图 14.2-3 所示,则有

$$u = x + f, v = x' + f$$

代入高斯公式(14.2-5)并整理即得

$$xx' = ff' \quad (14.2-7)$$

当 $f = f'$ 时,上式变为

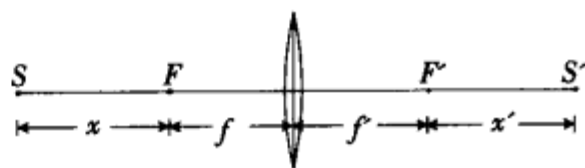


图 14.2-3 牛顿公式各量意义

$$xx' = f^2 \quad (14.2-7a)$$

(14.2-7)式称为牛顿公式. 利用牛顿公式, 可将放大率写成

$$K = -\frac{v}{u} = -\frac{f}{x} = -\frac{x'}{f'} \quad (14.2-8)$$

当 $f=f'$ 时, 有

$$K = -\frac{f}{x} = -\frac{x'}{f} \quad (14.2-8a)$$

(14.2-7)、(14.2-8)式请读者自行证之.

4. 作图法

由以上讨论可知, 物平面上靠近主轴的任一点(物点)发出的近轴光束, 经透镜折射后必聚交于(或它们的延长线聚交于)像平面上的一点(像点), 像点的位置(由像距 v 和离主轴距离 y' 表征)由物点位置(用物距 u 和离主轴距离 y 表征)和物像公式及放大率公式唯一确定, 只要知道透镜的焦距.

当物点位置确定后, 我们也可用光路图来确定像点的位置, 而不必借助于物像公式和放大率公式. 为此, 只要确定自物点发出的任意两条光线经透镜折射后的光路就行了. 因为既然从物点发出的光束(只要是近轴光)经透镜折射后将聚交于像点, 属于光束的任意两条光线经透镜折射后也必相交于像点, 而确定一点(如像点)的位置只要两条线即已够了. 至此, 问题归结为寻找两条(或两条以上)过物点的典型光线, 它们经透镜折射后的行径不必借助于物像公式和放大率公式就可确定.

由焦点性质可知, 从物方焦点发出的任意光线经透镜折射后必成平行于主轴的光; 平行于主轴射向透镜的任意光线经透镜折射后必经过像方焦点. 我们要寻找的两条典型光线就可利用焦点性质找到. 图 14.2-4 中的两条光线 1-1' 和 2-2' 就是这样的两条光线, 由这两条光线即可找到物点 S_1 的像 S_1' . 实际上, 1 光线和 2 光线在透镜内须经两次折射才成为 1' 光线和 2' 光线, 由于透镜很薄, 作图时可简化为一次折射.

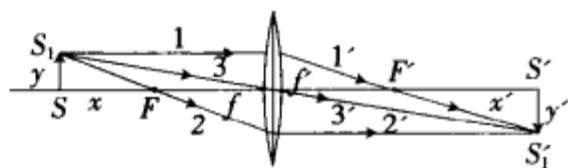


图 14.2-4 用作图法求透镜的像

图 14.2-4 用作图法求透镜的像. 实际上, 1 光线和 2 光线在透镜内须经两次折射才成为 1' 光线和 2' 光线, 由于透镜很薄, 作图时可简化为一次折射.

自 S_1 点发出射向透镜中心 O 点的光经透镜折射后也必经过 S_1' , 如图中的光线 3 和 3'. 由 $|K| = \left| \frac{y'}{y} \right| = \left| \frac{v}{u} \right|$, 可见 3' 和 3 在同一直线上, 即通过 O 点的光线经透镜后不发生折射. (由于 O 点附近透镜犹如一块平板玻璃, 这一点不难理解.) 具有这种性质的点称为光心. 当 $f=f'$ 时, O 点即为光心. 利用光心的性质, 我们又有了一条可利用的典型光线: 3 和 3'.

有一点需要指出: 上述三条典型光线只是实际光束的代表, 并非一定存在于实际光束之中. 例如, 设想在透镜前放一小孔径的光屏 P , 如图 14.2-5, 则自 S_1 发出且平行于主轴的光线 1 被 P 挡住, 过焦点 F 的光线 2 也被 P 挡住, 只有通过光心的光线 3 才通过 P 之小孔. 但物点 S_1 并不因此而不能被透镜成像, 因为自 S_1 发出之光束仍存在, 此光束在通过 P 上之小孔后仍可被透镜折射而聚交于像点 S_1' , 如图中影线部分的光束所示, 且像点 S_1' 仍可用上述三条典型光线中的任意两条的交点求得, 犹如光屏 P 不存在一样.

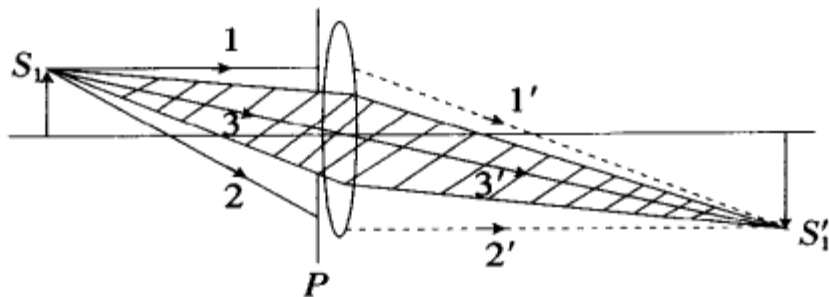


图 14.2-5 典型光线 11' 和 22' 可不存在于实际光束中

与透镜相仿, 单球面成像也可利用作图法(参见例 14.1-2)

既然用作图法可求出像, 也可由图根据几何关系导出物像公式. 由图 14.2-4 不难得出

$$-\frac{y'}{y} = \frac{f}{x} = \frac{x'}{f'}$$

由此即得牛顿公式

$$xx' = ff'$$

由 x, x' 与 u, v, f, f' 的关系, 不难导出高斯公式.

例 14.2-1 一双凸薄透镜两球面的半径均为 R , 一物体置于其中一球面的球心处. (1) 求像距 (用 R 和透镜材料的折射率表示). (2) 描写像的性质.

解: 由 (14.2-2) 式可求出透镜焦距. 以 $R_1 = R, R_2 = -R$ 代入该式即得

$$f = \frac{1}{(n-1)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\right)} = \frac{R}{2(n-1)}.$$

(1) 以物距 $u = R$ 代入物像公式 (14.2-2) 即得像距:

$$v = \frac{R}{2(n-1)-1} \quad \text{①}$$

及放大率

$$K = -\frac{v}{u} = -\frac{1}{2(n-1)-1} \quad \text{②}$$

(2) 由①式, 当 $2(n-1)-1 > 0$ 即 $n > \frac{3}{2}$ 时, $v > 0$, 为实像; 由②式, 当 $0 < [2(n-1)-1] < 1$ 即 $n < 2$ 时, $|K| > 1$, 为放大实像, 而当 $2(n-1)-1 > 1$ 即 $n > 2$ 时, $|K| < 1$, 为缩小实像.

同理, 当 $2(n-1)-1 < 0$ 即 $n < \frac{3}{2}$ 时, $v < 0$ 为虚像; 由②式, 当 $1 < n < \frac{3}{2}$ 时, 有 $0 < -[2(n-1)-1] = 1-2(n-1) < 1$, 即 $K > 1$, 为放大虚像.

综上, 像的性质由 n 决定, 而有

$n > 2$ 得缩小实像

$\frac{3}{2} < n < 2$ 得放大实像

$1 < n < \frac{3}{2}$ 得放大虚像

例 14.2-2 物与屏相距 L , 二者之间放一凸透镜. 前后移动透镜, 发现透镜有两个位置可以使物成像在屏幕上, 测得这两个位置之间的距离为 d .

(1) 求透镜焦距;

(2) 利用此法测焦距有何优点? 对 L 值有何限制?

解: (1) 设第 1、第 2 次成像时的物距和像距分别为 u_1, v_1, u_2, v_2 , 则

$$u_1 + v_1 = L \quad \text{①}$$

$$u_2 + v_2 = L \quad \text{②}$$

由光路可逆性原理,

$$v_2 = u_1, u_2 = v_1 \quad \text{③}$$

由题意,

$$v_2 - v_1 = d \quad \text{④}$$

由③、④式得

$$u_1 - v_1 = d \quad \text{⑤}$$

由①、⑤式得

$$u_1 = \frac{L+d}{2}, v_1 = \frac{L-d}{2}$$

代入物像公式 (14.2-4) 得

$$\frac{2}{L+d} + \frac{2}{L-d} = \frac{1}{f}$$

解得

$$f = \frac{L^2 - d^2}{4L} \quad \text{⑥}$$

(2) 由上式得

$$L^2 - 4fL - d^2 = 0$$

解出 L :

$$L = 2f + \sqrt{4f^2 + d^2}$$

可见 $L \geq 4f$

利用此法测焦距的优点是待测数据只有 L 和 d , 这两个量都容易测准, 而避免了直接测 u 、 v , 由于透镜总有一定厚度, 这两个量不易测准.

§ 14.3 光学仪器

光是人从外部世界获取信息的主要来源. 人主要用眼睛从外部世界的光图像获取信息, 因而眼睛是至关重要的光学仪器. 但人眼毕竟有局限, 需借助于其他光学仪器来扩展我们眼睛的视觉范围. 放大镜、显微镜和望远镜就是这样的仪器, 它们使我们能看清更小、更远的东西, 因而称为助视光学仪器. 还有许多光学仪器, 如照相机、放映机、摄谱仪等, 可记录或再现图像, 供我们观察或研究. 有的光学仪器能使我们看见人眼本来看不见的图像, 如红外摄像机和 X 光显微镜等. 供科学研究而设计的光学仪器更是层出不穷, 这里不能一一列举. 限于篇幅, 本节主要介绍助视光学仪器.

1. 眼睛

人眼是相当精巧的光学仪器. 人眼大体上呈球形, 前部略凸出. 眼球由一层坚固的膜包围, 膜的前部透明, 称角膜, 后部白色不透明, 称巩膜. 光通过角膜进入充满房水的前房, 前房后面是晶状体, 它是一个折射率从外层到中心逐渐增大的透镜. 紧贴晶状体前方有虹膜, 它的中间是瞳孔. 瞳孔的大小由虹膜调节. 晶状体后面是充满玻璃状液的后房, 再后就是紧贴在巩膜前的脉络膜内壁的视网膜. 眼球的整个结构如图 14.3-1.

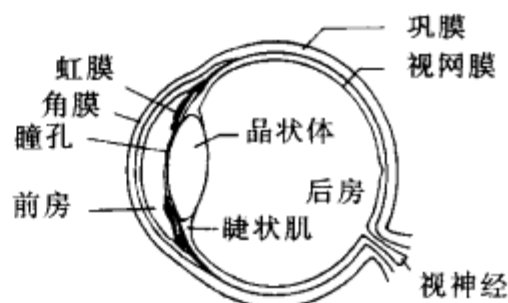


图 14.3-1 眼球结构

由眼球的结构可知, 眼睛可看成物方和像方媒质折射率不等的成像系统, 因而其两个焦距也是不等的. 当聚焦于无穷远时, 物方焦距 $f = 17.1\text{mm}$, 像方焦距 $f' = 22.8\text{mm}$. 当人眼观察不同位置处的物时, 依靠改变晶状体的曲率使物总是成像在视网膜上. 晶状体的曲率由睫状肌控制. 视力正常的眼睛, 当睫状肌松弛时, 无穷远的物成像在视网膜上. 当观察较近物体时, 睫状肌压缩晶状体, 使其焦距缩短. 但眼睛的这种调焦能力有一定限度, 小于一定距离的物体将无法看清. 当物体在适当距离处, 眼睛能最舒适地看清物体, 这个距离称为明视距离. 对正常视力的眼睛, 明视距离通常为 25cm .

眼睛分辨物体细节的本领与像落在视网膜上的位置有关, 在网膜中央靠近光轴的一个小区域(称为黄斑)里, 分辨本领最高. 能够分辨的最近两点对眼睛的张角称为最小分辨角. 在良好照明下, 黄斑内的最小分辨角约为 $1'$. 趋向网膜边缘, 分辨本领急剧下降. 在夜间照明较差时, 眼睛的分辨本领也大大下降. 从生理上说, 分辨本领与网膜上感光单元的分布有关; 从物理上说, 则与光经瞳孔的衍射有关. 在良好照明下, 由衍射所决定的最小分辨角恰好与生理上感光单元所能达到的最小分辨角一致. 这种一致性显然不是偶然的巧合(例 14.3-2).

物体在视网膜上成像的大小取决于物体两端对眼睛的张角, 称为视角. 因而, 在眼睛看来, 物体的大小并不取决于物体本身的大小, 而取决于它的视角的大小. 例如在图 14.3-2 中, 物体 O_1P_1 比 O_2P_2 大, 但 O_1P_1 的视角 1 却比 O_2P_2 的视角 2 小.

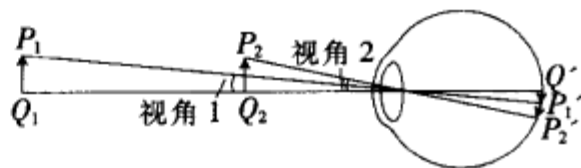


图 14.3-2 像的大小与视角

2. 放大镜

任何一个会聚透镜都可用作放大镜, 只要让物体位于焦点以内, 使之成放大的虚像, 并使虚像位于眼睛前方明视距处. 但为使放大作用明显, 透镜的焦距 f 应比明视距 S_0 小得多, 即 $f \ll S_0$.

放大镜的放大作用可用视角放大率表示,设物体高 y ,用肉眼观察,其视角

$$w = \frac{y}{S_0} \quad (14.3-1)$$

(图 14.3-3a)当用焦距为 f 的会聚透镜观察时,设想透镜紧靠在眼睛前方(图 14.3-3b),为使虚像位于明视距处,应使物在焦点以内.当 $f \ll S_0$ 时,物与焦点十分靠近,这时物(或像)对透镜中心的张角近似等于

$$w' = \frac{y}{f} \quad (14.3-2)$$

由于眼睛紧靠透镜,这也就是像对眼睛的视角.于是视角放大率

$$M = \frac{w'}{w} = \frac{y/f}{y/S_0} = \frac{S_0}{f} \quad (14.3-3)$$

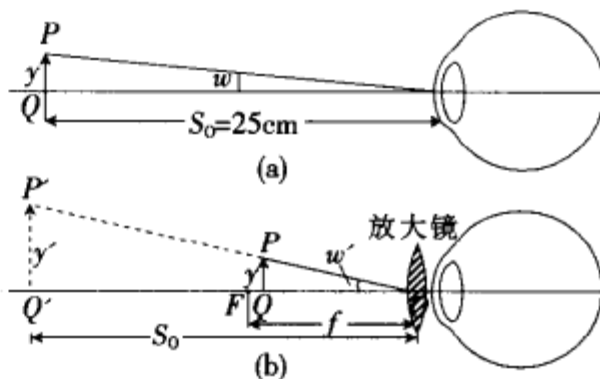


图 14.3-3 放大镜的视角放大率

由于像差的限制,用单个凸透镜作放大镜,其视角放大率不宜超过 3 倍(写作 $3\times$).用清除像差的组合透镜作成放大镜,其视角放大率可达 $20\times$.

3. 显微镜

简单放大镜的放大倍率有限,要得到更大的放大倍率,可用显微镜.显微镜的光路示于图 14.3-4 中.显微镜主要由一个焦距极短的物镜 L_0 和一个用作放大镜的目镜 L_E 组成.被观察物体 PQ 放在物镜物方焦点 F_0 外侧附近,经物镜成放大实像 P_1Q_1 于目镜物方焦点 F_E 内侧附近,再经目镜放大成虚像 $P'Q'$ 于明视距处.

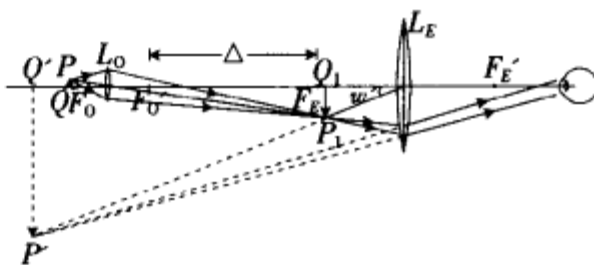


图 14.3-4 显微镜光路

显微镜的视角放大率仍定义为 $M = w'/w$,其中 w 为物 PQ 置于明视距处所张视角,若物高为 y ,则 $w = y/S_0$, w' 为最后的像 $P'Q'$ 所张视角,若像 $P'Q'$ 高为 y' ,则 $w' = y'/S_0$,于是显微镜的视角放大率等于最后的像与原物的横向放大率,即 $M = y'/y$.显微镜中,常将物镜的像方焦点 F_0' 与目镜的物方焦点 F_E 的距离 Δ 称为光学筒长,由于物镜焦距 f_0 和目镜焦距 f_E 都很短,光学筒长与实际筒长即物镜与目镜的距离差不多.用 Δ, S_0, f_0, f_E 表示显微镜的视角放大率,不难看出,

$$M = -\frac{\Delta S_0}{f_0 f_E} \quad (14.3-4)$$

负号表示像是倒立的.实际显微镜常用油浸物镜(这时物与物镜前表面均浸在油中),因而物镜的物方焦距 f_0 与像方焦距 f_0' 不等,这时,(14.3-4)式中的 f_0 应代之以 f_0' .

4. 望远镜

望远镜用来观察远处的物体,使远处物体的视角增大,犹如将远处的物体移近.望远镜也由物镜和目镜两部分组成,与显微镜不同的是,望远镜的物镜具有很长的焦距,远处(视为无穷远)的物经物镜成实像于物镜的焦平面上,此实像又落在目镜物方焦平面上(或其内侧附近),再经目镜成虚像于无穷远(或明视距处),望远镜的光路如图 14.3-5 所示.

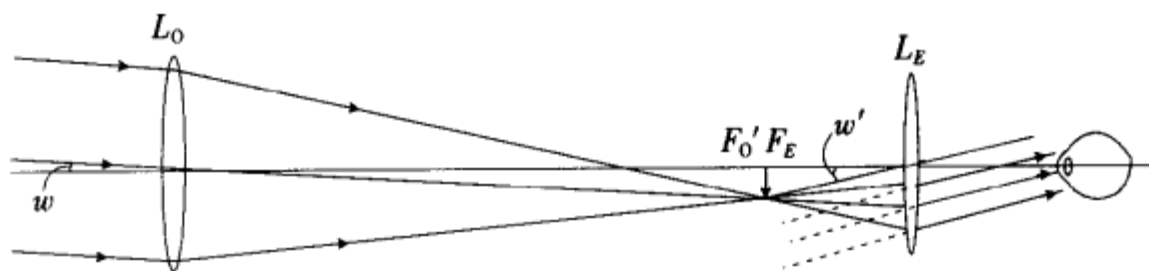


图 14.3-5 望远镜光路

望远镜的视角放大率定义相同： $M = w'/w$ ，其中 w 为物体在无穷远处对眼睛的视角，显然， w 也就是物体对物镜的张角， w' 则等于物体在物镜焦平面上的像对目镜中心的张角。由图 14.3-5 不难看出，

$$M = \frac{w'}{w} = \frac{-wf_o}{f_E \cdot w} = -\frac{f_o}{f_E} \quad (14.3-5)$$

负号表示像是倒立的。这样的望远镜称为开普勒望远镜。另有一种望远镜，其成像是正立的，称为伽利略望远镜，常作观剧用，又称观剧镜。（参见本章习题 14.24）。

5. 望远镜的分辨本领

望远镜的分辨本领是指它能分辨的远处两物点对物镜的最小张角。由于衍射，一发光点经物镜成像后并不成一几何点，而成一有一定大小的光斑。根据衍射理论，此光斑对物镜中心的角直径 θ_0 与光的波长 λ 成正比，与限制光束的孔径（这里是物镜的直径 D ）成反比：

$$\theta_0 = 1.22 \frac{\lambda}{D} \quad (14.3-6)$$

此光斑自中心向四周逐渐变暗，其亮度角分布如图 14.3-6(a) 所示。当有两个相同光点时，只有当它们的角距离等于或大于 θ_0 时才能分辨开（图 14.3-6b）。因而(14.3-6)式表示的 θ_0 也就是望远镜的最小分辨角 $\delta\theta$ ，即

$$\delta\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D} \quad (14.3-7)$$

例 14.3-1 (1) 有些人的眼睛不能使无限远的物体成像在视网膜上而落在视网膜前面。这是由于晶体调节机能衰退或由于眼球过长。这种眼睛称为近视眼。近视眼只能使有限距离内的物体成像在视网膜上。为了校正这一缺陷，可在眼睛前配带一片焦距合适的透镜。某近视眼患者只能使最远 1 米处的物成像在视网膜上。此人应配带什么透镜？透镜的焦距是多少？(2) 远视眼患者的视网膜离晶状体太近或晶状体表面曲率不够大，以致明视距离处的物体成像在视网膜后面，看不清近处物体。某远视眼者只能使 125cm 以远处的物体成像在视网膜上。此人应配带什么透镜？透镜的焦距是多少？

解：(1) 此人所配带透镜只要使无穷远处的物体成像在 1 米远处即可。故应配带凹透镜，其焦距 $f_1 = -1$ 米。

通常用焦距的倒数 Φ （称光焦度）表示镜片的性质，单位是屈光度。屈光度的 100 倍称为度。故此人所配带眼镜的度数为 $\Phi = \frac{1}{f_1} \times 100 = -100$ 度。

(2) 该远视眼患者配带的透镜应使明视距处的物体成像在 125cm 处。由物像公式即可求得焦距及光焦度：

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{0.25} - \frac{1}{1.25} = 3.2 \text{ 屈光度} = 320 \text{ 度。}$$

$f_2 = \frac{1}{3.2} = 0.31$ 米。此人应配带 320 度的凸透镜。

例 14.3-2 试由衍射理论和生理结构两方面计算人眼的最小分辨角。设在正常照明下，人眼瞳孔的直径为 4mm，可见光的平均波长为 5500 埃（1 埃 = 10^{-10} 米）。经测定，视网膜中央黄斑处视细胞直径为 $1.5\mu\text{m}$ 。

解：根据(14.3-7)式，最小分辨角

$$\delta\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

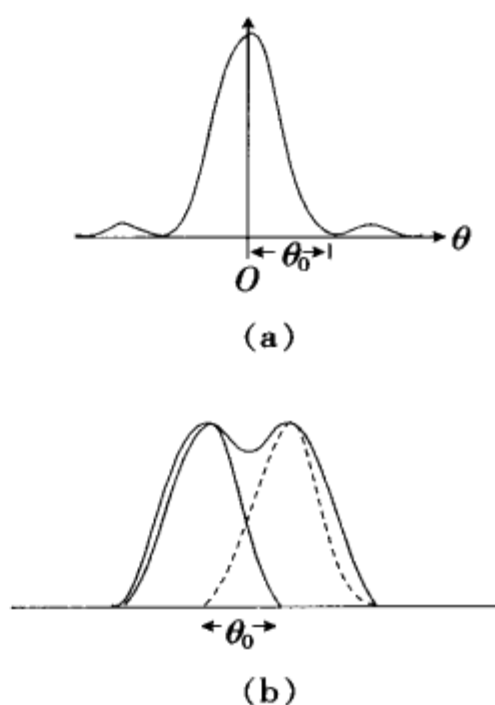


图 14.3-6 望远镜的最小分辨角

以 $\lambda = 5500 \times 10^{-10} \text{m}$, $D = 4 \times 10^{-3} \text{m}$ 代入上式得

$$\delta\theta = 1.22 \frac{5500 \times 10^{-10}}{4 \times 10^{-3}} = 1.68 \times 10^{-4} \text{rad} = 0.58'$$

从生理结构上,要使落在视网膜上的两个像点可以分辨,则这两个像点中间至少要隔开一个视细胞.视网膜到晶状体中心距离几乎就是眼睛的像方焦距($f' = 22.8 \text{mm}$),再考虑到通过晶状体中心光线的折射(玻璃状液的折射率 $n = 1.336$).由此得到的最小分辨角

$$\delta\theta' = \frac{2 \times 1.5 \times 10^{-6}}{22.8 \times 10^{-3}} \times 1.336 = 1.76 \times 10^{-4} \text{rad} = 0.60'$$

与由衍射理论得到的结果相一致.

由于像差等原因,眼睛的实际最小分辨角比这里的计算值略大,约为正文中所说的 $1'$.

本章综合例题

例 14-1 半径为 R , 折射率为 n 的球中有一光点 P , 与球心 C 的距离 $PC = R/n$, 如图例 14-1.

(1) 求证自 P 发出广角光束经球面折射后将聚交于一点, 并求该点 Q 与 C 点的距离 QC ;

(2) 此光束半顶角 θ 的最大值 θ_0 为多少?

解: (1) 为求 Q 点位置, 不妨考察近轴光的情况. 这时物距 $u = R + \frac{1}{n}R = \frac{n+1}{n}R$, 代入单球面折射的物像公式(14.1-1), 并将 n 与 1 对调, 并注意式子右边的半径应改为 $-R$, 得:

$$\frac{n}{\frac{n+1}{n}R} + \frac{1}{v} = \frac{1-n}{-R}$$

解得

$$v = -(n+1)R$$

可见

$$QC = -v - R = nR.$$

既然近轴光束聚交于 C 点左方与 C 相距 nR 处, 广角光束也应交于此点. 取任一条光线 PA , 设其折射后成 AB , 其反向延长线与 CP 相交于 Q . 只要证明 PA 与 AB 满足折射定律即可. 比较 $\triangle PCA$ 和

$\triangle ACQ$, 现有 $QC/CA = \frac{nR}{R} = n$, $CA/CP = \frac{R}{R/n} = n$, 可见 $\triangle PCA \sim \triangle ACQ$, 则对应角相等, 即

$$r = \angle QAC = \angle APC = \theta$$

其中 r 即光线 PA 进入空气中的折射角. 在 $\triangle PCA$ 中应用正弦定理, 有

$$\frac{\sin i}{\sin \theta} = \frac{R/n}{R} = \frac{1}{n}$$

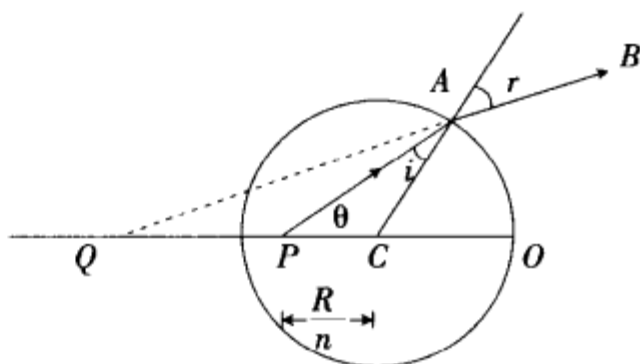
即

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{1}{n}$$

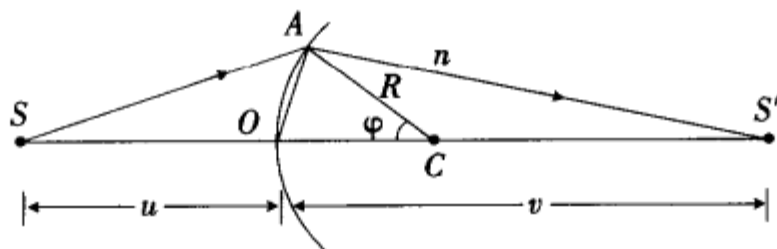
此即折射定律. 可见任意光线 PA 折射后确交于与 C 相距 nR 的 Q 点. 得证.

(2) 由于 r 的最大值为 90° , 故 $\theta \leq \theta_0 = 90^\circ$. 当 $\theta > 90^\circ$ 时, 折射光向左行进, 不再聚交于 Q .

例 14-2 试由费马原理导出近轴条件下单球面折射的物像公式(14.1-1).



图例 14-1 宽光束聚焦



图例 14-2 用费马原理导出单球面折射物像公式

解:费马原理要求两点之间的实际光路其光程取极值.对物与像这两点而言,从物点发出的所有近轴光线最终都聚交于像点,要所有这些光线的光程均取极值,唯一可能的情况是这些光线的光程均相等.这就是物像之间的等光程性,本题归结为由物像之间的等光程性导出近轴条件下单球面折射的物像公式.

设以 C 为球心 R 为半径的球面左方为空气,右方为折射率是 n 的媒质,从物点 S 发出的光经球面折射成像于像点 S' ,如图例 14-2 所示.图中 SC 为主轴, S' 必在主轴上.取任意一条近轴光线 SA ,经球面折射后成 AS' .既然 S' 是 S 的像,由物像等光程性应有

$$SA + nAS' = SO + nOS'$$

式中 $SO = u$ 即物距, $OS' = v$ 即像距.设 AC 与主轴的夹角为 φ ,在 SA 、 AS' 为近轴光条件下,应有 $\varphi \ll 1$.在 $\triangle SAO$ 中应用余弦定理,利用 $AO \approx R\varphi$,有

$$\begin{aligned} \overline{SA}^2 &= u^2 + (R\varphi)^2 + 2uR\varphi \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right) \\ &= u^2 + (R\varphi)^2 + 2uR\varphi \sin \frac{\varphi}{2} \\ &= u^2 + R^2\varphi^2 + uR\varphi^2 = u^2 \left(1 + \frac{R^2\varphi^2 + uR\varphi^2}{u^2}\right) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} SA &= u\sqrt{1 + \frac{R^2\varphi^2 + uR\varphi^2}{u^2}} \approx u \left(1 + \frac{R^2\varphi^2 + uR\varphi^2}{2u^2}\right) \\ &= u + \frac{R^2\varphi^2 + uR\varphi^2}{2u} \end{aligned} \quad (2)$$

同理,

$$\begin{aligned} \overline{AS'}^2 &= v^2 + (R\varphi)^2 - 2vR\varphi \sin \frac{\varphi}{2} \\ &= v^2 + R^2\varphi^2 - vR\varphi^2 = v^2 \left(1 + \frac{R^2\varphi^2 - vR\varphi^2}{v^2}\right) \\ AS' &\approx v\sqrt{1 + \frac{R^2\varphi^2 - vR\varphi^2}{v^2}} \approx v \left(1 + \frac{R^2\varphi^2 - vR\varphi^2}{2v^2}\right) \\ &= v + \frac{R^2\varphi^2 - vR\varphi^2}{2v} \end{aligned} \quad (3)$$

将 SA 、 AS' 表式②、③代入①式,得

$$u + \frac{R^2\varphi^2 + uR\varphi^2}{2u} + nv + \frac{n(R^2\varphi^2 - vR\varphi^2)}{2v} = u + nv$$

即

$$\frac{R^2\varphi^2 + uR\varphi^2}{2u} + \frac{n(R^2\varphi^2 - vR\varphi^2)}{2v} = 0 \quad (4)$$

两边除以 $\frac{1}{2}R^2\varphi^2$, 即得

$$\frac{1}{u} + \frac{n}{v} = \frac{n-1}{R} \quad (5)$$

此即单球面折射的物像公式(14.1-1).

例 14-3 眼睛透过透镜观察物体的虚像.保持眼睛和物体不动,让透镜沿主轴前后移动,则像的位置将如何移动? 分别就透镜是发散的和会聚的两种情况讨论之.

解:1)设透镜是发散的.因物与眼均不动,可以物 S 为参考位置(图例 14-3a).当透镜移动时,物 S 与像 S' 的距离 x 也变动.由于像是虚的,且像在物右,

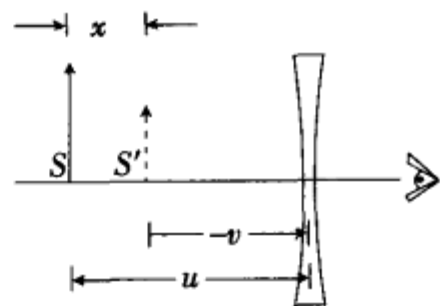
有 $x = u - (-v) = u + v$

而由物像公式

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$$

可得

$$v = \frac{fu}{u-f}$$



图例 14-3a

$$x = u + v = \frac{u^2}{u - f} = \frac{u}{1 - \frac{f}{u}}$$

注意,式中 $f < 0$ (发散透镜). 由上式可知:

当透镜右移, u 增大, x 也增大, 即像也右移;

当透镜左移, u 减小, x 也减小, 即像也左移.

即像与透镜移动方向相同.

2) 设透镜是会聚的, 仍以物 S 为参考位置. 这时, (虚) 像 S' 必在物 S 以左, 像与物的距离

$$x = -v - u = -(u + v)$$

以物像公式代入, 同理可得

$$x = \frac{u^2}{f - u}$$

由于物成虚像, 必有 $u < f$. 由上式, 当透镜右移, u 增大, x 也增大, 即像左移.

当透镜左移, u 减小, x 也减小, 即像右移.

即像与透镜移动方向相反.

例 14-4 凸透镜 L_1 和凹透镜 L_2 同轴放置, L_2 在 L_1 之右 40.0cm, L_1 的焦距为 20.0cm, L_2 的焦距为 40.0cm. 一小物放在 L_1 之左 30.0cm 处, 求它的像(位置和性质).

解: 物体先被 L_1 成像, 再被 L_2 成像. 第一次成像, 以 $u_1 = 30.0\text{cm}$, $f_1 = 20.0\text{cm}$ 代入高斯公式

$$\frac{1}{u_1} + \frac{1}{v_1} = \frac{1}{f_1}$$

可得 $v_1 = \frac{f_1 u_1}{u_1 - f_1} = \frac{20 \times 30}{30 - 20} = 60.0\text{cm}$ (实像), 横向放大率

$$K_1 = -\frac{v_1}{u_1} = -\frac{60}{30} = -2 \text{ (倒立)}$$

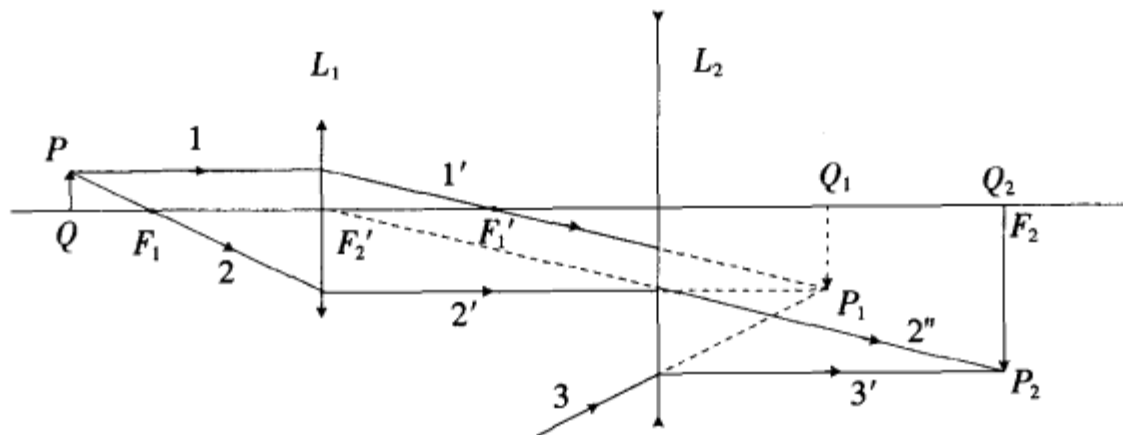
第二次成像, 由于 $60.0 > 40.0$, 第一次的实像成为第二次的虚物, 以 $u_2 = -(60.0 - 40.0) = -20.0\text{cm}$, $f_2 = -40.0\text{cm}$ 代入高斯公式

$$\frac{1}{u_2} + \frac{1}{v_2} = \frac{1}{f_2}$$

得 $v_2 = \frac{f_2 u_2}{u_2 - f_2} = \frac{-40 \times (-20)}{-20 - (-40)} = 40.0\text{cm}$ (实像).

横向放大率

$$K_2 = -\frac{v_2}{u_2} = -\frac{40}{-20} = +2 \text{ (正立)}$$



图例 14-4 本例光路图

两次成像的总放率

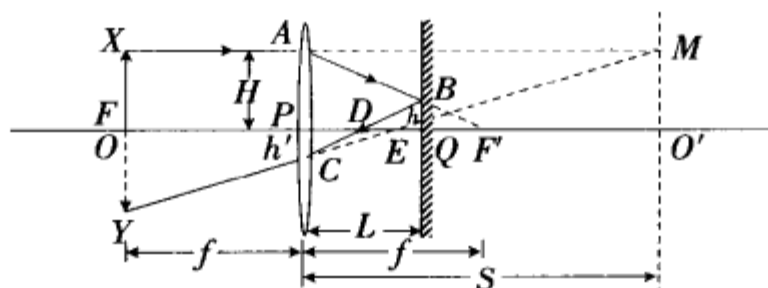
$$K = K_1 \cdot K_2 = -2 \times 2 = -4 \text{ (倒立)}$$

光路图如图例 14-4. 图中 1 为从 P 点发出且平行主轴的光, $1'$ 为其经 L_1 折射后的出射光, (过 F_1'), 2 为从 P 点发出且通过焦点 F_1 的光, $2'$ 为其经 L_1 折射后的出射光(平行主轴), $2''$ 为再经 L_2 折射后的出射光(延长线过 F_2'), 3 为射向 P_1 且过 F_2 的光, $3'$ 为其经 L_2 折射后的出射光(平行主轴).

例 14-5 (1)由薄凸透镜和平面镜组成的光学系统其成像性质与一凹面镜相仿. 某个这样的系统由焦距 $f=0.3\text{m}$ 的薄凸透镜置于平面镜前 $L=0.2\text{m}$ 组成. 考察物与像在同一位置这一特殊情况, 利用典型光线作光路图法求出与该系统具有相同成像性质的凹面镜与透镜的距离 S 及其焦距 f' .

(2)对于焦距为 f 的薄凸透镜置于平面镜前 L 处的光学系统, 求等效凹面镜与透镜的距离 S 及其焦距 f' .

解:(1)物与像重合的位置必在透镜的焦点 F 上. 因为自 F 发出的光经透镜后成平行主轴的光, 再经平面镜反射必沿原路返回又聚焦于焦点 F . 故可作如图例 14-5a 光路图, 求出等效凹面镜 M 的位置及其焦距.



图例 14-5a 用光路图求等效凹面镜的位置及焦距

设物高 $XO=3$, 由图得 $PD=0.1\text{m}$, $PC=1$, $PE=0.15\text{m}$, 设 CE 延长线与 XA (平行光轴) 延长线交于 M , M 即凹面镜所在位置. 由

$$\frac{PE}{PC} = \frac{EO'}{MO'}$$

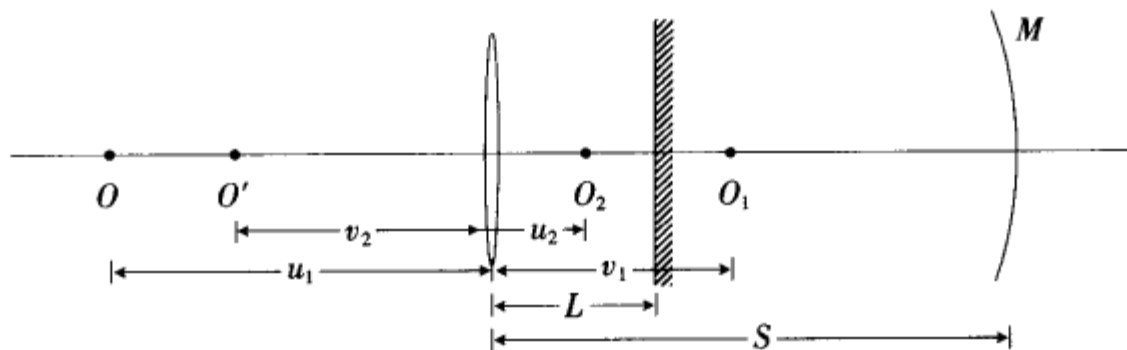
得

$$EO' = \frac{MO'}{PC} \cdot PE = \frac{3}{1} \cdot 0.15 = 0.45,$$

$$\therefore S = EO' + PE = 0.45 + 0.15 = 0.6\text{m}$$

$$f' = EO' = 0.45\text{m}$$

(2)设物在 O , 对透镜的物距为 u_1 , 经透镜成像于 O_1 , 再经平面镜成像于 O_2 , 再经透镜第二次成像于 O' , 如图例 14-5b 所示, 各距离如图所标, 则有:



图例 14-5b 计算等效凹面镜位置及焦距

$$v_1 = \frac{fu_1}{u_1 - f} \quad \text{①}$$

$$u_2 = L - (v_1 - L) = 2L - v_1 \quad \text{②}$$

$$v_2 = \frac{fu_2}{u_2 - f} \quad (3)$$

以①、②式代入③,得

$$v_2 = \frac{f(2Lu_1 - 2Lf - fu_1)}{2Lu_1 - 2Lf - 2fu_1 + f^2}$$

为求等效凹面镜 M 所在位置,可令 $v_2 = u_1$,由此得关于 u_1 的二次方程:

$$(f - L)u_1^2 + f(2L - f)u_1 - Lf^2 = 0 \quad (4)$$

此方程的二个解为

$$u_1^{(1)} = -\frac{fL}{f-L} \quad u_1^{(2)} = f$$

其中 $u_1^{(1)}$ 为负,表示在透镜右方,此即为 M 所在位置;因为当物在凹面镜处时,像亦在同一处.于是等效凹面镜位于透镜右方

$$S = \frac{fL}{f-L}$$

处. $u_1^{(2)}$ 则表示两倍焦距位置,故凹面镜焦距为

$$f' = \frac{1}{2}(f + S) = \frac{f^2}{2(f-L)}$$

解本题还有多种方法,读者可自行揣摩之.

例 14-6 一对双星的角间隔为 $0.05''$,问:

(1)需要多大口径的望远镜物镜才能分辨它们? 设光的平均波长为 5500\AA .

(2)此望远镜的角放大率应设计为多少比较合理?

(3)若所用目镜的放大倍数为 $8\times$,物镜焦距应为多少?

解:(1)应使物镜因衍射所能达到的最小分辨角至少等于双星的角间隔:

$$\delta\theta_m = 1.22 \frac{\lambda}{D} = 0.05'' = \frac{0.05}{60^2} \cdot \frac{\pi}{180} = 2.42 \times 10^{-7}$$

$$\therefore D = \frac{1.22\lambda}{\delta\theta_m} = \frac{1.22 \times 5500 \times 10^{-10}}{2.42 \times 10^{-7}} = 2.77(\text{m})$$

(2)为使此角间隔能被人眼所分辨,应使它放大至少 $1'$,故角放大率应为

$$M = \frac{1'}{0.05''} = \frac{60''}{0.05''} = 1200$$

(3)目镜的放大倍数为 $8\times$,可见其焦距

$$f_E = \frac{25}{8}(\text{cm})$$

而

$$\frac{f_o}{f_E} = M,$$

故物镜焦距

$$f_o = Mf_E = 1200 \times \frac{25}{8} = 3750(\text{cm}) = 37.5(\text{m}).$$

本章习题

14.1 在图 14.1-1 所示情况下,已知 $R = 10\text{cm}$, $n = 1.5$,物位于 O 点左方 30cm 处,物高 1.0cm ,求像的位置、大小和性质.

14.2 在图 14.1-1 所示情况下,若球面左方是折射率为 n_1 的媒质,球面右方是折射率为 n_2 的媒质,试导出物像公式和放大率.

14.3 一凹面镜的曲率半径为 21cm ,一物置于镜前 14cm 处,求像的位置、大小和性质,并作光

路图.

14.4 一很短的线状物体长为 L , 沿着焦距为 f 的球面镜的轴线放置, 与球面镜的距离为 u . (1) 求像的长度 L' . (2) L'/L 称为纵向放大率, 求纵向放大率与横向放大率的关系. [提示]

14.5 一很薄的、部分反射的玻璃平板与一凸面镜相距 b , 一点光源置于板前方距离 a 处, 使它在部分反射的玻璃板中的像与它在凸面镜中的像恰好重合. 如果 $b = 7.5\text{cm}$, 而凸面镜的焦距为 $f = -30\text{cm}$, 试求 a 并作光路图.

14.6 球面镜反射成像只对近轴光线成立. 探讨对宽光束能反射成像的反射面. 由物、像等光程性, 这样的面称为反射等光程面. 试分别求从点光源发出的宽光束经反射而成实像和虚像的反射等光程面. [提示]

14.7 (1) 证明: 对无穷远物点发出的宽光束(平行光束)的反射等光程面是旋转抛物面.

(2) 若某抛物面镜由圆桶中液体以恒定角速度 ω 绕竖直轴旋转而成, 求其焦距. [提示]

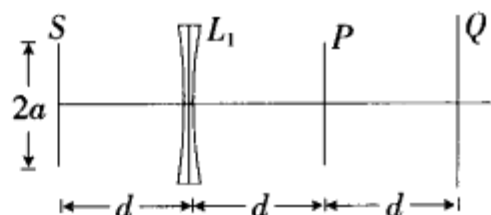
14.8 证明: 若旋转椭球体的折射率 $n = \frac{1}{e}$ (其中 e 为椭球体的偏心率), 则与轴线平行地从空气中射到椭球体上的宽光束将会聚到椭球的后焦点上. [提示]

14.9 一双凸透镜用折射率为 1.5 的玻璃制成, 一个球面的半径为另一球面半径的两倍, 透镜的焦距为 60mm , 求两球面的半径.

14.10 一物与其倒立实像相距 $d = 40.0\text{cm}$, 像的高度是物高的一半, 求形成该像的透镜的类型、焦距及透镜与物的距离.

14.11 对薄透镜而言, 凸透镜必为会聚透镜, 凹透镜必为发散透镜. 试证明之.

14.12 半径均为 a 的圆盘形发光面 S 和不透光圆盘 P 共轴放置, 相距 $2d$, 在 P 后相距 d 处放有光屏 Q , 在 S 与 P 的正中间放有凹透镜 L_1 , 焦距为 $-d$ (图习 14.12).



图习 14.12

(1) 求在 S 照明下在 Q 上形成的 P 的本影和半影的半径 r_1 , r_2 (透镜的半径视为很大).

(2) 若将凹透镜换成凸透镜 L_2 , 位置和焦距大小不变, 求此时 P 的本影与半影的半径 R_1, R_2 .

14.13 把远处灯的像距 v 当作透镜的焦距, 为使误差不超过 $p\%$, 灯与透镜的距离 l 应为多少?

14.14 点光源 S 与屏 M 相距 L , 在两者之间放一凸透镜, 使 S 位于其光轴上, 凸透镜的焦距为 f ($\frac{L}{4} < f < L$), 直径为 D . 为使 S 经透镜折射后在光屏上形成的光斑最小, 透镜与光源 S 的距离 u 应为多少? 这时光斑的直径 d 为多少? [提示]

14.15 将球面半径各为 R_1 和 R_2 , 折射率为 n 的双凸透镜放在折射率各为 n_1 (左方) 和 n_2 (右方) 的介质中, 求透镜的物像公式和焦距.

14.16 试由费马原理导出薄透镜物像公式. 设薄透镜为双凸的, 球面半径各在 R_1 和 R_2 , 透镜材料的折射率为 n , 放在空气中. [提示]

14.17 已知一薄凸透镜的焦距为 f . 设物是一半径为 R 的球面, 球心在光轴上. 试分析像仍是一球面的可能性及条件. [提示]

14.18 想用两个薄凸透镜, 最后在物所在处形成一个与物大小相等的倒立的虚像. 已知靠近物体的那个透镜的焦距为 f_1 , 物体与此透镜的距离为 u_1 , 试求第二个透镜的焦距 f_2 及它与第一个透镜的距离 L . [提示]

14.19 两个相同的平凸透镜, 焦距为 f , 凸球面半径为 R , 今将两透镜分别镀银, 一个镀平面, 一个镀凸球面. 让光都从未镀银面入射, 求这两个镀银透镜的焦距 f_1 和 f_2 . [提示]

14.20 一架天文望远镜的角放大率为 36, 物镜的直径为 72mm , 为使所有从远处点物(位于轴上)发出而进入物镜的光全部进入目镜, 目镜的直径至少应多大?

14.21 某显微镜物镜的焦距为 4.2cm , 目镜焦距为 7.7cm , 物镜与目镜的距离是 25cm . (1) 为使物

镜所成的像恰好落在目镜的焦平面上,物应置于物镜焦平面前多少距离处?(2)物镜的横向放大率 K 是多少?(3)目镜的角放大率 M_E 是多少?(4)显微镜的总角放大率 M 是多少?

14.22 正常眼当眼球放松观察无穷远时,像落在视网膜上.当观察较近物体时,睫状肌压缩晶状体,使眼睛的焦距缩短.已知放松时眼球的物方焦距为 17.1mm ,像方焦距为 22.8mm ,为观察 36.0cm 远处的物体,眼球的像方焦距应为多少? [提示]

14.23 在一般照相机中,镜头的焦距是固定的,可调节镜头与底片的距离使不同距离处的拍摄对象都能成像在底片上.某架小型照相机镜头的焦距为 50mm ,为使离镜头 1.2m 至无穷远处的物体都能拍摄,求镜头与底片间距离的调节范围.

14.24 某摄影者站在离铁轨 44.5m 处,视线垂直于铁轨,他用焦距为 3.6cm 的相机拍摄正以 135km/h 的速度行驶的火车.为使底片上像的模糊斑不超过 0.75mm ,求最大曝光时间.

14.25 伽利略望远镜(观剧镜)看到物体的像是正立的.这只要将目镜改用凹透镜即可.画出观剧镜的成像光路图,并证明其视角放大率表式与开普勒望远镜相同. [提示]

14.26 由于显微镜物镜的衍射,物镜所成像的最小分辨角仍可用(14.3-7)式表示.根据显微镜的性能,通常显微镜的分辨本领不用最小分辨角而用最小分辨距离来衡量.所谓最小分辨距离,就是在最小分辨角情况下所能分辨的物体上两点的最近距离.一台显微镜的物镜焦距 $f_o = 1.91\text{mm}$,有效直径为 3.50mm ,目镜焦距 $f_E = 50\text{mm}$.已知可见光平均波长为 5500\AA .求(1)最小分辨距离;(2)有效放大率;(3)显微镜筒长. [提示]

狭义相对论

§ 15.1 牛顿时空观与力学相对性原理

牛顿力学的基础是牛顿时空观. 这种时空观的本质是把时间和空间看成与物质及其运动无关的独立存在. 牛顿在《自然哲学的数学原理》中写道:“绝对的、真正的和数学的时间……由于其本性而在均匀地, 与任何其他外界事物无关地流逝着”, “绝对的空间, 就其本性而言, 是与外界任何事物无关而永远是相同的和不动的”. 牛顿声称自己所研究的运动就是在“绝对空间”与“绝对时间”中进行的“绝对运动”. 只有以绝对空间和绝对时间作为量度运动的参照系, 或者以其他作绝对匀速运动的物体(群)为参照系, 惯性定律才成立. 这样的参照系就是惯性系.

在牛顿力学中, 不同惯性系 S 和 S' 的空间和时间的量度之间满足伽利略变换:

$$\begin{cases} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x = x' + ut' \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases} \quad (15.1-1)$$

在这种变换下, 物体的长度、两事件之间的时间间隔是绝对的, 即相对不同参照系其数值是不变的. 因而同时性也是绝对的, 即在某一参照系不同地点同时发生的两个事件, 相对于另一参照系也是同时发生的. 时间间隔和同时性的绝对性, 从伽利略变换(尤其从其第四式 $t = t'$)看是不言而喻的. 为说明物体长度的绝对性, 我们来看一把沿 x 轴放置的尺的长度的量度. 设尺静止在 S' 系上, 在该系中, 其长度

$$l' = x_2' - x_1'$$

相对 S 系, 尺在运动, 由伽利略变换, 尺的坐标满足

$$x_1' = x_1 - ut_1$$

$$x_2' = x_2 - ut_2$$

为量度运动尺的长度, 应同时测量其两端坐标, 即应使 $t_1 = t_2$, 于是有

$$l' = x_2' - x_1' = x_2 - x_1 - u(t_2 - t_1) = x_2 - x_1 = l$$

在伽利略变换下, 物体的位置和速度则是相对的. 例如, 沿 x 方向的运动速度之间满足相加法则

$$v' = v - u$$

或

$$v = v' + u \quad (15.1-2)$$

而物体的加速度相对不同惯性系又是相同的, 即

$$a' = a$$

两物体的相对位置和相对速度也不因惯性系不同而改变, 而力通常是两物体相对位置和相对速度的函数, 质量在牛顿力学中被认为是与运动无关的恒量, 于是牛顿运动定律的形式在不同惯性系下保持不变. 这就是力学相对性原理.

正是这个力学相对性原理, 成了对牛顿绝对时空观怀疑的起点. 因为根据力学相对性原理, 在任何惯性系中, 力学现象具有相同的规律, 因而无法根据力学现象确定绝对空间在哪里, 甚至无法判定绝对空间(和绝对时间)的存在. 直到人类认识了光的电磁波本性后, 才又重新唤起人们对寻找绝对空间的热情. 基于对光(作为一种电磁波)的传播媒质“以太”存在的信念及光在宇宙中到处传播着的事实, 人们相信“以太”就是牛顿的绝对空间, 至少“以太”应相对绝对空间静止. 只要找到以太, 也就找到了绝对空间.

一时间,寻找以太成了物理学的重大课题.

但是人们寻找以太的种种努力,又一次遭到了失败.其中最有代表性的要数迈克尔逊-莫雷实验.它是19世纪八十年代由迈克尔逊和莫雷两位物理学家设计的利用光的干涉来测量地球相对以太运动速度的精巧实验.他们用一块半透明平面镜将入射光束分为互相垂直的两束光,经平面镜 M_1 、 M_2 反射后再经半透明镜反射又重新会合在一起(图 15.1-1).调节 M_1 、 M_2 的位置,使两光束的几何路程相同,设均为 l .如果地球相对以太静止,两束光重新会合后没有时间差.如果地球相对以太以速度 u 向右运动,犹如以太风从右边吹来,由于光在以太中的传播速度为 c ,根据速度相加法则,1 光束从 O 点出发又回到 O 点经历的时间为

$$t_1 = \frac{l}{c-u} + \frac{l}{c+u} = \frac{2l}{c} \frac{1}{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

2 光束从 O 出发又回到 O 点所经历的时间则为

$$t_2 = \frac{2l}{\sqrt{c^2-u^2}} = \frac{2l}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

两光束重新在 O 点会合时的时间差

$$\Delta t = t_1 - t_2 \approx \frac{l}{c} \cdot \frac{u^2}{c^2}$$

对应于光程差

$$\Delta = c\Delta t = l \frac{u^2}{c^2}$$

尽管这一光程差很小,但迈克尔逊和莫雷巧妙地利用干涉效应,使这一光程差可以在实验中观察到*.实验在不同条件下多次重复,然而始终未观察到干涉条纹的任何移动.这一否定结果对牛顿的绝对时空观念和经典的速度相加法则提出了严重的挑战.

对牛顿力学的另一挑战与粒子的极限速率有关.实验发现,不论使电子获得多大的能量,电子的速率不会无限制地增大,而是趋向于一个极限,这个极限就是光速.对这一现象的合理解释是电子(及任何粒子)的质量随速率而增大(图 15.1-2):

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

式中 m_0 称为粒子的静质量, v 为粒子的速率, m 即粒子在速率 v 时具有的质量.这一结论直接与牛顿力学中质量与运动无关的观念相抵触.

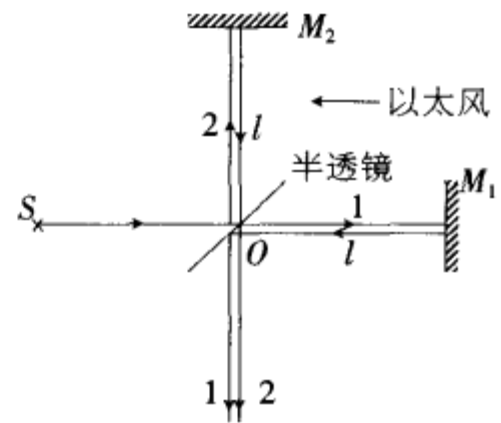


图 15.1-1
迈克尔逊-莫雷实验示意图

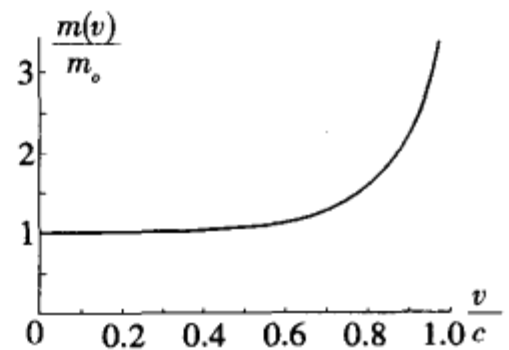


图 15.1-2
电子质量随速率的变化

§ 15.2 光速不变原理与狭义相对性原理

在迈克尔逊-莫雷等实验遭到失败、牛顿力学遇到种种困难的感召下,在电磁理论的启示下,经过

* 实际实验时是将整个装置绕通过 O 点的竖直轴缓慢旋转 90° ,以观察干涉条纹的连续移动.

慎密思考,爱因斯坦认为需要修正的是牛顿力学而非电磁理论,遂于1905年提出狭义相对论.这一理论是建立在以下两条基本原理的基础上的:

1. 狭义相对性原理——一切物理规律在任何惯性系中具有相同的形式.这一原理是爱因斯坦对力学相对性原理的推广,又称爱因斯坦相对性原理.
2. 光速不变原理——真空中的光速对任何观察者来说都是相同的.

§ 15.3 时间膨胀与长度收缩

我们现在来考察光速不变和爱因斯坦相对性原理所带来的效应.

1. 同时性的相对性

设车厢(S' 系)以速度 u 向右运动,当车厢中点 O' 经过地面上 O 点时,从 O' 点发出一光脉冲,在车厢中的观测者看来,光信号将同时到达车厢的前后壁 B' 和 A' (图 15.3-1a),但在地面(S 系)上的观测者看来,光脉冲从 O 点发出,由于车厢后壁向 O 点驶近,前壁则驶离 O ,故光信号先到达 A' ,后到达 B' (图 15.3-1b).

同样,当车厢中点 O' 经过地面上 O 点时,从地面上 O 点发出一光脉冲.在地面(S 系)的观测者看来,光信号将同时到达离 O 点等距离的前后两挡板 A 、 B (图 15.3-2a),但在车厢(S' 系)中的观测者看来,光脉冲从 O' 发出,由于 B 挡板在向 O' 点靠近, A 挡板在远离 O' 点,故光信号先到达挡板 B ,后到达挡板 A (图 15.3-2b).

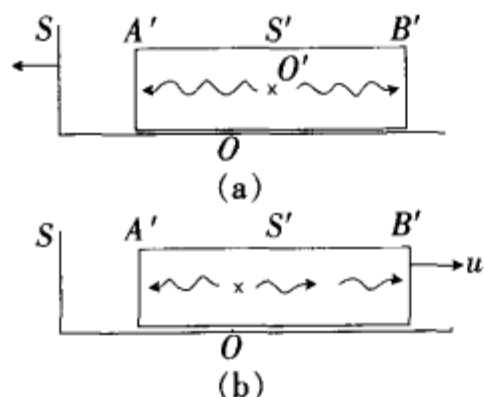


图 15.3-1 相对 S' 系(车厢),
从 O' 发出的光同时到达 A' 、
 B' (a), 相对 S 系(地面), 光从 O
发出, 先到达 A' , 后到达 B' (b)

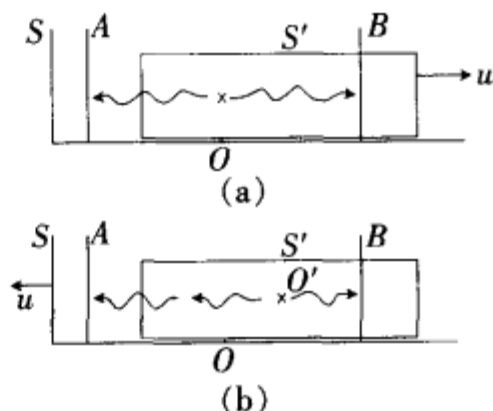


图 15.3-2 相对 S 系(地面)
从 O 发出的光同时到达 A 、
 B (a), 相对 S' 系(车厢), 光从
 O' 发出, 先到达 B , 后到达 A (b)

由此可见,在一个参照系中的观测者认为是同时发生(在不同地点)的两个事件,在另一个参照系的观测者看来并不是同时发生的.这是真空中光速不变的结果.如果认为光速也满足速度相加法则,同时性就不会被破坏.

2. 时间膨胀

设有光脉冲从 S' 系中的 A' 发出沿 y' 行进 d 后被一镜面 M 反射返回到同一地点 A' , 共经历时间

$$\Delta t' = \frac{2d}{c}$$

(图 15.3-3a) 设 S' 系以速度 u 沿 x 方向相对 S 系运动, 在 S 系的观测者看来, 光信号从 A 点发出, 返回至 B 点, 发出与返回并不发生在同一地点, 光行进的也不是同一直线, 而是一等腰三角形的两斜边, 设光从发出至返回共需时 Δt , 则有

$$\Delta t = \frac{2\sqrt{d^2 + \left(\frac{u\Delta t}{2}\right)^2}}{c}$$

解之,得

$$\Delta t = \frac{2d}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

(图 15.3-3b)发生在同一地点的两事件的时间间隔称为原时间隔(或本征时间),用 Δt_0 表示,则由上式得

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (15.3-1)$$

以上的推导虽然是对特殊的时钟(光信号钟)进行的,但其结论具有普遍意义.可见,运动的时钟走慢了.这一效应称为时间膨胀.

3. 长度收缩

设有长为 l' 的尺 $A'B'$ 沿 x' 轴静置于 S' 系上,设 S' 系以速度 u 向右运动.为在 S 系上测量尺的长度,可在 S 系的 x 轴上取一定点 x_1 ,则在 S 系上的观测者看来, B' 端先经过 x_1 点,设经 Δt 时间后, A' 点再经过 x_1 点(图 15.3-4),于是在 S 系看来,尺长

$$l = u\Delta t$$

其中 Δt 为 B' 点和 A' 点经过同一 x_1 点的时间间隔,此为原时间隔.

对 S' 系上的观测者而言, x_1 过 B' 和 x_1 过 A' 发生在不同地点 A' 、 B' ,其时间间隔应比原时间隔膨胀,而有

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

在 S' 系上的观测者看来, x_1 点以速度 u 向左运动,棒长为 $l' = u\Delta t'$,以此及上式代入前式,得

$$l = u\Delta t = u\Delta t' \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = l' \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

以 l_0 表示尺的静长(或称本征长度),即在 S' 系中的长度 l' ,则有

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \quad (15.3-2)$$

可见运动的尺缩短了.这一效应称为长度收缩.

例 15.3-1 在图 15.3-3 中,当光脉冲从 A' 处发出时,设 S' 系上 A' 处的钟与 S 系上 A 处的钟均过 0 点,当光脉冲返回 A' 处时, A' 处钟的读数为 $\Delta t'$, B 处的钟读数为 Δt ,且 $\Delta t > \Delta t'$,对此, S' 系上的观测者并无异议.那么, S' 系的观测者是否也承认自己的钟走慢了?

解: S' 系上的观测者并不承认自己的钟走慢了.他认为 S 系上的异地钟未校正同步.在他看来, A 处的钟与 B 处的钟并不同时过 0 点,而是 B 处的钟先经过 0 点,当 A 过 0 点时, B 钟已超过 0 点,所以当光返回 A' 点(此时 B 与 A' 重合), B 的读数大了.在 S' 系的观测者看来,在光往返一周的过程中, S 系上钟走过的时间间隔反比自己钟的少,即他认为 S 系上的钟走慢了.

例 15.3-2 在图 15.3-4 中,在 S 系中的观测者看来,尺是缩短了.那么, S' 系上的观测者是否承认自己的尺缩短了?

解: 也可用同时性的相对性来解释这一点.在 S 系上观测者看来,当 A' 过 x_1 点时, B' 过 x_2 点,两者同时,尺长 $l = x_2 - x_1$;但在 S' 观测者看来, B' 先过 x_2 , A' 后过 x_1 ,当 A' 过 x_1 时, B' 已超过 x_2 ,所以尺长 $> x_2 - x_1$, S 系观测者用 $x_2 - x_1$ 表示尺长,所以尺缩短了.

例 15.3-3 飞船以第一宇宙速度 $u = 7.9\text{km/s}$ 相对地面匀速飞行,从 A 地飞到 B 地,飞船上的钟

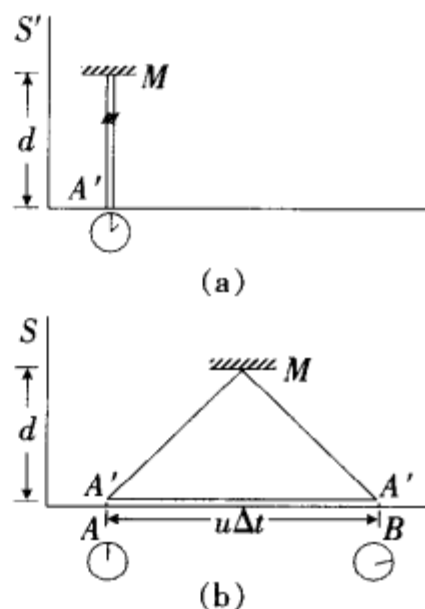


图 15.3-3 时间膨胀

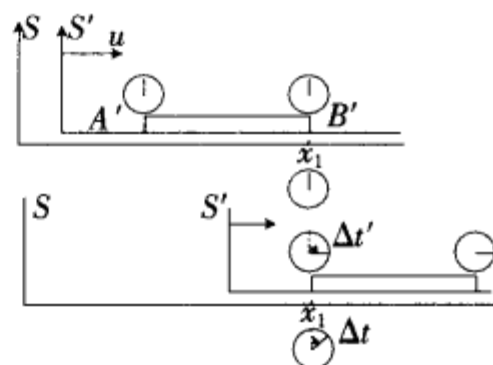


图 15.3-4 长度收缩

指示花了 5.0 s, 求地面上 A 与 B 的距离.

解: 由于时间膨胀, 在地面观测者看来, 飞船从 A 地飞到 B 地花时

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

故 A 与 B 的距离

$$\begin{aligned} l = u\Delta t &= \frac{u\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \approx u\Delta t' \left(1 + \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2}\right) \\ &= 7.9 \times 5 \left[1 + \frac{1}{2} \frac{7.9^2}{(3.0 \times 10^8)^2}\right] = 39.5 \text{ (km)} \end{aligned}$$

例 15.3-4 宇宙射线与大气相互作用能产生 π 介子, π 介子会发生衰变而放出 μ 子. 这些 μ 子的速度 v 为 $0.998c$. 已知静止 μ 子的平均寿命 t_0 为 2.2×10^{-6} s, 试问当 π 介子在 8km 高空发生衰变时, 沿竖直方向放出的 μ 子能否到达地面?

解: 如果没有时间膨胀, μ 子在平均寿命内行进的距离 $l_0 = t_0 \cdot v = 2.2 \times 10^{-6} \times 0.998 \times 3.0 \times 10^8 = 658.7 \text{ m} < 8 \text{ km}$, 显然到不了地面. 但由于时间膨胀效应, 在地面参照系看来, 其平均寿命

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

故其平均行进距离

$$\begin{aligned} l = vt &= \frac{vt_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{0.998 \times 3.0 \times 10^8 \times 2.2 \times 10^{-6}}{\sqrt{1 - \left(\frac{0.998c}{c}\right)^2}} \\ &= 1.04 \times 10^4 \text{ (m)} = 10.4 \text{ (km)} > 8 \text{ (km)} \end{aligned}$$

故可以到达地面.

§ 15.4 洛仑兹变换

1. 洛仑兹变换

本节将导出在狭义相对论情况下不同惯性系之间坐标与时间的变换, 这一变换常称为洛仑兹变换, 因为它先由洛仑兹在爱因斯坦提出狭义相对论之前导出. 但洛仑兹在导出它时并未用爱因斯坦的崭新的时空观念, 是爱因斯坦赋予洛仑兹变换以全新的意义. 洛仑兹变换与伽利略变换(与牛顿时空观一致) 很不相同, 但当参照系间的相对速度比光速小得多时, 两者趋于一致.

设 S 系和 S' 系的坐标轴互相平行, x 轴与 x' 轴彼此重合, S' 系以速度 u 沿 x 正方向匀速运动, 在 $t = t' = 0$ 时, 两坐标系的原点 O 与 O' 重合. 现来寻找某一事件在 S 系中的时空坐标 (x, y, z, t) 与在 S' 系中的时空坐标 (x', y', z', t') 间的关系. 其实, 只需找出 (x, t) 与 (x', t') 的关系即可, 因为 S' 系运动沿 x 方向, (y, z) 与 (y', z') 应保持不变. 设在 S' 系中, 事件发生在与 $y'z'$ 平面距离 x' 处, 由长度收缩, 在 S 系看来, 此距离为 $x' \sqrt{1 - u^2/c^2}$, 而 $y'z'$ 平面离 yz 平面的距离显然为 ut (图 15.4-1), 于是该事件的 x 坐标为

$$x = ut + x' \sqrt{1 - u^2/c^2}$$

由此解得

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (15.4-1)$$

同理,若在 S 系看来事件发生在与 yz 平面距离 x 处,由长度收缩,在 S' 系看来,此距离为 $x\sqrt{1-u^2/c^2}$,而 yz 平面离 $y'z'$ 平面距离为 ut' (图 15.4-2),于是,事件的 x' 坐标为

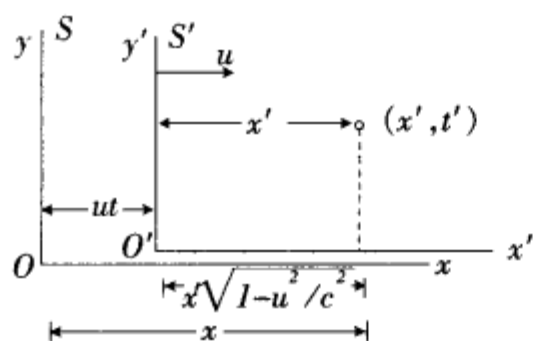


图 15.4-1 洛伦兹变换的推导: S 系中测量

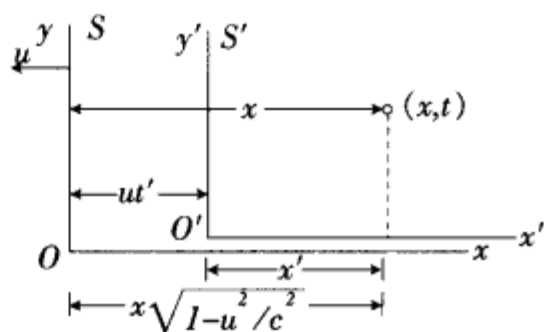


图 15.4-2 洛伦兹变换的推导: S' 系中测量

$$x' = x\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} - ut'$$

由此解得

$$x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \quad (15.4-2)$$

由(15.4-1)式和(15.4-2)式消去 x' ,即可求得 t' 与 x, t 的关系:

$$t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \quad (15.4-3)$$

由此得洛伦兹变换:

$$\begin{cases} x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \end{cases} \quad (15.4-4)$$

及其逆变换:

$$\begin{cases} x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \frac{t' + \frac{u}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \end{cases} \quad (15.4-5)$$

当 $u \ll c$,略去 u^2/c^2 ,洛伦兹变换过渡到伽利略变换.

2. 速度变换

为简单起见,这里只考察沿 x 方向的速度变换.

设有物体从 $t = t' = 0$ 开始自原点出发沿 x' 轴匀速运动, 经 t' 时间后到达 $x' = v't'$ 点. 在 S' 系中, 物体到达这一事件的时空坐标为 $(x' = v't', t')$. 设在 S 系中, 这一事件的时空坐标为 (x, t) , 由洛伦兹变换, 有

$$x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{v't' + ut'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{(v' + u)t'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

$$t = \frac{t' + \frac{u}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{t' + \frac{u}{c^2}v't'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{\left(1 + \frac{u}{c^2}v'\right)t'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

在 S 系中, 有 $x = vt$, 则

$$v = \frac{x}{t} = \frac{v' + u}{1 + \frac{u}{c^2}v'} \quad (15.4-6)$$

其逆变换为

$$v' = \frac{v - u}{1 - \frac{u}{c^2}v} \quad (15.4-7)$$

以上两式即速度变换. 当 $u \ll c, v' \ll c$ 时, 两式过渡为经典速度相加法则.

例 15.4-1 用洛伦兹变换说明同时性的相对性.

解: 设有两事件, 在 S 系中的时空坐标为 (x_1, t_1) 和 (x_2, t_2) , 由洛伦兹变换, 在 S' 系中的时间为

$$t_1' = \frac{t_1 - \frac{u}{c^2}x_1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

$$t_2' = \frac{t_2 - \frac{u}{c^2}x_2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

$$t_2' - t_1' = \frac{t_2 - t_1 - \frac{u}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

如果 $t_2 = t_1$, 但 $x_2 \neq x_1$, 就有 $t_2' \neq t_1'$. 可见, 在 S 系中同时在不同地点发生的两事件, 在 S' 系中不再是同时发生的. 同理有

$$t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1' + \frac{u}{c^2}(x_2' - x_1')}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

如果 $t_2' = t_1'$, 但 $x_2' \neq x_1'$, 则 $t_2 \neq t_1$, 即在 S' 系中同时在不同地点发生的两事件, 在 S 系中不再是同时发生的.

例 15.4-2 设有一飞行器以 $u = 0.6c$ 的速度在地面上空飞行. 如果这时从飞行器上沿其前进方向发射一物体, 其相对飞行器的速度为 $0.8c$, 问从地面上观察, 该物体的速度多大?

解: 以 $v' = 0.8c, u = 0.6c$ 代入 (15.4-6) 式, 得

$$v = \frac{v' + u}{1 + \frac{u}{c^2}v'} = \frac{0.8c + 0.6c}{1 + \frac{0.8 \times 0.6}{c^2}c^2} = 0.946c$$

此即物体相对地面的速度.

例 15.4-3 试验证真空中光速在任何惯性系中保持不变.

解:以 $v' = c$ 代入(15.4-6)式,得

$$v = \frac{c+u}{1+c \rightarrow \frac{u}{c^2} c} = \frac{c+u}{1+\frac{u}{c}} = c$$

得证.若光速与 u 反向,结果不变(只需以 $v' = -c$ 代入 15.4-6 式即可)

例 15.4-4 天津和北京相距 120km.北京某日上午 9 时正有一老者去世,同日天津于北京时间上午 9 时 0 分 0.0003 秒有一婴儿诞生.试问,在以 $0.8c$ 的速率沿北京到天津方向飞行的飞行器中观测,这两个事件的时间间隔是多少?何者发生在前?

解:设地面为 S 系,飞行器为 S' 系,在 S 系中,北京坐标为 x_1 ,天津坐标为 x_2 ,老者去世时间为 t_1 ,婴儿诞生时间为 t_2 ,由题意, $u = 0.8c$, $x_2 - x_1 = 120\text{km}$, $t_2 - t_1 = 0.0003\text{s}$,由洛伦兹变换有

$$\begin{aligned} t_2' - t_1' &= \frac{t_2 - t_1 - \frac{u}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{0.0003 - \frac{0.8c}{c^2} \times 1.2 \times 10^5}{\sqrt{1 - 0.8^2}} \\ &= -\frac{1}{3} \times 1 \times 10^{-4}(\text{s}) = -3.33 \times 10^{-5}(\text{s}) \end{aligned}$$

可见在 S' 系中看来,婴儿诞生在前,比老者去世早 3.33×10^{-5} 秒,先后次序颠倒了.

§ 15.5 相对论的动量和能量

1. 质速关系

上文曾提到,当粒子速度接近光速时,实验发现其质量迅速增大,这是相对论的一个重要结果.现以一对粒子的完全非弹性碰撞为例来说明这一点,并导出质速关系.

设在 S' 系中有一对全同粒子 A 、 B 沿 x' 轴相向运动,速度均为 v ,正碰后成为一个复合粒子,且静止不动(图 15.5-1a),设 S' 系以速度 v 沿同一直线相对 S 系运动,则在 S 系中,粒子 B 静止不动,粒子 A 以速度 V 运动,其中 V 可由速度变换求得:

$$V = \frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}} \quad (15.5-1)$$

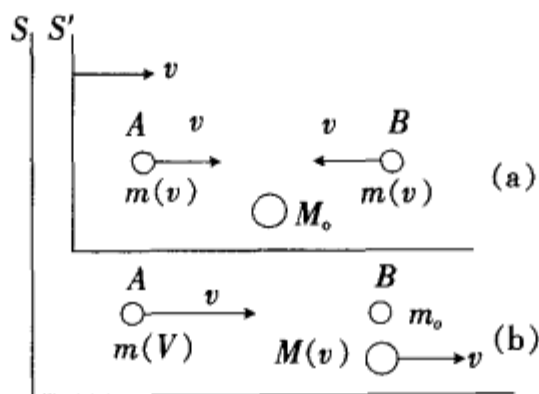


图 15.5-1 两个粒子的完全非弹性碰撞,用以导出质速关系.(a)在零动量系(S' 系)中观测(b)在其中一个粒子静止的参照系(S 系)中观测

碰后,复合粒子以速度 v 运动.

我们现在 S 系中列出此过程的动量和质量关系.相对论中认为动量和质量仍应守恒.可以设想质量为速率的函数,于是有

$$\begin{aligned} m(V)V &= M(v)v && \text{(动量守恒)} \\ m(V) + m_0 &= M(v) && \text{(质量守恒)} \end{aligned}$$

由以上两式消去 M , 化简得

$$\frac{m(V)}{m_0} = \frac{v}{V-v} \quad (15.5-2)$$

由(15.5-1)式, 可将上式右边化为 V 的显函数. 由(15.5-1)式,

$$\frac{V}{c^2}v^2 + V - 2v = 0$$

即

$$v^2 - \frac{2c^2}{V}v + c^2 = 0$$

由此解得

$$v = \frac{c^2}{V} \pm \sqrt{\left(\frac{c^2}{V}\right)^2 - c^2} = \frac{c^2}{V} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\right)$$

当 $v \ll c$ 时, 显然应有 $V = 2v$, 即 $v = \frac{V}{2}$, 可见上式根号前应取负号, 而有

$$v = \frac{c^2}{V} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\right)$$

于是

$$\begin{aligned} V - v &= V - \frac{c^2}{V} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\right) = \frac{c^2}{V} \left(\frac{V^2}{c^2} - 1 + \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\right) \\ &= \frac{c^2}{V} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\right) \end{aligned}$$

代入(15.5-2)式, 得

$$\begin{aligned} \frac{m(V)}{m_0} &= \frac{v}{V-v} = \frac{\frac{c^2}{V} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\right)}{\frac{c^2}{V} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\right)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ \therefore m(V) &= \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

由于 V 的任意性, 有

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (15.5-3)$$

(15.5-3)式即质速关系. 它与实验完全符合.

2. 相对论动量

相对论中, 动量仍定义为质量与速度的乘积, 但质量是速率的函数, 于是动量

$$\mathbf{p} = m(v)\mathbf{v} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (15.5-4)$$

其实, 相对论动量概念在上文导出质速关系时已经用到过.

3. 相对论能量

相对论中, 力仍定义为动量的时间变化率:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \mathbf{v} \right] \quad (15.5-5)$$

只是由于质量是速率的函数, $F = ma$ 不再成立.

相对论中, 动能定理仍然成立, 但动能的形式将不同. 设有力 F 沿着粒子的运动方向施加于粒子. 力的元功

$$\begin{aligned} Fds &= \frac{dp}{dt} ds = v dp = v d(mv) \\ &= v^2 dm + mvdv \end{aligned}$$

由质速关系(15.5-3)式, 有

$$\begin{aligned} m^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) &= m_0^2 \\ m^2 c^2 - m^2 v^2 &= m_0^2 c^2 \end{aligned}$$

即

两边微分:

$$\begin{aligned} c^2 2m dm - m^2 2v dv - v^2 2m dm &= 0 \\ c^2 dm &= mvdv + v^2 dm \end{aligned}$$

即

代入 Fds 表式:

$$Fds = c^2 dm$$

由动能定理,

$$Fds = dE_k$$

于是有

$$dE_k = c^2 dm$$

两边积分:

$$E_{k2} - E_{k1} = \int_1^2 c^2 dm$$

若取初态 $v_1 = 0$, 则 $E_{k1} = 0$, 终态 $v_2 = v$, 对应的动能为 E_k , 质量为 $m(v)$, 则有

$$E_k = m(v)c^2 - m_0c^2$$

式中 m_0c^2 与粒子处于静止状态的能量相对应, 称为粒子的静能. $m(v)c^2$ 为粒子处于速率为 v 的运动状态的能量, 它在数值上等于动能 E_k 与静能 m_0c^2 之和, 爱因斯坦把 $m(v)c^2$ 称为粒子的总能量, 用 E 表示, 即

$$E = m(v)c^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} c^2 \quad (15.5-6)$$

式中 v 为粒子的速度. (15.5-6)式常称为质能关系. 粒子的动能等于总能量与静能之差:

$$E_k = m(v)c^2 - m_0c^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} c^2 - m_0c^2 \quad (15.5-7)$$

当 $v \ll c$ 时, $1/\sqrt{1 - v^2/c^2} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$, 于是

$$E_k \approx m_0c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) - m_0c^2 = \frac{1}{2} m_0v^2$$

与牛顿力学中动能表式相同. 这表明牛顿力学中动能表式是相对论中动能表式(15.5-7)在 $v \ll c$ 时的特例.

质能关系式(15.5-6)大大拓宽了我们关于质量和能量这两个概念的认识, 把质量的变化和能量的变化联系起来. 当粒子的质量改变 Δm 时, 必伴随着总能量的变化 ΔE , 两者的关系为

$$\Delta E = \Delta mc^2 \quad (15.5-8)$$

核反应中所释放的巨大能量, 正是反应前后粒子质量微小变化(亏损)的结果. 原子弹和核反应堆就是根据这一原理制成的. 尽管质能关系原是爱因斯坦的一种假设, 但现已为大量实践所证实, 它为人类开发利用能源提供了一条新途径.

4. 相对论能量与动量的关系

由质能关系(15.5-6)式

$$E = mc^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} c^2$$

可得

$$E^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = m_0^2 c^4$$

即

$$E^2 - \frac{E^2 v^2}{c^2} = m_0^2 c^4$$

但 $E = mc^2$, $E^2 v^2 / c^2 = m^2 v^2 c^2 = p^2 c^2$, 上式化为

$$E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4$$

或

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4 \quad (15.5-9)$$

此即相对论能量与动量的关系式, 可用图 15.5-2 所示的三角形表示.

对于静质量 $m_0 = 0$ 的粒子, 上式变为

$$E = pc \quad (15.5-10)$$

光子就是静质量为零的粒子. 对光子, 有

$$E = h\nu$$

故光子的动量

$$p = h\nu/c$$

式中 h 为普朗克常数, ν 为光的频率. 可见光子的能量和动量均为频率的函数(光子的速度恒为 c).

例 15.5-1 两个静质量均为 m_0 的粒子以 $\beta = \frac{v}{c} = 0.5$ 的速率从一共同点反向运动, 求

(1) 每个粒子相对共同点的动量和能量;

(2) 一个粒子在另一个粒子处于静止的参照系中的动量和能量.

解: (1) 每个粒子的动量

$$p = mv = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \beta c = \frac{m_0}{\sqrt{1 - 0.5^2}} \cdot 0.5c = 0.58m_0c$$

每个粒子的能量

$$E = mc^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} c^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - 0.5^2}} c^2 = 1.15m_0c^2$$

(2) 在一个粒子处于静止的参照系中另一个粒子的速度

$$v' = \frac{0.5c + 0.5c}{1 + \left(\frac{0.5c}{c}\right)^2} = 0.8c$$

于是在这个参照系里, 粒子的动量

$$p' = \frac{m_0}{\sqrt{1 - 0.8^2}} \times 0.8c = 1.33m_0c$$

能量

$$E' = \frac{m_0}{\sqrt{1 - 0.8^2}} c^2 = 1.67m_0c^2$$

例 15.5-2 在北京的正、负电子对撞机中, 电子可以被加速到动能 $E_k = 2.8 \times 10^3 \text{MeV}$. 这种电子的速率比光速差多少米/秒? 这样的电子动量多大? 已知电子的静能为 $E_0 = 0.511 \text{MeV}$.

解: 电子的总能量

$$E = E_k + E_0$$

由质能关系

$$E = mc^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} c^2$$

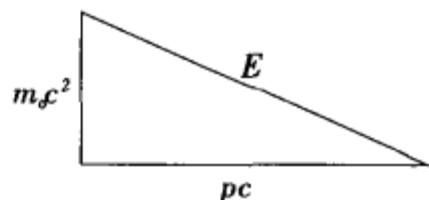


图 15.5-2
能量-动量三角形

电子动能

$$E_k = E - E_0 = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

$$\frac{E_k}{E_0} = \frac{m_0c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)}{m_0c^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1$$

由此解得

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \left(1 + \frac{E_k}{E_0} \right)^{-2}$$

而

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{(c+v)(c-v)}{c^2} \approx \frac{2c(c-v)}{c^2} = 2 \frac{c-v}{c}$$

于是

$$\frac{c-v}{c} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{E_k}{E_0} \right)^{-2}$$

由题意,

$$\frac{E_k}{E_0} = \frac{2.8 \times 10^3}{0.511} = 5.48 \times 10^3$$

代入上式,得

$$c-v = \frac{c}{2} (1 + 5.48 \times 10^3)^{-2} \approx \frac{c}{2} (5.48 \times 10^3)^{-2}$$

$$= \frac{1}{2} \times 3.0 \times 10^8 \times (5.48 \times 10^3)^{-2} = 4.995 \text{ (m/s)} \approx 5 \text{ (m/s)}$$

$$\text{电子动量 } p = mv \approx mc = \frac{mc^2}{c} \approx \frac{E_k}{c} = \frac{2.8 \times 10^3 \times 10^6 \times 1.6 \times 10^{-19}}{3 \times 10^8}$$

$$= 1.49 \times 10^{-18} \text{ (kg} \cdot \text{m/s)}$$

例 15.5-3 一个静质量为 m_0 的粒子以 $0.8c$ 的速率同另一个处于静止状态的相同粒子撞击而形成复合粒子. 试问复合粒子的静质量和速率各是多少?

解: 碰撞过程中能量和动量守恒. 由能量守恒,有

$$\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} c^2 + m_0c^2 = \frac{M_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} c^2 \quad \text{①}$$

式中 M_0 是复合粒子的静质量, u 是它的速率, $v = \frac{4}{5}c$ 是原出射粒子的速率. 由动量守恒,有

$$\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} v = \frac{M_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} u \quad \text{②}$$

两式相除即得

$$\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{v} = \frac{1}{u}$$

$$\text{解出 } u \text{ 并以 } \frac{4}{5}c \text{ 代 } v \text{ 得 } u = \frac{v}{1 + \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{0.8c}{1 + \sqrt{1 - (0.8)^2}} = 0.5c$$

代入②得

$$M_0 = \frac{m_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{v}{u} = m_0 \frac{\sqrt{1 - 0.5^2} 0.8c}{\sqrt{1 - 0.8^2} 0.5c} = \frac{4}{\sqrt{3}} m_0 = 2.31 m_0$$

本章综合例题

例 15-1 在 S 系中观察到两事件同时发生在 x 轴上, 其间距离为 1km. 在 S' 系中观察这两事件之间距离为 2km. 求在 S' 系中这两事件的时间间隔.

解: 设 S' 系以速率 u 相对 S 系运动, 由题意, $x_2 - x_1 = 1\text{km}$, $t_2 - t_1 = 0$, $x_2' - x_1' = 2\text{km}$. 由洛伦兹变换, 得

$$x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1 - u(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

以题设数据代入上式, 得

$$2 \times 10^3 = \frac{1 \times 10^3}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

得

$$\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \frac{1}{2}$$

由此得

$$u = \frac{\sqrt{3}}{2}c$$

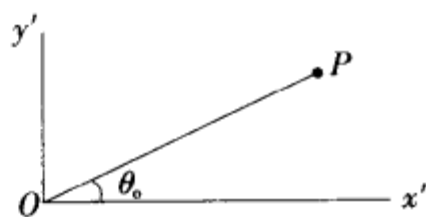
由洛伦兹变换, 得

$$\begin{aligned} t_2' - t_1' &= \frac{t_2 - t_1 - \frac{u}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{-\frac{u}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\ &= \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2c} \times 1 \times 10^3}{\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{c} \times 10^3 = -5.77 \times 10^{-6}(\text{s}). \end{aligned}$$

例 15-2 前灯效应. (1) 在 S' 系中, 一光束沿与 x' 轴成 θ_0 角的方向射出, 求在 S 系中光束与 x 轴所夹之角 θ , 设 S' 系以速率 u 沿 x 轴相对 S 系运动.

(2) 一光源在其静止的坐标系中向各个方向均匀地辐射光线, 当它以接近于光速的速率 u 在某坐标系中运动时, 它在前进的方向上强烈地辐射. 这种现象叫做前灯效应, 在同步加速器中非常显著, 在那里电子以相对论性的速率运动, 在前进方向上一窄束圆锥中发射光线. 若发射出的辐射有一半在 10^{-3} 弧度的圆锥张角中, 应用(1)中的结果求光源的速率.

解: (1) 设光在 $t = t' = 0$ 时从原点射出, 在 t' 时刻到达 $P(x', y')$, 其中 $x' = ct' \cos\theta_0$, $y' = ct' \sin\theta_0$, 如图例 15-1 所示. 由洛伦兹变换, 在 S 系中 P 点坐标为



图例 15-1

$$x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{ct' \cos\theta_0 + ut'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

$$y = y' = ct' \sin\theta_0$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{ct' \sin\theta_0}{ct' \cos\theta_0 + ut'} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \frac{\sin\theta_0}{\cos\theta_0 + \frac{u}{c}} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \quad ①$$

或

$$\cos\theta = \frac{\cos\theta_0 + \frac{u}{c}}{1 + \frac{u}{c} \cos\theta_0} \quad ②$$

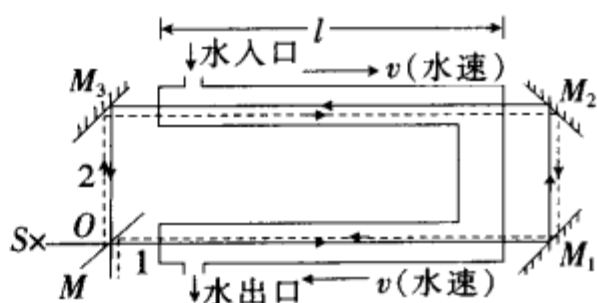
(2) 由题意, 应取 $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, $\theta = 10^{-3}$

代入①中 $\tan\theta$ 表式, 因 $0 \ll 1, \tan\theta \approx \theta$, 有

$$\begin{aligned}\tan\theta \approx \theta = 10^{-3} &= \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\cos \frac{\pi}{2} + \frac{u}{c}} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \frac{c}{u} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \\ \frac{c^2}{u^2} \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) &= 10^{-6} \\ \frac{c^2}{u^2} &= 1 + 10^{-6} \\ \frac{u^2}{c^2} &= \frac{1}{1 + 10^{-6}},\end{aligned}$$

$$u = c \sqrt{\frac{1}{1 + 10^{-6}}} \approx c \left(1 - \frac{1}{2} \times 10^{-6}\right) = c(1 - 5 \times 10^{-7})$$

例 15-3 菲索实验. 1851 年, 菲索做了一个实验, 试图判定以太是否被运动媒质所带动. 结果发现与原来以为的媒质完全带动以太的设想不同, 以太只被媒质部份带动. 其实这是相对论速度叠加原理的结果. 菲索实验的装置示意图如图例 15-3 所示. 自光源 S 发出的光束被半透明镜 M 分为互相垂直的 1, 2 两束, 1 光束 (图中实线) 沿 $MM_1M_2M_3M$ 行进, 返回 M , 2 光束 (图中虚线) 沿 $MM_3M_2M_1M$ 行进, 也返回 M , 两光束均两次通过 U 形水管的一臂. 当水静止不动时, 两光束返回 O 点时没有时间差. 若水以速率 v 沿如图所示方向流动, 两光速返回 O 点时的时间差是多少? 已知水管每臂长 l , 水的折射率为 n .



图例 15-3 菲索实验

解: 两光束只在通过流水时产生速度差, 从而产生时间差. 1 光束均逆水, 2 光束均顺水, 根据相对论速度变换, 光在流水中速度 (相对地球) 为

$$u = \frac{\frac{c}{n} \pm v}{1 \pm \frac{1}{c^2} \frac{c}{n} v} = \frac{\frac{c}{n} \left(1 \pm \frac{nv}{c}\right)}{1 \pm \frac{v}{nc}}$$

对 1 光束, v 前取负号, 对 2 光束取正号. 于是时间差

$$\begin{aligned}\Delta t &= \frac{2l}{u_1} - \frac{2l}{u_2} = 2l \left[\frac{1 - \frac{v}{nc}}{\frac{c}{n} \left(1 - \frac{nv}{c}\right)} - \frac{1 + \frac{v}{nc}}{\frac{c}{n} \left(1 + \frac{nv}{c}\right)} \right] \\ &= \frac{2nl}{c} \left[\left(1 - \frac{v}{nc}\right) \left(1 + \frac{nv}{c}\right) - \left(1 + \frac{v}{nc}\right) \left(1 - \frac{nv}{c}\right) \right] \left(1 - \frac{n^2 v^2}{c^2}\right)^{-1}\end{aligned}$$

略去 $\frac{v^2}{c^2}$ 及以上小量, 上式变为

$$\Delta t = \frac{4l v n^2}{c^2} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \quad \text{①}$$

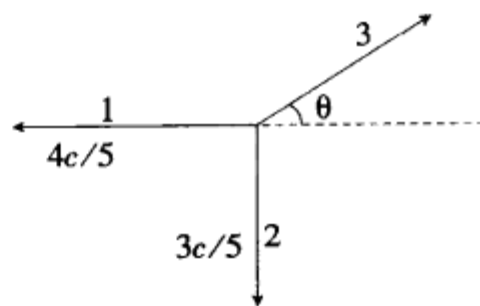
如果按伽利略速度变换, 则该时间差为

$$\Delta t_0 = \frac{4l v n^2}{c^2} \quad \text{②}$$

实验证明①式正确.

例 15-4 一个静质量为 M_0 的粒子当其处于静止状态时衰变成静质量相同的三个全同粒子, 其中两个粒子 (以 1 和 2 标记, 如图例 15-4) 的速度和方向如图所示.

(1) 试计算粒子 3 的速率 v 和方向 (用 θ 表示);



图例 15-4

(2)求每个粒子的静质量.

解:(1)设全同粒子的静质量为 m_0 ,由动量守恒:

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-(4/5)^2}} \frac{4}{5} c = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} v \cos \theta \quad ①$$

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-(3/5)^2}} \frac{3}{5} c = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} v \sin \theta \quad ②$$

$$\text{由能量守恒: } M_0 c^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1-(4/5)^2}} c^2 + \frac{m_0}{\sqrt{1-(3/5)^2}} c^2 + \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} c^2 \quad ③$$

由②/①式,得

$$\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{1-(3/5)^2}} \frac{3}{5} \bigg/ \frac{1}{\sqrt{1-(4/5)^2}} \frac{4}{5} = \frac{9}{16}$$

$$\cos \theta = \frac{16}{\sqrt{16^2+9^2}} = \frac{16}{\sqrt{337}}$$

代入①,得

$$v = \sqrt{\frac{337}{481}} c = 0.837c$$

粒子3的速率为 $0.837c$,与粒子1的运动方向反方向成 $\theta = \tan^{-1} \frac{9}{16}$ 角.

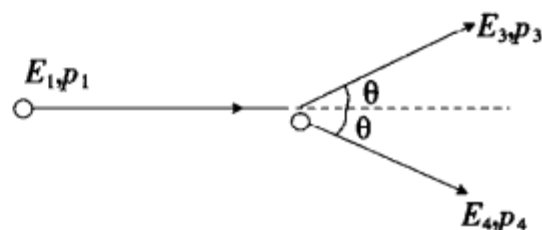
②由式③,

$$m_0 \left(\frac{1}{\sqrt{1-(4/5)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-(3/5)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-337/481}} \right) = M_0$$

$$\therefore m_0 = 0.21M_0$$

例 15-5 一粒子携带动能 E_k 与另一个静质量相同的静止粒子发生弹性碰撞,碰后入射粒子的散射角与靶粒子的反冲角相等,求此散射角.设两粒子的静能皆为 E_0 .

解:弹性碰撞的特点是不仅碰撞前后的动量不变,而且碰撞前后的动能也不变.由于碰撞前后总能量不变,故碰撞前后动能不变意味着碰撞前后静能不变,即每个粒子的静质量在碰撞前后保持不变.



图例 15-5

设碰前入射粒子的动量为 p_1 ,总能量为 E_1 ,碰后入射粒子与靶粒子的动量和总能量各为 p_3, E_3 和 p_4, E_4 ,则由题意,有 $E_1 = E_k + E_0$.

$$\text{由能量守恒有} \quad E_1 + E_0 = E_3 + E_4 \quad ①$$

$$\text{由动量守恒有} \quad p_1 = (p_3 + p_4) \cos \theta \quad ②$$

$$p_3 \sin \theta = p_4 \sin \theta \quad ③$$

由③式得 $p_3 = p_4$,由能量动量关系即可知 $E_3 = E_4$,由①式

$$E_3 = E_4 = \frac{1}{2} (E_1 + E_0) = \frac{1}{2} (E_k + 2E_0)$$

$$\text{由} \quad E_1^2 = p_1^2 c^2 + E_0^2, E_3^2 = p_3^2 c^2 + E_0^2$$

$$\text{可得} \quad p_1^2 = \frac{1}{c^2} (E_1^2 - E_0^2), p_3^2 = \frac{1}{c^2} (E_3^2 - E_0^2)$$

代入②式,注意 $p_3 = p_4$,得

$$\cos^2 \theta = \frac{p_1^2}{4p_3^2} = \frac{\frac{1}{c^2} (E_1^2 - E_0^2)}{4 \cdot \frac{1}{c^2} (E_3^2 - E_0^2)} = \frac{(E_k + E_0)^2 - E_0^2}{4 \left[\frac{1}{4} (E_k + 2E_0)^2 - E_0^2 \right]}$$

$$= \frac{E_k^2 + 2E_k E_0}{E_k^2 + 4E_k E_0} = \frac{E_k + 2E_0}{E_k + 4E_0}$$

可见 $\cos^2 \theta > \frac{1}{2}$, $\theta < \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} = 45^\circ$, $2\theta < 90^\circ$, 只有当 $E_k \ll E_0$ 时, $\cos^2 \theta = \frac{1}{2}$, $\theta = \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} = 45^\circ$, $2\theta = 90^\circ$, 此即牛顿力学的结果. 在相对论力学中, 此角 $2\theta < 90^\circ$; 当 $E_k \gg E_0$ (极端相对论情况), $\cos^2 \theta \rightarrow 1$, $2\theta \rightarrow 0$. 相对论情况下散射角与反冲角相等时两者之和小于 90° (称为散射角的相对论压缩) 最先由钱皮恩于 1932 年所作的实验所证实.

例 15-6 一静质量为 M_0 的静止粒子, 发出一能量为 Q 的光子, 求剩余粒子的反冲速度和静质量.

解: 设发射光子后粒子的质量为 m , 速度为 u , 由能量守恒, 有

$$M_0 c^2 = mc^2 + Q \quad (1)$$

由动量守恒有

$$\frac{Q}{c} = mu \quad (2)$$

由①,

$$m = M_0 - \frac{Q}{c^2}$$

代入②,

$$u = \frac{Q}{mc} = \frac{Q}{\left(M_0 - \frac{Q}{c^2}\right)c} = \frac{Qc}{M_0 c^2 - Q} \quad (3)$$

于是得剩余粒子的静质量为

$$\begin{aligned} m_0 &= m \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \left(M_0 - \frac{Q}{c^2}\right) \sqrt{1 - \frac{Q^2/c^2}{\left(M_0 - \frac{Q}{c^2}\right)^2 c^2}} \\ &= \left(M_0 - \frac{Q}{c^2}\right) \sqrt{\frac{M_0^2 + \frac{Q^2}{c^4} - 2M_0 \frac{Q}{c^2} - \frac{Q^2}{c^4}}{\left(M_0 - \frac{Q}{c^2}\right)^2}} \\ &= \sqrt{M_0^2 - 2M_0 \frac{Q}{c^2}} = M_0 \sqrt{1 - \frac{2Q}{M_0 c^2}} \quad (4) \end{aligned}$$

我们来看一下粒子发射光子前后的静能差. 设此静能差为 Q_0 , 则

$$Q_0 = M_0 c^2 - m_0 c^2 = M_0 c^2 - M_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{2Q}{M_0 c^2}}$$

即

$$\begin{aligned} \frac{Q_0}{M_0 c^2} &= 1 - \sqrt{1 - \frac{2Q}{M_0 c^2}} \\ \left(1 - \frac{Q_0}{M_0 c^2}\right)^2 &= 1 - \frac{2Q}{M_0 c^2} \end{aligned}$$

解之得

$$Q = Q_0 \left(1 - \frac{Q_0}{2M_0 c^2}\right)$$

可见, 所发射光子的能量并不等于粒子发射光子前后的静能差, 而是小于此静能差, 因为一部分能量转化成了粒子的反冲动能.

本章习题

15.1 在 S 系中有一根米尺固定在 x 轴上, 其两端各装一手枪, S' 系中的 x' 轴上固定有另一根长的带刻度尺, 当后者从前者旁以速度 u 经过时, S 系中的人同时扳动两枪机, 使子弹在 S' 系中的尺上打出两个记号. 求在 S' 系的尺上两记号之间的刻度差. 在 S' 系中如何解释此结果?

15.2 在 S 系中观察到在同一地点发生两个事件, 第二个事件发生在第一个事件之后 2.0 秒, 在

S' 系中观察到第二个事件发生在第一事件之后 3 秒. 求在 S' 系中这两个事件的空间距离.

15.3 带正电的 π 介子是一种不稳定的粒子, 当它静止时, 平均寿命为 2.5×10^{-8} s, 然后衰变为 μ 介子和一个中微子. 今有一束 π 介子, 在实验室中测得它从产生到衰变通过的平均距离为 52m, 求其速率.

15.4 一静长为 l_0 的火箭飞船以恒速 v 相对地面飞行. 飞船的头部(A')在 $t = t' = 0$ 时通过地面上的 A 点, 此时有一光信号从飞船头部(A')发向尾部(B').

(1) 按飞船的时间(t'), 该信号何时到达船尾(B')?

(2) 按地面上的测量, 该信号何时(t_1)到达船尾?

(3) 按地面上的测量, 船尾何时(t_2)通过 A 点?

15.5 一艘火箭飞船以 $v = 0.8c$ 的速度飞经地球, 飞船和地球上的观测者一致同意这事件发生在中午 12:00.

(1) 按火箭飞船上的时钟读数, 该飞船于 12:30 飞经一个行星际宇航站, 该站相对地球固定, 其时间指示地球时间, 试问这一事件在该站什么时间发生?

(2) 在地球坐标上该站离地球多远?

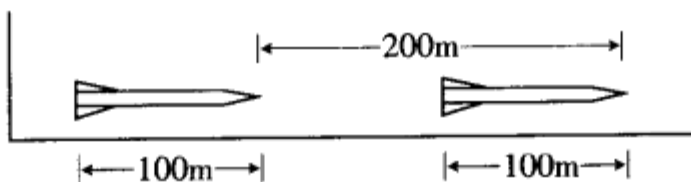
(3) 在飞船时间 12:30(即飞船飞经宇航站时), 飞船用无线电向地球发回报告. 试问按地球时间, 地球何时收到报信号?

(4) 如果地面站立即回答, 试问按飞船时间, 飞船何时接到回答? [提示]

15.6 在 S 系上, 两事件 A、B 发生的时空坐标分别为 x_1, t_1 和 x_2, t_2 , 设 $x_2 > x_1, t_2 > t_1$, 即 B 事件发生在 A 事件之后. 试问, 在另一参照系看来, 这一前后次序是否有可能颠倒? 如果要颠倒, 这两事件在 S 系中的时空坐标间应有什么联系? 如果两事件有因果联系, 那么, 在任何别的参照系看来, 这种因果关系有无可能被破坏? 为什么? [提示]

15.7 有一间仓库长 3.5m, 相对两壁各有一扇门. 若把一长为 4m 的铁竿放进仓库, 则竿的一端将露在门外, 因而两扇门不可能同时关闭. 某甲学习过相对论, 他声称有一种方法, 不必把竿割断、弯曲或倾斜, 能在极短时间内把竿放进仓库并同时关上仓库的两门. (当竿端碰击门时, 门会自动打开) 你认为甲能否实现他的想法? 若可能的话, 将怎样实现? 若有一观测者某乙相对竿静止, 他对某甲设计的方案有何看法? [提示]

15.8 在 S 系中, 沿 x 轴停放着两艘相同的飞船, 飞船长 100m, 相距 200m, 如图所示. 现设想两飞船同时点燃火箭发动机, 并在极短的时间内加速到 $v = \frac{4}{5}c$. (1) 试从 S 系的观点, 画出加速后两飞船的图象. 怎样解释所画出的图象? (2) 若参照系 S' 相对 S 以 $v = \frac{4}{5}c$ 的速度沿 x 方向运动, 试从 S' 系的观点画出加速前两飞船的图象, 即两飞船的初始状态. (3) 试从 S' 观点画出两飞船加速后的图象并作出说明. [提示]

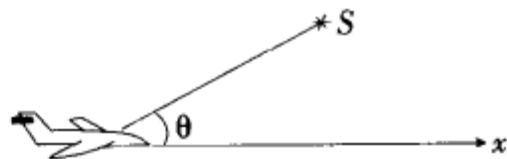


图习 15.8 两艘飞船

15.9 一航天飞机沿 x 方向飞行, 接收到一颗恒星发出的光信号. 在恒星静止的参照系中, 飞机的飞行速度为 v , 恒星发出光信号的方向与飞机的轴成 θ 角, 如图所示.

(1) 在飞机静止的参照系中, 此角(θ')多大?

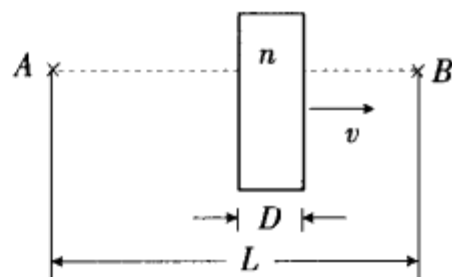
(2) 若飞机的前端有一半球形观察室, 飞机上的人能看到所有



图习 15.9

$\theta' < \frac{\pi}{2}$ 的恒星. 试证明, 若 $v \rightarrow c$, 则飞机上的人几乎能看到所有的恒星. [提示]

15.10 一块厚玻璃以速率 v 向右运动. 在 A 点有一闪光灯, 它发出的光通过玻璃后到达 B 点(如图). A 、 B 之间距离为 L , 玻璃在其静止的坐标系中的厚度为 D , 玻璃的折射率为 n . 问光由 A 点传播到 B 点需多少时间? [提示]



图习 15.10

15.11 两个静质量均为 m_0 的粒子各以 $\beta_1 = \frac{v_1}{c} = 0.5$ 和 $\beta_2 = \frac{v_2}{c} = 0.8$ 的速率从一共同点反向运动, 求(1)每个粒子相对共同点的

动量和能量.(2)一个粒子在另一个粒子处于静止的参照系中的动量和能量.

15.12 两个完全相同的质点, 静质量均为 m_0 , 以等值反向的速率 u 沿同一直线运动而发生碰撞, 碰后两质点粘成一个大质点. 求此大质点的质量.

15.13 (1)如果一动能为 437MeV (兆电子伏)的质子同另一个处于静止状态的质子发生弹性碰撞, 碰撞后它们以相等能量反跳, 试问, 二者运动方向的夹角是多大? 已知质子的静能为 938MeV .

(2)如果入射质子的总能量为 33GeV (吉电子伏), 试问, 碰撞后两质子的运动方向之间的夹角是多大? [提示]

15.14 一粒子衰变成能量分别为 E_1 和 E_2 的两 γ 射线, 它们的夹角为 θ , 求此粒子的静质量 m_0 . [提示]

15.15 设有一处于激发态的原子以一定速率运动, 当其发射一光子后衰变为基态, 并使自己处于静止状态, 此时原子的静质量为 m_0 . 若激发态比基态能量高 E_0 , 求其所发射光子的能量. [提示]

15.16 设有一“光子火箭”完全用辐射能作为推进剂使自己从静止开始加速. 如果这支火箭的初质量和末质量(均为静质量)分别为 M_i 和 M_f , 求该火箭的末速度. [提示]

15.17 设一能量为 Q 的光子同正在运动的电子迎面碰撞, 如果碰撞后沿直线向后作反冲运动的光子具有与入射光子相同的能量 Q , 试问电子的初速度多大? 设电子的静质量为 m_0 . [提示]

15.18 试从动力学观点证明下列过程是不可能的:

- (1) 一个光子撞击到一静止的电子上, 并将它的所有能量给予后者;
- (2) 在真空中一个光子转变为一电子和一正电子;
- (3) 一快速正电子和一个静止电子相互湮没仅生成一个光子. [提示]

原子和原子核

§ 16.1 原子的核式结构

1. 原子物理学研究任务

原子是物质结构的一个层次,它介于分子和原子核两层次之间,原子物理学主要研究原子的结构和性质.

2. 汤姆逊原子模型

原子是由什么组成的?它的位形又是怎样的?1897年英国物理学家J.J.汤姆逊发现电子以后,知道电子是一切原子的组成部分,但原子是呈中性的,可见原子中还有带正电的物质,这些带正电的物质和带负电的电子是怎样构成原子的?1903年汤姆逊首先提出了第一个原子结构模型,他认为原子中的正电荷均匀地分布在整个球体内,而电子则嵌在其中,正负电荷的电量相等,人们形象地称它为“西瓜模型”或“葡萄干面包模型”.当时,汤姆逊原子模型似乎能归纳一些实验结果.但是在进行电子和金属膜的散射实验中,发现高速电子很容易穿过原子,说明原子内部是十分空虚的,而不象实体球,用汤姆逊原子模型很难解释;而完全否定汤姆逊原子模型的实验事实是 α 粒子的大角散射.

3. α 粒子的散射实验

1909年,英国物理学家卢瑟福与他的协作者盖革和马斯顿进行了 α 粒子散射实验,实验装置如图16.1-1所示.在一个小铅盒里放有少量的放射性元素钋,它发出的 α 粒子从铅盒的小孔射出,形成很细的一束射线射到金箔上, α 粒子穿过金箔后,打到荧光屏上产生一个个闪光,整个装置放在真空容器里,以避免干扰.荧光屏和显微镜连在一起,可以绕金箔在一个圆周上转动.实验发现大多数 α 粒子穿过薄膜后的散射角很小(3° 以内),但有八千分之一的 α 粒子被反射回来了.

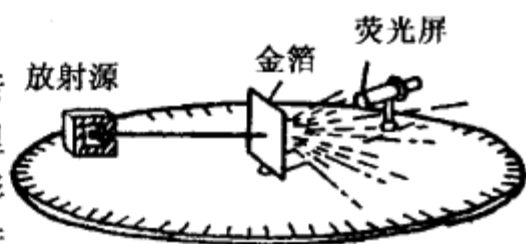


图 16.1-1 卢瑟福实验示意图

4. 核式结构模型

根据汤姆逊原子模型,可以预料 α 粒子的散射角是非常小的.因为电子的质量很小,约为 α 粒子的七千分之一, α 粒子碰到它,就象飞行着的子弹碰到一粒尘埃一样,运动方向不会发生明显的改变;正电荷又是均匀分布的, α 粒子穿过原子时,它受到的原子内部两侧正电荷的斥力相当大一部分互相抵消,使 α 粒子偏转的力不会很大.理论估计,大于 90° 的大角散射几率仅为 10^{-3500} .因此, α 粒子的散射实验使得汤姆逊原子模型陷入困境.对于这样的实验事实,卢瑟福感到十分惊奇,他说“就象一枚15英寸的炮弹打在一张纸上又被反射回来一样”,简直不可理解.但他经过严谨的理论推理后,于1911年大胆地提出了著名的原子核式结构模型.他认为原子中的正电荷集中在体积很小但带有几乎全部原子质量的原子核上,电子分布在核的外边.按照这个学说, α 粒子穿过原子时,如果离核较远,受到的库仑力就很小,运动方向的改变也就很小.只有当 α 粒子与核十分接近时,才会受到很大的库仑斥力,发生大角度的偏转.由于原子核很小, α 粒子十分接近它的机会很少,因此绝大多数 α 粒子穿过金箔后基本上仍沿原来的方向前进,只有极少数发生大角度的偏转,如图16.1-2所示.

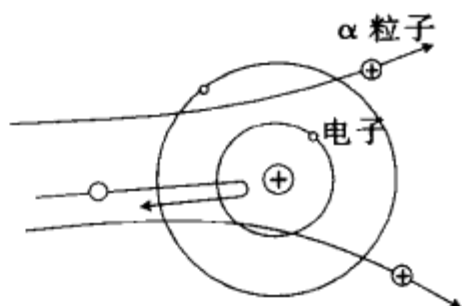


图 16.1-2

卢瑟福根据原子的核式结构提出了 α 粒子散射理论,完满地解释了 α 粒子散射实验.从此,原子的核式结构很快地被人们所承认.

5. 原子的大小和质量

实验表明,原子的大小具有 10^{-10}m 数量级,常用 nm (纳米)作单位, $1\text{nm} = 10^{-9}\text{m}$.

一个原子的质量是非常微小的.通常不以克或千克为单位,而是采用原子质量单位(以 u 表示).原子质量单位的定义是:

$$1u = {}^{12}\text{C} \text{ 原子质量的 } \frac{1}{12}$$

这种原子质量单位叫做碳单位.各种原子的质量是不同的,在碳单位中,一个 ${}^{12}\text{C}$ 原子的质量定为 $12.000000u$.以此作为原子量的标准,其他原子的质量都同 ${}^{12}\text{C}$ 比较,从而定出它们的相对质量,即原子量.例如:氢的原子量是 1.0079 ;氧的原子量是 15.999 .

原子质量单位 u 与克或千克单位之间的关系又如何?按照阿伏伽德罗定律,1摩尔原子的任何元素均含有 6.022×10^{23} 个原子(此即阿伏伽德罗常数 N_A).根据原子质量单位的定义,有:

$$\begin{aligned} 1u &= \frac{12(\text{g})}{N_A} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{6.022 \times 10^{23}}(\text{g}) \\ &= 1.66 \times 10^{-24}(\text{g}) = 1.66 \times 10^{-27}(\text{kg}) \end{aligned}$$

原子核的大小具有 10^{-15}m 数量级,常用 fm (费米)作单位, $1\text{fm} = 10^{-15}\text{m}$.

6. 物理组合常数

为了使数值计算简便,而又突出物理意义,考虑到原子物理学的特点,我们在此引进几个常用的物理组合常数:

$$(1) hc = 1240\text{MeV} \cdot \text{fm} = 1.24\text{keV} \cdot \text{nm}$$

式中 h 为普朗克常数, c 为真空中的光速, $\text{MeV} = 10^3\text{keV}$ (千电子伏) $= 10^6\text{eV}$, 1eV 表示 1 个带单位电荷 (e) 的粒子在电势差为 1V 的电场中加速得到的能量, $1\text{eV} = 1.602 \times 10^{-19}\text{J}$.

$$(2) \frac{1}{4\pi\epsilon_0} e^2 = 1.44\text{MeV} \cdot \text{fm}$$

$$(3) \text{原子质量单位} \quad 1u = 931.5\text{MeV}/c^2$$

$$(4) m_e c^2 = 0.511\text{MeV}$$

式中 m_e 为电子质量.

例 16.1-1 将体积为 1 毫米³ 的油滴在水面上,发现油膜能扩展的最大面积约为 2 米².试估计油分子的直径.

解:油膜不能无限扩展的原因是由于油膜厚度不能小于油分子的直径.由此可以估计油分子的直径 d :

$$d \sim \frac{V}{S} = \frac{1 \text{ 毫米}^3}{2 \text{ 米}^2} = 5 \times 10^{-10}\text{m} = 0.5\text{nm}$$

此试验说明这种油分子的大小为 10^{-10}m 数量级.

例 16.1-2 汤姆逊原子模型认为原子的正电荷均匀地分布在原子内.设 α 粒子的动能为 5.0MeV ,金原子的半径为 0.1nm ,试估计 α 粒子与这种汤姆逊原子发生单次散射的最大偏转角约为 10^{-4}rad .(忽略原子中电子的作用)

解:忽略电子的作用,只考虑原子中带正电部分对 α 粒子的单次散射.由电学知,当 α 粒子到达原子表面时,它们的库仑相互作用最大,其大小为

$$F = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0^2}$$

式中 Z_1 、 Z_2 分别是 α 粒子和金核的电荷数, r_0 是金原子的半径.而它们相互作用时间的数量级:

$$\Delta t \approx \frac{2r_0}{v}$$

故 α 粒子的动量变化近似为

$$\Delta p = m \Delta v = F \Delta t \approx \frac{2Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0 v}$$

取上限来估计 α 粒子偏转角的大小. 于是取 α 粒子的动量变化 Δp 垂直于原来的动量(因我们关心的是偏转角大小的数量级), 如图 16.1-3 所示. 因此可得 α 粒子的最大偏转角为

$$\theta \approx \tan\theta = \frac{\Delta p}{p} = \frac{2Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 m v^2 r_0} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 E_k r_0}$$

将 $Z_1 = 2, Z_2 = 79, E_k = 5.0 \text{ MeV}, r_0 = 0.1 \text{ nm} = 1.0 \times 10^5 \text{ fm}$,

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} e^2 = 1.44 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$$

代入上式, 得

$$\theta = \frac{2 \times 79 \times 1.44}{5.0 \times 1.0 \times 10^5} = 4.6 \times 10^{-4} \text{ (rad)}$$

上述估算结果表明, 按照汤姆逊原子模型, α 粒子单次散射的散射角仅为 10^{-4} rad , 根本不可能产生大角散射.

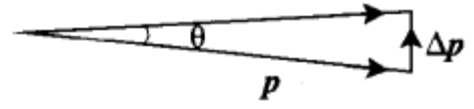


图 16.1-3

§ 16.2 氢原子的玻尔理论

1. 巴尔末公式

原子发光是重要的原子现象之一, 因此对光谱的研究是探索原子结构的重要途径. 到 19 世纪末, 人们对原子光谱已做了大量的实验工作. 1885 年, 瑞士物理学家巴尔末首先发现氢原子光谱中可见光区的四条谱线的波长(见图 16.2-1 所示), 可用一经验公式来表示:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right), n = 3, 4, 5, \dots \quad (16.2-1)$$

式中 λ 为波长, $R = 1.096776 \times 10^7 \text{ 米}^{-1}$, 称为里德伯常数, 上式称为巴尔末公式. 当 $n = 3, 4, 5, \dots$ 时, 它给出氢原子光谱中 $H_\alpha, H_\beta, H_\gamma, \dots$ 等谱线的波长. 当 $n = \infty$ 时, 它对应于谱线的最短波长, 称为短波限. 式(16.2-1)所表示的一组谱线称为巴尔末系.

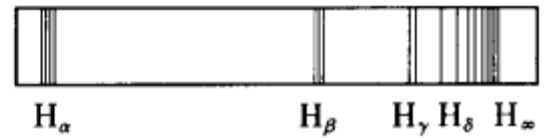


图 16.2-1

2. 里德伯公式

1889 年, 里德伯发现氢原子光谱的所有谱线波长可用一个普遍的经验公式表示出来:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right), n_1 = 1, 2, 3, \dots, n_2 = n_1 + 1, n_1 + 2, n_1 + 3, \dots \quad (16.2-2)$$

上式称为里德伯公式. 对每一个 n_1 , 式(16.2-2)可构成一个谱线系:

$n_1 = 1, n_2 = 2, 3, 4, \dots$	赖曼系(紫外区)
$n_1 = 2, n_2 = 3, 4, 5, \dots$	巴尔末系(可见光区)
$n_1 = 3, n_2 = 4, 5, 6, \dots$	帕型系(红外区)
$n_1 = 4, n_2 = 5, 6, 7, \dots$	布喇开系(远红外区)
$n_1 = 5, n_2 = 6, 7, 8, \dots$	普丰特系(远红外区)

实验发现, 所有的原子都有它自己的独特的光谱, 光谱是分立的线状光谱, 具有确定的波长.

3. 玻尔模型

原子光谱的规律性是原子内在规律性的反映. 这些规律性无法用经典理论作出定量的解释. 1913 年, 丹麦物理学家尼·玻尔把普朗克、爱因斯坦和卢瑟福的工作结合起来, 提出了氢原子模型. 他认为氢原子中的电子绕核运动, 因而它具有向心加速度. 按照经典电动力学, 这种加速运动着的电子会自动地

辐射能量,它的能量逐渐降低,频率也逐渐改变,因而原子光谱应该是连续光谱,这与实验观察到的波长分立的线状光谱不符;同时,由于能量的逐渐降低,电子绕核运动的轨道半径也越来越小,最后落入核内.可以估算出这个过程约为 10^{-11} 秒,然而实验证明原子是相当稳定的体系.

为了解决此困难,玻尔把量子概念应用于氢原子结构,作出了以下三点开创性的假设:

①经典轨道加定态条件:电子只能处于一些分立的轨道上,它绕核转动作圆周运动而不产生电磁辐射,处于稳定状态.

②频率条件:当电子从一个定态轨道跃迁到另一定态轨道时会以电磁波的形式放出(或吸收)能量 $h\nu$,其值由下式决定,即

$$h\nu = E_2 - E_1 \quad (16.2-3)$$

③量子化条件*:原子中电子绕核运动的角动量是量子化的,即电子的轨道角动量只能取一些分立的值:

$$L = m_e v r = n \frac{h}{2\pi}, n = 1, 2, 3, \dots \quad (16.2-4)$$

式中 m_e 为电子质量, r 为电子可稳定存在的轨道半径, v 为电子绕核作圆周运动的速率,正整数 n 称为量子数.就是说,原子中的电子不可能在经典理论所允许的任意轨道上运动,只能在满足上述条件的一系列一定大小的彼此分立的轨道上运动.

由玻尔的这些假设,很容易求得电子的轨道半径和原子能量:

$$r_n = n^2 r_1 \quad (16.2-5)$$

$$E_n = E_1 \frac{Z^2}{n^2} \quad (16.2-6)$$

式中

$$r_1 = \frac{4\pi\epsilon_0 h^2}{4\pi^2 m_e e^2} = 0.0529 \text{ nm}$$

$$E_1 = -\frac{2\pi^2 m_e e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 h^2} = -13.60 \text{ eV}$$

Z 为原子核的原子序数, r_1 、 E_1 分别代表第一条(即离核最近的)可能轨道的半径和电子在这条轨道上运动的能量.由式(16.2-5)、(16.2-6)可知,电子轨道半径和原子能量值都是不连续的,即是量子化的.

4. 原子的能级图

原子的各个定态的能量值,叫做它的能级.式(16.2-6)就是氢原子的能级公式.按电子在原子中可能出现的能量 E_n 的大小比例画成的图称为原子的能级图,如图 16.2-2 所示.

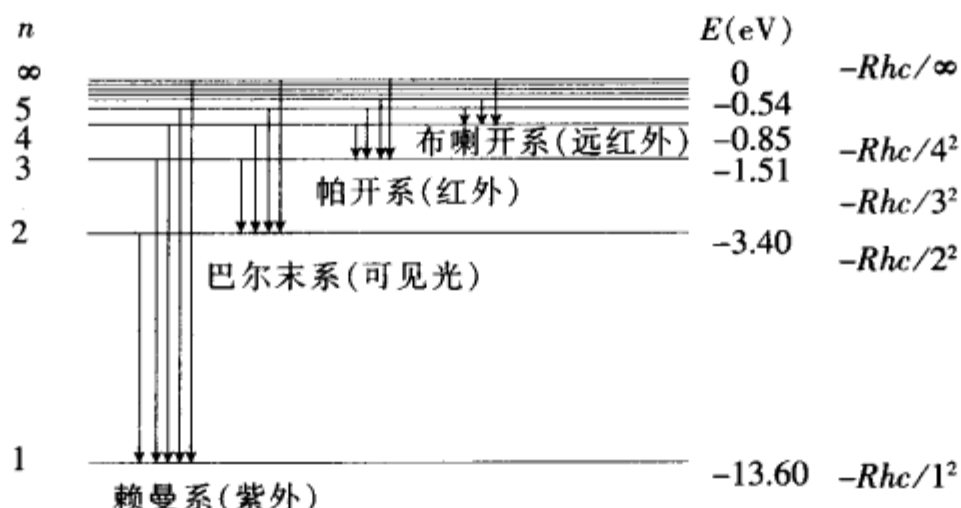


图 16.2-2

* 实际上,当初玻尔提出的是对应原理:在大轨道和大能量的极限下,量子计算必须与经典计算一致.就是说,微观领域内的规律,当它推广到宏观世界时,必须与经典规律一致.由对应原理可求得电子的轨道角动量是量子化的.

正常的氢原子处于最低能态, $n=1$, 称为基态. 氢原子的基态能量为 -13.60eV . 原子通过激发过程吸收了能量, 就跃迁到较高能态的稳定轨道上, $n>1$, 称为激发态. 氢原子第一激发态 ($n=2$) 的能量为 -3.40eV , 第二激发态的能量为 -1.51eV , \dots . $n=\infty$ 时, $E_\infty=0$, 对应于电子远离原子核成为自由电子, 整个体系称为原子的电离态.

电子从某一稳定轨道跳到另一稳定轨道, 称为跃迁. 能级之间的跃迁, 可以在能级图上用由初始能态 E_2 画至最终能态 E_1 的箭头来表示.

给原子以足够大的能量, 使原子中的电子脱离束缚而成为自由电子的机制称为电离. 使原子电离所需要的能量称为电离能. 氢原子的电离能为 13.60eV .

电子和原子核由自由态结合成原子时所释放的能量称为电子结合能. 基态氢原子的结合能为 13.60eV .

5. 玻尔氢原子理论实验验证

由式(16.2-3)和式(16.2-6), 可以导出里德伯公式:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda} &= \frac{1}{hc}(E_2 - E_1) = \frac{2\pi^2 m_e e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 h^2} Z^2 \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \\ &= R_\infty Z^2 \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)\end{aligned}$$

式中 $R_\infty = \frac{2\pi^2 m_e e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 h^3 c}$ 为氢原子的里德伯常数, 将各量代入, 得理论值 $R_\infty = 1.0973731 \times 10^7 \text{m}^{-1}$.

光谱实验工作很精确地给出了里德伯常数的实验值

$$R_{\text{实}} = 1.0967758 \times 10^7 \text{m}^{-1}$$

两者符合得相当好, 这有力地支持了玻尔理论. 不久, 玻尔发现了这两者微小差别的原因. 在推导过程中, 假设原子核是静止不动的, 这相当于把原子核的质量视为无限大. 实际上原子核的质量不是无限大, 原子中的电子和原子核都绕着其质心运动. 这个运动可以等效地看作质量为 μ 的粒子绕着静止的原子核运动, μ 为体系的折合质量 $\mu = \frac{Mm_e}{M+m_e}$, 其中 m_e 、 M 分别为电子和原子核的质量. 修正后的里德伯常数为

$$R = \frac{R_\infty}{1 + m_e/M} \quad (16.2-7)$$

将氢原子和电子的质量代入得

$$R_{\text{H}} = 1.0967758 \times 10^7 \text{m}^{-1}$$

理论值和实验值符合得好的程度是惊人的.

于是氢原子的能量公式可简写为

$$E_n = -R_{\text{H}}hc \frac{Z^2}{n^2} = -13.60 \frac{Z^2}{n^2} (\text{eV}) \quad (16.2-8)$$

玻尔理论成功地解释了氢原子光谱, 解开了近三十年之久的纯粹凭经验凑出来的“巴尔末公式之谜”, 这是玻尔理论的一大成就.

6. 类氢离子

类氢离子是指原子核外边只有一个电子的原子体系, 如一次电离的氦离子 He^+ ($Z=2$), 二次电离的锂离子 Li^{++} ($Z=3$) 等. 只要考虑到它们的原子核的正电荷 Ze , 玻尔理论同样适用.

π^- 介子和 μ^- 子, 它们所带的电荷和电子电荷相同, 从而也能形成类氢原子, 玻尔理论也同样适用, 但要注意有关公式中的电子质量 m_e 要换成体系的折合质量.

7. 玻尔理论的局限性

玻尔理论成功地解释了氢原子和类氢原子的光谱, 但也存在着严重的不足之处. 对于再复杂一些的原子, 如氦原子的光谱, 玻尔理论遇到极大的困难, 理论推导出来的结论与实验事实出入很大. 此外, 玻

尔理论只能求出谱线的波长,对谱线的强度、宽度、偏振等一系列问题都无法处理.玻尔理论的缺陷在于研究原子这个微观体系时,保留了宏观领域里的经典理论.1926年,薛定谔在光和实物粒都具有波粒二象性的基础上,建立了描述微观粒子的新理论——薛定谔方程.量子力学彻底摒弃了轨道概念,而代之以几率和电子云概念.它的创立,在微观物质中发挥了巨大的作用.

然而,玻尔理论推动了当时的实验和理论工作,与量子力学相比,具有简单明了,易于理解的优点,因而在当今的原子物理学中仍具有实用价值.

物理组合常数

$$R_H hc = 13.60\text{eV}$$

例 16.2-1 试计算氢原子的 H_α 、 H_β 、 H_γ 和 H_δ 谱线的波长.

解: H_α 、 H_β 、 H_γ 和 H_δ 线属巴尔末系,它们分别由量子数为 $n_2 = 3, 4, 5, 6$ 的激发态跃迁到 $n_1 = 2$ 的过程中所发射的谱线(可见光),它们的波长可由玻尔理论求出:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$$

式中 $R = 1.097 \times 10^7 \text{m}^{-1} = 1.097 \times 10^{-2} \text{nm}^{-1}$

$$\lambda_\alpha = \frac{1}{R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right)} = \frac{36}{5R} = 656.3 \text{nm}$$

$$\lambda_\beta = \frac{1}{R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} \right)} = 486.2 \text{nm}$$

$$\lambda_\gamma = \frac{1}{R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{5^2} \right)} = 434.1 \text{nm}$$

$$\lambda_\delta = \frac{1}{R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{6^2} \right)} = 410.2 \text{nm}$$

计算所得的波长数值在实验误差范围内同测得的数值是一致的.

例 16.2-2 氢原子处于基态时,试根据玻尔理论,分别计算电子的下列各量:(1)角动量;(2)线动量;(3)线速度;(4)角速度;(5)绕核转动的频率;(6)加速度.

解:(1)根据玻尔的轨道角动量量子化条件,电子的角动量

$$L = m_e v_n r_n = n \frac{h}{2\pi}$$

式中 n 为量子数,氢原子处于基态时, $n = 1$,则有

$$L = \frac{h}{2\pi} = \frac{6.626 \times 10^{-34}}{2\pi} = 1.055 \times 10^{-34} (\text{J}\cdot\text{s})$$

(2)线动量

$$mv_1 = \frac{h}{2\pi r_1} = \frac{6.626 \times 10^{-34}}{2\pi \times 0.529 \times 10^{-10}} = 1.99 \times 10^{-24} (\text{kg}\cdot\text{m/s})$$

(3)线速度

$$v_1 = \frac{h}{2\pi m r_1} = \frac{6.626 \times 10^{-34}}{2\pi \times 9.11 \times 10^{-31} \times 0.529 \times 10^{-10}} = 2.19 \times 10^6 (\text{m/s})$$

电子处于基态时的轨道运动速率仅为光速的 $1/137$,故通常可以忽略相对论效应.

(4)角速度

$$\omega_1 = \frac{v_1}{r_1} = \frac{2.19 \times 10^6}{0.529 \times 10^{-10}} = 4.14 \times 10^{16} (\text{rad/s})$$

(5)电子绕核转动的频率

$$f_1 = \frac{v_1}{2\pi r_1} = \frac{2.19 \times 10^6}{2\pi \times 0.529 \times 10^{-10}} = 6.59 \times 10^{15} (\text{s}^{-1})$$

(6)电子在第一玻尔轨道上绕核转动的向心加速度

$$a_1 = \frac{v_1^2}{r_1} = \frac{(2.19 \times 10^6)^2}{0.529 \times 10^{-10}} = 9.07 \times 10^{22} (\text{m/s}^2)$$

例 16.2-3 1914 年, 夫兰克和赫兹用电子碰撞原子的方法使后者从低能级被激发到高能级, 从而证明了能级的存在. 设 ΔE_{12} 是原子基态到第一激发态的能量差, 试证明加速电子的动能 E_k 至少等于 ΔE_{12} 时才能使基态原子激发到第一激发态.

证: 设电子和原子的质量分别为 m 和 M , 电子碰撞前后的速度分别为 v_1 、 v_2 , 原子碰撞前后的速度分别为 V_1 、 V_2 . 两粒子碰撞时, 它们的总动量守恒, 总能量亦守恒. 则有

$$m v_1 + M V_1 = m v_2 + M V_2 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} M V_1^2 = \frac{1}{2} m v_2^2 + \frac{1}{2} M V_2^2 + \Delta E \quad (2)$$

式中 ΔE 为原子内部能量的增量. 若 $\Delta E = 0$, 则表示只有平移能量的交换, 原子的内部能量不变, 称为弹性碰撞; $\Delta E > 0$, 表示一部分平移能量转变为原子的内部能量, 使原子激发或电离, 称为第一类非弹性碰撞; $\Delta E < 0$, 称为第二类非弹性碰撞.

为简化问题起见, 假设原子原来处于静止状态, 电子与原子作对心非弹性碰撞, 即 $V_1 = 0$, v_1 、 v_2 和 V_2 都在一直线上, 则动量守恒和能量守恒可简化为

$$m v_1 = m v_2 + M V_2 \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m v_2^2 + \frac{1}{2} M V_2^2 + \Delta E \quad (4)$$

两式消去 V_2 , 得

$$m(M+m)v_2^2 - 2m^2 v_1 v_2 + m(m-M)v_1^2 + 2M\Delta E = 0$$

这是关于 v_2 的一元二次方程, 速度 v_2 为实数, 故方程的系数应满足

$$(-2m^2 v_1)^2 - 4m(M+m)[m(m-M)v_1^2 + 2M\Delta E] \geq 0$$

化简得

$$\frac{1}{2} m v_1^2 \geq \left(1 + \frac{m}{M}\right) \Delta E$$

$\frac{1}{2} m v_1^2$ 即为外来电子的动能 E_k . 要使原子从基态激发到第一激发态, 需要外界提供的能量是它们的能量差 ΔE_{12} . 因此, 电子的动能 E_k 至少等于

$$E_k = \left(1 + \frac{m}{M}\right) \Delta E_{12} \quad (5)$$

由于原子质量 M 比电子质量大 10^3 倍以上, 因此加速电子的动能至少为

$$\Delta E_k = \Delta E_{12}$$

* § 16.3 量子力学简介

1. 概论

到 19 世纪末, 宏观物理学理论已发展到相当完善的阶段. 几乎所有的物理现象都能够从相应的经典理论中得到解释. 物体的机械运动在速度比光速小得多时准确地遵从牛顿力学的规律; 电磁现象的规律总结为麦克斯韦方程; 热现象有完整的热力学和经典统计物理的理论. 就在经典物理学理论取得这样辉煌成就的同时, 人们又发现一些新的物理现象, 例如对涉及物质内部微观过程的黑体辐射、光电效应等问题, 经典理论无法圆满解释, 因而有必要在微观理论方面进行新的探索.

1900 年, 普朗克(M. PLANCK)为了解释黑体辐射问题, 提出了“光量子假设”, 后来简称光子. 康普顿效应的发现进一步证实了光量子假设的正确性.

1924年,德布罗意(L. DE BROGLIE)提出了一切实物粒子与光子一样,都具有波粒二象性,此即为德布罗意假设.不久,德布罗意假设在电子衍射实验中得到了证实.

1926年,薛定谔(E. SCHRÖDINGER)在光和实物粒子都具有波粒二象性的基础上,建立了描述微观粒子的新理论——薛定谔波动方程.量子力学的创立,在微观物理中发挥了巨大的作用.

2. 黑体辐射、普朗克量子假设

所有物体都发出热辐射.如某一物体能全部吸收而不反射投射于其上的辐射,这种物体称为绝对黑体,简称黑体.

在一个由绝热器壁包围的空腔上开一个小孔,外来辐射一旦进入小孔就几乎不能“反射”出来,这个小孔就是一个绝对黑体的表面.如炼钢炉壁上的一个小孔可看作黑体.经验表明,炉腔温度越高,辐射的能量越大,且辐射的平均波长越短,炼钢工人通过观察小孔的颜色便可判断炉腔的温度.精确测定这种小孔辐射的能谱特性后发现,波长在 λ 到 $\lambda + d\lambda$ 之间的辐射能量密度只和黑体的绝对温度 T 和波长 λ 有关,与腔壁材料无关,记为 $\rho_\lambda(\lambda, T)d\lambda$.当 $T = 1600\text{K}$ 时,测得的 $\rho_\lambda(\lambda, T)$ 和波长 λ 的关系示于图16.3-1.

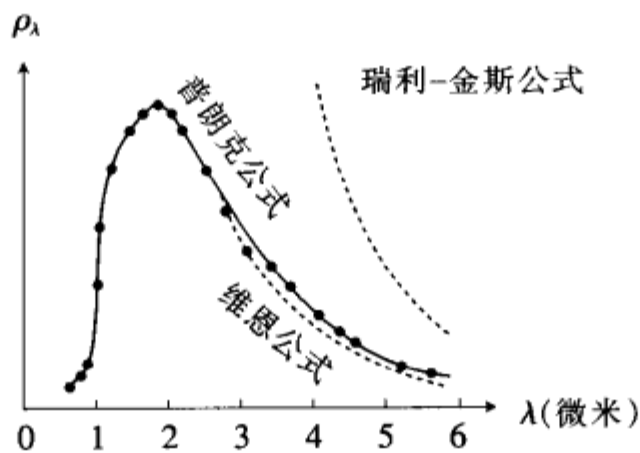


图 16.3-1 热辐射的理论公式与实验结果的比较(·表示实验结果)

黑体辐射的能谱特性也可用频率 ν 描述.频率在 ν 到 $\nu + d\nu$ 之间的辐射能量密度为 $\rho_\nu(\nu, T)d\nu$.因 $\nu = \frac{c}{\lambda}$,故

$$\rho_\nu(\nu, T) = \rho_\lambda(\lambda, T) \left| \frac{d\lambda}{d\nu} \right| = \rho_\lambda\left(\frac{c}{\nu}, T\right) \frac{c}{\nu^2}$$

为了从理论上导出与实验结果相符合的黑体辐射公式,1896年,维恩由热力学理论并结合实验数据归纳为

$$\rho_\nu d\nu = c_1 \nu^3 e^{-c_2 \frac{\nu}{T}} d\nu$$

式中 c_1 和 c_2 为常数.此式只在波长较短(辐射频率较高)时与实验符合,而在波长较长时与实验不符.

1900年,瑞利-金斯根据经典统计理论导出了

$$\rho_\nu d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT d\nu$$

式中 c 为光速, k 为玻尔兹曼常数.它与维恩公式相反,在波长较长时与实验相符,而在波长较短时 ρ_ν 趋向无穷大,物理学史上称之为“紫外区的灾难”.这样,经典理论在解释黑体辐射现象上遇到了不能克服的困难.

同年,普朗克提出了一个完全和实验吻合的理论公式

$$\rho_\nu d\nu = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu \quad (16.3-1)$$

式中 h 为普朗克常数.式(16.3-1)称为普朗克公式.

在导出式(16.3-1)时,普朗克提出了与经典物理格格不入的能量子假设.普朗克认为,黑体由带电

的谐振子组成,这些谐振子的能量不能连续变化,而只能取一些分立值,它们是最小能量 ϵ_0 的整数倍: $\epsilon_0, 2\epsilon_0, \dots, n\epsilon_0$. 对于频率为 ν 的谐振子,最小能量为 $\epsilon_0 = h\nu$. 当辐射频率很高时,普朗克公式过渡到维恩公式;而当辐射频率很低时,过渡到瑞利-金斯公式. 热辐射的理论公式与实验结果的比较示于图(16.3-1). 普朗克公式和实验结果符合的惊人程度迫使人们正视能量量子化假设.

3. 光电效应

光电效应的实验规律 研究光电效应的实验装置如图(16.3-2)所示. 在一内部抽成真空的玻璃容器内,装有阴极 K 和阳极 A . 单色光通过石英窗照到阴极金属板上时,金属板便释放出电子,这种电子称光电子. 如果在 A, K 两端加上电势差 V ,则光电子在加速电场作用下,飞向阳极,回路中光电流的强弱由电流计测量.

实验结果归纳如下:

- (1)光电流强度与入射光的光强成正比,而与光的频率无关.
- (2)光电子的初动能随着入射光频率的增加而线性增加,与入射光的强度无关.
- (3)对一定的金属,入射光的频率必须大于或等于某一频率 ν_0 时才会产生光电效应. 频率 ν_0 称为截止频率(其相应的波长也称红限). 如果入射光的频率低于截止频率 ν_0 ,则不论光强多大,照射时间多长,都不会产生光电效应. 对不同的金属具有不同的截止频率.
- (4)光电效应的瞬时性. 只要入射光的频率大于截止频率,即使光强非常弱,光电子几乎是一触即发的,滞后时间不超过 10^{-9} 秒.

爱因斯坦的光子假设 按照光的波动理论只能解释光电效应的实验规律(1),对于其余的实验规律经典理论无法解释.

为了解释光电效应的实验规律,1905年爱因斯坦利用并推广了普朗克的能量子假设,提出了光子假设,爱因斯坦认为光是以光速 c 运动的粒子流,这些粒子叫光子(也叫光量子). 对于频率为 ν 的光子,其能量为

$$\epsilon = h\nu \quad (16.3-2)$$

式中 $h = 6.626 \times 10^{-34}$ 焦耳·秒,为普朗克常数.

光子不仅有能量,还有动态质量和动量. 按照相对论的质能关系,每个光子的质量 m 和动量 p 分别为

$$m = \frac{\epsilon}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2} \quad (16.3-3)$$

$$p = mc = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad (16.3-4)$$

光子假设可以圆满地解释光电效应. 根据光子假设,光子打在金属上,金属中的电子或者吸收或者不吸收. 当电子吸收一个光子,便获得 $h\nu$ 的能量. 这能量的一部分消耗于电子从金属表面逸出时所需要的能量 A (称为逸出功),另一部分转换为电子的初动能 $\frac{1}{2} m_e v^2$, 根据能量守恒定律,有

$$h\nu = A + \frac{1}{2} m_e v^2 \quad (16.3-5)$$

这方程称为爱因斯坦光电效应方程.

对于一定的金属,其逸出功 A 具有确定的数值. 由式(16.3-5)可看出光电子的初动能与入射光频率之间的线性关系,从而解释了实验规律(2). 正如式(16.3-5)所示,当入射光子的能量小于金属的逸出功时,电子不能从金属中逸出,只有当 $h\nu \geq A$ 时,即 $\nu \geq A/h = \nu_0$ (截止频率),才能产生光电效应,这说明了光电效应存在截止频率.

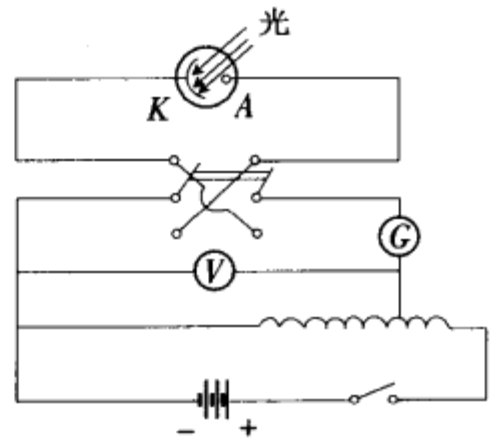


图 16.3-2
光电效应实验示意图

当光的强度增加时,单位时间内打到金属表面上的光子数就多,打出的光电子数也相应增多;当光照射到金属上时,光子的能量是一次地被电子吸收的,因而不需要能量累积的时间.这就解释了实验规律(1)和(4).由此可见,光电效应显示了光的粒子性质.

4. 德布罗意波

光的波粒二象性 光的干涉、衍射等现象,证实了光的波动性,而在黑体辐射,光电效应及康普顿效应等现象中,光的微粒理论又取得极大的成功.因此,为了解释光的全部现象,不得不承认光的本性具有“波粒二象性”.波和粒子是两种仅有的、又是完全不同的传递能量的方式,正是表式

$$\epsilon = h\nu$$

和

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

把标志波动性质的 ν 和 λ 与标志粒子性的 ϵ 和 p ,通过普朗克常数 h 联系起来.

德布罗意假设 1924年,德布罗意在光的波粒二象性的启发下,从自然界的对称性出发,提出了大胆的假设,认为实物粒子(如电子)也具有波粒二象性.就是说,如果实物粒子穿过一个狭缝,而这个狭缝的宽度可以与该实物粒子相联系的波长相比拟时,也会发生衍射现象,就象单缝衍射实验中的光波一样.并假设联系光的波粒二象性的式子(16.3-2)和(16.3-4)也同样适用于实物粒子.

按照德布罗意假设,相应于质量为 m ,以速度 v 作匀速运动的实物粒子的波的波长为

$$\lambda = h/p = h/mv = \frac{h}{m_0 v \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (16.3-6)$$

式中 m_0 为实物粒子的静止质量.这种和实物粒子相联系的波称为德布罗意波,式(16.3-6)称为德布罗意公式.

如果 $v \ll c$,则 $\lambda = h/m_0 v$.对于电子,当加速电势差 V 不太大,以致电子速度不太高时,其德布罗意波长近似为

$$\begin{aligned} \lambda_e &= \frac{h}{m_e v} = \frac{h}{\sqrt{2m_e E_k}} \\ &= \frac{h}{\sqrt{2m_e eV}} = \frac{12.26}{\sqrt{V}} \text{ \AA} \end{aligned} \quad (16.3-7)$$

式中 m_e 为电子质量, V 的单位是伏, $1\text{ \AA}(\text{埃}) = 10^{-10}\text{m}$.

1927年,贝尔电话实验室的戴维孙(C. J. Davisson)和革末(L. S. Germer)将电子束垂直入射到镍单晶上,首先观察到了电子衍射现象,测得的电子波长与德布罗意所预言的相符合.

同年,G. D. 汤姆逊(J. J. 汤姆逊的儿子)观察了电子通过薄金属箔的透射,得到了由许多同心圆组成的衍射图样.此后不久,人们还观察了中子、氢原子、氦原子以及其他原子的衍射,并且在所有的实验里,测得的波长均符合德布罗意公式.

5. 不确定关系

在经典力学中,可以同时用确定的坐标和确定的动量来描述宏观物体的运动.对于微观粒子,由于它具有波动性,因此要想通过一个单独实验同时测出微观物体的位置(坐标)和相应的动量,其精密程度是有一定限制的.海森伯(W. Heisenberg)推得,位置和动量的不确定量 Δx 和 Δp_x 之间的关系为

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{h}{2} \quad (16.3-8)$$

式中 $\hbar \equiv h/2\pi$, h 为普朗克常数.这称为不确定关系,有时又称为测不准关系.

不确定关系表明,位置和动量这两个量中,要提高一个量的精确度,则只能牺牲另一个量的精确度.如果要把粒子的动量非常精密地测量,即 $\Delta p_x \rightarrow 0$,那么其位置就非常不确定,即 $\Delta x \rightarrow \infty$;反之,要精确测量位置,动量就非常不确定.

不确定关系来源于物质的波粒二象性.它反映了微观粒子运动的基本规律,不是测量技术和主观能

力的问题,故实际上称“不确定原理”更确切些.凡是经典力学中共轭的一对变量之间都有这种关系,例如:

能量与时间的不确定关系为 $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar/2$

角动量与角位移的不确定关系为 $\Delta p_\varphi \cdot \Delta \varphi \geq \hbar/2$

6. 薛定谔方程

几率 这是指一个体系处于某一状态的可能性(百分数).

波函数 由于实物粒子具有波动性,其德布罗意波可用一个波动方程来描述,相当于弹性波的位移或电磁波的电场强度(或磁场强度)的一个量,称为波函数,用 ψ 表示.

玻恩(M. Born)提出了对德布罗意波的统计解释,认为波函数的绝对值平方代表单位体积中发现粒子的几率,即在体积 $d\tau$ 中发现粒子的几率为

$$dw = \psi\psi^* d\tau$$

式中 ψ^* 为波函数 ψ 的共轭复数; $\psi\psi^*$ 代表在单位体积内发现粒子的几率,称为几率密度.

应该指出,德布罗意波与经典物理中研究的波是截然不同的.如机械波是机械振动在空间的传播,而德布罗意波是对微观粒子运动的统计描述,它的振幅平方与粒子出现的几率成正比.

波函数 ψ 的条件:

(1) ψ 必须满足有限、连续、单值的标准条件.即:几率小于 1,其总值是 1,不能无限大,所以 ψ 必须有限;几率在某处不会发生突变,故 ψ 以及 $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial\psi}{\partial y}$ 、 $\frac{\partial\psi}{\partial z}$ 应为连续;在任何处只能有一个几率,所以 ψ 应为单值.

(2) 归一化条件.粒子在空间各点出现的几率总和等于 1,即

$$\int_V |\psi|^2 dV = 1$$

式中 V 为粒子可能达到的整个空间.

薛定谔方程 每一种波动都有一个对应的波动方程,该方程是描述这种波动的基本规律.微观粒子有波性,描述它的波动行为也有一个波动方程,其中广泛应用的是薛定谔方程.它是不能从现成的理论(特别是经典物理学中的理论)“推导”出来,而只能以微观领域中的经验事实为依据去“建立”它.薛定谔方程是描述微观粒子的基本方程.由它推得的结论能反映微观粒子的运动规律,因此,方程的正确性得到了充分的肯定.

一个在势场 V 中运动的粒子的薛定谔方程为

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta^2\psi + V\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \quad (16.3-9)$$

式中 Δ^2 为拉普拉斯算符,在直角坐标系中定义为

$$\Delta^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

若势场 V 不显含时间,则可从式(16.3-9)导出定态(能量不随时间变化的状态)的薛定谔方程为

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta^2\psi + V(r)\psi = E\psi \quad (16.3-10)$$

解薛定谔方程的步骤是:首先分区建立方程,求出其通解,然后再根据波函数的标准化条件和归一化条件定出常数.

7. 氢原子的量子力学处理结果

波函数 氢原子中,电子在原子核的库仑场中运动,势能是 $V = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$,是中心力场,且与时间无关,可由定态薛定谔方程求出定态波函数.而 $V(\mathbf{r}) = V(r)$ 是球对称势,采用球极坐标 (r, θ, φ) 较方便.应用波函数的标准化条件和归一化条件,即可精确解出电子的定态波函数为

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (16.3-11)$$

其中 $R_{nl}(r)$ 为径向函数, $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ 为球谐函数, 具体形式可参阅任一原子物理学教材.

能量 设原子核静止不动时, 氢原子中电子的总能量即为氢原子的能量. 束缚态氢原子能量在 $E < 0$ 的范围内, 其分立数值为

$$E_n = -\frac{1}{2} m_e c^2 \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \right)^2 \cdot \left(\frac{Z}{n} \right)^2 \quad (16.3-12)$$

主量子数 $n = 1, 2, 3, \dots$. 氢原子, $Z = 1$. 当氢原子处于基态时, $n = 1$, 基态能量为

$$E_1 = -13.6\text{eV}$$

若考虑原子核也在运动, 则用体系的折合质量 μ 代替电子的质量 m_e , $\mu = \frac{m_e M}{m_e + M}$. 这同玻尔理论的结论完全一致, 但这里得出的能量量子化是由精确求解薛定谔方程所得的必然结果.

角动量 轨道角动量只能取下列分立的值

$$p_l = \sqrt{l(l+1)} \hbar \quad (16.3-13)$$

角动量量子数 $l = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$. 轨道角动量在某个固定方向的 Z 轴上(常常是外加磁场 \mathbf{B} 的方向)的投影值为

$$p_{l_z} = m_l \hbar \quad (16.3-14)$$

磁量子数 $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$. 可见轨道角动量和它在空间的取向都是量子化的.

例 16.3-1 分别计算波长 λ_1 为 5000\AA 的可见光和波长 λ_2 为 1\AA 的 X 光光子的能量.

解: 根据光子假设, 波长为 5000\AA 的可见光的光子能量

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= h\nu_1 = \frac{hc}{\lambda_1} = \frac{12.4 \times 10^3 \text{eV} \cdot \text{\AA}}{5000\text{\AA}} \\ &= 2.48\text{eV} (\text{电子伏}) \end{aligned}$$

同理, 波长为 1\AA 的 X 光光子的能量

$$\epsilon_2 = h\nu_2 = \frac{hc}{\lambda_2} = 12.4\text{keV} (\text{千电子伏})$$

例 16.3-2 钾的逸出功为 2.0eV , 求它的光电效应红限. 如果用 4000\AA 的光照射其表面, 则光电子的初动能是多少?

解: 由光电效应的截止频率 $A = h\nu_0$, 可得其红限

$$\lambda_0 = \frac{hc}{A} = \frac{12.4 \times 10^3 \text{eV} \cdot \text{\AA}}{2.0\text{eV}} = 6.2 \times 10^3 \text{\AA}$$

根据爱因斯坦光电效应方程, 光电子的初动能为

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m_e v^2 &= \frac{hc}{\lambda} - A \\ &= \frac{12.4 \times 10^3 \text{eV} \cdot \text{\AA}}{4000\text{\AA}} - 2.0\text{eV} \\ &= 1.1\text{eV} (\text{电子伏}) \end{aligned}$$

例 16.3-3 一个能量为 1.0 电子伏的电子, 它的德布罗意波长为多少?

解: 由于电子动能较小, 以致它的速度不太大, 故其德布罗意波长可用非相对论计算求得

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_e eV}} = \frac{12.26}{\sqrt{V}} \text{\AA} = 12.3\text{\AA}$$

例 16.3-4 一个质量为 1 微克、速度为 1 微米/秒的宏观粒子, 试求它的德布罗意波长.

解: 按照德布罗意关系式, 这个物体的德布罗意波长为

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s}}{10^{-9} \text{kg} \times 10^{-6} \text{m/s}} \\ &= 6.6 \times 10^{-19} \text{m} = 6.6 \times 10^{-9} \text{\AA} \end{aligned}$$

此波长远小于任何可能的小孔或狭缝, 以致宏观粒子的波动性实际上是不可能观察到的.

例 16.3-5 一个原子在其激发态停留时间的不确定性(平均寿命)为 10^{-8} 秒,那么该激发态的能量最小不确定量为多少?

解: 根据不确定关系,受激态的能量之所以不能精确测量是因为测量这个能量能够利用的时间约 10^{-8} 秒,因此由 $\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$ 关系式可知,这个能态的能量的最小不确定量

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{\hbar}{2\Delta t} = \frac{hc}{2c\Delta t} \\ &= \frac{197.3 \times 10^6 \text{eV} \times 10^{-5} \text{\AA}}{2 \times 3.00 \times 10^8 \text{m/s} \times 10^{10} \text{\AA/m} \times 10^{-8} \text{s}} \\ &= 3.3 \times 10^{-8} \text{eV} \end{aligned}$$

§ 16.4 原子核

1. 原子核的质量、电荷和大小

原子核的线度为 $10^{-15} \text{m} \sim 10^{-14} \text{m}$, 约为原子线度的万分之一, 质量却占原子的 99% 以上. 原子核带正电, 电量与核外电子总的负电荷量相等. 因此, 元素周期表上的原子序数 Z , 既是原子中电子的电荷数, 也是原子核电荷数. 原子核接近于球形, 它的大小以核力作用半径表示, 有如下的经验公式

$$R \approx r_0 A^{1/3} \quad (16.4-1)$$

式中 r_0 是常数, $r_0 = 1.30 \times 10^{-15} \text{m} = 1.30 \text{fm}$, A 为原子核的质量数.

2. 中子的发现

1930 年, 玻特和贝克用天然放射性元素钋放出的 α 射线轰击铍时, 发现有一种看不见的贯穿能力很强的不带电粒子, 它能够贯穿 $10 \text{cm} \sim 20 \text{cm}$ 的铅板. 起初认为这种中性粒子可能是能量很高的光子, 即 γ 射线. 1932 年发现用这种射线轰击石蜡时, 竟从石蜡中打出了质子. 能量的测量和计算表明, 这绝不是钋与铍反应时放出的光子所能做到的. 查德威克经过仔细的分析研究后指出, 这种射线粒子是一种质量差不多与质子相等的不带电的中性粒子, 称为中子, 用符号 n 表示. 查德威克的实验示意图如图 16.4-1 所示. 发现中子的核反应方程是

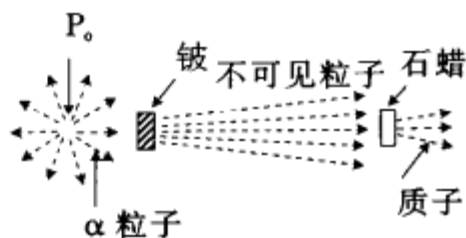


图 16.4-1

3. 原子核的组成

原子核由质子和中子组成. 中子和质子统称核子, 它们的质量相差甚微, 分别为

$$m_n = 1.008665 \text{u}$$

$$m_p = 1.007277 \text{u}$$

其中原子质量单位 $\text{u} = \frac{1}{12} m(^{12}\text{C}) = 931.5016 \text{MeV}/c^2$. 以原子质量 u 表示的核素质量都接近于一个整数, 称为原子核的质量数 A .

4. 核素及其标记

具有相同质子数 Z 和中子数 N 的一类原子称为一种核素. 核素用下列符号表示 ${}_Z^A\text{X}$, 其中 X 为元素符号, A 为原子核的质量数, Z 为原子序数. 核内的中子数 $N = A - Z$. 如 ${}_{19}^{40}\text{K}$ 是元素钾的一种核素, 它的质量数为 40, 质子数 19, 中子数 21.

质子数相同、中子数不同的核素组成同一种化学元素的同位素, 即一种元素可能含有多种同位素. 例 ${}^1_1\text{H}$, ${}^2_1\text{H}$, ${}^3_1\text{H}$ 中氢元素的三种同位素.

中子数相同、质量数不同的核素称为同中子数; 质量数相同、质子数不同的核素称为同量异位素.

5. 质量亏损

原子核由核子所组成,但原子核的质量并不等于、而是小于核内核子质量之和,原子核的质量 $m(Z, A)$ 与组成它的核子的质量总和的差值称为质量亏损

$$\Delta m = (Zm_p + Nm_n) - m(Z, A) \quad (16.4-2)$$

由于一般数据表给出的都是原子的质量 $M(Z, A)$, 而不是原子核的质量, 故上式又写成

$$\Delta m = \Delta M(Z, A) = (ZM_H + Nm_n) - M(Z, A) \quad (16.4-3)$$

6. 原子核的结合能和平均结合能

实验证明,所有的原子核都有正的质量亏损. 这表明由自由核子结合成原子核时有能量释放出来,人们称它为原子核的结合能,以 B 表示. 根据质能关系式,原子核的结合能与核素的质量亏损的关系是

$$B = \Delta M(Z, A)c^2 = [ZM_H + Nm_n - M(Z, A)]c^2 \quad (16.4-4)$$

原子核中平均每个核子的结合能称为平均结合能或比结合能,用 ϵ 表示

$$\epsilon = B/A \quad (16.4-5)$$

它的大小标志着原子核结合得松紧的程度. 图 16.4-2 给出的是核素的平均结合能对质量数 A 的关系曲线,称为核的结合能图.

图中曲线除轻核外相对比较平坦,表明原子核的结合能近似正比于核子数;而“中间高”则反映了中等质量核素的 ϵ 比轻核、重核都大的事实. 当平均结合能小的核变成结合能大的核(即当结合得比较松的核变到结合得紧的核)时,就会释放出能量. 所谓原子能,实际上是原子核结合能发生变化时释放的能量. 因此图 16.4-2 这条曲线告诉我们:人类可以通过重核裂变和轻核聚变这两条途径来获取核能.

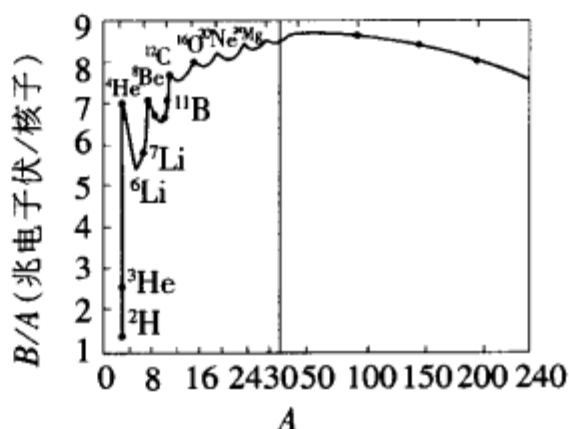


图 16.4-2

7. 核力的基本性质

实验表明,如果欲把原子核拆成自由核子,则必须对体系做功. 另一方面,原子核中虽存在着质子间的库仑斥力,却又能构成稳定的原子核,且以高密度的形式存在. 这些足以表明:原子核内,各核子之间存在着极强的吸引力,人们称之为核力.

从 α 粒子的散射实验可知,核力作用距离很短,仅为 fm 的量级,是一种短程的强相互作用力,强度约为库仑力的一百倍. 核力具有饱和性,它仅存在于相邻的核子之间. 核力与核子的电荷无关,即质子-质子、中子-中子、质子-中子之间的核力都近似相等. 当两核子之间的距离为 0.8~2.0fm 时,核力表现为吸力,在小于 0.8fm 时为斥力,在大于 10fm 时核力完全消失.

8. 核力的介子场论

1935 年,日本的汤川秀树提出了核力的介子场论. 他认为核力也是一种交换力,核子间的相互作用是由交换介子场的量子-介子而引起的,并且由力程预言介子的质量介于电子质量和核子质量之间,是电子质量的 200 多倍. 直到 1947 年,才真正找到了汤川预言的介子,称为 π 介子. 有带正、负电荷和不带电的三种,分别记为 π^+ 、 π^- 、 π^0 ,它们的质量分别为

$$m_{\pi^\pm} = 273.3m_e$$

$$m_{\pi^0} = 264.2m_e$$

式中 m_e 为电子质量.

核力的介子场论取得了很大的成功,但也还有很多问题有待进一步研究. 目前的工作,还处于半唯象的阶段.

例 16.4-1 在下列核素中,哪些核的质子数、中子数、核子数以及电子数是相同的? 哪些核是同位素? 同中子数? 同量异位素? ${}^{12}_6\text{C}$, ${}^{13}_6\text{C}$, ${}^{14}_6\text{C}$, ${}^{14}_7\text{N}$, ${}^{15}_7\text{N}$, ${}^{16}_8\text{O}$, ${}^{17}_8\text{O}$, ${}^{18}_8\text{O}$.

解: 质子数相同(电子数亦相同)的是

${}^{12}_6\text{C}, {}^{13}_6\text{C}, {}^{14}_6\text{C}$ 它们是碳的同位素

${}^{14}_7\text{N}, {}^{15}_7\text{N}$ 它们是氮的同位素

${}^{16}_8\text{O}, {}^{17}_8\text{O}, {}^{18}_8\text{O}$ 它们是氧的同位素

中子数相同(又称同中子异荷素)的是

${}^{14}_6\text{C}, {}^{15}_7\text{N}, {}^{16}_8\text{O}$

${}^{13}_6\text{C}, {}^{14}_7\text{N}$

核子数相同(又称同量异位素)的是

${}^{14}_6\text{C}, {}^{14}_7\text{N}$.

例 16.4-2 已知 ${}^4_2\text{He}$ 的原子质量为 4.002603u , 它是由二个质子和二个中子结合而成的, 试计算 ${}^4_2\text{He}$ 的结合能及比结合能 ϵ .

解:查得氢原子和中子的质量分别为 $M_{\text{H}}=1.007825\text{u}$, $m_{\text{n}}=1.008665\text{u}$. 由式(16.4-4)、式(16.4-5)即得 ${}^4_2\text{He}$ 的结合能和比结合能

$$\begin{aligned} B({}^4_2\text{He}) &= (2 \times 1.007825 + 2 \times 1.008665 - 4.002603)\text{uc}^2 \\ &= 0.030377 \times 931.5\text{MeV} = 28.30\text{MeV} \\ \epsilon({}^4_2\text{He}) &= 28.30\text{MeV}/4 = 7.08\text{MeV}/\text{核子} \end{aligned}$$

例 16.4-3 试计算核密度, 并与水的密度作比较.

解:原子核半径的经验公式为

$$R = r_0 A^{1/3}$$

式中 $r_0 = 1.30\text{fm}$, A 为原子核的质量数. 设核的质量 $m \approx Au$, 根据物质密度的公式

$$\rho = \frac{m}{V} \approx \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

可得核物质的密度

$$\rho \approx \frac{Au}{\frac{4}{3}\pi r_0^3 A} = \frac{3u}{4\pi r_0^3} = \frac{3 \times 1.66 \times 10^{-27}\text{kg}}{4\pi \times (1.30 \times 10^{-15}\text{m})^3} = 1.8 \times 10^{17}\text{kg}/\text{m}^3$$

由核密度的计算公式可见, 各种原子核的密度都是近似相同的. 水的密度 $\rho_{\text{水}} = 10^3\text{kg}/\text{m}^3$, 可见核物质的密度是水的密度的 10^{14} 倍. 这个数值意味着, 若要装载 1cm^3 的核物质, 需用一万艘万吨轮. 原子核的密度如此之高, 简直难以置信, 但却是事实.

§ 16.5 放射性与核反应

1. 放射性

1896年, 法国物理学家贝克勒尔在研究铀矿的荧光现象时发现, 铀矿物能使包在黑纸里的照相底片感光. 由此断定, 铀能自发地放射出穿透力很强的看不见的射线. 物质发射这种射线的性质, 叫做放射性; 具有放射性的元素, 叫做放射性元素. 在迄今为止发现的 2000 多种核素中, 极大部分是不稳定的, 它们会自发地蜕变为另一核素, 同时放出各种射线, 这种核现象称为放射性衰变. 由原子核内放出的射线常见的有三种, 如图 16.5-1 所示. 在铅室底部放有微量的镭, 上有一小孔, 因为射线不能穿过很厚的铅板, 仅能沿着小孔向外射出. 若使射线通过强磁场(或电场), 射线就分为三束. 其中的两束能在磁场或电场中发生偏转, 而偏转方向不同, 这说明它们是带相反电荷的. 另一束在磁场或电场中不发生偏转, 说明它不带电. 人们把带正电的射线叫 α 射线, 带负电的

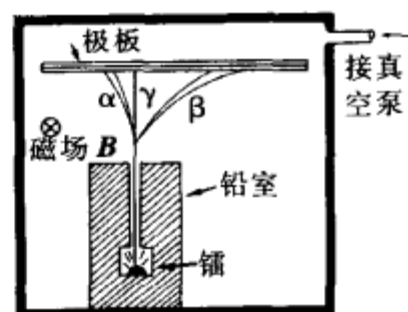


图 16.5-1

另一束在磁场或电场中不发生偏转, 说明它不带电. 人们把带正电的射线叫 α 射线, 带负电的

射线叫 β 射线,不带电的射线叫 γ 射线.进一步的研究表明, α 射线是具有很高速度的氦原子核流,它有很强的电离作用,但贯穿物质的本领很小; β 射线是高速运动的电子流,它的贯穿本领很强,但它的电离作用比较弱; γ 射线是波长比 x 射线还短的电磁波,即光子流,它的贯穿能力比 x 射线还要大得多,但电离作用却很小.

对放射现象的研究是获悉原子核内部状态的重要途径之一.另一方面,放射现象又在国民经济的广阔领域中展示了实际应用的宝贵价值.

2. 放射性衰变的规律

原子核是一个量子体系,核衰变是原子核自发产生的变化,是一个量子跃迁的过程,它服从量子力学的统计规律.对任何一个放射性核素,它发生衰变的精确时刻是不能预告的,但对足够多的同一种放射性核素的集合,作为一个整体,它的衰变规律则是十分确定的.设 $t=0$ 时原子核的数目为 N_0 ,由于衰变,在 t 时刻的原子核数目为

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \quad (16.5-1)$$

这就是放射性衰变服从的指数衰减规律.式中 λ 代表一个原子核在单位时间内发生衰变的几率,称为衰变常数.每一种放射性核素都有它特定的 λ ,没有二个核的 λ 是一样的.因此, λ (或 $T_{1/2}$,或 τ)是放射性核素的“手印”.人们可以根据测量到的 λ 来判断它属于何种核素.

3. 半衰期

放射性核素衰变掉原有核数一半所需的时期,称为半衰期,用 $T_{1/2}$ 表示.即当 $t = T_{1/2}$ 时, $N = \frac{N_0}{2}$ (见图 16.5-2 所示).

从式(16.5-1)可得

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.693}{\lambda} \quad (16.5-2)$$

$T_{1/2}$ 与 λ 一样,是放射性核素的特征常数,它由核内部本身的因素决定的. λ 越大, $T_{1/2}$ 越小.实验表明, $T_{1/2}$ 几乎与外界条件没有任何关系.

平均寿命 对某种确定的放射性核素,其中有些核较早发生衰变,有些则晚些,它们存在的时间不一样.理论上常用平均寿命 τ 来表示放射性核素在衰变前的平均生存时间,放射性核素的平均寿命可表示为

$$\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{T_{1/2}}{0.693} = 1.44 T_{1/2} \quad (16.5-3)$$

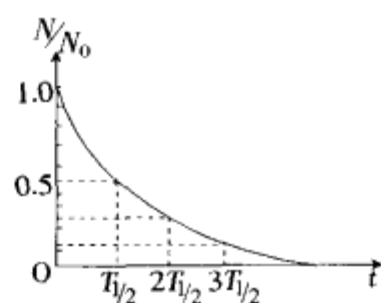


图 16.5-2

4. 放射性强度

放射性核素在单位时间内发生衰变的核数目称为放射性强度(又称放射性活度),用 A 标记

$$A = \lambda N = \lambda N_0 e^{-\lambda t} \quad (16.5-4)$$

显然它也服从指数规律.式(16.5-4)表明,决定放射性强弱的量是 λ 与 N 的乘积 A .

常用的放射性强度的单位为

$$1\text{Ci(居里)} = 3.7 \times 10^{10} \text{次核衰变/秒}$$

$$1\text{Bq(贝克)} = 1 \text{次核衰变/秒}$$

5. 同位素生产

放射性核素绝大部分都是人工生产的.生产的方法有两种,一种是由加速器产生的带电粒子引起的核反应来获得放射性核素;另一种是由反应堆产生的强中子流照射靶核,靶核俘获中子后生成放射性核素.由于人工放射性核素在产生的同时即在发生衰变,故其放射性强度的变化为

$$A = \lambda N = P(1 - e^{-\lambda t}) = P(1 - 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}) \quad (16.5-5)$$

式中 P 是核素的产生率,在特定的条件下是一常数; N 是开始生产后 t 时刻的核素数目.由式(16.5-5)

可见,当时间经过一个 $T_{1/2}$ 时, A 可到达 P 的一半, 经过二个 $T_{1/2}$, A 达到 P 的 75%, ... (见图 16.5-3). 不论工作时间多么长, 最大的 A 是 P .

由上图可知, 生产的核素的放射性强度并不是随时间线性增加的. 当 $t \geq 3T_{1/2}$ 后, 增加就很缓慢了. 当反应时间超过 $5T_{1/2}$ 后, 放射性强度基本上已经达到饱和值, 继续反应是徒然浪费而无济于事. 因此, 在实际生产同位素时必须根据使用要求和经济效应作统筹考虑.

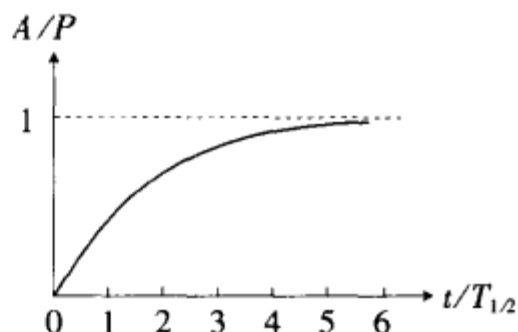
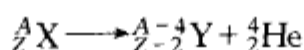


图 16.5-3

§ 16.6 衰变方式和衰变能

1. α 衰变

原子核自发地放出 α 粒子(即氦原子核)而发生的转变, 叫做 α 衰变. 由于放射 α 粒子后母核损失了两个质子和两个中子, 因此子核的原子序数减少 2, 而质量数减少 4. 故 α 衰变方程可写为



α 衰变时放出的能量叫 α 衰变能, 用 E_0 表示. 衰变前母核可看作静止, 根据能量守恒定律, α 衰变能 E_0 可表示为

$$E_0 = E_\alpha + E_r = [m_X - (m_Y + m_\alpha)]c^2$$

式中 E_α 和 E_r 分别为 α 粒子的动能和子核的反冲动能; m_X 、 m_Y 和 m_α 分别为母核(X)、子核(Y)和 α 粒子的质量. 若用原子质量表示, 则 E_0 可表述为

$$E_0 = [M_X - (M_Y + M_{\text{He}})]c^2 \quad (16.6-1)$$

式中 M_X 、 M_Y 和 M_{He} 分别是 X 、 Y 和氦的原子质量. 显然, 原子核能自发地放射 α 粒子的必要条件是衰变能 $E_0 > 0$, 即须满足

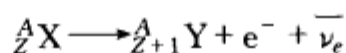
$$M_X(Z, A) > M_Y(Z-2, A-4) + M_{\text{He}} \quad (16.6-2)$$

实验上, 可测出 α 粒子的动能, 根据动量守恒定律可导出下式来计算 α 衰变能

$$E_0 = \left(\frac{M_Y + M_\alpha}{M_Y} \right) E_\alpha \approx \frac{A}{A-4} E_\alpha \quad (16.6-3)$$

2. β^- 衰变

原子核自发地发射一个电子(e^-), 同时放射出一个反中微子 $\bar{\nu}_e$ 而发生的转变, 称为 β^- 衰变. 其衰变方程可表示如下:



β^- 衰变能为

$$E_0 = [M_X - M_Y]c^2 \quad (16.6-4)$$

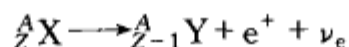
发生 β^- 衰变的条件是

$$M_X(Z, A) > M_Y(Z+1, A) \quad (16.6-5)$$

由于电子的质量远小于子核的质量, 故子核的反冲动能 $E_r \approx 0$, E_0 主要在电子和反中微子之间分配. 因此, 电子的能量 E_{β^-} 可以取 0 到 E_0 之间的任何值, 最大能量 $E_{\beta m}$ 等于 E_0 , 即电子的能量是连续分布的.

3. β^+ 衰变

这是指放射一个正电子和一个中微子的衰变. 其衰变方程可表示为



β^+ 衰变能为

$$E_0 = [M_X - M_Y - 2m_e]c^2 \quad (16.6-6)$$

β^+ 衰变的条件为

$$M_X(Z, A) > M_Y(Z-1, A) + 2m_e \quad (16.6-7)$$

正电子能量 E_{β^+} 的取值与 E_{β^-} 衰变类同, 能量也是连续分布的.

4. 轨道电子俘获(EC)

原子核俘获核外轨道上的一个电子, 使母核中的一个质子转为中子, 过渡到子核, 同时放出一个中微子, 这就是轨道电子俘获过程(记为 EC). 它可表示为



于是从第 i 层轨道俘获电子的衰变能为

$$E_{e_i} = [M_X - M_Y]c^2 - \epsilon_i \quad (16.6-8)$$

式中 ϵ_i 为第 i 层轨道电子在原子中的结合能. 发生轨道电子俘获的条件是

$$M_X(Z, A) > M_Y(Z-1, A) + \frac{\epsilon_i}{c^2} \quad (16.6-9)$$

由于 $2m_e c^2 \gg \epsilon_i$, 因此, 能发生 β^+ 衰变的核素总可以发生轨道电子俘获; 反之, 则未必发生.

β^- 衰变、 β^+ 衰变和轨道电子俘获统称 β 衰变.

5. γ 衰变

当原子核发生 α 、 β 衰变时, 往往衰变到子核的激发态, 处于激发态的原子核是不稳定的, 它往往要以放出 γ 光子的形式向低激发态跃迁, 这现象称为 γ 跃迁, 或 γ 衰变. 图 16.6-1 所示就是医学上治疗肿瘤常用的放射源 ${}^{60}\text{Co}$ 的衰变图.

γ 射线是一组高能光子, 它不会导致核素的变化而只改变核的内部状态. 以 $({}^A_Z X)^*$ 表示激发核, 则 γ 衰变方程可表示如下



若以 E_2 、 E_1 分别代表衰变前后原子核的能量, 则 γ 射线的光子能量(忽略核的反冲动能)

$$E_\gamma = h\nu = E_2 - E_1$$

与原子跃迁中所发射的光子不同, γ 射线的能量范围从千电子伏到兆电子伏.

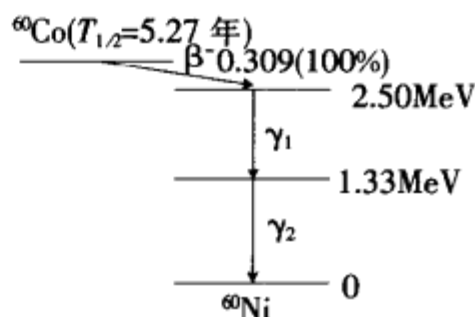
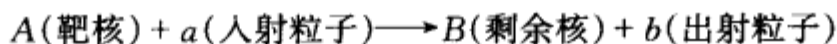


图 16.6-1

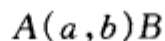
6. 核反应

用具有一定能量的粒子轰击某核素, 使之发生性质的改变而成为新的核素, 这种由原子核与原子核或其他粒子之间的相互作用引起的各种变化叫做核反应. 它是研究原子核的结构和性质的重要途径之一.

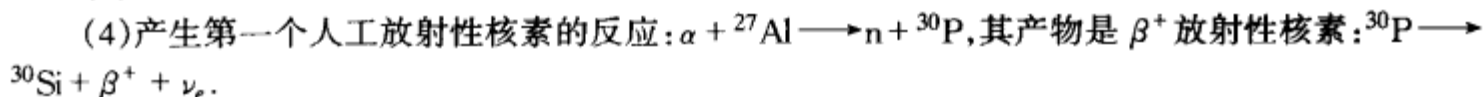
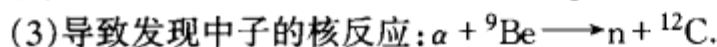
核反应一般可用如下方程来表示:



或简写成



几个著名的核反应



核反应中的守恒定律 实验事实表明, 原子核反应都遵守下列几个守恒定律:

(1) 质量数 A 守恒, 即反应前后总的质量数保持不变.

- (2)电荷数 Z 守恒,即反应前后总的电荷数保持不变.
 (3)能量守恒,即按照相对论质能关系,粒子的能量之和在反应前后不变.
 (4)动量守恒,即在反应前后,各粒子动量的矢量和不变.

7. 核反应的反应能

核反应过程中释放或吸收的能量称为反应能,通常用符号 Q 表示.反应能就是反应后粒子的总动能与反应前粒子的总动能之差. $Q > 0$ 是放能反应; $Q < 0$ 为吸能反应. Q 值可以通过实验测量反应前后各粒子的动能求得.

设 E_0, E_1, E_2, E_3 分别表示靶核、入射粒子、剩余核和出射粒子的动能, M_0, M_1, M_2, M_3 分别表示它们的原子质量, B_0, B_1, B_2, B_3 分别表示它们的结合能,并假定反应前后各粒子均处于基态,根据反应能 Q 的定义和总能量守恒,则有

$$\begin{aligned} Q &= (E_2 + E_3) - (E_0 + E_1) = [(M_0 + M_1) - (M_2 + M_3)]c^2 \\ &= (B_2 + B_3) - (B_0 + B_1) \end{aligned} \quad (16.6-10)$$

由此可见,核反应的反应能还可从反应前后粒子的静质量之差或粒子的结合能之差算出.

8. Q 方程

如何通过测量反应中出射粒子的动能来求 Q 值? 在实验中靶核往往是固定不动的,即 $E_0 = 0$,由式(16.6-10)得

$$Q = E_3 + E_2 - E_1$$

由于剩余核的质量一般较大,其动能 E_2 较小很难准确测定,但测量沿 θ 方向出射的粒子的动能 E_3 ,即可求得 Q 值:

$$Q = \left(1 + \frac{A_3}{A_2}\right)E_3 - \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)E_1 - \frac{2\sqrt{A_1 A_3 E_1 E_3}}{A_2} \cos\theta \quad (16.6-11)$$

式中 A_1, A_2, A_3 分别为入射粒子、剩余核和出射粒子的质量数, θ 为出射粒子与入射粒子方向间的夹角,上式称为 Q 方程.

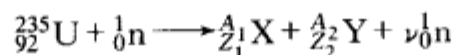
9. 阈能

在激发原子核进行反应时,入射粒子必须具有的最低能量叫阈能.对放能反应阈能可以是零.对吸能反应阈能为

$$E_{\text{阈}} = \frac{M_0 + M_1}{M_0} |Q| = \frac{A_0 + A_1}{A_0} |Q| \quad (16.6-12)$$

10. 重核裂变

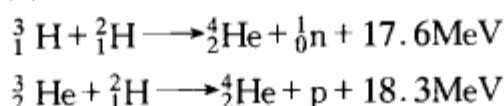
1939年,实验发现铀(^{235}U)核受到中子轰击时,铀原子核会吸收一个中子而分裂成两个中重核(个别也有分裂成三、四个碎片的),并放出2~3个新的中子,伴随着放出很大的能量,这种现象叫做原子核的裂变.铀原子核的裂变过程一般可由下式表示:

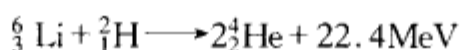


式中 X, Y 为裂变所产生的碎片, ν 为所产生的中子数.产生的中子会继续引起其他 ^{235}U 的分裂,这样可使裂变反应持续进行下去(称为链式反应).原子核裂变时放出的巨大能量称为“原子核能”,所以核裂变的发现开辟了一个新的巨大的能源.原子反应堆就是产生、维持并控制核裂变链式反应的装置.如果让核裂变链式反应不加控制地连续进行下去,那就会发生爆炸,这就是原子弹爆炸的原理.

11. 轻核聚变

从核的比结合能曲线可以看出,轻原子核聚合成较重原子核时也会放出能量,这是取得核能的另一个途径.这种聚合反应称之为轻核聚变.下面列举几个聚变反应:





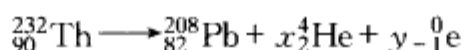
欲使轻元素的原子核发生可观的聚变反应,就得克服两核之间的静电斥力的势垒,因此先决条件是要给予轻核以极大的运动速度,这只有在将轻元素加热到几千万度的情况下,其原子核才能获得如此大的运动速度.所以这种反应叫热核反应.氢弹是利用原子弹爆炸时产生的高温引起热核反应而释放出巨大能量的,因此氢弹又称热核武器.如果这种反应能够加以控制,则称为受控热核反应.要实现自持的聚变反应并从中获取能量还必须满足两个条件:等离子体的密度必须足够大;所要求的温度和密度必须维持足够长的时间,即必须满足著名的劳逊判据:

$$\left. \begin{aligned} n\tau &= 10^{14}\text{s}\cdot\text{cm}^{-3} \\ T &= 10\text{K}\sim 10^8\text{K} \end{aligned} \right\} \quad (16.6-13)$$

其中 T 为温度; n 为等离子体的密度; τ 为所要求的温度和密度必须维持的时间.

例 16.6-1 由 ${}^{232}_{90}\text{Th}$ 衰变为 ${}^{208}_{82}\text{Pb}$,要经过几次 α 衰变和几次 β^- 衰变?

解: 设经过 x 次 α 衰变和 y 次 β^- 衰变,其衰变方程为



根据质量数守恒和电荷数守恒得

$$\begin{aligned} 232 &= 208 + 4x \\ 90 &= 82 + 2x + (-1)y \end{aligned}$$

解方程得

$$x=6, y=4.$$

当然我们也可分析推理得出: α 衰变使母核的原子序数减少 2,质量数减少 4; β^- 衰变不影响质量数,而电荷数增加 1,题中质量数从 232 减小到 208,所以一定进行了 $\frac{232-208}{4}=6$ 次 α 衰变.6 次 α 衰变,将使核的电荷数从 90 减小到 78,可是 Pb 的电荷数为 82,所以一定进行了 4 次 β^- 衰变.

例 16.6-2 一位侦探沉船的潜水员,在一沉船中发现有一瓶未开封的威士忌酒,分析得此酒中的 ${}^3_1\text{H}$ 的放射性活度为新鲜威士忌酒的 1%,问此船是什么时间沉下的?(已知 ${}^3_1\text{H}$ 的 $T_{1/2}=12.33$ 年)

解: 假设新鲜水中的 ${}^3_1\text{H}$ 与大气中的 ${}^3_1\text{H}$ 不断交换一直处于平衡状态,而封装后的酒中的 ${}^3_1\text{H}$ 由于不能与大气交换不断衰变而减少.由式(16.5-4)可知放射性活度亦服从指数衰减规律

$$\begin{aligned} A &= A_0 e^{-\lambda t} = A_0 e^{-\frac{0.693}{T_{1/2}} t} \\ \therefore t &= T_{1/2} \frac{\ln \frac{A_0}{A}}{0.693} \end{aligned}$$

已知 $A/A_0=1\%$, $T_{1/2}=12.33$ 年,即得

$$t = 12.33 \times \frac{\ln 100}{0.693} = 82(\text{年})$$

由此可知,此船约在 80 多年前沉下的.

例 16.6-3 判定核反应 ${}^{182}_{74}\text{W}({}^3_2\text{He}, n)\text{X}$ 中的未知数,并利用原子质量计算其反应能.已知原子质量分别为 ${}^{182}_{74}\text{W}:181.948248\text{u}$; ${}^3_2\text{He}:3.0160297\text{u}$; ${}^{184}_{76}\text{Os}:183.952595\text{u}$.

解: 根据核反应遵守的质量数守恒和电荷数守恒,可得未知粒子的质量数和核电荷数分别为

$$\begin{aligned} A &= 182 + 3 - 1 = 184 \\ Z &= 74 + 2 - 0 = 76 \end{aligned}$$

因此核反应中的 X 为 ${}^{184}_{76}\text{Os}$.

核反应的反应能可由反应前后各粒子的原子质量求出

$$\begin{aligned} Q &= \Delta mc^2 = [(M_{{}^{182}\text{W}} + M_{{}^3\text{He}}) - (M_{{}^{184}\text{Os}} + m_n)]c^2 \\ &= (181.948248 + 3.0160297 - 183.952595 - 1.008665)\text{uc}^2 \times 931.5\text{MeV}/\text{uc}^2 \\ &= 2.81\text{MeV} (Q > 0, \text{为放能反应}) \end{aligned}$$

* § 16.7 基本粒子

1. 粒子家族

最初人们把原子看作是不可分割的,是各种物质结构的基本单元,即基本粒子. 1897年 J. J. 汤姆逊发现了电子, 1932年查德威克又发现了中子,这使人们认识到原子甚至原子核也是具有结构的. 那时人们把质子、中子、电子和光子看作基本粒子. 但不久又发现了正电子和中微子,以后又发现了其他许多粒子. 现在比较稳定的、寿命比较长的($>10^{-16}\text{s}$)、能够被探测出来的基本粒子已有 30 多种. 若计入寿命很短($<10^{-20}\text{s}$),不能直接被观测的共振态,基本粒子已有数百种. 光子是传递电磁作用的媒介, W^\pm 、 Z^0 中间玻色子是传递弱作用的媒介,引力子(尚未发现)是传递引力作用的媒介. 其余所有的粒子按其是否参与强作用分为两大类:一类不参与强作用,称为轻子,已发现的轻子有 5 个;另一类参与强作用,称为强子. 然后又按自旋将强子分为两大族:自旋为半整数的一族称为重子,自旋为整数的称为介子. “基本”粒子在高速碰撞时,二、三个粒子在短时期内结合在一起成为一个粒子的状态,称为共振态. 这种状态的粒子极不稳定,寿命只有 $10^{-24}\sim 10^{-22}\text{s}$.

对于共振态,由于不知道它的结构,人们用它的总(静止)能量 E_c (质心系能量)来表示. 因轰击粒子的动能很大,因此必须考虑相对论效应. 对于如下这样的反应(A 原为静止):



可推得共振态的质心系能量为

$$E_c = \sqrt{2m_A E_{K_a} + (m_a + m_A)^2} \quad (16.7-1)$$

式中 m_a 和 m_A 分别是粒子 a 和 A 的静质量(以能量为单位), E_{K_a} 是 a 粒子在实验室坐标系中的动能.

当 $E_{K_a} \gg m_a$ (和 m_A) 时,式(16-46)中的后项可略去

$$E_c \approx \sqrt{2m_A E_{K_a}} \quad (16.7-2)$$

每一种基本粒子都有它的反粒子. 反粒子和粒子具有相同的质量、寿命和自旋,但它们的电荷、磁矩、轻子数、重子数和奇异数的符号相反. 例如电子(e^-)的反粒子是正电子(e^+). 有些粒子,如光子和 π^0 介子,反粒子和粒子本身是完全相同的. 正、反粒子相遇时要发生湮灭而转化为光子或介子.

2. 粒子间的相互作用

粒子间的相互作用有强相互作用、电磁相互作用、弱相互作用和引力相互作用(指万有引力相互作用). 四种相互作用的特征如表 16.7-1 所示. 引力作用的强度太小,在研究基本粒子时可以忽略.

表 16.7-1 四种相互作用的比较

相互作用类型	强相互作用	电磁相互作用	弱相互作用	引力相互作用
强度(自然单位)	$10^0 \sim 10^1$	$10^{-2} \left(\frac{1}{137} \right)$	10^{-5}	10^{-39}
作用力程(m)	10^{-15}	∞	$< 10^{-17}$	∞
作用时间(s)	10^{-23}	$10^{-16} \sim 10^{-21}$	$10^{-10} \sim 10^{-16}$	
媒介子	介子	光子	W^\pm 、 Z^0 中间玻色子	引力子
被作用粒子	强子	带电粒子	轻子、强子	一切物体
举例	核力	原子结合	β 衰变	天体之间

3. 夸克模型(层子模型)

实验事实表明,轻子是点粒子,迄今未发现它有结构,而强子具有内部结构,它们是由更基本的粒子构成的. 1964年盖尔曼提出强子是由夸克组成的. 几乎同时,我国部分物理学家也提出类似的层子模

型. 夸克(又称层子)有三种:上夸克、下夸克和奇夸克,分别用 u 、 d 和 s 表示. 每一种夸克有其对应的反夸克. 所有的粒子都可认为由上述三种夸克组成. 重子由三个夸克组成,如质子由 uud 组成. 介子由一个夸克和一个反夸克组成,如 π^+ 介子由 $u\bar{d}$ 组成. 夸克模型获得了很大的成功,三个夸克或夸克-反夸克对的允许组成能得出所有已知的强子.

夸克的色 按夸克模型, Δ^{++} 粒子由三个 u 夸克组成,且它们的自旋应相互平行,但这是泡利原理所不允许的. 于是又引进一个新量子数,称作“色”. 每种夸克有三种颜色:红、黄、蓝(相应称 u 、 d 、 s 为三味).

多味夸克模型 1974 年丁肇中等发现 J/ψ 粒子以后,为了说明它与一般共振态粒子不同的性质,引起了第四种夸克——粲夸克(c),认为 J/ψ 粒子由 $c\bar{c}$ 组成. 1977 年 Υ (Upsilon) 粒子发现后又引进了第五种夸克——底夸克(b),认为 Υ 粒子由 $b\bar{b}$ 组成. 人们预言还存在第六种夸克——顶夸克(t).

但是,单独的夸克至今未曾检测到. 自然界中能否找到单独的夸克还有待于人们进一步去探索.

本章综合例题

例 16-1 试按玻尔理论证明,氢原子的动能等于其势能绝对值的一半,而总能量等于其势能的一半(取无穷远处的势能为零).

证:根据玻尔假设,氢原子中的电子在绕原子核作圆周运动. 氢原子的能量由原子核和电子的动能以及体系的势能构成. 原子核的质量为电子质量的 1836 倍,故可近似视原子核静止不动,不计其动能. 因此原子的动能就等于电子的动能,即

$$E_K = \frac{1}{2} m_e v^2 \quad (1)$$

式中 m_e 为电子质量, v 为电子的轨道运动速率.

电子绕核作圆周运动所需的向心力等于电子与原子核之间的库仑引力. 设核电荷数为 Ze , 电子离核的距离为 r , 则

$$\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{m_e v^2}{r} \quad (2)$$

由式①和②可得

$$E_K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Ze^2}{2r} \quad (3)$$

取 $r = \infty$ 时的势能为零,那么电子的势能等于

$$E_p = qV = -eV = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Ze^2}{r} \quad (4)$$

比较③、④两式,可知原子的动能 E_k

$$E_K = \frac{1}{2} |E_p|$$

原子的总能量

$$\begin{aligned} E &= E_K + E_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Ze^2}{2r} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Ze^2}{r} \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Ze^2}{2r} = \frac{1}{2} E_p \end{aligned}$$

氢原子处于基态时,电子的总能量为 -13.60eV ,由上述结论可知,此时电子的势能为 -27.20eV ,动能为 13.60eV .

例 16-2 实验发现基态氢原子可吸收能量为 12.75eV 的光子.(1)试问氢原子吸收该光子后将被激发到哪个能态?(2)在能级图上标出受激发的氢原子向较低能级跃迁时可能发出哪几条光谱线?(3)算出这几条光谱线中波长最短的一条的波长.

解:(1)基态氢原子吸收能量为 12.75eV 的光子后,将被激发到较高的能态 E_n 上去,其量子数 n 则

由下式确定

$$\Delta E = Rhc \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) = 13.60 \text{eV} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) = 12.75 \text{eV}$$

$$\therefore n = 4$$

即能够达到的能态为第三激发态.

(2)当氢原子从 $n=4$ 的第三激发态向较低能态跃迁时,可能出现六种不同波长的谱线,具体如图 16.8-1 所示.

(3)所发射光子的能量等于相应两能级之间的能量差

$$h\nu = \Delta E$$

谱线的波长为

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E}$$

由此可知

$$\lambda_{\text{最短}} = \frac{hc}{\Delta E_{\text{最大}}} = \frac{hc}{\Delta E_{41}} = \frac{12.40 \times 10^2 \text{eV} \cdot \text{nm}}{12.75 \text{eV}} = 97.25 \text{nm}$$

谱线中最短的一条的波长就等于被吸收光子的波长.

例 16-3 μ 子是一种基本粒子,除静止质量为电子质量的 207 倍外,其余性质与电子都一样.当它运动速度较慢时,被质子俘获而形成 μ 子原子.试计算:(1) μ 子原子的第一玻尔轨道半径;(2) μ 子原子的最低能量;(3) μ 子原子赖曼系中的最短波长.

解:(1) μ 子原子可看作类氢原子,应用玻尔理论,其轨道半径为

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{4\pi^2 \mu e^2} \cdot \frac{n^2}{Z}$$

式中体系的折合质量

$$\mu = \frac{mM}{m+M} = \frac{207m_e \times 1836m_e}{(207+1836)m_e} = 186.0m_e$$

对第一玻尔轨道半径,取 $n=1$,于是有

$$r_1 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{4\pi^2 \times 186.0m_e e^2} = \frac{r_1(\text{氢})}{186.0} = \frac{0.0529 \text{nm}}{186.0} = 2.84 \times 10^{-4} \text{nm}$$

(2) μ 子原子的能量公式为

$$E_n = -\frac{2\pi^2 \mu e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} \cdot \frac{Z^2}{n^2} = -\frac{2\pi^2 \times 186.0m_e e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} \cdot \frac{Z^2}{n^2}$$

$$= 186.0E_n(\text{氢})$$

对于基态,取 $n=1$,即有

$$E_1 = -13.6 \times 186.0 = -2.53 \times 10^3 \text{eV}$$

(3)赖曼系为 $n=2,3,4,\dots$ 向 $n=1$ 跃迁时所产生的的一组谱线,由波长公式

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E}$$

可知

$$\lambda_{\text{最短}} = \frac{hc}{\Delta E_{\text{最大}}} = \frac{hc}{E_\infty - E_1} = \frac{12.40 \times 10^2 \text{eV} \cdot \text{nm}}{2.53 \times 10^3 \text{eV}} = 0.49 \text{nm}$$

例 16-4 已知 ^{235}U 的平均结合能为 7.60MeV,中等质量原子核的平均结合能为 8.50MeV.试求:当一个 ^{235}U 核分裂成两个中等质量原子核时,它们的结合能之差为多少?

解:已知 $\epsilon_1(^{235}\text{U}) = 7.60 \text{MeV}$,故 ^{235}U 的结合能

$$B_1 = \epsilon_1 \cdot A = 7.60 \times 235 = 1786 \text{MeV}$$

而中等质量原子核的 $\epsilon_2 = 8.50 \text{MeV}$,则有

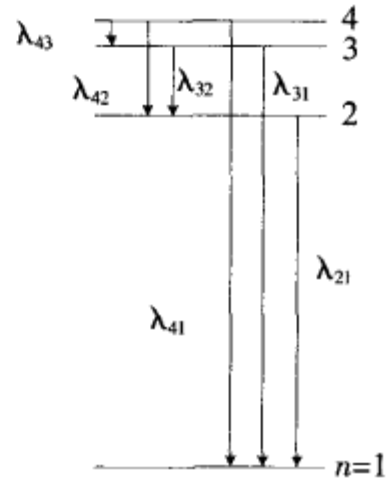


图 16.8-1

$$B_2 = 2\epsilon_2 \cdot \frac{A}{2} = 8.50 \times 235 = 1998 \text{ MeV}$$

$$\therefore \Delta B = B_2 - B_1 = 212 \text{ MeV}$$

由上述结果可知,一个铀 235 核裂变成两个中等质量原子核时要释放出 212MeV 的能量.

例 16-5 热中子计数管通常充有 BF_3 气体.它是通过下述核反应吸收中子而计数: ${}_{5}^{10}\text{B} + {}_0^1\text{n} \rightarrow {}_{3}^7\text{Li} + {}_{2}^4\text{He}$. 试计算:(1)此反应的 Q 值;(2)两种产核各自的能量;(3)两种产核各自的初速.(已知 ${}_{5}^{10}\text{B}$:10.0129385u; ${}_{3}^7\text{Li}$:7.016005u; ${}_{2}^4\text{He}$:4.002603u)

解:(1)由质量亏损计算反应能 Q

$$\begin{aligned} Q &= [(M_{{}^{10}\text{B}} + m_n) - (M_{{}^7\text{Li}} + M_{{}^4\text{He}})]c^2 \times 931.5 \text{ MeV/uc}^2 \\ &= (10.0129385 + 1.008665 - 7.016005 - 4.002603) \times 931.5 \text{ MeV} \\ &= 2.79 \text{ MeV} \end{aligned}$$

(2)因为是热中子,中子的能量可忽略不计,此反应能转化为反应产物 ${}^7\text{Li}$ 和 ${}^4\text{He}$ 的动能,由动量守恒和能量守恒关系得

$$M_{\text{Li}} \cdot v_{\text{Li}} = M_{\alpha} \cdot v_{\alpha} \quad (1)$$

$$Q = E_{\alpha} + E_{\text{Li}} = E_{\alpha} + \frac{1}{2} M_{\text{Li}} \cdot v_{\text{Li}}^2 \quad (2)$$

式②中的 E_{α} 和 E_{Li} 分别为 α 粒子和 ${}^7\text{Li}$ 的动能.将式①的 $v_{\text{Li}} = \frac{M_{\alpha} \cdot v_{\alpha}}{M_{\text{Li}}}$ 代入式②,则

$$\begin{aligned} Q &= E_{\alpha} + \frac{1}{2} M_{\text{Li}} \left(\frac{M_{\alpha} \cdot v_{\alpha}}{M_{\text{Li}}} \right)^2 = E_{\alpha} + \frac{M_{\alpha}}{M_{\text{Li}}} \cdot E_{\alpha} \\ &= \left(1 + \frac{M_{\alpha}}{M_{\text{Li}}} \right) E_{\alpha} \quad (3) \end{aligned}$$

将求得的 Q 值代入式③,得 α 粒子的动能

$$E_{\alpha} = \frac{Q}{\left(1 + M_{\alpha}/M_{\text{Li}} \right)} = \frac{2.79}{1 + \frac{4}{7}} = 1.78 \text{ (MeV)}$$

由式②可得 ${}^7\text{Li}$ 的动能

$$E_{\text{Li}} = Q - E_{\alpha} = 2.79 - 1.78 = 1.01 \text{ (MeV)}$$

(3)它们的速度分别计算如下:

$$E_{\alpha} = \frac{1}{2} M_{\alpha} v_{\alpha}^2$$

$$v_{\alpha} = \sqrt{\frac{2 \times 1.78}{4 \times 931.5}} \times c = 9.3 \times 10^6 \text{ (m/s)}$$

将 v_{α} 的数值代入式①,则可得 ${}^7\text{Li}$ 的初速为

$$v_{\text{Li}} = \frac{4}{7} \times 9.3 \times 10^6 = 5.3 \times 10^6 \text{ (m/s)}$$

例 16-6 某一实验室具有能产生 20MeV 的 ${}^{12}\text{C}$ 离子束的加速器,试问能否研究下述核反应: ${}_{6}^{12}\text{C} + {}_{8}^{16}\text{O} \rightarrow {}_{9}^{17}\text{F} + {}_{5}^{11}\text{B}$? (已知 ${}_{6}^{12}\text{C}$:12.000000u; ${}_{8}^{16}\text{O}$:15.994915u; ${}_{9}^{17}\text{F}$:17.002095u; ${}_{5}^{11}\text{B}$:11.009305u)

解:为研究该核反应,首先考察这反应的 Q 值

$$\begin{aligned} Q &= [(M_{{}^{16}\text{O}} + M_{{}^{12}\text{C}}) - (M_{{}^{17}\text{F}} + M_{{}^{11}\text{B}})]c^2 \times 931.5 \text{ MeV/uc}^2 \\ &= (15.994915 + 12.000000 - 17.002095 - 11.009305) \times 931.5 \text{ MeV} \\ &= -15.36 \text{ MeV} < 0 \text{ (吸能反应)} \end{aligned}$$

$$E_{\text{阈}} = \frac{A_0 + A_1}{A_0} |Q| = \frac{28}{16} \times 15.36 = 26.9 \text{ (MeV)}$$

欲使这一核反应进行,必需 $E > E_{\text{阈}}$,因此 20MeV 的 ${}^{12}\text{C}$ 离子束不能引起该反应的进行.

例 16-7 钴-60 是医学中广泛应用的一种放射性同位素,它的半衰期是 5.26 年,衰变方式如图

16.6-1 所示. 试求: (1) 1 秒钟内有百分之几的 ^{60}Co 衰变掉? (2) 每克 ^{60}Co 源的 β 射线和 γ 射线的强度为多少? (3) 1mCi (毫居里) 的 ^{60}Co 源有多少质量, 使用 30 年后的放射性活度为多少?

解: (1) 衰变常数 λ 代表一个原子核在单位时间内发生衰变的几率, 即为每秒衰变的百分率. 由它与半衰期之间的关系可得

$$\lambda = \frac{0.693}{T_{1/2}} = \frac{0.693}{5.26 \times 365 \times 24 \times 3600} \text{s}^{-1} = 4.18 \times 10^{-9}$$

$$= 4.18 \times 10^{-7} \%$$

(2) 根据衰变定律计算原子核每秒的衰变数, 即可得它的放射性活度

$$A = \lambda N = \lambda \frac{m}{M_A} \cdot N_A$$

式中 m 为 ^{60}Co 的质量, M_A 为 ^{60}Co 的摩尔质量, N_A 为阿伏加德罗常数, 将已知各量代入上式得

$$A = 4.18 \times 10^{-9} \times \frac{1}{60} \times 6.022 \times 10^{23} \text{Bq}$$

$$= \frac{4.20 \times 10^{13}}{3.7 \times 10^{10}} \text{Ci}$$

$$= 1.14 \times 10^3 \text{Ci}$$

计算结果告知, 每克 ^{60}Co 源的放射性活度为 $1.14 \times 10^3 \text{Ci}$. 射线强度是指放射性物质在单位时间内放出某种射线的数目, 由图 16.6-1 可见, ^{60}Co 每次衰变放出一个 β 粒子和二个 γ 光子, 因此每克钴源的 β 射线强度为 $1.14 \times 10^3 \text{Ci}$, γ 射线的强度为 $2.28 \times 10^3 \text{Ci}$.

(3) 由于放射性活度与质量 m 成正比, 于是有

$$\frac{m}{1 \times 10^{-3} \text{Ci}} = \frac{1 \text{g}}{1.14 \times 10^3 \text{Ci}}$$

所以 1mCi ^{60}Co 源的质量为

$$m = \frac{1 \times 10^{-3}}{1.14 \times 10^3} \text{g} = 0.88 \mu\text{g}$$

因为放射性活度也服从指数衰减规律, 则 1mCi 的钴源使用 30 年后其放射性活度为

$$A = A_0 e^{-\lambda t} = 1 \times 10^{-3} \times e^{-\frac{0.693}{5.26 \text{年}} \times 30 \text{年}} = 1.92 \times 10^{-5} \text{Ci}$$

$$= 19.2 \mu\text{Ci} (\text{微居里}) (\text{即为原来的 } 2\%)$$

例 16-8 假定原子能发电站的效率为 21%, 试计算功率为 30 万千瓦的原子能电站中, 一昼夜所消耗的 ^{235}U 的量. 若用煤代替, 则需多少吨? (煤的燃烧热约为 $33 \times 10^6 \text{J/kg}$)

解: 假定反应堆中 ^{235}U 俘获一个热中子后分裂成两块中等质量的碎片, 平均放出 2.5 个中子. ^{235}U 核的平均结合能为 7.6MeV, 裂变碎片的平均结合能为 8.5MeV, 因此一个 ^{235}U 核裂变时所产生的能量为

$$E = (236 - 2.5) \times 8.5 - 235 \times 7.6 = 199 (\text{MeV})$$

有效功率为 30 万千瓦的发电站, 一昼夜需作的总功为

$$E_{\text{总}} = P_{\text{总}} \times t = \frac{P_{\text{有效}} t}{\eta}$$

要释放上述这些能量所需裂变的 ^{235}U 的质量为

$$\frac{m N_A}{M_{^{235}\text{U}}} \times E = \frac{P_{\text{有效}} t}{\eta}$$

将 $P_{\text{有效}} = 30 \times 10^7 \text{J/s}$, 效率 $\eta = 21\%$, $t = 24 \times 3600 \text{s}$, $M_{^{235}\text{U}} = 235 \text{g/mol}$, $N_A = 6.022 \times 10^{23}$ 代入上式, 则一昼夜所消耗的 ^{235}U 的量为

$$m = \frac{M_{^{235}\text{U}} P_{\text{有效}} t}{\eta N_A E}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{235 \times 30 \times 10^7 \times 24 \times 3600 \text{J} \cdot \text{g}}{0.21 \times 6.022 \times 10^{23} \times 199 \text{MeV} \times 1.6 \times 10^{-13} \text{J/MeV}} \\
&= 1.5 \times 10^3 \text{g} = 1.5 \text{kg}
\end{aligned}$$

若用煤代替,则需煤的量为

$$\begin{aligned}
m &= \frac{E_{\text{总}}}{\text{煤的燃烧热}} = \frac{30 \times 10^7 \times 24 \times 3600 \text{J}}{33 \times 10^6 \text{J/kg} \times 0.21} \\
&= 3.7 \times 10^6 \text{kg} = 3.7 \times 10^3 \text{t (吨)}
\end{aligned}$$

本章习题

16.1 假设晶体中的原子是相互挤紧的小球. 试由铜的密度 $\rho = 8.89 \times 10^3 \text{kg/m}^3$ 及原子量 $A = 63.54$, 估计铜原子的半径.

16.2 试以兆电子伏·费来($\text{MeV} \cdot \text{fm}$)为单位计算 $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$ 的数值.

16.3 卢瑟福散射实验及以后的其他实验测定了原子核的大小为费米数量级, 而原子的大小具有埃(\AA)数量级. 如果整座喜马拉雅山中的原子都变为裸核紧密排列, 它将变成多高? [提示]

16.4 试计算氢原子巴尔末系的谱线波长范围.

16.5 若用能量为 12.6eV 的电子轰击基态的氢原子时, 试求氢原子所能达到的最高能态. [提示]

16.6 在氢原子被外来单色光激发后发射的巴尔末系谱线中, 仅观察到三条光谱线. 试求这外来光的波长. [提示]

16.7 已知动能为 91.8eV 的电子恰好使某类氢离子由基态激发至第一激发态, 试问该类氢离子是什么? 现以动能为 110eV 的电子激发该基态离子, 试问可得到几条谱线? 这些谱线的波长各为多少? [提示]

16.8 为了将一次电离的氦离子从基态激发到第二激发态, 用一快速电子与氦离子相碰, 试求电子的最小速度. [提示]

16.9 对于一次电离的氦离子 He^+ , 试计算它的:

(1) 第一、第二玻尔轨道半径及电子在这些轨道上的速率;

(2) 电子在基态的结合能;

(3) 第一激发电势及共振线的波长. [提示]

16.10 运动质子与一个处于静止的基态氢原子作非弹性的对心碰撞, 欲使氢原子发射出光子, 质子至少应以多大的速度运动? [提示]

16.11 电子偶素是由一个正电子和一个电子所组成的一种束缚系统, 试求出: (1) 基态时两电子之间的距离; (2) 电离电势和第一激发电势; (3) 共振线的波长. [提示]

16.12 用能量为 52.0eV 的电子去激发基态氦离子(He^+), 试问受激发的氦离子向较低能态跃迁时可得到几条谱线? 算出所发射光子的最低频率. [提示]

16.13 试求波长为 0.01nm 的 X 光光子与波长为 600nm 的可见光光子的动量、能量及质量.

16.14 今有如下一些材料(括号内表示逸出功): 钽(4.2eV)、钨(4.5eV)、铝(4.2eV)、钷(2.5eV)、锂(2.3eV), 问如要制造适于可见光工作的光电池, 可选取哪几种材料? [提示]

16.15 波长为 2000\AA 的紫外光照射到铝表面上, 铝的逸出功为 4.2eV , 试问: (1) 出射的最快的光电子动能是多少? (2) 当光电管的阳极加负电压时, 光电流将减小. 当光电流减为零时, 相应的电压值称为遏止电压. 那么, 上述条件下的遏止电压为多少?

16.16 波长为 400nm 的光子照射到某一材料的表面, 实验发现, 从该表面发射出的能量最高的电子, 在 1.5×10^{-5} 特斯拉的磁场中偏转而成的圆轨道的半径为 20厘米 . 求这种材料的逸出功. [提示]

16.17* 室温($T = 300 \text{K}$)下的中子称为热中子. 试问: (1) 一个热中子的平均动能为多少? (2) 相应的德布罗意波长是多少?

16.18* (1)试问经过 1000 伏电势差加速的电子束和质子束,其德布罗意波的波长各是多少?
(2)一质量为 50 克的子弹,以 1000 米/秒的速率飞行,求其德布罗意波长.

16.19* 已知电子动能 $E_K = 5100\text{eV}$ 时德布罗意波长为 λ_1 ,另一带单位正电荷的粒子通过加速电势差 $V_2 = 100$ 伏后,它的德布罗意波长 $\lambda_2 = \frac{\lambda_1}{6}$. 试判断后者是什么粒子.[提示]

16.20* 质量为 10 克的子弹与电子的速率相同,均为 500 米/秒,测量准确度为 0.01%. 若位置和速率在同一实验中同时测量,试问它们位置的最小不确定量各为多少?

16.21 已知反应 ${}_{20}^{42}\text{Ca}(p,d){}_{20}^{41}\text{Ca}$ 的 Q 值为 -9.25MeV . 试求该入射粒子所必需具有的最小能量.

16.22 判定核反应 ${}_{20}^{42}\text{Ca}({}_3^6\text{Li}, X){}_{21}^{45}\text{Sc}$ 中的未知粒子 X , 并利用原子质量计算其反应能. 已知原子质量分别为: ${}_{20}^{42}\text{Ca}: 41.958628\text{u}$; ${}_3^6\text{Li}: 6.0151234\text{u}$; ${}_{21}^{45}\text{Sc}: 44.955917\text{u}$.

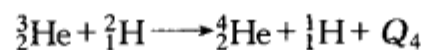
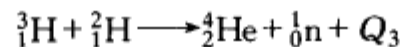
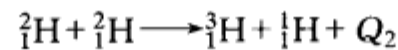
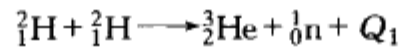
16.23 ${}_{90}^{232}\text{Th}$ 放出 α 射线后衰变为 ${}_{88}^{228}\text{Ra}$. 从含有 1 克 ${}^{232}\text{Th}$ 的一片薄膜测得其放射性活度为 4100 贝克. 试求 ${}^{232}\text{Th}$ 的半衰期为 1.4×10^{10} 年.

16.24 铀的同位素 ${}^{238}\text{U}$ 通过发射 α 粒子而衰变,半衰期为 4.51×10^9 年,试求:(1)它的衰变常数 λ ;(2)1 居里的放射性活度需多少质量的 ${}^{238}\text{U}$? (3)1 克 ${}^{238}\text{U}$ 每秒发射多少粒子?(假定不考虑继发辐射的 α 粒子)

16.25 有一人造卫星中需功率为 20W 的电源,若由转换 ${}^{238}\text{Pu}$ ($T_{1/2} = 87.75$ 年)的 α 衰变核能 ($E_\alpha = 5.5\text{MeV}$) 的办法来提供(转换效率为 5%),试计算所需 ${}^{238}\text{Pu}$ 的放射性活度及其质量为多少? 一年后电源的功率变化为多少?[提示]

16.26 若用 α 粒子轰击固定的锂靶,试求 α 粒子至少具有多大的动能才能使核反应 ${}_3^7\text{Li}(\alpha, n){}_5^{10}\text{B}$ 发生;若以 ${}^{232}\text{Th}$ 衰发生的 α 粒子来轰击,能否引起该核反应? 已知核素的原子量: ${}_3^7\text{Li}: 7.01600\text{u}$; ${}_5^{10}\text{B}: 10.0129385\text{u}$; ${}_2^4\text{He}: 4.002603\text{u}$; ${}_{90}^{232}\text{Th}: 232.038074\text{u}$; ${}_{88}^{228}\text{Ra}: 228.031091\text{u}$.

16.27 对于核聚变反应



(1)计算这四个氘的核聚变反应中所释放的能量.(2)在四个核聚变过程中用去 1 克氘所放出的能量约相当于多少煤燃烧所放出的能量? 已知煤燃烧热为 33×10^6 焦耳/千克,核素的原子量分别如下: ${}^2\text{H}: 2.014102\text{u}$, ${}^3\text{H}: 3.0160497\text{u}$, ${}^3\text{He}: 3.0160297\text{u}$, ${}^4\text{He}: 4.002603\text{u}$.

16.28 试计算原子核中两个质子之间的万有引力和静电斥力之比. 设核中两质子间的距离为 1 费米.

实验误差与数据处理

物理实验的目的是探寻和验证物理规律,而许多物理规律是用物理量之间的定量关系来表达的.在物理实验中可以获得大量的测量数据,这些数据必须经过认真地、正确地、有效地处理,才能得出合理的结论,从而把感性认识上升为理性认识,发现或验证物理规律.所以,数据处理是物理实验中一项极其重要的工作.本章将介绍一些最基本的数据处理方法,包括误差分析、不确定度评定、有效数字及作图拟合法等.

§ 17.1 实验误差分析

一个待测物理量实际的大小,叫做此物理量的“真值”.但由于测量方法、测量仪器、测量条件及测量者的种种问题,测得的数值即测量值,只能是一个真值的近似值.测量值与真值之差称为误差.测量方法的改进、测量仪器的选择、测量条件的确定、测量数据的处理等等都应在可能的范围内力求减少误差.

所谓测量,就是由测量者采取某种测量方法,用某种测量仪器将待测量与标准量进行比较.例如用米尺测量单摆的摆长,实验者用的米尺(标准量)存在一定的误差,用肉眼估读数值时,存在估读误差,因此,测量值并不等于真值.测量值存在误差的原因可能有以下三方面:

1. 测量仪器及标准量问题

在许多情况下,测量仪器上的刻度或数字显示值就代表了标准值,如米尺、温度计、数字电压表等,但是这种标准量并非真正标准,它与真正的标准必有差距.例如,米尺端边会磨损、刻度有不均匀性或不够准确、在不同温度时米尺本身的长度有变化等.

2. 测量方法问题

采用不同的测量方法可能会得到不同的测量结果,其影响是明显的.例如用秒表测单摆的振动周期,实验者直接测一次振动周期,与测 50 次振动的总时间除以 50 得到单摆振动周期,其结果的准确性就不一样.测量重力加速度,用测单摆周期的方法及用自由落体的方法结果也可能会不同.

3. 测量者的问题

这方面可能产生的问题较多.首先是估读的不同,待测量位于标准量的某两刻度之间时,必须估读其数值,不同测量者的估读会有不同,这与测量者的位置、熟练程度及仪器所处的环境状况等有关.其次还有判断的不同.例如测量干涉条纹间的距离,则为确定何处是干涉条纹的中心位置,需要经验和判断力.最后还有误读的可能,即测量者长期工作中难免犯错误,把数据读错也是很可能会发生的.

上述三方面问题都会造成实验误差,除了误读引起的过失误差以外,这些误差的大小与测量仪器的准确度、测量者的经验、测量条件和测量次数有关,可以用数据处理的方法进行评定.对测量方法问题则须进行定性分析并进行测量方法的改进,有的可定量分析并予以修正.

例如,用单摆测量重力加速度的一般公式

$$g = 4\pi^2 \frac{L}{T} \quad (17.1-1)$$

(17.1-1)式中, T 为单摆振动周期, L 为摆长.在此公式中,忽略了单摆摆线的质量,忽略了单摆振动周期实际上是与摆角有关,也忽略了空气阻力的影响等.如要修正上述因素造成的误差,则要用包含有摆线质量,摆球半径和质量,以及摆角 θ 等较完整的公式进行计算和修正,这样才能得到精确的重

力加速度 g 的值.

实验误差分析是一项十分重要的工作,要考虑实际上可能对测量结果产生影响的各种因素,分析并估算其影响的大小.这就要求实验者在各种实验中,认真思索,仔细考虑,以积累经验,丰富知识,以提高分析判断能力.

§ 17.2 实验不确定度的评定

1. 不确定度评定的意义

如上所述,即使采用了正确的测量方法,由于测量仪器和测量者的问题,测量结果仍不可能是绝对准确的,它必然有不确定的成份.实际上,这种不确定的程度是可以以一种科学的、合理的、公认的方法来表征的,这就是不确定度的评定.不确定度愈小,表示测量结果与真值愈靠近,测量结果愈可靠.反之,不确定度愈大,测量结果与真值的差别愈大,测量的质量愈低,它的可靠性愈差,使用价值就愈低.

不确定度必须正确评价.评价得过大,在实验中会怀疑结果的正确性而不能果断地作出判断,在生产中会因测量结果不能满足要求而需再投资,造成浪费;评价得过小,在实验中可能得出错误的结论;在生产中则产品质量不能保证,造成危害.

2. 不确定度的一些基本概念和分类

不确定度的评定十分重要,但以往各国对不确定度的表示和评定却有不同看法和规定,这无疑影响了国际间的交流和合作.1992年,国际标准化组织(ISO)发布了具有指导性的文件《测量不确定度表达指南》(以下简称《指南》),为世界各国不确定度评定的统一奠定了基础.1993年ISO和国际理论与应用物理联合会(IUPAP)等七个国际权威组织又联合发布了《指南》的修订版.从此,物理实验的不确定度评定有了国际公认的准则.

《指南》对实验的测量不确定度有十分严格而详尽的论述.作为物理实验教学,只要求对不确定度的下述基本概念有初步的了解.

不确定度是表征测量结果具有分散性的一个参数,它是被测量的真值在某个量值范围内的一个评定.所谓“标准不确定度”是指以标准偏差表示的测量不确定度估计值,简称不确定度,常记为 σ .

标准不确定度一般可分为三类:

(1) A类评定不确定度:在同一条件下多次测量,即由一系列观测结果的统计分析评定的不确定度,简称 A类不确定度,常记为 σ_A .

(2) B类评定不确定度:由非统计分析评定的不确定度,简称 B类不确定度,常记为 σ_B .

(3) 合成标准不确定度:某测量值的 A类与 B类不确定度按一定规则算出的测量结果的标准不确定度,简称合成不确定度.

3. 标准不确定度的评定

(1) A类不确定度 σ_A

在相同的条件下,对物理量 x 作 n 次独立测量,得到的 x 值为 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, 于是平均值 \bar{x} 为

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

平均值 \bar{x} 为 x 的最佳值,它的不确定度为

$$\sigma_A(\bar{x}) = t \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \quad (17.2-1)$$

(17.2-1)式中的 t 称为“ t 因子”,它与测量次数和置信概率有关.所谓置信概率是指真值落在 $\pm \sigma(x)$ 范围内的概率.在多数情况下, A类不确定度服从正态分布(即高斯分布),该正态分布的标准偏差 σ_A 的置信概率为 68.3%, t 因子的数值可以根据测量次数和置信概率查表得到.当测量次数较少或置信概率

较高时, $t \geq 1$; 当测量次数 $n \geq 10$ 且置信概率为 68.3% 时, $t \approx 1$; 在大多数物理数学实验中, 为了简便, 一般取 $t = 1$.

(2) B类不确定度 σ_B

若对某物理量 x 进行单次测量, 那么 B 类不确定度由测量不确定度 $\sigma_{B1}(x)$ 和仪器不确定度 $\sigma_{B2}(x)$ 两部分组成.

测量不确定度 $\sigma_{B1}(x)$ 是由估读引起, 通常取仪器分度值的 $\frac{1}{10}$ 或 $\frac{1}{5}$, 有时也取 $\frac{1}{2}$, 视具体情况而定. 例如用分度值为 1mm 为米尺测量物体长度时, 在较好地消除视差的情况下, 测量不确定度可取仪器分度值的 $\frac{1}{10}$, 即 $\sigma_{B1}(x) = \frac{1}{10} \times 1\text{mm} = 0.1\text{mm}$; 但在示波器上读电压值时, 如果荧光线条较宽, 且可能有微小抖动, 则测量不确定度可取仪器分度值 $\frac{1}{2}$, 若分度值为 0.2V, 那么测量不确定度 $\sigma_{B1}(x) \approx \frac{1}{2} \times 0.2\text{V} = 0.1\text{V}$.

仪器不确定度 $\sigma_{B2}(x)$ 是由仪器本身特性所决定的, 一般仪器说明书上都标明了它的“最大误差”或“不确定度限值” a , 那么仪器不确定度 $\sigma_{B2}(x)$ 为

$$\sigma_{B2}(x) = \frac{a}{C} \quad (17.2-2)$$

(17.2-2) 式中, C 是一个与仪器不确定度 $\sigma_{B2}(x)$ 的概率分布特性有关的常数, 称为置信因子. 仪器不确定度 $\sigma_{B2}(x)$ 的概率分布通常有正态分布、均匀分布、三角形分布以及反正弦分布、两点分布等. 对于正态分布、均匀分布和三角形分布, 置信因子 C 分别取 3 、 $\sqrt{3}$ 和 $\sqrt{6}$. 按照《指南》规定, 如果仪器说明书上只给出不确定度限值(即“最大误差”), 则没有关于不确定度概率分布的信息, 则一般可用均匀分布处

理, 即 $\sigma_{B2}(x) = \frac{a}{\sqrt{3}}$

有些仪器说明书没有直接给出其不确定度限值, 但给出了仪器的准确度等级, 则不确定度限值 a 需经计算才能得到. 如指针式电表的不确定度限值等于其满量程乘以等级, 那么对量程为 10V, 其等级为 1.0 的指针式电表, 不确定度限值 $a = 10\text{V} \times 1\% = 0.1\text{V}$. 又如电阻箱的不确定度限值等于示值乘以等级再加上零值电阻; 由于电阻箱各档的等级是不同的, 因此计算时应分别计算. 例如常用的 $Z \times 21$ 型电阻箱, 其示值为 360.5Ω , 零值电阻约为 0.02Ω , 则其不确定度限值 $a = (300 \times 0.1\% + 60 \times 0.2\% + 0 \times 0.5\% + 0.5 \times 5\% + 0.02)\Omega = 0.47\Omega$.

4. 标准不确定度的合成与传递

由正态分布、均匀分布或三角形分布等所求得标准不确定度可以按以下规则进行合成与传递.

(1) 标准不确定度的合成

1) 在相同条件下, 对 x 进行多次测量时, 待测量 x 的标准不确定度 $\sigma(x)$ 由 A 类不确定度 $\sigma_A(x)$ 和仪器不确定度 $\sigma_{B2}(x)$ 合成而得. 即

$$\sigma(x) = \sqrt{\sigma_A^2(x) + \sigma_{B2}^2(x)} \quad (17.2-3)$$

其中, $\sigma_{B2}^2(x)$ 的值由 (17.2-2) 式根据相应的概率分布进行估算.

2) 对待测量 x 进行单次测量时, 待测量 x 的标准不确定度 $\sigma(x)$ 由测量不确定度 $\sigma_{B1}(x)$ 和仪器不确定度 $\sigma_{B2}(x)$ 合成而得. 即

$$\sigma(x) = \sqrt{\sigma_{B1}^2(x) + \sigma_{B2}^2(x)} \quad (17.2-4)$$

对于单次测量, 有时会因待测量的不同, 其不确定度的计算也有所不同. 例如用温度计测量温度时, 温度的不确定度合成公式由上述 (17.2-4) 式计算, 而在长度测量中, 长度值是两个位置读数 x_1 和 x_2 之差, 其不确定度合成公式为 $\sigma(x) = \sqrt{\sigma_{B1}^2(x_1) + \sigma_{B1}^2(x_2) + \sigma_{B2}^2(x)}$. 这是因为 x_1 和 x_2 在读数时都有测量不确定度, 因此在计算合成不确定度时都要算入.

(2) 标准不确定度的传递

在间接测量时, 待测量是由直接测量的量通过计算而得的. 若 $y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N)$, 且各 x_i 相

互独立,则测量结果的标准不确定度 $\sigma(y)$ 的传递公式为:

$$\sigma^2(y) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \sigma^2(x_i) \quad (17.2-5)$$

由(17.2-5)式可以得到函数式为加减或乘除时,待测量 y 的不确定度传递公式.

对加减法: $y = x_1 \pm x_2$, 则

$$\sigma^2(y) = \sigma^2(x_1) + \sigma^2(x_2) \quad (17.2-6)$$

对乘除法: $y = x_1 \cdot x_2$, 或 $y = \frac{x_1}{x_2}$, 则

$$\left[\frac{\sigma(y)}{y} \right]^2 = \left[\frac{\sigma(x_1)}{x_1} \right]^2 + \left[\frac{\sigma(x_2)}{x_2} \right]^2 \quad (17.2-7)$$

例 17.2-1 测量一个圆柱体的密度,并计算测量结果的不确定度.

用电子天平测圆柱体的质量 M . 电子天平的最小指示值为 0.01g, 不确定度限值为 0.02g. 测得 $M = 80.36\text{g}$.

$$\sigma(M) = \sqrt{\sigma_{B1}^2(M) + \sigma_{B2}^2(M)} = \sqrt{(0.01/2)^2 + (0.02/\sqrt{3})^2} = 0.01(\text{g})$$

$$\therefore M \pm \sigma(M) = (80.36 \pm 0.01)\text{g}$$

用钢尺测圆柱体的高 H . 钢尺的分度值为 0.1cm, 估读 1/5 分度, 则 $\sigma_{B1}(H_1) \approx \sigma_{B1}(H_2) = 0.02\text{cm}$; 而该钢尺的不确定度限值为 0.01cm. 测得 $H_1 = 4.00\text{cm}$; $H_2 = 19.32\text{cm}$

$$\begin{aligned} \sigma(H) &= \sqrt{\sigma_{B1}^2(H_1) + \sigma_{B1}^2(H_2) + \sigma_{B2}^2(H)} \\ &= \sqrt{2 \cdot (0.02)^2 + (0.01/\sqrt{3})^2} \approx \sqrt{2 \cdot (0.02)^2} = 0.03(\text{cm}) \end{aligned}$$

在此, $\sqrt{2 \cdot (0.02)^2} \gg (0.01/\sqrt{3})^2$

$$\therefore H \pm \sigma(H) = (15.32 \pm 0.03)\text{cm}$$

用游标卡尺测得圆柱体的直径 D . 游标卡尺的分度值为 0.002cm, 不确定度限值为 0.002cm. 测量 10 次, 得数据如下表所示.

D/cm	2.014	2.020	2.016	2.020	2.018
	2.018	2.020	2.022	2.016	2.020

平均值为: $\bar{D} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} D_i = 2.0184\text{cm}$

$$\sigma_A(\bar{D}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} (D_i - \bar{D})^2}{10 \times (10 - 1)}} = 0.0008(\text{cm})$$

$$\sigma(\bar{D}) = \sqrt{\sigma_A^2(\bar{D}) + \sigma_{B2}^2(\bar{D})} = \sqrt{(0.0008)^2 + \left(\frac{0.002}{\sqrt{3}} \right)^2} = 0.0014(\text{cm})$$

$$\therefore \bar{D} \pm \sigma(\bar{D}) = (2.0184 \pm 0.0014)\text{cm}$$

由上述数据计算材料的密度 ρ 得

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{4M}{\pi D^2 H} = \frac{4 \times 80.36}{3.1416 \times (2.0184)^2 \times 15.32} = 1.640(\text{g/cm}^3)$$

$$\therefore \sigma^2(\rho) = \left(\frac{\partial \rho}{\partial M} \right)^2 \sigma^2(M) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial D} \right)^2 \sigma^2(D) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial H} \right)^2 \sigma^2(H)$$

$$\text{且 } \frac{\partial(\rho)}{\partial D} = \frac{4M}{\pi H} \left(-2 \cdot \frac{1}{D^2} \right) = -2 \cdot \frac{\rho}{D}$$

$$\therefore \frac{\sigma(\rho)}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{\sigma(M)}{M} \right)^2 + \left(2 \cdot \frac{\sigma(D)}{D} \right)^2 + \left(\frac{\sigma(H)}{H} \right)^2}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{\left(\frac{0.01}{80.36}\right)^2 + \left(2 \cdot \frac{0.001}{2.018}\right)^2 + \left(\frac{0.03}{15.32}\right)^2} = 0.23\% \\
 \sigma(\rho) &= \rho \cdot 0.23\% = 1.640 \times 0.23\% = 0.004(\text{g/cm}^3) \\
 \therefore \rho \pm \sigma(\rho) &= (1.640 \pm 0.004)(\text{g/cm}^3) \\
 &= (1.640 \pm 0.004) \times 10^3(\text{kg/m}^3)
 \end{aligned}$$

5. 有效数字及运算规则

实验的准确度往往用测量结果的有效数字表示. 所谓有效数字是指一个数中第一个非 0 数字及其以后的所有数字. 例如 $x_1 = 0.045$ 中的 4 是非 0 数字, 因此, 0.045 有二位有效数字. 又如 $x_2 = 0.03200$ 中的 3 为非 0 数字, 因此, 0.03200 有四位有效数字, 3, 2 及后面 00 都是有效数字.

有效数字的运算有一定规则, 最简单和常用的规则是:

当两个数相加减时, 有效数字的位数应对齐; 当两个数相乘除时, 积或商的有效数字的位数应与两个数的有效数字少的一致.

例如, $x_1 = 2.451\text{cm}$; $x_2 = 1.34\text{cm}$

则 $x_1 + x_2 = 3.79\text{cm}$; $x_1 - x_2 = 1.11\text{cm}$

而 $x_1 \cdot x_2 = 3.28\text{cm}^2$; $x_1/x_2 = 1.83$

§ 17.3 实验数据的作图与拟合

1. 作图

在物理实验中, 经常需要用图解法来直观而清晰地显示物理量之间的关系, 有时作直线图, 有时还需要作曲线图. 作图法是研究物理量之间变化规律的重要手段. 对于作图一般应遵守以下规则:

(1) 作图纸常用 $20\text{cm} \times 25\text{cm}$ 的标准坐标纸.

(2) 画出纵轴和横轴, 坐标轴应于图纸上印的线条密切重合. 通常, 横轴代表自变量, 纵轴代表因变量, 坐标轴的标度值不一定从零开始.

(3) 在作图前, 应先明确自变量和因变量的最大值与最小值, 从而选取合适的作图比例, 使图纸上的 1 格所表示的数据量值变化为 1、2、5 及它们的十进倍率为佳. 在选择比例时, 应注意实验数据的不确定度大小, 一般可取实验值的不确定度值约相当于图纸上的 1 至 2 小格为宜.

(4) 每隔一定距离, 沿轴画一垂直于轴的短线, 并在其附近注以标度值. 标度值位数不必取实验数据中的全部有效位数, 例如 1.500 值只需标 1.5 就可以, 表示标度值为准确值.

(5) 数据点要用端正的“+”或“⊙”等符号表示. 数据点应在符号的中心, 符号的大小约为 2mm, 与数据的不确定度大小相对应. 不同的数据组(例如在一张纸上作多条直线), 应使用不同的符号. 求斜率时取点的符号应采用有别于这些数据点的符号, 例如用正三角形 \triangle , 并在其旁标以坐标; 求斜率时所取点的位置应靠近直线的两端, 为方便读数, 可取横坐标的值为整数.

(6) 对每一坐标轴, 要标明物理量的名称及单位符号.

(7) 拟合直线或曲线的线条务必匀、细、光滑. 不通过图线的数据点应匀称地分布在图线的两侧, 且尽量靠近图线.

(8) 测量一条直线一般需要六点以上数据, 数据点太少将影响测量结果的准确度. 测量一条曲线, 必须有较多的数据点(例如大于 20 个数据点), 其中在曲线弯曲点附近数据点必须密集, 以减小测量和拟合结果的不确定度.

金属电阻的阻值 R 与温度 θ 的关系如图 17.3-1 所示.

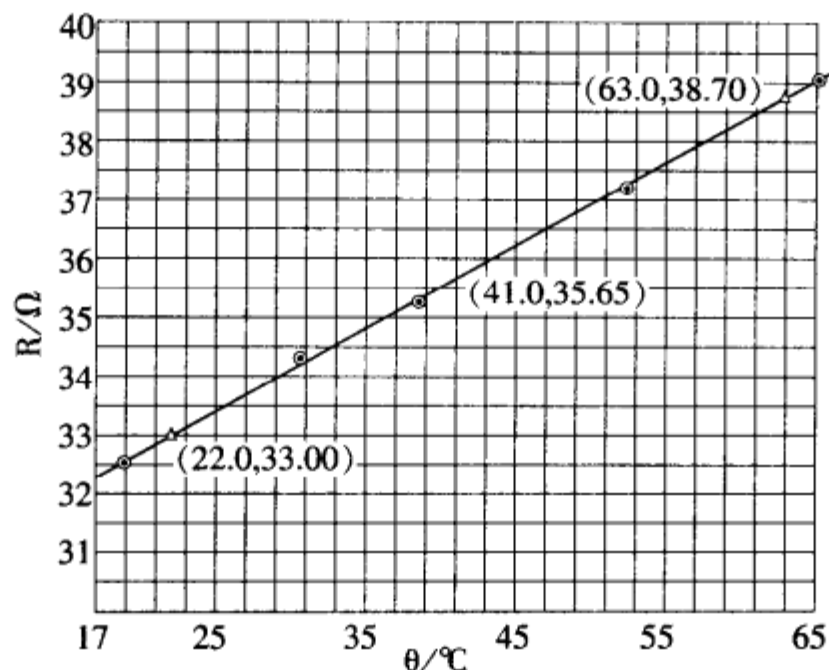


图 17.3-1

2. 实验数据的直线拟合及曲线拟合

若两物理量 x, y 满足线性关系, 且由实验等精度地测得一组数据 (x_i, y_i) . 而 $(i = 1, 2, \dots, n)$, 除上述用作图法进行直线拟合外, 还可以用最小二乘法进行直线拟合.

最小二乘法的原理是: 若最佳拟合的直线 $y = f(x)$, 则所测各 y_i 值与拟合直线上相应的各估计值 $y_i^* = f(x_i)$ 之间的偏差的平方和为最小, 即

$$s = \sum_{i=1}^n (y_i - y_i^*)^2 \rightarrow \min(\text{极小}) \quad (17.3-1)$$

因为测量总是有不确定度存在, 所以在 x_i 和 y_i 中都含有不确定度. 为讨论简便, 不妨假设各 x_i 值是准确的, 而所有的不确定度都只联系着 y_i . 这样, 由 $y_i^* = f(x_i)$ 所确定的值与实际测得值 y_i 之间的偏差平方和最小, 也就表示最小二乘法所拟合的直线是最佳的.

直线方程可表示为

$$y = mx + b \quad (17.3-2)$$

其中 m 是该直线的斜率; b 是该直线的 y 轴截距. 此两参数被确定, 此直线也就确定了. 将(17.3-2)式代入(17.3-1)式得:

$$s(m, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - b)^2 \rightarrow \min \quad (17.3-3)$$

所求的斜率 m 和截距 b 应是下列方程组的解.

$$\begin{cases} \frac{\partial s}{\partial m} = -2 \sum (y_i - mx_i - b)x_i = 0 \\ \frac{\partial s}{\partial b} = -2 \sum (y_i - mx_i - b) = 0 \end{cases} \quad (17.3-4)$$

其中 \sum 表示对 i 从 1 到 n 求和. 将上式展开, 消去未知数 b , 可得:

$$m = \frac{l_{xy}}{l_{xx}} \quad (17.3-5)$$

$$\text{式中} \begin{cases} l_{xy} = \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum (x_i y_i) - \frac{1}{n} \sum x_i \sum y_i \\ l_{xx} = \sum (x_i - \bar{x})^2 = \sum x_i^2 - \frac{1}{n} (\sum x_i)^2 \end{cases} \quad (17.3-6)$$

将求得的 m 值代入(17.3-2)式, 可得:

$$b = \bar{y} - m \bar{x} \quad (17.3-7)$$

至此,所需拟合的直线方程 $y = mx + b$ 就被唯一确定.由(17.3-7)式可知,最佳拟合的直线必然通过 (\bar{x}, \bar{y}) 这一点,因此,在作图拟合直线时,拟合的直线必须通过该点.

为了检验拟合直线是否有意义,在数学上引入相关系数 r ,它表示两个变量之间的函数关系与线性函数的符合程度,具体定义为:

$$r = \frac{l_{xy}}{\sqrt{l_{xx} \cdot l_{yy}}} \quad (17.3-8)$$

(17.3-8)式中 l_{yy} 的计算方法与 l_{xx} 类似.在一定的自变量变化范围内,实验数据点较多(如测量点 $n \geq 6$), r 的值越接近 1,表示 x 和 y 的线性关系越好;若 r 近于 0,就可以认为 x 和 y 之间不存在线性关系.

在物理实验中,相当多的情况是所测的两个物理量 x 、 y 之间的关系符合某种曲线方程.这时,一些基本曲线方程作一些变换,引入新的变量,从而将一些曲线拟合问题转化为直线合问题.

如乘幂方程 $y = ax^m$;可以将等式两边取自然对数,得 $\ln y = m \ln x + \ln a$.再令 $Y = \ln y, X = \ln x, b = \ln a$,则可将幂函数转化成线性函数 $Y = mX + b$.

又如指数方程为 $y = ae^{mx}$,同样可将等式两边取自然对数,得 $\ln y = mx + \ln a$.再令 $Y = \ln y, b = \ln a$,便可将指数函数转化成线性函数 $Y = mx + b$.

现在许多计算器中有最小二乘法的直线拟合功能.只要输入 x 和 y 的数据组,即可得出斜率 m 、截距 b 和相关系数 r ;还可以求出幂函数和指数函数中的 m 和 a 的值.在实验的数据处理中,可利用计算器的这些功能,进行数据处理.

本章习题

17.1 用游标卡尺多次测量一试管的内径 d ,该卡尺的不确定度限值 a 为 $\pm 0.02\text{mm}$,数据记录如下:

序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d/mm	2.422	2.430	2.424	2.418	2.422	2.426	2.418	2.424	2.426	2.426

求: d 的平均值及其不确定度.

17.2 用钢尺(分度值为 1mm)测量一长度 l ,测量中可估读 0.1mm,测得值为 10.52cm,此尺的不确定度限值 a 为 $\pm 0.10\text{mm}$.求: l 的不确定度 $\sigma(l)$.

17.3 设: $H \pm \sigma(H) = 3.20 \pm 0.02, G \pm \sigma(G) = (2.00 \pm 0.01) \times 10^{-2}$.

(1)若 $x = \frac{H}{G}$,求: $x \pm \sigma(x)$;

(2)若 $y = \frac{H}{G} - F$ (其中 $F = 150$ 为准确值),求: $y \pm \sigma(y)$.

17.4 请按实验结果的正确表示法改正下列数据.

(1) 2.03 ± 0.0181 ;

(2) 0.006238 ± 0.0001 ;

(3) 20500 ± 400 .

17.5 下列各题所列数据都为有效数字,试按有效数字运算规则进行计算(要求写出中间计算过程):

(1) $2.00 \times 4.00 + 50.0 \times 1.00 + 20 \times 0.1$;

(2) $\frac{1}{(0.1000)^2} - \frac{1}{(0.5000)^2}$ (其中被除数“1”为准确数);

(3) $6.80 \times 10^3 - 20$;

(4) $\frac{(2.480 - 2.2) \times 5.989}{2.00}$;

(5) $2.500 \times 3.000 \times \left(1 + \frac{4}{500}\right)$ (其中“1”为准确数).

17.6 由单摆实验得到如下测量数据,请按作图规则作一直线图,并计算直线斜率和重力加速度.

L/cm	61.5	71.2	76.1	81.0	89.5	95.5
T^2/s^2	2.468	2.877	3.070	3.262	3.618	3.861

(提示:原点可取为 $L = 60\text{cm}$, $T^2 = 2.4\text{s}^2$)

17.7 实验误差主要分哪几类? 在相同条件下对某一待测量物体进行重复多次测量,可以减小哪类误差引起不确定度?

17.8 直流指针式电表量程 $0-5\text{V}$,该表的准确度等级为 1.0 级,用此表测量未知电压值为 U_1 , $U_2 = 2.450\text{V}$,由准确度等级计算的总的 uncertainty 为多大? 写出测量结果的表达式 $U_x \pm \sigma$ 值.

力学实验

力学实验采用的仪器和方法,是物理实验教学的基础内容.学习力学实验的主要目的是运用正确的实验方法验证物理学一些基本力学定律;由力学实验得到反映物体运动特征的实验数据,运用曲线拟合的方法,总结出反映物体运动规律的经验公式;掌握一些基本力学物理量的测量方法;掌握力学测量仪器的使用规则和必要的实验技能.

近年来,由于传感器和集成电路技术的发展,物理实验测量技术和手段有了较大的更新.如在位移测量方面采用新型的霍尔位置传感器、压阻式位移传感器、应变片式位移传感器等;在时间测量方面大量采用开关型集成霍尔传感器、激光光电传感器、红外光电传感器等.这些传感器将一些力学量转化为电学量的测量,不仅使测量准确可靠,而且为计算机在线检测创造了条件,因而这些新的实验方法也较快地反映到物理教学实验中.

§ 18.1 力学实验的基本仪器及使用注意事项

力学实验须掌握的基本仪器有:基本长度测量仪器、时间测量仪器和物体质量测量仪器.

1. 基本长度测量仪器

(1) 米尺

常用米尺量程有 0~100cm,分度值为 1mm.测量物体长度时,在消除视差的情况下,一般可估读至十分之一分度,即 0.1mm.用米尺测量长度常不用端边作为测量的起点,因为端边易磨损,影响测量准确性.

(2) 游标尺

常用的游标尺分度值有 0.1mm、0.05mm 和 0.02mm 等.测量时应先将两量爪合拢,检查有无零值读数,如有应记下此值,用以修正测量所得读数.游标尺不仅可测外径,还可以利用内量爪和深度尺测量物体的内径和深度.

(3) 千分尺

常用千分尺量程为 25mm,分度值为 0.01mm,可估读至 0.001mm.千分尺读数时应注意,当测微螺杆与测砧接触时,须观测千分尺的零读数.测量物体长度时,应是读出长度减去千分尺零读数才是待测物的长度.千分尺的主尺分度值为 0.5mm,读数时要特别注意微分筒的周缘边线(指示线)是否过了半毫米线,如果过了此读数应加 0.5mm.

(4) 读数显微镜

读数显微镜是一种非接触式测量微小长度的仪器.不同型号的读数显微量程范围略有不同,它的最小分度有 0.01mm 或 0.1mm 等多种.使用读数显微镜测长度主要误差是视差和螺距误差.

消除视差方法是应使物体的象与读数显微镜标尺(刻在分划板上)在同一平面上.具体操作时,应先调节目镜使分划板清晰,即分划板处于目镜的焦平面上.然后,调节物距,使待测物体的象也成在分划板上,这时物体的象也很清晰,这样可消除标尺与象因不在同一平面而产生的视差.

消除螺距误差方法是读数显微镜上的千分螺杆移动时,起始位置和终点位置测量,都应在准丝向一个方向移动并达到目标点位置时读数,这样可避免螺距误差的产生.

除上述长度测量仪器、量具外,还有光杠杆、测高仪等在长度测量实验中被用到.

2. 时间测量仪器

(1) 秒表

秒表有机械秒表和电子秒表两种。

机械秒表使用方法:1)秒表使用前,须先检查发条的松紧程度,如果发现发条相当松,应上紧发条,但不宜过紧;2)秒表走时的准确与否对计时影响很大,所以须定期将机械秒表走时与标准电子计时仪走时进行校对,求出其差值及时间修正值;3)实验完毕,应将指针持续走动,以松弛发条。

(2) 电子秒表

电子秒表的机芯全部采用电子器件组成,利用石英振荡器的振荡频率作为时间基准,并用六位液晶数字器显示时间。电子秒表使用方法:

1)电子秒表有三个按钮,从正面观测从右至左: S_1 为调正按钮; S_2 为变换按钮; S_3 为秒表按钮。平时,电子秒表正常显示的计时状态为“时、分、秒”,即如手表功能。在测量时段时用 S_1 和 S_3 按钮;在进行时刻校对和调正时用 S_2 按钮。

2)按 S_2 按钮 2 秒钟,可将计时功能变为秒表功能;同样操作也可将表秒功能变为计时功能。

3)按一下 S_1 即可开始自动计秒;当再次按 S_1 时即停止计秒。二次计秒值的差值即为待测量时段。

(3) 电子计时仪

电子计时仪以 1MHz 或 100kHz 石英晶体振荡器输出信号的周期作为标准时间单位,用单片机编程进行脉冲信号周期的测量。配用的传感器主要有:集成开关型霍尔传感器、激光光电传感器、红外光电传感器等。使用时须注意:

1)集成开关型霍尔传感器有三个引脚,中间引脚为地或负端,+5V 的电源引脚和脉冲信号输出脚不能接反,否则不能计时。

2)半导体激光器的工作电压一般为 3V 左右,而电子计时仪通常供给电源电压为 5V,须串接电阻,降压才能工作。

3)注意霍尔传感器的感应面与磁钢的极性相配,否则无脉冲信号输入计时仪。

(3) 质量的测量

质量称衡仪器有机械式天平和电子天平两种。教学用机械式天平有物理天平等,电子天平大多以电磁力平衡原理进行称衡物体的质量。

物理天平等机械式天平是以杠杆原理进行物体质量称衡的仪器,使用时须注意:

1)称衡前,应调节天平的底脚螺丝,使底座上水准器的气泡移至中央圈内,保证立柱铅直。

2)称衡时须严格按照操作规程操作:在向盘中放或取下物体,或者增减砝码等都须先将止动器调节止动后,再放盘内或从盘内取下;从砝码盒取砝码或从盘内取出砝码都应用镊子钳等。

目前在科学研究和各类实验中大量使用电子天平,按等级及称量有电子物理天平和电子分析天平之分。

电子分析天平调整步骤:

1)调整水平泡至中央位置,使天平处于水平状态。

2)调零(即去皮)。

3)放入物体进行称衡。

电子分析天平使用前需预热数小时,因此在使用中一般不要关闭电源,实验全部结束后方可关闭电源。称衡过程中注意防震,且将防护罩玻璃门全部关闭时方可读数。

§ 18.2 典型的力学实验和基本实验方法

1. 物体长度的测量

测量一个有规则物体体积或物体在某方向的长度,需要用米尺、游标尺、千分尺等量具进行测量,但

选择何种量具或仪器最合适,应根据待测对象的大小及测量结果的不确定度要求,然后确定选用多大量程和何种准确度仪器.因此,实验题要求的测量结果的准确度与测量仪器的准确度是密切相关的,仪器的准确度不同,测量结果的有效数字也不相同.

例 18.2-1 测量一块大约长 14cm、宽 5cm、高 0.2cm 薄板的体积.

要求:实验结果为四位有效数字.

可供仪器或量具:米尺、千分尺、游标尺、薄板.

实验:

长度可以用分度值为 1mm 的米尺测量,宽度用分度值为 0.02mm 游标尺测量,厚度用分度值为 0.01mm 千分尺测量.

$$\begin{aligned} \text{薄板体积 } V &= \text{长} \times \text{宽} \times \text{高} \\ &= 14.01\text{cm} \times 4.998\text{cm} \times 0.2491\text{cm} = 17.44\text{cm}^3 \end{aligned}$$

若长、宽、高三个量都用多次测量求平均值计算体积,那实验结果的不确定度将比单次测量不确定度小.

2. 微小长度的测量

微小长度的准确测量是物理实验中基本测量,它的应用面很广.如金属丝受力的拉伸量;金属板受力梁的弯曲量;薄片的厚度;固体受热热膨胀量;液体因表面张力在毛细管中液面升高;光的干涉条纹的间距等,都牵涉到微小长度的测量.微小长度测量的方法很多,如读数显微镜方法、千分尺方法、千分表方法、光杠杆方法等.其中千分尺、千分表、光杠杆都是接触式测量,读数显微镜为非接触式测量.

例 18.2-2 用读数显微镜测量毛细管直径

要求:

- (1)测量时可能有哪些误差? 实验中须消除这些误差.
- (2)测量玻璃毛细管的直径.

可供仪器和材料:DM 型读数显微镜、夹子、铁架、玻璃毛细管.

实验:

使用读数显微镜主要误差是视差和螺距误差.操作时应注意使物体的像成在目镜的焦平面位置(分划板也在此位置),以消除视差.读数显微镜上千分螺杆移动时,二次(左和右)位置测量都应在准丝向一个方向移动并达到与圆相切时读数,这样可避免螺距误差.

由于待测玻璃毛细管内径并非正圆,且毛细管两端面(A 端和 B 端)内径也不可能完全相同,因此,必须多次测量求平均值的方法,以减小实验误差.

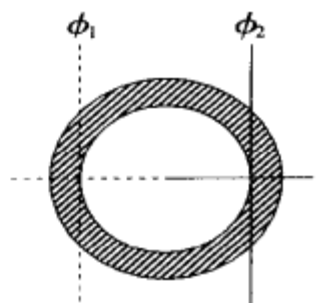


图 18.2-1

毛细管直径测量数据

端面	Φ_1/mm	Φ_2/mm	直径 d/mm
A 端	6.280	5.496	0.784
	6.196	5.390	0.806
	6.496	5.711	0.785
	6.457	5.652	0.805
	6.162	5.354	0.808
B 端	3.098	2.303	0.795
	4.168	3.354	0.814
	4.440	3.664	0.796
	4.486	3.701	0.785
	3.344	2.560	0.784

例 18.2-3 用光杠杆测量薄板厚度

要求:

- (1) 正确调节光杠杆,使标尺与反射镜镜面平行,望远镜主轴与标尺垂直.
- (2) 望远镜调准正确.
- (3) 测量薄板厚度 h .

可供仪器和材料:光杠杆、待测薄板、支架、铅垂线.

实验:

光杠杆是由底座有三个支点的反射镜(见图 18.2-2(a))、标尺 S 、望远镜 T 、基座板 M 和铁架组成,如图 18.2-2(b)所示.

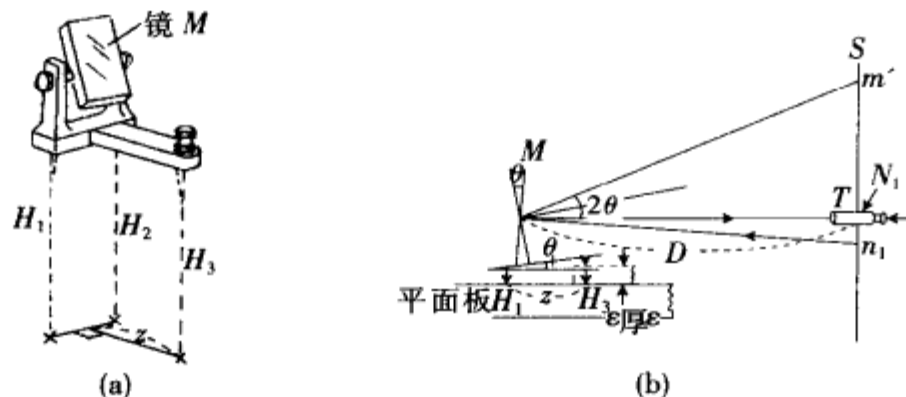


图 18.2-2

调节:借助铅垂线,用眼睛目测对准,使标尺铅直及望远镜水平.然后调节望远镜目镜,使准丝清晰,再调节物距,使标尺通过反射镜反射进入望远镜内成像清晰.此时,准丝和标尺的像都在目镜的焦平面上.若望远镜与标尺是垂直的,可调节反射镜角度,使望远镜主轴所对应的标尺刻线的值与从望远镜内看到标尺读数值相同,这说明镜面与标尺平行,也处于铅直位置.此时, H_1 、 H_2 脚不动位置,将 H_3 提起,使待测薄板填于 H_3 脚下面. H_3 脚支撑点被升高 h 高度.则

$$\frac{h}{Z} = \tan\theta \quad (18.2-1)$$

式中, Z 为 H_3 脚支撑点至 H_1 和 H_2 连接线之间距离; θ 为 H_3 脚支撑点升高 h 值后,反射镜底座转动角度(见图 18.2-2(b)).

而

$$\tan(2\theta) = \frac{\Delta l}{D} \quad (18.2-2)$$

式(18.2-2)中, D 为标尺与反射镜之间距离; Δl 为反射镜转动 θ 角度后,望远镜看到标尺位置 l_2 与望远镜主轴之间距离.由于 θ 比较小,所以

$$\therefore h = \frac{Z \cdot \Delta l}{2D} \cdot \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\Delta l}{D} \right)^2 \right] \quad (18.2-3)$$

式(18.2-3)中, Δl 为望远镜中看到标尺读数因 H_3 位置改变而产生的读数差值.

实验数据:

设望远镜看到初始读数为 l_1 ,当 H_3 脚支撑点下填入待测薄板后,望远镜看到的读数值为 l_2 , $\Delta l = l_2 - l_1$.测量结果见下表.

次数	l_1/mm	l_2/mm	D/cm	Z/cm
1	70.2	71.9	173.5	5.03
2	70.3	72.0	173.0	5.03
3	70.4	71.8	173.3	5.02
平均	70.3	71.9	173.3	5.03

$$\overline{\Delta l} = 71.9 - 70.3 = 1.6(\text{mm})$$

$$\therefore h = \frac{\bar{Z} \cdot \overline{\Delta l}}{2D} = \frac{5.03 \times 0.16}{2 \times 173.3} = 0.0023(\text{cm}) = 0.023(\text{mm})$$

3. 研究物体运动规律的实验

研究物体的运动规律,通常需要通过物理实验,求得与此运动规律密切相关的一组实验数据.然后,采用最小二乘法处理这些实验数据,从而总结出物体运动规律,并用经验公式表示,这就是曲线拟合.在物理实验中,为了简便,常采用变量转换方法,将曲线函数关系转换成直线关系,然后用作直线图来求得物体运动规律.例如函数 $y = Ae^{Bx}$ 可以化为 $\ln y = Bx + \ln A$,用 $\ln y$ 作因变量,即可变指数关系为线性关系等等.

例 18.2-4 图 18.2-3 所示为频闪仪拍摄的小球运动的照片,小球的直径为 15.00mm.频闪仪的闪光频率为 50.00Hz.用图解法计算小球到达 A 点时的速度和加速度.

要求:

- (1)用给定的仪器及材料测出图 18.2-3 中 A 点位置.
- (2)用图解法分析小球的运动规律,分别写出小球运动规律,即写出小球在 x 方向上和 y 方向上的运动方程式,定出主程式中常数.
- (3)计算出小球在 A 点处的速度和加速度.

可供仪器和材料:直尺、游标尺、二维移动读数显微镜、作图纸等.

提示:按照你的分析,小球在 x 方向上和 y 方向上的运动各有什么特点?根据这些特点来选用最简便的图解法.

实验:

- (1)由读数显微镜测量得 x 分量大于六组的位移和时间相对应的数据.

取 x 分量位移数据,作位移 x 与时间 t 或者位移 x 与时间间隔 N 的关系图.



图 18.2-3

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x_i/mm	5.231	5.807	6.450	7.118	7.808	8.493	9.170	9.812	10.542	11.258	11.924	12.604

由图 18.2-4(a)可知, $x-N$ 关系为一条直线,即位移随时间作等值递增的变化,这说明小球在 x 方向作匀速直线运动.假定初始 x 分量取为 x_0 ,则运动方程为

$$x = v_x t + x_0$$

式中, v_x 为小球在水平方向(即 x 方向)的速度, t 为时间.

照片上小球直径测量

N	1	2	3
d_2/mm	13.338	12.612	11.948
d_1/mm	11.912	11.200	10.528
$d = d_2 - d_1$	1.426	1.412	1.420

$$\bar{d} = 1.419\text{mm}$$

本实验照片上图与实物大小缩小的倍数

$$K = 15.00/1.419 = 10.57$$

由图 18.2-4(a)中直线图得截距 $x_0 = 5.10\text{mm} \times 10.57 = 5.39\text{cm}$,斜率为

$$\frac{12.60 - 5.10}{11 - 0} = 0.682$$

$$\therefore x \text{ 分量速度 } v_x = 0.682 \times \frac{10.57}{1/50.00} = 360\text{mm/s} = 36.0\text{cm/s}$$

结论:小球 x 分量作匀速直线运动,运动速度为 36.0cm/s .

(2)由照片或实验数据分析可知,小球在 y 方向作变速直线运动.假定小球在 y 方向作匀加速直线运动,则在 t 时刻的运动方程为 $y = y_0 + v_0 t + (a_y t^2 / 2)$.此式中 v_0 和 a_y 分别为小球在 y 方向运动的初速度和加速度, y_0 为初位移.

如果纵坐标取平均速度,即 $\bar{v} = (y - y_0) / t$,则有关系式 $\bar{v} = v_0 + (a_y t / 2)$.说明作匀加速运动物体,其平均速度与时间成线性关系.以下测量照片上小球二个位置在 y 方向上的间距 $y_{i+1} - y_i$,其中 $i = 0, 1, 2, 3, \dots, 10$,此值除以 $\frac{1}{50.00}\text{s}$,便是小球在每一间隔中相应的平均速度.

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$y_{i+1} - y_i / \text{mm}$	4.727	4.524	4.336	4.165	4.024	3.864	3.708	3.553	3.393	3.239	3.084

作 $\bar{v} - N$ 关系图得一条直线,见图 18.2-4(b).由图上得截距为 4.830mm 斜率为

$$-\frac{4.830 - 3.000}{11.5} = -0.1591$$

小球在 y 方向平均速度随时间作等值递增,说明小球在 y 方向作匀加速直线运动.

$$v_{0y} = 4.830 \times 10.57 / (1/50.00) = 2553(\text{mm/s}) = 255.3(\text{cm/s})$$

在 y 方向加速度

$$a_y = 2 \times (-0.1591) \times 10.57 / (1/50.00)^2 = -8408(\text{mm/s}^2) = -840.8(\text{cm/s}^2)$$

结论:小球在 A 点加速度为 840.8cm/s^2 ,方向与 y 轴方向反向.在 A 点小球速度

$$v_y = v_{0y} + at = 255.3 - 840.8 \times 5 \times (1/50.00) = 171.2(\text{cm/s})$$

$$\text{方向角 } \theta = \arctan(v_y / v_x) = 78.12^\circ$$

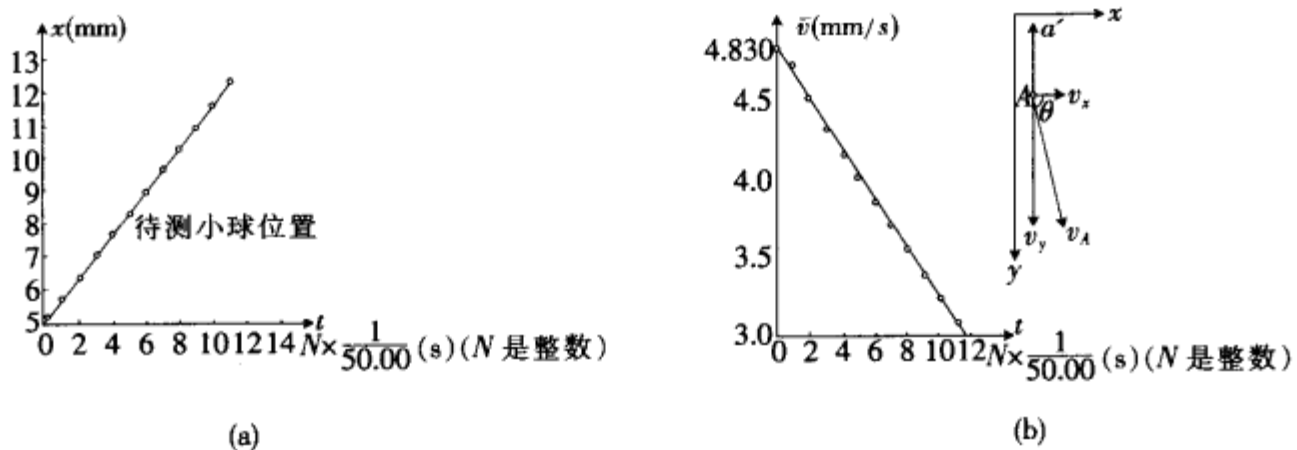


图 18.2-4

4. 用外推法验证物理定律或者求某物理量

在物理实验中,常会遇到某一实验条件不能满足,这就产生了较大的系统误差,实验结果的可靠性就较差.

所谓外推法,就是进行测量时,有意识地改变实验条件 x 值,测得一组相对应的物理量 y .然后,作 $y - x$ 关系图,将 x 值外推到满足实验原理所要求的条件值 x_0 ,从此 $y - x$ 直线(或曲线)求得自变量 x_0 相对应的 y_0 值便是所要求的正确的实验结果.例如单摆测重力加速度实验,以往此实验都限于单摆在小角(小于 5°)近似作等周期摆动情况下,对小球振动周期进行测量.因而测量振动周期必须小球振动几十次,才能减小手控秒表计时带来的实验误差.由于空气阻尼的存在,摆角随时间的延长而衰减,因而周期测量带来一定误差.若采用集成开关型霍尔传感器(或激光光电开关)和电子计时器计时,就能在很短几个振动周期内准确测得单摆在各种角度下的振动周期,这样可忽略空气阻尼对摆角的影响,使研究周期与摆角关系实验得以顺利进行.在得到周期与摆角关系后,可以用外推至摆角为零的方法,精确测

得摆角极小时的振动周期值,

例 18.2-5 研究单摆振动周期与摆幅的关系,精确测量重力加速度

要求:

- (1)研究单摆振动周期与摆幅的关系.
- (2)用集成霍尔开关(或激光光电开关)和电子计时仪正确计时.
- (3)作单摆振动周期 T 与 $\sin^2 \frac{\theta_m}{2}$ 图(θ_m 为摆幅).
- (4)用外推求摆角 $\theta_m = 0$ 时,周期 T 的值;求得重力加速度值.

可供仪器和材料:单摆、霍尔开关与小磁钢、激光光电开关、电子计时仪、米尺、游标卡尺、作图纸等.

实验:

在忽略空气阻力、浮力、以及挂线质量情况下,单摆振动周期与摆角关系为:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \left[1 + \frac{1}{4} \sin^2 \left(\frac{\theta_m}{2} \right) + \dots \right] \quad (18.2-4)$$

(18.2-4)式中, L 为单摆摆长, g 为重力加速度, θ_m 为摆幅(即摆角).

本实验采用 UGN3109 型集成开关型霍尔传感器(即霍尔开关)、钕铁硼小磁钢及 HTM-3 型电子计时仪实现自动计时. HTM-3 电子计时仪精度 0.001s,采用单片机计时原理,有周期次数预置开关,从 0~100 次,可以任意调节计时周期次数,以便按实验要求精度进行周期测量.实验装置如图 18.2-5 所示.

实验操作方法是:在金属小球做的摆锤底部贴一块小型钕铁硼小磁钢(小球为铁制时可吸附在球上).调节摆线的长度,让静止时磁钢产生的磁场刚好能被霍尔传感器所接收,并产生一脉冲信号.记下摆线的长度 L_1 .调节计时仪的预置开关次数(不宜次数太多,实验中可用 4 次,即 2 个周期).将小球拉开一段距离至 A 点,用调节好的水平直尺测量 A 点的位置,可用三角函数算出摆角.实验时尺与 A 点应尽可能在同一平面内,以消除视差.放开小球,让小球在传感器所在垂直平面内摆动.单摆振动计时将由传感器和计时仪自动完成.由于小球放手时的一致性,因此在同一摆角处应多测几次,求平均值.取不同摆角,重复实验.

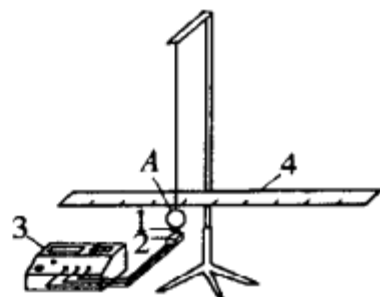


图 18.2-5

- 1.小磁钢 2.霍尔传感器
- 3.计时器 4.水平尺

实验结果:

摆线长度 L_1 ,摆球半径 L_2 分别为

$$L_1 = (56.20 \pm 0.05)\text{cm}; \quad L_2 = (1.000 \pm 0.002)\text{cm}$$

总的摆长

$$L = L_1 + L_2 = (57.20 \pm 0.05)\text{cm}$$

摆角可从摆线长 L_1 和悬线下端离中心位置的水平距离 x 求得.实验中测得特定摆幅下二倍周期 $2T$ 如下表所示.

x/cm	$\sin^2 \left(\frac{\theta_m}{2} \right)$	$2T/\text{s}$					
		第 1 次	第 2 次	第 3 次	第 4 次	第 5 次	平均值
15.00	0.01814	3.052	3.052	3.051	3.052	3.053	3.0524
20.00	0.03273	3.064	3.064	3.063	3.063	3.063	3.0636
25.00	0.05219	3.077	3.077	3.076	3.077	3.077	3.0768
30.00	0.07720	3.097	3.096	3.096	3.096	3.096	3.0962
35.00	0.10880	3.122	3.123	3.123	3.123	3.122	3.1226
40.00	0.14878	3.156	3.154	3.156	3.156	3.156	3.1556

由上表 $2T - \sin^2(\theta_m/2)$ 关系数据,采用计算器进行直线拟合,得相关系数 r 、斜率 B 、截距 A 为

$$r = 0.9995; B = (0.790 \pm 0.013)\text{s}; A = 2T_0 = (3.0369 \pm 0.0011)\text{s}$$

将 $A = 3.0369$ 和 $\theta_m = 0^\circ$ 代入 (18.2-4) 式, 可以计算得重力加速度 $g = 9.794\text{m/s}^2$. 已知上海地区重力加速度的标准值为 $g = 9.79407\text{m/s}^2$, 用本方法测得实验结果与标准值相当一致. 周期与摆角之间关系如图 18.2-6 所示.

从实验数据得到的斜率 B 与截距 A 的比值为 0.26, 大于 (18.2-4) 式给出的 $1/4$. 这是因为该式中还存在更高阶的项. 但 0.26 与 $1/4$ 相差不大, 表明了本实验取摆角 $\theta_m < 45^\circ$ 的范围内二级近似项已经可以较精确地反映周期与摆角之间关系.

例 18.2-6 用落球法测量油的粘滞系数.

原理简介: 本实验用半径为 r 的小钢珠在广阔的流体中以速度 v 缓慢运动. 这时小钢珠受到的粘滞阻力 f 为

$$f = 6\pi\eta rv \quad (18.2-5)$$

式中 η 为液体的粘滞系数. 当小钢珠受的重力与浮力、粘滞力相平衡时, 小钢珠匀速下落, 此时有

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho' g + 6\pi\eta rv \quad (18.2-6)$$

式中 ρ 和 ρ' 分别为钢的密度和液体的密度, g 为重力加速度.

$$\therefore \eta = \frac{2}{9} \cdot \frac{r^2(\rho - \rho')g}{v} \quad (18.2-7)$$

要求:

- (1) 用不同直径小钢珠做实验, 测量油的粘滞系数.
- (2) 通过数据处理消除实验中的系统误差.

可供仪器和材料: 盛有蓖麻油的玻璃管(该管内径为 2.5cm)、游标卡尺、千分尺、秒表、直尺(量程 0-100cm)、小钢珠(共四种不同直径)16 粒、铅垂线、铁架、夹子等.

实验:

由于本实验中装流体的容器仅为内径约 2.5cm 的圆柱形长管, 因而公式 (18.2-7) 中要求的小钢珠在广阔液体中下落的条件不满足. 为了消除由于此实验条件不符合而产生的系统误差, 可采用四种不同直径 d 的小钢珠做实验. 将测得数分别代入公式 (18.2-7) 中, 得到四个不同 η 值. 分析此结果发现, 小钢珠直径 d 越小, η 值也越小. 用坐标纸作 $\eta-d$ 关系图, 将图中直线外推到 $d=0$ 的情况, 求得该直线在 η 轴上的截距 η_0 , 这就是所要求的蓖麻油在待测温度时的粘滞系数.

操作要求: 借助于铅垂线, 先调节装油玻璃管垂直. 然后用一粒小钢珠沿管中心作落球试验, 观察其是否始终沿管中心下落, 确认玻璃管已垂直. 用千分尺测量小钢珠直径时, 应注意千分尺端面砧与钢珠刚接触时, 必须轻轻旋转微调轮, 防止钢珠被压, 影响直径正确测量. 将线围玻璃管, 二根围线离液面和玻璃管底约 5~6cm 以上, 用米尺测量二围线标记之间的距离 L . 在小钢珠匀速下落时, 用秒表测量通过 L 距离的时间 t , 那么钢珠在管内下落的速度 $v = \frac{L}{t}$.

实验结果:

已知小钢珠的密度 $\rho = 7.90\text{g/cm}^3$, 蓖麻油的密度 $\rho' = 0.950\text{g/cm}^3$, 重力加速度 $g = 979.4\text{cm/s}^2$, 温度 $\theta = 14.0^\circ\text{C}$, 二围线标记之间距离 $L = 38.00\text{cm}$.

分别用直径 d 不同的四种小球做实验结果如下表所示.

小球直径 d/cm	下落时间 t/s			$d^2t/\text{cm}^2 \cdot \text{s}$	$\eta/\text{Pa} \cdot \text{s}$
	第 1 次	第 2 次	平均值		
0.1173	55.73	55.66	55.68	0.766	0.762
0.1558	33.12	33.06	33.09	0.803	0.799
0.1977	21.50	21.53	21.52	0.841	0.837
0.2362	15.78	15.76	15.77	0.880	0.876

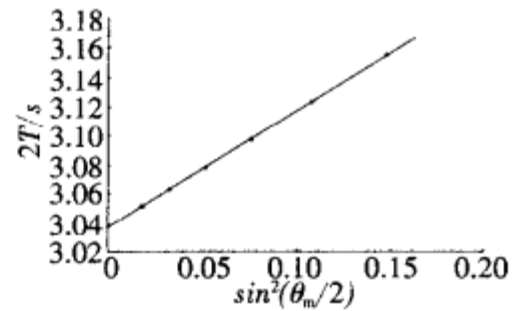


图 18.2-6

对此表格中各对 (d, η) 值作直线图可得截距(图略)

$$\eta_0 = 0.649 \text{ Pa}\cdot\text{s} \quad (\text{温度 } \theta = 14.0^\circ\text{C})$$

这就是蓖麻油在 14.0°C 时的粘滞系数.

5. 物体运动的动摩擦系数和磁性体运动的磁阻尼系数的测量

例 18.2-7 磁性滑块在金属滑槽斜面上运动.

要求:

- (1) 研究磁性滑块在金属斜面上滑下时滑块上的作用力.
- (2) 当滑块沿斜面匀速下滑时, 写出力平衡方程.
- (3) 把滑块从斜面上匀速下滑时的力平衡方程通过变量变换, 变为线性方程.
- (4) 测量滑块从斜面上滑下时, 滑块与斜面间的动摩擦系数和磁阻尼系数.

可提供仪器和材料: 铝质滑槽(滑动斜面上贴一层待测材料薄层)、磁性滑块、数字计时仪、集成开关型霍尔传感器(贴在铝质滑槽下背面, 二只传感器相隔一定距离)、导线、直尺等.

实验:

(1) 磁性滑块在斜面上作匀速下滑时, 运动方程为

$$mg\sin\theta = Kv + \mu mg\cos\theta \quad (18.2-8)$$

(18.2-8)中, m 为滑块质量, v 为滑块下滑时速度, θ 为斜面倾角, K 为磁阻尼系数, μ 为滑块下滑时动摩擦系数, g 为重力加速度. 滑块在斜面上匀速下滑时受力情况如图 18.2-7 所示, 图中 $W = mg$.

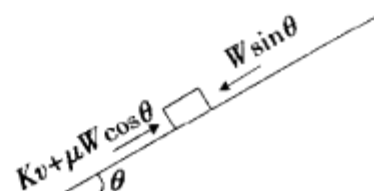


图 18.2-7

方程(18.2-8)中, 由于滑块运动产生感生电动势, 用电磁感应定律可以证明磁阻尼力与滑块滑动速度成正比, 即磁阻尼力 $F = Kv$, 其中 K 为常量.

方程(18.2-8)两边除以 $mg\cos\theta$, 可得

$$\tan\theta = \frac{K}{mg} \cdot \frac{v}{\cos\theta} + \mu \quad (18.2-9)$$

改变不同 θ 角, 在滑块作匀速运动情况下, 测量磁性滑块下滑速度. 将一系列测量数据作 $\tan\theta - v/\cos\theta$ 直线图, 可得斜率 K/mg 和截距 μ .

(2) 磁阻尼现象的观察与实验条件的获得

实验装置如图 18.2-8 所示. 图中, 1 是 HTM-1 霍尔开关计时仪(它由 5V 直流电源和电子计时器组成); 2 是铝质槽形斜面, 可通过夹子 M 的上下移动来调节斜面与水平夹角 θ , 在斜面的反面 A、B 处各装 1 个霍尔开关, 用计时仪可测量滑块通过 A、B 的时间; 3 是调节斜面横向倾角的螺钉; S 磁性滑块.

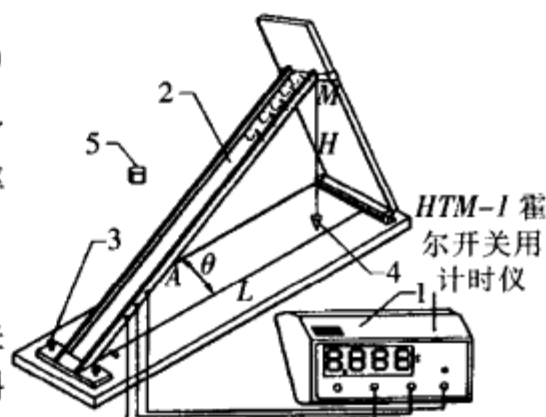


图 18.2-8

调节 M , 使斜面具有某一倾角, 调节螺钉 3, 保证滑块下滑时不往旁边偏. 在约 $20^\circ < \theta < 45^\circ$ 的范围内能达到滑块能匀速下滑的实验条件. 对于同一 θ 值, 让滑块从不同高度下滑, 由通过两传感器的时间相同, 来说明滑块在 A、B 间的运动是匀速的. 实验结果如表 1.

表 1

斜面倾角			滑块从不同高度处滑下通过 A、B 两点的时间 T/s				
L/m	H/m	$\theta / ^\circ$	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
0.8810	0.6075	34.59	0.334	0.341	0.336	0.343	0.337
0.9020	0.5770	32.60	0.377	0.378	0.379	0.378	0.380

续表

斜面倾角			滑块从不同高度处滑下通过 A、B 两点的的时间 T/s				
0.9210	0.5450	30.61	0.427	0.430	0.433	0.429	0.420
0.9380	0.5140	28.72	0.476	0.480	0.482	0.476	0.478
0.9580	0.4790	26.57	0.575	0.574	0.568	0.577	0.568

T 为计时仪读数, L 为滑块在斜面上下滑的长度, H 为 L 所对应高度. 可以看出, 在给定 θ 的范围内, 滑块在 A、B 间的运动所需时间在不确定度范围内一致, 因而均可认为匀速运动.

(3) 磁阻尼系数与动摩擦系数的测量
依次改变斜面倾角, 记录数据如表 2.

表 2

L/m	H/m	L/s	$\tan\theta$	$\cos\theta$	$v/(m/s)$	$v \cdot (\cos\theta)^{-1}/m \cdot s^{-1}$
0.8810	0.6075	0.3382	0.6896	0.8232	0.7687	0.9338
0.9020	0.5770	0.3784	0.6397	0.8424	0.6871	0.8156
0.9210	0.5440	0.4278	0.5917	0.8606	0.6078	0.7063
0.9380	0.5140	0.4786	0.5480	0.8770	0.5433	0.6195
0.9580	0.4790	0.5724	0.5000	0.8944	0.4542	0.5078

用天平测量滑块质量 $m = 5.7950 \times 10^{-3} \text{ kg}$. 实测得 AB 间距离平均值为 0.2600 m . 用最小二乘法计算器进行数据计算, 得: 斜率 = 0.4487, 截距 = 0.2723, 相关系数 0.9996, 所以, 可得磁阻尼系数 $K = \text{斜率} \cdot mg = 0.4487 \times 5.7950 \times 10^{-3} \times 9.794 = 2.547 \times 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{s}/\text{m}$; 滑动摩擦系数 $\mu = \text{截距} = 0.2723$.

6. 物体密度的测量

物体密度是物体的质量和它的体积的比值. 通常可以用液体静力称衡法和比重瓶法进行测量.

(1) 用液体静力称衡法测固体密度

a. 待测固体密度大于水的密度

设物体在空气中的质量为 M , 当物体用一根细丝吊挂在天平称钩上, 且物体全浸没于水中. 在天平达到平衡时, 放砝码盘内砝码质量为 M_1 , 则物体在水中受到的浮力 F 为

$$F = Mg - M_1g = \rho_0 g V$$

式中, g 为重力加速度, ρ_0 为水的密度, V 为物体的体积.

若物体的密度为 ρ , 则 $M = \rho V$,

$$\therefore \rho = \left(\frac{M}{M - M_1} \right) \rho_0 \quad (18-10)$$

b. 待测固体的密度小于水的密度

对于密度小于水的待测物体 (例如: 石蜡), 若浸入水中将有一部分浮出在水面. 为了测量这种物体体积, 可以在待测物下面悬挂一重物, 如图 [18.2-9(a) 和 (b)] 所示.

具体操作方法是, 先将重物浸没于水中, 待测物全部露出水面, 当天平平衡时, 读出其砝码质量 M_1 , 如图 18.2-9 所示. 再使重物和待测物体一起浸入水中, 当天平平衡时, 读出相应砝码质量 M_2 , 则待测物所受浮力

$$F = (M_1 - M_2)g$$

式中, g 为重力加速度. 若待测物体积为 V , 水的密度为 ρ_0 , 由阿基米德原理,

$$(M_1 - M_2)g = \rho_0 Vg$$

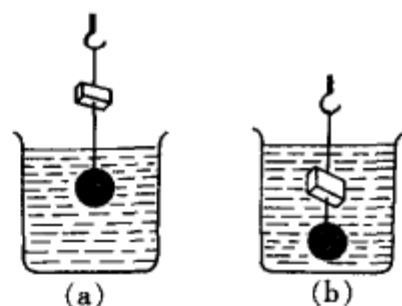


图 18.2-9

如果事先称出待测物在空气中的质量 M , 则待测物的密度 ρ_0 为

$$\rho = \frac{M}{M_1 - M_2} \cdot \rho_0 \quad (18-11)$$

(2) 比重瓶法测量固体密度

比重瓶是一个壁很薄的玻璃瓶, 瓶塞是用中央有毛细管的磨口塞子组成的, 从中可以溢出多余的液体, 以保证瓶内所盛液体的体积是固定的. 比重瓶如图 18.2-10 所示. 用比重瓶法可以测量液体或颗粒固体的密度.

例 18.2-8 用比重瓶测量焊锡丝的密度.

要求:

- (1) 观察比重瓶结构, 简述比重瓶中毛细管作用;
- (2) 阐述用比重瓶测量固体密度的原理, 并写出计算公式, 公式中各符号的意义须说明;
- (3) 测量某焊锡丝的密度 ρ , 实验所用水的密度 ρ_0 为

$$\rho_0 = 1000 \text{ kg/m}^3$$

- (4) 测量天平在空载时的感量(或分度值), 写出计算公式和结果.

给定仪器和材料: 物理天平、比重瓶、焊锡丝、烧杯(含纯水)、剪刀、抹布.

实验:

(1) 观察和分析比重瓶, 其结构如图 18.2-10 所示. 比重瓶塞子是用中间有毛细管的磨口塞子做成的. 当使用时注入液体到比重瓶瓶口位置, 用塞子塞紧, 多余液体就会从毛细管出来, 这样可保持容器所盛液体容积是固定的.

(2) 设待测焊锡丝的质量为 m_x , 密度为 ρ_x , 体积为 V_x , 则有关系式 $m_x = \rho_x \cdot V_x$, 其中 m_x 可用天平称衡. 又设比重瓶的质量为 M , 注满纯水后的比重瓶的质量为 m_0 , 比重瓶的容积为 V_0 , 水的体积就是比重瓶的容积(实验时务须经常注意水柱在毛细管中高度). 又有关系式 $m_0 = V_0 \rho_0 + M$, 其中 $\rho_0 = 1000 \text{ kg/m}^3$, m_0 值可用天平称衡.

将 m_x 质量焊锡丝全部浸入比重瓶, 部分纯水被溢出, 保持水柱在毛细管中的原高度, 则总质量

$$m = \rho_x \cdot V_x + \rho_0 (V_0 - V_x) + M$$

m_1 可用天平称衡. 根据 m_x 、 m_0 和 m_1 三个方程, 化简后得到下式:

$$\rho_x = \rho_0 \cdot m_x / (m_x + m_0 - m_1)$$

(3) 数据测量与计算

$$m_x = 93.50 \times 10^{-3} \text{ kg}, m_0 = 38.55 \times 10^{-3} \text{ kg}, m_1 = 118.80 \times 10^{-3} \text{ kg}$$

则 $\rho_x = (1.000 \times 10^3 \times 93.50) / (93.50 + 38.55 - 118.80) = 7.060 \times 10^3 (\text{kg/m}^3)$

(4) 天平感量即天平分度值, 它表示指示器指示的相邻两刻线所代表质量之差. 感量为 $\Delta m / \Delta L$, 其中 ΔL 为被观测变量位移增量; Δm 为被测质量增量.

若天平空载达平衡, 增加质量 $\Delta m = 0.020 \text{ g}$, 指针左右摆动两边偏格差 $\Delta L = 5.0 - 3.0 = 2.0$ 分度, 则空载时该天平感量 = $0.020 \text{ g} / 2.0 \text{ 分度} = 0.010 \text{ g/分度}$.

7. 弹簧劲度系数的测量

例 18.2-9 用伸长法和振动法测量弹簧的劲度系数.

要求:

- (1) 用游标尺(带反射镜)测量弹簧受力以后的伸长量, 计算弹簧的劲度系数.
- (2) 用集成开关型霍尔传感器测量弹簧振子振动周期, 求得弹簧劲度系数.
- (3) 测量集成开关型霍尔传感器的输出电压和传感器与磁钢间距 d 的关系, 确定传感器相对磁钢的工作距离 d_{op} 和释放距离 d_{rp} .

可提供仪器和材料: 新型焦利秤(包括可调铅直的立柱、带有针尖的砝码盘、带反射镜的游标卡尺;

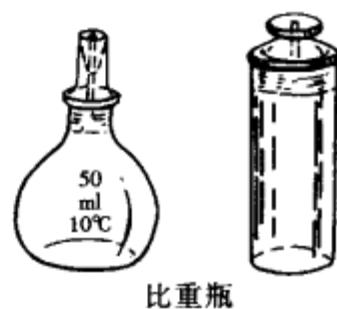


图 18.2-10

周期测量仪、数字电压表和稳压电源三用组合仪、待测弹簧；集成开关型霍尔传感器特性测量装置(包括小磁钢、集成开关型霍尔传感器、集成线性霍尔传感器等)、导线。

实验装置：

新型焦利秤、周期测量仪等三用组合仪、霍尔开关特性测量装置如图 18.2-11 所示。

实验：

(1)用弹簧受力伸长法测量弹簧劲度系数。

在砝码盘中放置砝码 M_i ，则作用力 $F_i = (M_i + m)g$ ，此式中 m 为砝码盘质量与弹簧的有效质量之和， g 为重力加速度。由胡克定律可得：

$$(M_i + m)g = K(y_i - y_0) \quad (18.2-12)$$

(18.2-12)式中， K 为弹簧劲度系数， y_i 和 y_0 是放置砝码和未放砝码时游标尺上的指示读数。

操作方法：

- a. 调节实验装置底脚螺丝，使焦利秤立柱垂直。
- b. 将弹簧固定在焦利秤上部悬臂上。旋转悬臂，使挂于弹簧下方砝码盘的头针靠拢游标尺上的小镜。
- c. 在砝码盘中放置一定质量的砝码 M_1 后，弹簧伸长。调节立柱旁游标高度，使小镜上刻线对准尖针的下端，注意对不同弹簧，加的砝码质量应取适当数值。即要将弹簧每圈间保持一定间隙，又不超过弹簧弹性线性限度。记录砝码 M_1 值及游标尺上相应的指示读数 y_1 。
- d. 从盘中取出一定量的砝码后，弹簧收缩。记下此时盘中砝码 M_2 值及游标尺相应读数 y_2 。相继使盘中砝码减为 M_3 、 M_4 、 M_5 、 \dots 、 M_{10} ，测出相应的 y_3 、 y_4 、 y_5 、 \dots 、 y_{10} 。
- e. 作 $M_i - y_i$ 图，验证 $M_i - y_i$ 满足线性关系，并求出斜率 K' ， $K = K' \cdot g$ 即为弹簧的劲度系数。

实验数据见表 1

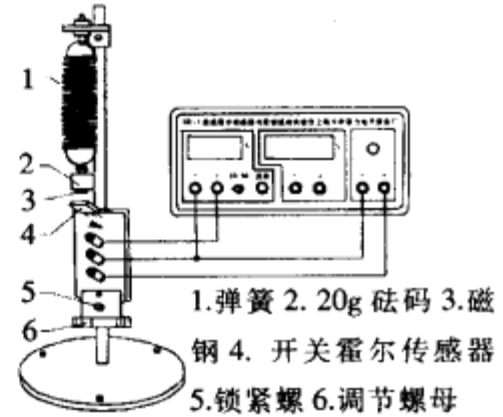


图 18.2-11

表 1 实验数据表

m/g	增加砝码 y/mm	减少砝码 y'/mm	\bar{y}/mm
11.00	19.80	19.88	19.84
12.00	26.96	26.80	26.88
13.00	34.36	34.28	34.32
14.00	41.56	41.70	41.63
15.00	48.80	49.12	48.96
16.00	56.34	56.30	56.32
17.00	63.22	63.80	63.51
18.00	70.88	71.00	70.94
19.00	77.96	78.04	78.00
20.00	85.50	85.50	85.00

用逐差法处理后，可得盘中每增加 5g 砝码，弹簧的平均伸长 $\Delta\bar{y} = 36.528\text{mm}$ 。由 (18.2-12) 式可得该弹簧的劲度系数 $K = 1.339\text{N/m}$ 。

用集成霍尔开关测量弹簧振子周期，轻轻拉动弹簧，使其振动，即可测得振动 50 次时间为 43.54s，于是得弹簧振动周期 $T = 0.8708\text{s}$ 。当弹簧在平衡点附近作简谐振动，其周期为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M + PM_0}{K}} \quad (18.2-13)$$

式中 P 为待定系数，其值近似为 $\frac{1}{3}$ ， M_0 为弹簧质量。已测得 $M_0 = 14.79\text{g}$ ， $M = 20.80\text{g}$ (包括小磁钢等

质量),取 $P \approx \frac{1}{3}$. 由 (18.2-13) 式计算出弹簧劲度系数 $K = 1.340 \text{ N/m}$. 两种方法测量结果一致.

§ 18.3 力学综合实验

1. 音叉振动频率与对称双臂质量关系研究

研究一个音叉的振动频率如何随附在音叉双臂一定位置上相同物块的质量而变化,并由此测定一个附在音叉上的物块 x 的未知质量.

基本知识介绍:

频闪仪. 它是一种放电灯,这种放电灯可在很均匀的时间间隔内短时间闪出强光,它的闪光频率可由数字显示器读出. 频闪仪可用于不直接接触运动物体的情况下,测量物体振动频率. 频闪仪有一定寿命,不用时即关闭电源. 假定某质点做转动运动,其频率为 $x \text{ Hz}$,频闪仪闪烁频率为 $y \text{ Hz}$. 于是,在相继二次闪烁时间间隔 $1/y$ 秒内,这一物体将转过 $2\pi x/y$ 角度.

如果 x/y 是一个无理数,那么它将无法表示为两个整数的比值,此时这个质点看上去将是慢慢地向前或向后转动,向前或向后取决于 x/y 的比值比相近的某个有理数较小一些或较大一些.

基本同步的确定. 当物体每转动或振动一周,频闪仪恰好闪烁一次,这时物体看上去停在一个固定的位置,即两者同步. 应该注意的是当闪烁频率为物体运动频率的几分之一(例如 $1/2$ 、 $1/3$ 、 $1/4$)时,类似的不可区别结果也将发生. 这样,如果运动物体的频率完全不知道,要调整到基本同步. 一种保险的步骤是从一高的频率开始,当多个象看到后,再慢慢降低闪烁频率,直到第一次出现单个像. 在所有的测量中,这个步骤被用来检验是否基本同步.

复频. 当频闪仪的闪烁频率高于观察物体的振动频率时,这种闪烁频率称为物体振动频率的复频. 如果频闪仪的闪烁频率比运动物体的频率小的时候,称为亚频. 如果频闪仪的闪烁频率为转动物体频率的 q 倍时,多个像被观察到. 这时,一个转动质点看上去为绕圆周等距分布的几个固定不同像. 如果是 2 倍频率, $q/p = 2$, 将产生 2 个有 π 角度距离的像. 对 3 倍频率, $q/p = 3$, 将在 $2\pi/3$ 角距离处产生 3 个像,依此类推. 质点转动频率即等于闪烁频率除以所观察到象的数目. 普遍而言,如果 $q > p > 1$, 则频闪仪在质点运动 p 圈闪烁 q 次,这样仍然出现 q 个固定不动的位置.

亚频. 这里 q/p 小于 1. 如果频闪的闪烁频率正好是物体运动的 $1/p$ 倍. 这里 $p > 1$, 那么物体在每个闪烁间隔中运动了 p 周,而物体只呈现一个像. 如果 $p > q > 1$, 则频闪仪闪烁 q 次而物体运动了 p 个完整周,看到的固定像数目将是 q 个.

可调频音叉. 一个可调频音叉当其振动时将以某一基频振动而无谐频,音叉的两个臂从每个面看都是对称的. 可以通过将相同质量的物块对称地加在两臂上来减小音叉的基频. 音叉两臂所载的物块必须对称. 对于这种加载的音叉的振动周期 T 与加载物质量 m 的关系由下式给出:

$$T^2 = A(m + B)$$

式中, A 为常数,它依赖于音叉材料的力学性质、大小和形状, B 为与每个振动臂的有效质量有关的常数.

仪器和材料

带有数字显示频率的频闪仪;小型手电筒;音叉(每个臂上对称地载有 31.6 g 并印有数字和线条的物块,物块的质心与臂上标有的 p 点重合);两个带有可拆卸手柄的夹子,手柄只在需要打开夹子时使用,实验时应卸下;一对相同的未知质量的物块;已知质量的物块(成对): 5.0 g 、 10.0 g 、 15.0 g 、 20.0 g 、 25.0 g 五种;作图纸 5 张.

实验:

(1) 基本同步和复频测量

使频闪仪闪烁和两臂载有 31.6 g 物块音叉振动达到基本同步,物块的质心落在臂上 p 点,记录同步

时频闪仪闪烁频率. 将闪烁频率比音叉频率大, 找出尽可能多的闪烁频率, 使得可观察到固定不动像(臂上画的箭头), 确定它们对应 q/p 的值, $q \geq p$ 时的 $f - q/p$ 关系如图 18.3-1 所示.

频闪仪频率 f/Hz	静止像数目	q/p
64.5	1	1
86.3	4	4/3
96.9	3	3/2
129.4	2	2
193.9	3	3
258.3	4	4

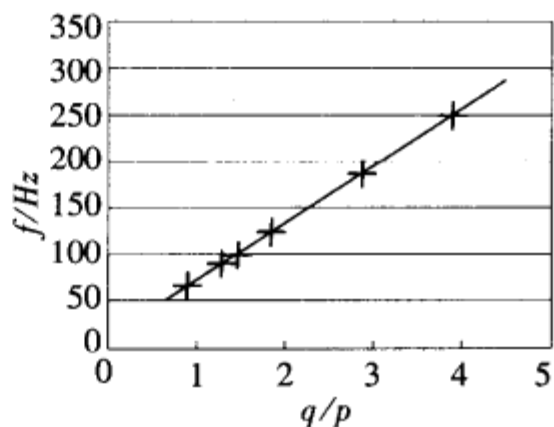


图 18.3-1

(2) 测量亚频

将闪光频率保持低于音叉基频(音叉两臂载有 31.6g 物块), 找到所有可观察到的闪烁频率, 使之产生稳定不动的像. 将读数列表(以 q/p 减小的次序), 画出所有观察到的闪烁对 q/p 值(音叉两臂载有 31.6g 物块)的直线关系图.

$q \leq p$ 时的 $f - q/p$ 图如下表以及图 18.3-2 所示.

频闪仪频率 f/Hz	静止像数目	q/p
64.5	1	1
48.5	3	3/4
43.1	2	2/3
38.8	3	3/5
32.2	1	1/2
21.5	1	1/3

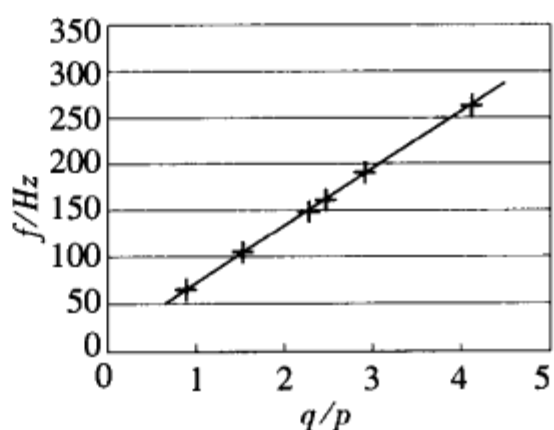


图 18.3-2

(3) 测定一对未知物块 x 的质量

将重 31.6g 的物块从音叉每根臂上卸下, 测出音叉在两臂无物块时的振动频率. 分别测出音叉两臂上均带有已知质量为 5.0g、10.0g、15.0g、20.0g、25.0g 物块时音叉振动频率. 注意物块上所标的质量为包括夹物块夹子和物块的总质量. 最后用未知物块替代已知质量物块, 测量出此时音叉的振动频率, 求出 x 质量, 注意 x 的质量也包括夹子质量(此时夹子手柄已卸下). 实验结果如下表及图 18.3-3 所示.

将上述数据代入公式 $T^2 = A(m + B)$ 进行直线拟合, 得

$A = 5.85 \times 10^{-6} \text{ s}^2/\text{g}$, $B = 9.85\text{g}$, 相关系数 $\gamma = 0.9997$,

$T^2 - m$ 图中斜率 $A = 5.85 \times 10^{-6} \text{ s}^2/\text{g}$; x 轴上截距 $-B$

$= -9.85\text{g}$.

对 x 质量待测物, $f = 85.6\text{Hz}$, $T^2 = f^{-2} = 1.36 \times 10^{-4} \text{ s}^2$,

代入 $T^2 = 5.85 \times 10^{-6}(m + 9.85)$, 可得待测物 $m_x = 13.4\text{g}$.

m/g	5.0	10.0	15.0	20.0	25.0
f/Hz	106.9	92.0	82.8	75.6	70.6
T^2/s^2	8.75×10^{-5}	1.18×10^{-4}	1.46×10^{-4}	1.75×10^{-4}	2.01×10^{-4}

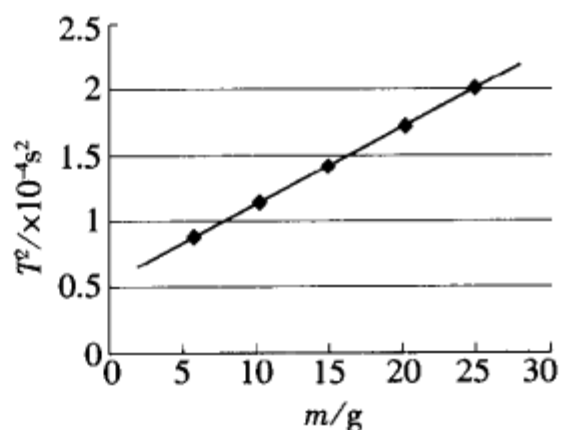


图 18.3-3

2. 旋转液体实验

当一个盛有液体的圆柱形容器绕其圆柱面的对称轴匀速转动时,液体的表面将成为抛物面,如图 18.3-4 所示.在平衡时,液体表面任一点 $P(x, y)$ 的切向与水平面的夹角满足

$$\tan\theta = \omega^2 x / g \quad (1)$$

其中 $|x| \leq R$, R 是容器半径, g 是重力加速度, ω 为角速度.更进一步,对于 $\omega < \omega_{\max}$ (当液体以角速度 ω_{\max} 匀速转动时,液面的最低处恰与容器底部接触).当 $x = x_0 = R/\sqrt{2}$ 时

$$y(x_0) = h_0 \quad (2)$$

即液面在 x_0 处的高度是恒定的.

旋转液体的表面满足方程

$$y = y_0 + \frac{x^2}{4c} \quad (3)$$

这是一个抛物面,其顶点在 $V(0, y_0)$, 焦点在 $F(0, y_0 + c)$. 入射光平行于该曲面对称轴(光轴)时,反射光将全部聚于 F 点.

仪器和装置:

在底部和杯壁上有毫米刻度的圆形塑料杯;直流电动机驱动的转盘;电动机供电的可调节电压的直流电源;透明屏幕(上面可放透明坐标纸);可调节支架;激光笔及可更换的帽盖(二个);尺;小磁钢及电子计时器;光栅;水准泡、甘油等.实验装置如图 18.3-5 所示.

要求:

- 1) 研究旋转液体表面的形状,并由此求出重力加速度.
- 2) 将旋转液体作为可调焦凹面镜进行研究,测量其焦距与角速度的关系.

3) 测量液体的折射率.

实验:

在实验前须先用水准器调节转台、屏水平,激光笔铅直.

1) 测量重力加速度

考虑位于液面上的一个质元,当其处于平衡时

$N\cos\theta = mg$, 且 $N\sin\theta = m\omega^2 x$, 如图 18.3-4 所示.

液面形状可表示为

$$\tan\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2 x}{g}$$

因而

$$y = \frac{\omega^2 x^2}{2g} + y_0$$

式中, y_0 是在 $x=0$ 时的高度.

对于某一点 $x = x_0$, 液面的高度 h_0 与液体旋转的角速度无关.在这种情况下

$$h_0 = y_0 + \frac{\omega^2 x_0^2}{2g}$$

且

$$x_0^2 = \frac{2g(h_0 - y_0)}{\omega^2} \quad (5)$$

由于液体的体积不变,则

$$\pi R^2 h_0 = \int_0^R y(2\pi x dx) = 2\pi \int_0^R \left(y_0 + \frac{\omega^2 x^2}{2g} \right) x dx$$

$$y_0 = h_0 - \frac{\omega^2 R^2}{4g}$$

由此可得

$$x_0 = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

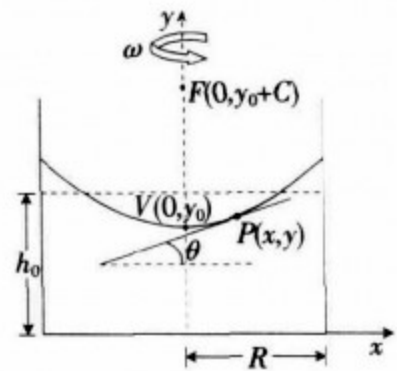


图 18.3-4

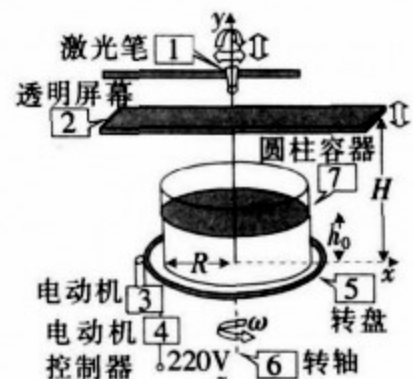


图 18.3-5

表 1 实验参量

$2R/\text{mm}$	x_0/mm	h_0/mm	H/mm
145.0	51.0	30.0	160.0

表 2 测量力加速度实验数据

x'/mm	$10T/\text{s}$	$\omega/\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$	$\tan 2\theta$	θ/rad	θ/deg	$\tan\theta$	$\omega^2/\text{rad}^2\cdot\text{s}^{-2}$
11	21.34	2.94	0.08	0.04	2.4	0.04	8.67
20	15.80	3.98	0.15	0.08	4.4	0.08	15.81
26	14.22	4.42	0.20	0.10	5.7	0.10	19.52
30	12.99	4.84	0.23	0.11	6.5	0.11	23.40
40	11.74	5.35	0.31	0.15	8.6	0.15	28.64
51	10.45	6.01	0.39	0.19	10.7	0.19	36.15
56	9.90	6.35	0.43	0.20	11.7	0.21	40.28
65	9.40	6.68	0.50	0.23	13.3	0.24	44.68
70	9.08	6.94	0.54	0.25	14.2	0.25	47.88
85	8.39	7.49	0.65	0.29	16.6	0.30	56.08
100	7.71	8.15	0.77	0.33	18.8	0.34	66.41
112	7.43	8.46	0.86	0.36	20.4	0.37	71.51
132	7.00	8.98	1.02	0.40	22.7	0.42	80.57

$$g = \frac{x_0}{\text{斜率}} = \frac{5.10}{0.00518} = 984\text{cm/s}^2$$

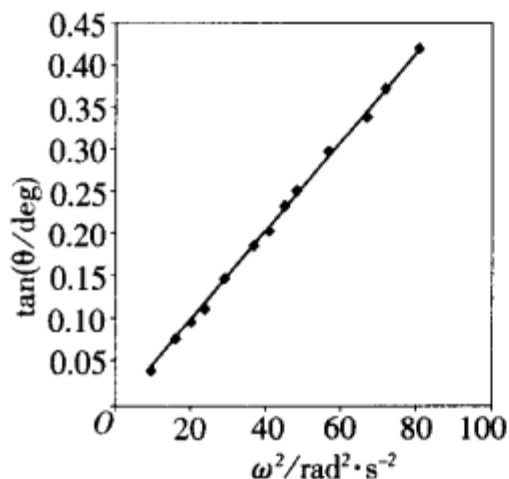


图 18.3-6

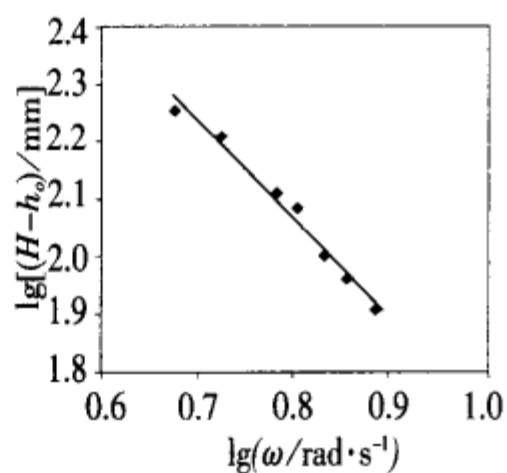


图 18.3-7

2) 测量凹面镜焦距

测量数据见表 3, 作 $\lg(H-h_0) - \lg\omega$ 关系曲线如图 18.3-7 所示.

表 3 测焦距实验数据

H/mm	$10T/\text{s}$	$\omega/\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$	$Lg(\omega/\text{rad}\cdot\text{s}^{-1})$	$(H-h_0)/\text{mm}$	$Lg[(H-h_0)/\text{mm}]$
158	10.31	6.09	0.784921	128	2.107
209	13.19	4.76	0.677935	179	2.253
190	11.70	5.37	0.729994	160	2.204

续表

H/mm	$10T/\text{s}$	$\omega/\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$	$Lg(\omega/\text{rad}\cdot\text{s}^{-1})$	$(H-h_0)/\text{mm}$	$Lg[(H-h_0)/\text{mm}]$
150	9.80	6.41	0.806954	120	2.079
129	9.21	6.82	0.83392	99	1.996
119	8.75	7.18	0.856172	89	1.949
110	8.10	7.76	0.889695	80	1.903

由图 18.3-7 可得焦距 f 是 ω 的幂函数: $f = A\omega^n$, 其中 $n \approx -1.7$. 对近轴区域 $\tan\theta = \frac{\omega^2 x}{g}$, 且 $\theta \approx \frac{x}{R} \approx \tan\theta$, 可得 $R = \frac{g}{\omega^2}$ 或 $F = \frac{R}{2} = \frac{g}{2\omega^2}$. 近轴测量有 $n \approx -2$.

2) 像的分析

将激光笔的帽盖换成有箭头模版的一种, 将该帽盖旋上, 观察在不同转速时, 屏上形成的图像, 结果如表所示.

$\omega/\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$	方向	大小变化趋势	像的属性
$\omega = 0$	ER		V
$0 < \omega < 8.2^*$	ER	D	V
$0 < \omega < 6.3^{**}$			
$8.2 < \omega < 14.6^{**}$	INV	I	R
$6.3 < \omega < 14.0^{**}$			
$14.6 < \omega < \omega_{\max}^*$	ER	NC	V
$14.0 < \omega < \omega_{\max}^{**}$			

注: * 对应 $H = 100\text{mm}$; ** 对应 $H = 240\text{mm}$; ω 的值由 H, h_0 决定.

说明:

a. 取向(与观察到的物光束在透明屏上比较).

INV: 相反方向; ER: 相同方向.

b. 当 ω 增大时图样大小的变化. I: 增大; D: 减小; NC: 不变.

c. 对于不同的频率范围. R: 如果屏在焦点以上; V: 如果屏在焦点以下.

3) 测量波长与折射率

a. 测量波长

光栅和屏都处于常态下: L 为屏与光栅的间距, x' 屏上亮点的间距. m' 为衍射级次. 实验装置如图 18.3-8 所示.

当 $L = 225\text{mm}$, $x'_{av} = 77\text{mm}$, $m' = \pm 1$, $d = (1/500)\text{mm}$ 时有

$$\tan\alpha = \frac{x'_{av}}{L} = 0.342; \lambda = \frac{1}{500} \sin\alpha = 647.6\text{nm}.$$

当 $L = 128.0\text{mm}$, $x'_{av} = 44.0\text{mm}$, $m' = \pm 1$, $d = (1/500)\text{mm}$ 时

有 $\tan\alpha = \frac{x'_{av}}{L} = 0.344, \lambda = \frac{1}{500} \sin\alpha = 650.2\text{nm}$

当 $L = 128.0\text{mm}$, $x'_{av} = 111.0\text{mm}$, $m' = \pm 2$, $d = \left(\frac{1}{500}\right)\text{mm}$ 时有

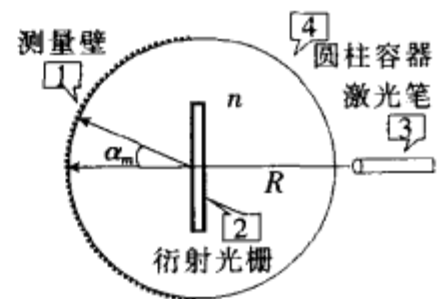


图 18.3-8

$$\tan\alpha = \frac{x'_{av}}{L} = 0.867; \lambda = \frac{1}{2 \times 500} \sin\alpha = 655.1 \text{ nm}$$

$$\therefore \bar{\lambda} = 651.0 \text{ nm}$$

b. 测量折射率

$2R = 145.0 \text{ mm}$, 在曲面上测得两点间距离为 $R\alpha_{av}$.

$R\alpha_{av} = 17.0 \text{ mm}$, 当 $m' = \pm 1$ 时, $\alpha_{av} = 0.234 \text{ rad}$. 由

$$n = \frac{m'\lambda}{d \sin\alpha} \text{ 可得 } n = 1.40.$$

如果曲面的曲率可忽略不计, 可得

$$\tan\alpha = \frac{17.0}{72.5} = 0.234 \quad (\alpha = 13.20^\circ)$$

$$\therefore \text{液体甘油的折射率 } n = \frac{\lambda}{d \sin\alpha} = 1.43$$

热学实验

热学实验是物理实验中的重要部分. 物体的温度、比热容、热膨胀系数、潜热、导热系数等, 在科研和生产中也常常被引用和测量. 热学量的测量经常用到的基本仪器是温度计(包括水银温度计、热电偶温度计、热敏电阻温度计、集成电路温度计、铂电阻温度计等)和量热器. 在热学实验中, 还常常要用到长度测量仪器、质量测量仪器和电学测量仪器. 因此, 只有熟练掌握这些仪器的使用方法, 才能正确测量热学量. 以下介绍一些重要的热学量的测量方法、热学实验的一些特点, 以及热学量测量中如何消除因待测量与周围热交换引起不确定度.

§ 19.1 温度计的特性测量与校准

1. 水银温度计的校准

水银温度计因价格低廉, 使用方便, 因此应用非常广泛. 但是, 水银温度计在实验中还有许多规定, 如全浸式水银温度计须注意因温度计中水银柱露出待测液面而引起的不确定度(此不确定度可以通过修正予以消除). 还有水银温度计的零点漂移, 因为水银温度计外壳是玻璃制品, 一切玻璃制品在形成过程中须熔化、成形、冷却, 这样形成的制品存在着永久性的应力. 由于应力作用下, 使用相当长一段时间后, 玻壳将发生形变, 即储液泡体积会发生变化, 这就产生零点漂移. 所以, 使用一年以后, 水银温度计刻度要进行校准. 对 $0\sim 100^{\circ}\text{C}$ 水银温度计通常用冰点槽、水沸点槽进行校准. 此校准方法常称定点法校准.

例 19.1-1 把一支水银温度计进行 0°C 和 100°C 两个刻度线用定点法进行检查, 同时用线性插入法对其他刻度进行校准.

可供器材: 冰点槽、水沸点槽、待校准水银温度计、用纯水制的冰、干净击槌、电炉、福廷式气压计等.

实验:

用冰点校正 0°C 刻度线

把蒸馏水或过滤后的净化水注入清洁的铝盒, 放入冰箱中制成纯冰. 然后, 把纯冰放入清洁容器中, 用清洁击槌敲成冰屑. 将冰屑放入保温瓶中, 注入少量水, 构成一个冰点槽. 注意水不宜太多, 用清洁木片压紧, 这样的冰水混合物才是冰点, 这种冰点复现准确度约为 0.01°C . 实验时, 先用一根与温度计相同直径的空心玻璃管插入冰屑以形成一个空穴, 使温度计的零度刻线高出冰屑表面不超过 5mm , 须注意水银温度计贮囊和冰水混合物充分接触, 避免形成空隙. 待温度计插入 10min 后, 再每隔 $1\text{min}\sim 2\text{min}$ 进行一次水银柱端面位置的读数, 直至三次读数相同为止. 读出温度计示值 Z_2 , 若温度计出厂检定时冰点的示值为 Z_1 , 则温度计零点变动值为 $\delta = Z_1 - Z_2$.

2. 100°C 的校准

图 19.1-1 为水的沸点槽, 用沸点槽校准水银温度计具体步骤是:

(1) 先接通沸点槽的冷凝水, 插入待校准温度计, 使温度计感温部位靠近水蒸气喷口.

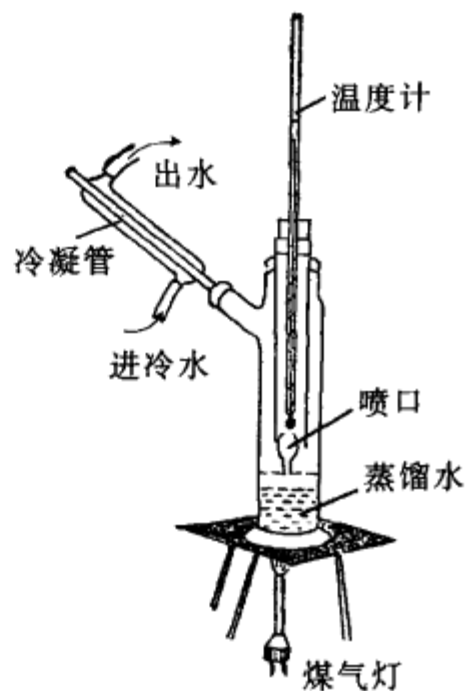


图 19.1-1

(2)用电炉加热沸点槽,当槽中水沸腾约 15min 后,连续观测温度计示值 B'_2 .并用一只辅助水银温度计,测出温度计水银柱露出部分周围的环境温度平均值(可将露出部位每隔 10℃ 位置,测一温度,然后取平均值).

(3)用福廷式气压计测出周围环境大气压示值,并查表得该大气压时水的沸点温度 $\theta^\circ\text{C}$.对水银温度计示值进行露出液柱修正后,得到大气压强为 P 及水的沸点温度 $\theta^\circ\text{C}$ 时,水银柱的实际位置 B_2 .温度计出厂时,温度 $\theta^\circ\text{C}$ 的度位置为 B_1 ,那么,在 $\theta^\circ\text{C}$ 刻度位置变动为 $\epsilon = B_1 - B_2$.

(4)温度计中间示值的校准.

已检查温度计两固定点(冰点、水的沸点)示值的变动值 δ 、 ϵ .对水银温度计等级不太高情况,可用线性插入法对除 0°C 和 100°C 的中间其他刻度进行修正.修正公式是

$$\Delta = \delta + \frac{\epsilon - \delta}{100} t \quad (19.1-1)$$

式中, Δ 为温度 $t^\circ\text{C}$ 时的修正值,由此实际温度值为

$$\text{实际温度值} = \text{示值} + \Delta \quad (19.1-2)$$

2. 集成电路温度传感器的特性测量

集成电路温度传感器具有以下几个优点:1)温度变化引起输出量的变化呈良好的线性关系;2)抗干扰能力强,互换性好;3)与热电偶相比,它不需要参考点.因此,这类传感器应用广泛.本实验着重要求通过实验掌握电流型集成电路温度传感器的特性,掌握测量集成温度传感器特性的基本方法.

例 19.1-2 集成电路温度传感器的特性测量及数字式摄氏温度计的制作.

AD590 集成电路温度传感器是由多个参数相同的三极管和电阻组成.该器件的两引出端当加有某一定直流工作电压时(一般工作电压可在 5V 至 20V 范围内).如果该温度传感器的温度升高或降低 1°C ,那么传感器的输出电流增加或减少 $1\mu\text{A}$.该传感器输出电流 I 与温度 θ 满足如下关系:

$$I = B\theta + A \quad (19.1-3)$$

式中, I 为 AD590 的输出电流,单位 μA ; B 为传感器灵敏度,单位 $\mu\text{A}/^\circ\text{C}$; θ 为摄氏温度; A 为摄氏零度时的电流值,单位 μA .利用 AD590 集成电路温度传感器的上述特性,可以制成各种用途的温度计.

要求:

1.测量 AD590 集成电路温度传感器的电流 I 与温度 θ 的关系,求该传感器的灵敏度 B 和摄氏零度时电流值 A .

2.利用非平衡电桥线路,制作一台数字式摄氏温度计,即 AD590 传感器处于 0°C 时,数字电压表示值为 0,而当 AD590 传感器处于 $\theta^\circ\text{C}$ 时,数字电压表显示值为 θ .

实验:

1)测量 AD590 集成电路温度传感器电流 I 与温度 θ 关系用图 19.1-2 所示线路.图中 R 用电阻箱, V 为直流数字电压表.电源用直流稳压电源, AD590 传感器放于可调温度的恒温槽内.槽内油的温度用水银温度计测量.

图 19.1-2 中取电阻 $R = 1000\Omega$,电源电压为 7.2V,改变恒温槽温度,测量

传感器输出电流 I 与温度 θ 之间关系,得实验数据见表 1,其中 $I = \frac{V_R}{R}$, V_R 为电阻两端电压.

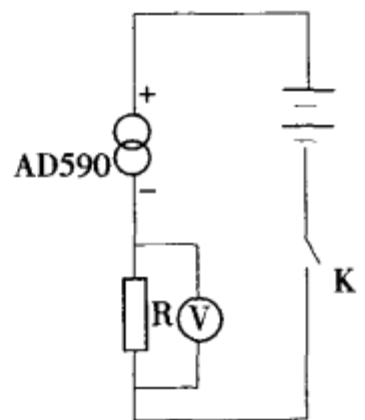


图 19.1-2

表 1

$\theta/^\circ\text{C}$	V_R/V	$I/\mu\text{A}$
17.2	0.2903	290.3
24.0	0.2973	297.3
31.8	0.3052	305.2
33.0	0.3068	306.8
40.6	0.3144	314.4
46.0	0.3202	320.2

用线性回归得 $I \sim \theta$ 的相关系数 $r = 0.9992$, 斜率 $B = 1.036 \mu\text{A}/^\circ\text{C}$, 截距 $A = 272.4 \mu\text{A}$. 该传感器的灵敏度为 $1.036 \mu\text{A}/^\circ\text{C}$, 其在 0°C 时, 输出电流为 $272.4 \mu\text{A}$.

2) 将直流电源、集成温度传感器 AD590 及三只电阻箱组成图 19.1-3 线路. 该传感器灵敏度 $B = 1.036 \mu\text{A}/^\circ\text{C}$, 要组成一个摄氏温度计, 并要求当 AD590 传感器温度升高 1°C 时, 电阻 R_2 上电压降增加 1mV , 因此, $R_2 = \frac{1\text{mV}}{1.036 \mu\text{A}} = 965.3 \Omega$.

取 $R_2 = R_3 = 965.3 \Omega$, $U = 12.0\text{V}$. 将 AD590 放入冰点槽中 10min , 待传感器温度达 0°C 时, 调节 R_2 阻值, 使电阻 R_2 上的电压与 R_3 上电压相等, 即数字电压表示值为 0. 这时保持电源电压及 R_4 、 R_2 、 R_3 阻值不变, 将 AD590 传感器浸入室温水里测得水温为 16.40°C , 即数字电压表测得数值为 16.40mV . 同时用水银温度计测得水温为 16.5°C . 这说明此时用图 19.1-3 组装的非平衡电桥, 可测量并显示 $0 \sim 50^\circ\text{C}$ 的温度, 显示值为摄氏温度值.

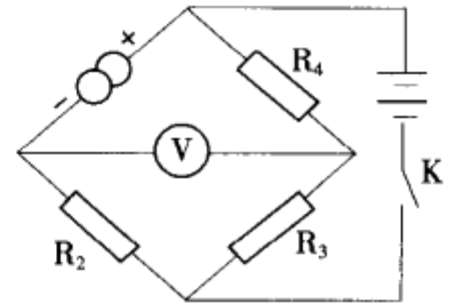


图 19.1-3

3. 热敏电阻温度传感器的电阻温度特性测量

热敏电阻有负温度系数热敏电阻和正温度系数热敏电阻之分, 通常测温用的热敏电阻为负温度系数热敏电阻. 负温度系数热敏电阻用半导体材料制成, 它对温度的反应比金属电阻灵敏得多, 因而它的体积可做得很小, 用热敏电阻可以制成半导体温度计.

例 19.1-3 用数字电压表、铜-康铜热电偶和电桥测量热敏电阻的温度特性, 求出热敏电阻的电阻与温度关系的经验公式.

可供仪器和材料: 数字电压表(多量程)、电阻箱三只、调压变压器、电加热器、检流计、铜-康铜热电偶、待测热敏电阻、甲电池二节、保温瓶、单刀开关、导线、冰等.

实验:

在一定的温度范围内, 半导体热敏电阻的电阻 R_T 与热力学温度 T 之间有如下关系:

$$R_T = Ae^{B/T} \quad (19.1-4)$$

式中, 对指定的电阻而言, A 和 B 均为常数. 对(19.1-4)式两边取对数, 则有

$$\ln R_T = B \cdot \frac{1}{T} + \ln A \quad (19.1-5)$$

$\ln R_T$ 与 $\frac{1}{T}$ 成线性关系, 在实验中测得各个温度 T 的 R_T 值后, 即可通过作图求出 B 和 A 值, 从而求得 R_T 与 T 关系的经验公式.

实验时须注意:

- 1) 热敏电阻只能在规定的温度范围内工作, 否则会损害元件, 导致其性能不稳定.
- 2) 应尽量避免热敏电阻自身发热, 因此在测量时流过热敏电阻的电流必须很小.

将热敏电阻和铜-康铜热电偶的热端一起插在盛有硅油的玻璃小试管内, 而试管置于电加热器中, 加热器通电电压大小可由调压变压器来控制; 铜-康铜热电偶的冷端则置于盛有冰水混合物的保温瓶中. 用数字电压表测出热电偶的温差电动势值 ϵ_T , 通过查阅 $\epsilon_T - T$ 关系表, 可求得热敏电阻所处温度 T 值; 而热敏电阻的阻值则用电阻箱、检流计和甲电池组成的惠斯通电桥测量. 实验线路如图 19.1-4 所示. 先测出室温时的 ϵ_T 和 R_T 之值. 然后增大调压变压器输出电压 (但不超过 60V), 当加热器温度接近 100°C 时, 可适当减小电压, 使温度达到稳定, 并测出 ϵ_T 和 R_T 之值. 以后逐步降低加热电压, 使加热器处于不同的稳定温度, 各温度间隔约为 10°C 左右, 测出各相应的 ϵ_T

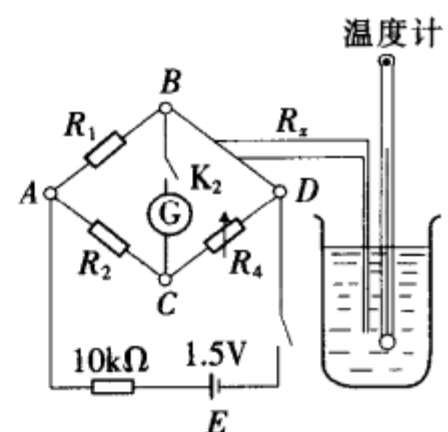


图 19.1-4

和 R_T 值,数据不少于六组.作 $\ln R_T - \frac{1}{T}$ 图,由斜率及截距分别求出常数 B 及 A .实验数据如表 2 所示.桥臂 $R_1 = R_2 = 1000\Omega$.

表 2

ε_T/mV	R_T/Ω	$\ln R_T$	T/K	$1/T/10^{-3}\cdot(\text{K}^{-1})$
4.031	1630	7.3983	367.86	2.7184
3.474	2136	7.6667	355.72	2.8112
3.138	2565	7.8497	348.26	2.8714
2.569	3747	8.2287	335.44	2.9812
2.046	5184	8.5533	323.40	3.0921
1.556	7324	8.8939	311.85	3.2067
1.212	9486	9.1576	303.58	3.2940
0.970	1163×10	9.3613	297.6	3.3597

作 $\ln R_T - \frac{1}{T}$ 图(图略),得 $B = 3.05 \times 10^3 \text{K}$, $\ln A = -0.888$, $A = 0.411\Omega$,所以该热敏电阻的阻值与热力学温度的关系为

$$R_T = 0.411 e^{3.05 \times 10^3 / T} \Omega$$

若用该热敏电阻测量某温度,只须测得此时的阻值,即能由上式算得温度 T .

§ 19.2 量热器及其正确使用

量热器是通过测定物体间传递的热量来求出物体的比热、潜热及化学反应的仪器.

图 19.2-1 是一个量热器,用它来测量物体间传递的热量步骤是:在内筒中间放一定量水,待内筒温度和水的温度相同后,投入已知温度和质量的待测物体进行热交换.用搅拌器不停搅拌,使整体温度均匀,而且较快地达到平衡.若水、金属内筒和搅拌器的比热已知,那么测量待测物体投入前后的水温差,就可以确定待测物与水、金属内筒、搅拌器间交换的热量.

在量热器使用时应注意以下几个问题:

1) 由于待测物体与水温相比有很大的温差,因此,实验过程中存在着待测物与水进行热交换时,整个内筒系统与周围空气进行热交换问题,为此需要采取热补偿措施,以消除系统误差.

2) 样品投入量热器中,必须用搅拌器连续搅拌,直至连续多个读数温度不变,才算是待测物、水和量热器温度达到了平衡.

量热器热损失的温度校正法:

如一盛水量热器,其温度 θ 高于环境温度 θ_r ,则必向外散热.实验证明:当温差值 $(\theta - \theta_r)$ 不太大时,单位时间内系统向外散失的热量 $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$ 近似与温差成正比.

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = E(\theta - \theta_r) \quad (19.2-1)$$

式中 E 为常数,它与物体的表面积、表面情况和周围流体性质、流体情况等因素有关.

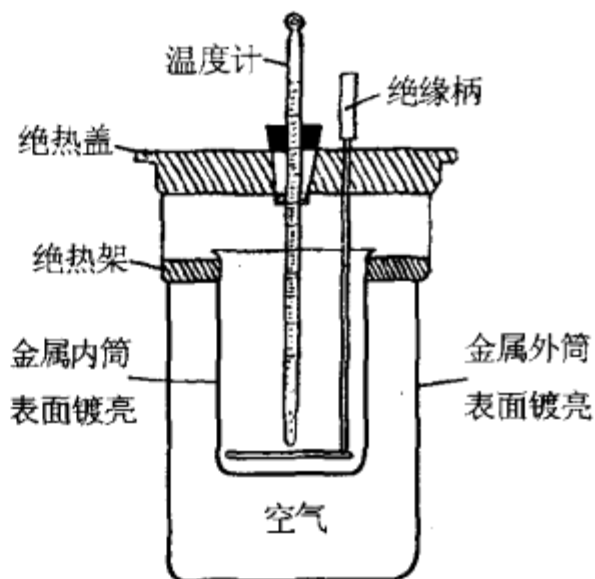


图 19.2-1

图 19.2-2 中 ab 直线为某量热器由于不断散热,其温度随时间下降的图线.在较短时间内,这图线基本上是直线.如对时间 t 轴作 at_1 、 bt_2 垂线,并在 t_1 至 t_2 区间内,对(19.2-1)等式两边进行累加,即

$$\sum \frac{\Delta Q}{E} = \sum (\theta - \theta_r) \Delta t$$

可得

$$\frac{Q}{E} = S \quad (19.2-2)$$

式中, Q 为 $t_2 - t_1$ 这段时间内总的散热量, S 为降温图线 ab 、 at_1 和 bt_2 与横轴间的面积.注意纵轴的原点为室温 θ_r .反之,如盛水量热器的温度低于 θ_r ,则由图(19.2-2)中的 cd 上升曲线、 t_3c 和 t_4d 与时间 t 轴围成的面积 S' 与过程中吸收的热量成正比.所以用混合法测量物体比热或者用混合法测量某物质熔解热时,设计实验应尽量使室温在量热器中水的初、终温之间,且使系统向外界吸收与放出的热量基本上能相互抵消,这样达到消除系统误差的目的.

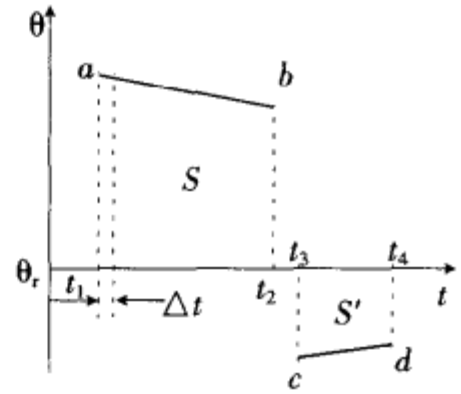


图 19.2-2

例 19.2-1 用混合法测量冰的比熔解热.

要求:

- (1) 写出用混合法测量冰熔解热公式.
- (2) 选择最佳实验参数,尽可能减少实验系统误差.
- (3) 测量冰的比熔解热.

可供仪器和材料:

量热器、水银温度计、物理天平、纯冰、水、铁架和夹子等.

实验:

(1) 将质量为 m 的 0°C 冰块放入盛在量热器内筒的质量为 M 、温度为 $\theta_1^\circ\text{C}$ 的水中.设冰全部熔解后水温降为 $\theta_2^\circ\text{C}$.这块冰被熔化为水并升温到 $\theta_2^\circ\text{C}$ 时所吸收的总热量为 $m\lambda + mc\theta_2$,此式中 C 为水的比热容; λ 为冰的比熔解热.若量热器内筒及搅拌器的材料相同,它们的总质量为 M_1 ,比热容为 C_1 ,则在实验中,量热器、搅拌器和水所放出的热量为 $(MC + M_1C_1)(\theta_1 - \theta_2)$.假设在混合过程中量热器与周围空间无热量交换,则有

$$(MC + M_1C_1)(\theta_1 - \theta_2) = m\lambda + mc\theta_2$$

$$\therefore \lambda = \frac{(MC + M_1C_1)}{m}(\theta_1 - \theta_2) - c\theta_2 \quad (19.2-2)$$

(2) 操作要点.用冰箱制冰,将盛冰盒从冰箱中取出后,应在 0°C 环境(如冰水混合物)中放置一段时间,取出冰后用干纱布揩干其表面的水.量热器内筒、搅拌器质量用天平称出.冰的质量待实验最后冰全部熔化,称量热器内筒总质量减去其他部分质量的差值得出.对纯冰的质量和水的初温、水的质量的选择,应使水的初温比室温高.当水中投入冰块并全部熔解后,水的终温应比室温低,并使初温与室温差值和室温与终温差值大致相等,这样可以有效地减小系统与外界的热交换对实验的影响.还要注意水的终温不能低于当时的露点,否则周围的水蒸气会凝结在量热器内筒外壁上,并向系统释放热量,实验中还要测定环境的露点.

(3) 实验结果

室温 23.8°C , 露点 19.5°C .

量热器内筒和搅拌器的总质量(均用铜制)

$$M_1 = 144.160\text{g}$$

水的质量 $M =$ 盛有水的容器的质量 $-$ 容器质量

$$= 345.400\text{g} - 144.160\text{g} = 201.240\text{g}$$

量热器内水温随时间变化的测定

放冰前

时间/min	0	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00	3.50	4.00	4.50
温度/℃	31.75	31.70	31.66	31.62	31.60	31.57	31.52	31.50	31.48	31.46

放冰后

时间/min	5.00	5.50	6.00	6.50	7.00	7.50	8.00	8.50	9.00	9.50
温度/℃	25.70	22.20	20.80	20.00	19.80	19.80	19.80	19.85	19.85	19.88

用 $20 \times 25 \text{cm}^2$ 坐标纸作量热器内温度随时间变化关系图, 可得 $\theta_1 = 31.39^\circ\text{C}$, $\theta_2 = 19.77^\circ\text{C}$. (见图 19.2-3).

冰的质量 $m = 370.800 - 345.40 = 25.400 \text{g}$. 已知 20°C 时铜的比热容 $C_1 = 385 \text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$, 20°C 水的比热容 $C = 4.180 \times 10^3 \text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$, 所以冰的比溶解热

$$L = \frac{(MC + M_1 C_1)(\theta_1 - \theta_2)}{m} - C\theta_2$$

$$= (201.240 \times 4.180 + 144.160 \times 0.385) \times (31.39 - 19.77) / 25.400 - 4.180 \times 19.77$$

$$= 327.9 \times 10^3 (\text{J}/\text{kg})$$

冰的比溶解热的标准值 $L = 3329 \times 10^2 \text{J}/\text{kg}$, 可见本实验测量结果与标准值相比误差较小. 由于本实验中使用冰有小孔, 无法避免少量水被带入, 实验结果偏小是正常的.

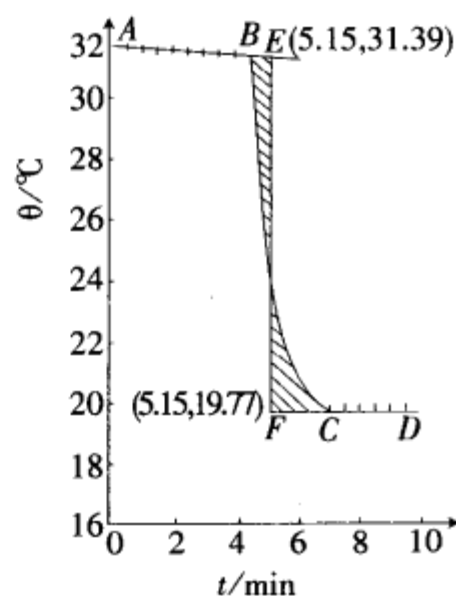


图 19.2-3

§ 19.3 用比重瓶法测量液体的热膨胀系数

当温度变化时, 液体体积会发生变化, 这就是液体的热膨胀. 设某液体质量为 m , 此液体在 0°C 和 $t^\circ\text{C}$ 时的密度为 ρ_0 和 ρ_t , 其体积为 V_0 和 V_t .

当温度处于 $t_1^\circ\text{C}$ 和 $t_2^\circ\text{C}$ 时 ($t_2 > t_1$), 比重瓶装满液体的容积分别为 V_1 和 V_2 , 此时比重瓶和水的总质量分别为 M_1 和 M_2 . 若比重瓶的质量为 M , 则

$$M_1 - M = \rho_1 V_1 = \rho_0 V_1 / (1 + \beta t_1)$$

式中 β 为温度 0°C 至 $t_2^\circ\text{C}$ 区间内平均热膨胀系数. 同理, 也可近似认为

$$M_2 - M = \rho_2 V_2 = \rho_0 V_2 / (1 + \beta t_2)$$

因为玻璃的热膨胀系数相对液体热膨胀系数可忽略, $V_1 = V_2$, 且 $\beta^2 \approx 0$, 所以

$$\frac{M_1 - M}{M_2 - M} = \frac{1 + \beta t_2}{1 + \beta t_1} \approx 1 + \beta(t_2 - t_1)$$

$$\therefore \beta = \frac{M_1 - M_2}{(M_2 - M)(t_2 - t_1)} \quad (19.3-1)$$

例 19.3-1 测量水在室温至 100°C 温度范围内的平均体膨胀系数 β .

可供仪器和材料:

物理天平、烧杯、比重瓶、水银温度计、电炉、水、纱布等.

实验:

先称一下空比重瓶质量 M , 然后将比重瓶灌满室温水, 用纱布将瓶外揩干, 用物理天平称出室温状

态下, 比重瓶和水的总质量 M_1 . 再将比重瓶中水倒干净, 把空比重瓶浸没于沸水中, 使沸水灌入比重瓶中, 盖好瓶塞. 注意该比重瓶至少须在沸水中加温 4 分钟时间. 然后轻轻取出比重瓶, 用纱布将瓶外边的水滴揩干, 用物理天平称得比重瓶与水的总质量 M_2 . 用温度计测室温水温度为 t_1 ℃, 以此可计算水的热膨胀系数 β .

实验结果:

$M = 11.400\text{g}; M_1 = 36.445\text{g}, t_1 = 24.05^\circ\text{C}; M_2 = 35.480\text{g}, t_2 \approx 100.0^\circ\text{C}$, 那么, 水在 24.05°C 至 100.0°C 之间平均体膨胀系数 β 为

$$\beta = \frac{M_1 - M_2}{(M_2 - M)(t_2 - t_1)} = \frac{36.445 - 35.480}{(35.480 - 11.400)(100.0 - 24.05)} = 0.527 \times 10^{-3} (1/^\circ\text{C})$$

已知 20°C 至 100°C 水的平均体膨胀系数标准值为 $0.516 \times 10^{-3} (1/^\circ\text{C})$, 上述测量结果与标准值之间偏差较小.

§ 19.4 冷却规律的研究和冷却法测量金属比热容

物体间热量传递通常有三种方式: 辐射、传导、对流. 当以对流的方式传递热量时, 在发热体表面邻近的流体层首先受热, 然后通过流体的流动, 将热量传到较冷物体的表面, 或经混合将热量分散到流体其余部分中去.

在强迫对流或自然对流条件下, 热量传递满足下列函数关系

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = E(\theta - \theta_0)^m \quad (19.4-1)$$

式中, $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$ 为单位时间内物体散失的热量, θ 为该发热体表面温度, θ_0 为周围流体的温度(一般为室温). E 是与 $(\theta - \theta_0)$ 无关的常数. 当 $m = 1$ 时, 式(19.4-1)即称为牛顿冷却定律; 在自然对流时, $m = \frac{5}{4}$. 本实验题研究自然对流和强迫对流的形式下, 热量传递符合怎样的关系式; 并运用牛顿自然冷却定律, 用比较法测量某金属的比热容.

例 19.4-1 用实验求自然对流和强迫对流条件下, 热量传递符合的函数式.

可供仪器和材料: 水银温度计、小管状电炉(约 20W)、秒表、铁架和夹子等.

实验:

(1) 自然对流实验

用 $50^\circ\text{C} \sim 100^\circ\text{C}$ ($\frac{1}{10}^\circ\text{C}$) 水银温度计做实验.

室温 $\theta_0 = 10.0^\circ\text{C}$, 将该水银温度计在管状电炉中均匀加热至 85.0°C , 然后将水银温度计取出在空气中的自然冷却. 每间隔 10s 读一数, 温度计读数 θ (单位℃) 如下:

t/s	0	10.0	20.0	30.0	40.0	50.0	60.0	70.0	80.0
$\theta/^\circ\text{C}$	85.0	79.1	73.8	69.0	64.6	60.6	57.0	53.7	50.7

由量热学可知, 对一定的物体, 单位时间损失的热量与单位时间温度的下降值成正比, 即

$$\frac{\Delta \theta}{\Delta t} = Mc \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \quad (19.4-2)$$

式中 M 为物体的质量, 而 c 为物体材料的比热容. 将(19.4-2)式代入(19.4-1)式可得:

$$\frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{E}{Mc} (\theta - \theta_0)^m$$

设 $K = E/Mc$, 则上式可写成:

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = K(\theta - \theta_0)^m \quad (19.4-3)$$

将上式两边取 \ln 得:

$$\ln\left(\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right) = m \ln(\theta - \theta_0) + \ln K$$

把上述实验数据代入此公式, 用计算机进行数据处理得

$$m = 1.25, \text{ 相关系数 } r = 0.9998, K = 0.0027$$

(2) 强迫对流实验

水银温度计规格: $0 \sim 100^\circ\text{C}$, 分度值 0.1°C . 开启小风扇. 室温 $\theta_0 = 14.8^\circ\text{C}$, 把该水银温度计在管状电炉中均匀加热至 100.0°C , 然后从电炉中取出, 在小风扇强迫对流下冷却. 每隔 10s 记下温度计读数. 实验数据如下:

t/s	0	10.0	20.0	30.0	40.0	50.0	60.0	70.0	80.0
$\theta/^\circ\text{C}$	100.0	79.0	63.9	52.0	43.5	36.9	31.8	28.0	24.9

把上述实验数据代入公式(19.4-3), 并用计算机计算得

$$m = 1.05, \text{ 相关系数 } r = 0.9998, K = 0.023$$

例 19.4-2 用冷却法测量金属比热容

用冷却法测定金属或液体的比热容是量热学中常用方法之一. 已知标准样品在不同温度的比热容, 通过作冷却曲线可测得各种金属在不同温度时的比热容.

如果金属样品为小圆柱形, 其直径和长度都很小, 而且导热性能较好, 可以近似认为样品各处的温度相同, 于是有关系式

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = C_1 M_1 \frac{\Delta\theta_1}{\Delta t} \quad (19.4-4)$$

式中 C_1 为该金属样品在温度 θ_1 时的比热容, $\frac{\Delta\theta_1}{\Delta t}$ 为金属样品在 θ_1 时的温度下降速率. 由冷却定律有:

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \alpha_1 S_1 (\theta_1 - \theta_0)^m \quad (19.4-5)$$

式中 α_1 为热交换系数, S_1 为该样品外表面的面积, m 为常数, θ_1 为金属样品的温度, θ_0 为周围介质的温度. 由(19.4-4)式和(19.4-5)式可得

$$C_1 M_1 \frac{\Delta\theta_1}{\Delta t} = \alpha_1 S_1 (\theta_1 - \theta_0)^m \quad (19.4-6)$$

同理, 对质量为 M_2 和比热容为 C_2 的另一种金属样品, 可有同样的表达式:

$$C_2 M_2 \frac{\Delta\theta_2}{\Delta t} = \alpha_2 S_2 (\theta_2 - \theta_0)^m \quad (19.4-7)$$

如果两个样品的形状和尺寸都相同, 即 $S_1 = S_2$; 两样品表面状况也相同(涂层、色泽等), 周围介质性质不变, 则有 $\alpha_1 = \alpha_2$. 如果周围介质温度 θ_0 恒定, 两样品又处于相同温度 $\theta_1 = \theta_2$, 那根据(19.4-6)和(19.4-7)式可得

$$C_2 = C_1 \frac{M_1 \left(\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right)_1}{M_2 \left(\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right)_2} \quad (19.4-8)$$

如果已知标准样品的比热容 C_1 、质量 M_1 、待测样品的质量 M_2 及两样品在温度 θ 时的冷却速率之比, 就可求出待测金属比热容 C_2 .

要求:

1. 已知铜在 100°C 时的比热容 $C_1 = 393\text{J/kg}\cdot^\circ\text{C}$, 把铜样品加热至 280°C 至 300°C 温度, 然后用铜 -

康铜热电偶和秒表,测量和记录该样品的温度随时间变化自然冷却规律。

2. 测量铁样品和铝样品温度从 102°C 降至 98°C 时所需时间 Δt 。按铁、铜、铝样品的次序,分别测量其温度下降速率,每一样品重复测量 5 次。由于三种样品温度下降范围 $\Delta\theta = 102 - 98$,所以公式(19.4 -

8)可简化为 $C_2 = C_1 \frac{M_1(\Delta t)_2}{M_2(\Delta t)_1}$ 。

3. 计算待测样品铁的比热容 C_2 和铝的比热容 C_3

可供仪器和材料:铜、铁、铝样品(直径 5mm、长 30mm 的小圆柱金属样品,其底部钻一深孔)、铜-康铜热电偶、加热电炉及电炉升降支架、防风隔离金属筒、冰水混合物及保温瓶、物理天平、数字电压表、秒表等。

实验:

用物理天平分别测出铜、铁、铝三种不同样品的质量,由于样品外面已电镀一层金属膜。根据 $M_{Cu} > M_{Fe} > M_{Al}$ 将它们区别开来。

实验装置示意图如图 19.4-1 所示。注意热电偶的测温端固定在金属防风筒的中央,样品孔插入热电偶测温端。利用升降支架将加热炉 A 下降并将炉套住待加热样品。当样品加热到所需要温度时,把电炉升起,将防风筒的金属盖盖好。然后由样品自然冷却,测量样品由 102°C 下降到 98°C 所需要时间 Δt 。实验数据如下:

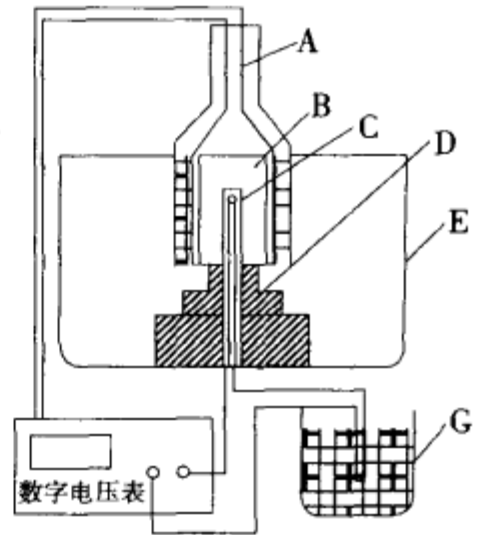


图 19.4-1

A-加热炉;B-待加热样品;C-热电偶;
D-支撑物;E-防风罩

实验要求 1 部分略,下面记录要求 2 部分。

样品质量: $M_1 = 4.830\text{g}$, $M_2 = 4.280\text{g}$, $M_3 = 1.500\text{g}$ 。

由于样品外形、尺寸相同,由样品质量可知: M_1 为铜样品, M_2 为铁样品, M_3 为铝样品。

样品由 102°C 下降到 98°C 所需要时间 Δt 见下表

样品 \ 次数	1	2	3	4	5	$\bar{\Delta t}$
铜 $\Delta t_1/\text{s}$	8.11	8.36	8.50	8.33	8.60	8.38
铁 $\Delta t_2/\text{s}$	8.86	8.99	8.94	8.58	9.09	8.89
铝 $\Delta t_3/\text{s}$	6.26	6.22	6.35	6.29	6.44	6.31

以铜的比热容为标准: $C_1 = 0.3929 \times 10^3 \text{J/kg}\cdot^{\circ}\text{C}$ (100 $^{\circ}\text{C}$ 时)

铁的比热容

$$C_2 = C_1 \frac{M_1 \cdot (\Delta t)_2}{M_2 \cdot (\Delta t)_1} = 0.3929 \times 10^3 \times \frac{4.830 \times 8.89}{4.280 \times 8.38} = 0.470 \times 10^3 \text{J/kg}\cdot^{\circ}\text{C}$$

铝的比热容

$$C_3 = C_1 \frac{M_1 \cdot (\Delta t)_3}{M_3 \cdot (\Delta t)_1} = 0.3929 \times 10^3 \times \frac{4.830 \times 6.31}{1.500 \times 8.38} = 0.953 \times 10^3 \text{J/kg}\cdot^{\circ}\text{C}$$

铁在 100°C 的比热容 $C_{Fe} = 460 \text{J/kg}\cdot^{\circ}\text{C}$, 铝在 100°C 的比热容 $C = 961 \text{J/kg}\cdot^{\circ}\text{C}$ 。

上述测量结果与公认值较接近。

§ 19.5 热学综合实验

热辐射与斯忒藩——玻尔兹曼常数测量

用提供的器材测定斯忒藩——玻尔兹曼常量。

可供仪器和材料:直流稳压电源、固定在陶瓷基板上的加热器、数字式电压表、数字式电流表、数字式毫伏表(用于测量铁-康铜热电偶的电势差)、铁-康铜热电偶的电势差与温度关系表、导线若干、蜡烛与火柴(用于熏黑铝圆柱套筒的外表面)。

要求:

- (1)叙述实验原理及有关公式。
- (2)简述实验的方法和步骤。
- (3)测量斯忒藩——玻尔兹曼常量 σ 值。
- (4)分析误差及其来源。

原理:

由斯忒藩——玻尔兹曼原理,对于表面积为 S 的物体,当它与周围环境达到稳定的热平衡时,设其热力学温度为 T ,则其有效辐射功率为

$$P = e\sigma S(T^4 - T_0^4) \quad (19.5-1)$$

式中, σ 是斯忒藩——玻尔兹曼常量, T_0 是周围环境温度, e 是一个系数,对理想黑体, $e = 1$;对理想反射体, $e = 0$ 。

根据固体电磁辐射理论,抛光的铝质圆筒可以看作是一个理想的反射物,不吸收热量,也没有任何热辐射,即 $e = 0$ 。而同样的圆筒被均匀熏上一层薄黑烟后可视作一理想黑体,能吸收全部加于其上的热辐射,同时又是一个理想的热辐射体,即 $e = 1$ 。所以,理想情况下,一个抛光圆筒加热后可视作通过非辐射过程来损失热量,如热传导或空气对流。而熏黑的圆筒将同时又通过热辐射过程来损失能量,这一过程遵循斯忒藩——玻尔兹曼原理。

测量斯忒藩——玻尔兹曼常数可有下列三种不同方法:

1)同温测量法

假设圆筒在熏黑或没有被熏黑这两种情况下都被加热到相同的温度,用于达到热平衡所消耗的电必须和通过辐射过程所造成的能量损失相当。即

$$P_r(T) = P_t(T) - P_n(T)$$

其中, $P_t(T)$ 为热辐射所造成的熏黑圆筒的能量损失, $P_t(T)$ 为 T 温度下熏黑圆筒的所有能量损失,而 $P_n(T)$ 为 T 温度下光滑圆筒通过非热辐射过程所引起的能量损失。假设在上述两个过程中 $P_n(T)$ 值相等,则有

$$\sigma = \frac{P_t(T) - P_n(T)}{S(T^4 - T_0^4)}$$

其中 T_0 为室温。假设 $P_n(T)$ 与 $(T - T_0)$ 近似成正比,即

$$P_n(T) = K(T - T_0)$$

这里, K 是与 T 无关的常量。基于这一关系,可以建立以下两种 σ 的测量方法(下述两种方法不如第一种方法精确)。

2)恒定能量测量法

在此方法中,理想黑体和理想反射体加热所需的能量 P 保持不变,达到平衡时其温度分别记为 T_b 和 T_p 。于是

$$P = K(T_p - T_0)$$

$$P = K(T_b - T_0) + P_r(T_b)$$

消去 K ,得

$$P_r(T_b) = \frac{(T_p - T_b)P}{(T_p - T_0)}$$

此式代入(19.5-1)得

$$\sigma = \frac{(T_p - T_b)P}{S(T_b^4 - T_0^4)(T_p - T_0)}$$

3)在两种不同温度下进行测量的方法

此方法中,只用熏黑圆筒进行测量,并且在两个平衡温度 T_1 和 T_2 下进行.加热至 T_1 和 T_2 所需热能分别记为 P_1 和 P_2 ,则

$$P_1 = K(T_1 - T_0) + \sigma S(T_1^4 - T_0^4)$$

$$P_2 = K(T_2 - T_0) + \sigma S(T_2^4 - T_0^4)$$

消去 K ,得

$$\sigma = \frac{(T_2 - T_0)P_1 - (T_1 - T_0)P_2}{S[(T_1^4 - T_0^4)(T_2 - T_0) - (T_2^4 - T_0^4)(T_1 - T_0)]}$$

实验:

实验装置如图 19.5-1 所示.加热器置于瓷质基座上,与电源和电表相连.在测量过程中,加热器完全封闭在一中空的圆筒中(圆筒也置于瓷质基座上).铁-康铜热电偶与圆筒相连,同时又与数字式毫伏表相连,通过查表得到温度.用游标卡尺测量圆筒长为 60.00mm;外直径为 12.50mm,筒的表面积 $S = 24.80\text{cm}^2$.筒壁厚 1.0mm,底面厚 3.0mm.数字式毫伏表用数字式万用表替代.

因为加热器的电阻随温度而变化,提供给加热器的能量必须单独测量而不能用电源显示器上的示数,因为电源显示器显示值太粗略.读取加热器电压 U 和电流 I 时,要求圆筒和外界达到热平衡,且达到热平衡一般耗时 25min~30min.

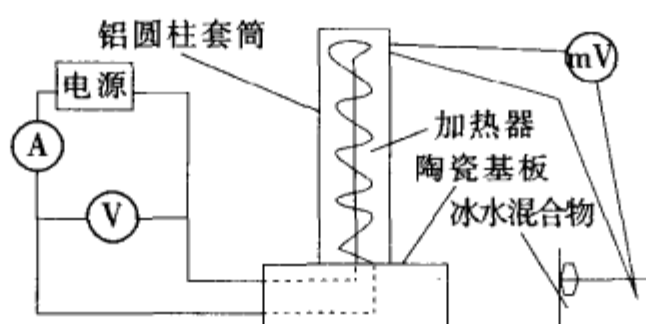


图 19.5-1 实验装置图

在室温为 298.3K 下进行实验,其实验数据见表 1,实验结果见表 2.铁-康铜的电势差与温度关系对照表略.

表 1 三个测量仪表的值

数据编号	圆筒表面的性质	U/V	I/A	T/K
A	抛光	9.80	1.50	485.5
B	熏黑	9.80	1.50	433.5
C	熏黑	11.90	1.82	485.5

表 2 三种不同方法下的 σ_{ex} 的值

使用的方法	使用的数据	$\sigma_{ex}/W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$	σ_{ex}/σ
T 不变	$A + C$	5.945×10^{-8}	1.05
P 不变	$A + B$	6.087×10^{-8}	1.07
不同温度下	$B + C$	5.386×10^{-8}	0.95

表 2 中, σ_{ex} 为实验测量值, $\sigma = 5.669 \times 10^{-8} W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$ 为公认值.

影响实验结果准确性的主要因素为:

1) 表面光滑的圆筒并非是一个理想的反射性,被熏黑后也并非是一个理想黑体.前者吸收系数大于 0,后者吸收系数小于 1,这两者都将使 σ 值减小.

2) 经由瓷质基座流失的热量是无法计算的,忽略这项损失将会导致 σ 与真实值之间有所偏差.

3)忽略导线电阻会使 σ 的测量值变大.

4)认为光滑圆筒和熏黑圆筒具有相同的非辐射能量损失这种说法只是一个近似.例如,当烟和铝之间热传导的不同被忽略后,会使 σ 值减小.经由瓷质基座所流失的能量是无法控制的,这也会使非辐射能量损失不等,从而影响实验结果.

电磁学实验

电学量的测量方法是物理实验中较为普遍的方法. 不仅电学量测量要用这些方法, 而且在力学、热学、光学等物理量测量中也常常通过各种传感器转化为电学量测量, 所以电学实验在整个物理实验中占有重要地位. 在学习电学实验时, 应掌握基本电学实验的方法, 熟悉基本电学仪器使用规则, 并能做到自己设计电学线路, 测量一些电磁学基本物理量或验证电磁学基本定律.

§ 20.1 电磁学实验基本操作要点

电磁学实验中应掌握基本电学电路的设计与布局, 正确接线与操作, 在电磁学实验中要牢牢掌握以下几点:

(1) 仪器布局合理. 各种仪器应放置整齐, 同一支路的仪器应尽量放置在一起, 需要读数的仪器应尽可能放在靠近实验者附近.

(2) 正确接线. 以下几方面应特别引起注意.

a. 直流电源与负载相接时, 其正负极不能接错.

b. 直流测量仪表, 如直流电压表, 直流电流表、万用表中的直流档、电位差计等都有正负输入端, 接入电路时要根据电路待接入两端电位高低, 正确接入仪表.

c. 交流电源如低频信号发生器以及交流测量仪器如示波器、晶体管电压表、数字电压表等, 通常有一个输出端或输入端是接地的. 因此在设计和连接实验线路时, 须注意把测量仪器的接地端和交流电源的接地端连接在一起. 否则, 将造成电源短路或线路中部分元件短路.

(3) 合理操作.

接通电源前应先检查一下, 电表的量程放置是否正确, 一般应将电表量程放置最大档, 而限流电阻应放到尽可能大的位置. 接通电源后, 须根据仪器指示值一步步调节电表量程或限流电阻的大小. 关闭电源前, 应先将电源输出慢慢调节至零, 再切断电源.

电磁学实验用到的基本仪器有: 干电池、直流稳压电源、直流稳流电源; 直流电压表、直流电流表、万用电表; 低频信号发生器; 交流电压表、交流电流表、示波器、晶体管电压表, 以及电阻箱、标准电感、标准电容、滑线电阻等.

§ 20.2 基本电学实验

1. 用伏安法测量电阻

用电压表测量某一电路中待测电阻两端的电压, 用电流表测量通过该待测电阻电流, 并用测得的电压值除以电流值求得该电阻的方法称谓伏安法测电阻. 伏安法测电阻是测量电阻阻值的最常用方法, 目前科学实验常用数字电压表测量电压, 因为数字电压表阻抗较高, 通常三位半数字电压表内阻大于 $10^7 \Omega$, 因此, 用数字电压表伏安法测量一个中值电阻时接线较容易. 但采用伏安法测量电阻若使用的是指针式电压表, 就须特别注意该指针式电表的内阻大小. 因为指针式电表须通过电流其指针才会偏转, 即电压表的接入将出现分流作用, 而电流表也存在一定的内阻, 所以, 用指针式电压表和指针式电流表分别测量电压和电流时, 测得的电压值(或电流值)存在一定的误差. 对于待测电阻阻值较大情况(如大

于 $1 \times 10^4 \Omega$), 而电流表内阻假定只有 $10^2 \Omega$ 大小, 这时电流表和电压表拟采用电流表内接法测电阻. 如图 20.2-1(a) 所示. 但是如果待测电阻阻值较小 (如 $1 \times 10^1 - 1 \times 10^2 \Omega$), 而指针式电压表内阻在 $1 \times 10^4 \Omega$ 以上, 则可采用电流表外接线路测量, 如图 20.2-1(b) 所示. 这样测量结果误差较小. 但是, 对一般中等阻值的电阻, 用伏安法测量电阻时, 可先测出电流表内阻, 然后采用图 20.2-1(a) 线路, 那么待测电阻 R_x 的值应等于所测量的电压值与电流值的比值减去电流表的内阻值. 当然, 现在数字电压表已经广泛用于物理实验, 由于其内阻一般大于 $10M\Omega$, 用此数字电压表测量时采用图 20.2-1(b) 较合适.

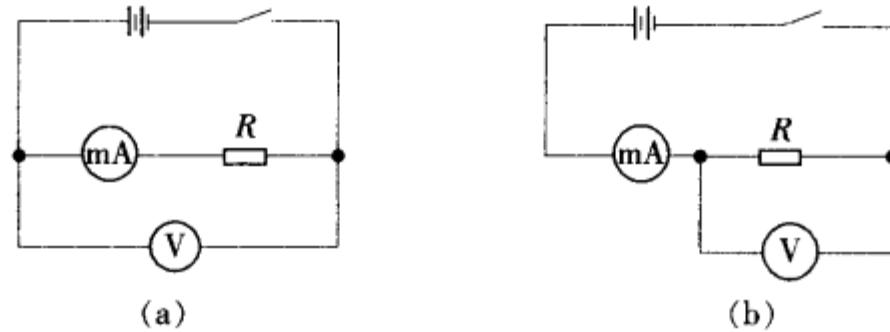


图 20.2-1

例 20.2-1 硅半导体二极管伏安特性曲线的测量

要求:

- (1) 测量二极管的伏安特性曲线, 并作图.
- (2) 求硅二极管的直流电阻和交流电阻.

可供仪器和材料:

直流稳压电源、电阻箱、电压表 $0 \sim 15V$ 一只、电压表 $0 \sim 1V$ 一只、电流表 $0 \sim 50\mu A$ 一只、电流表 $0 \sim 5mA$ 一只、待测硅二极管一只、开关一只、导线若干等.

实验:

(1) 正向特性. 首先根据二极管的标记确定其正反向. 然后按图 20.2-2 把二极管按正向偏置接入电路. 逐步增大加在二极管上的电压, 记录各次电压值和电流值. 在测量过程中应注意阈值电压数值, 并且在弯曲得厉害处多测些数据. 然后, 用作图纸作图.

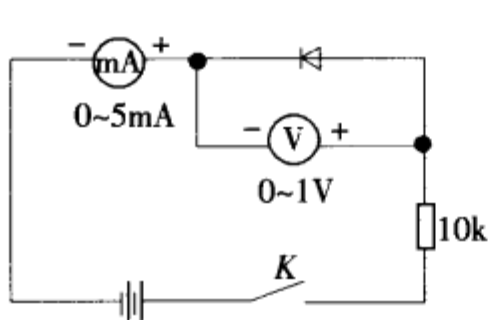


图 20.2-2

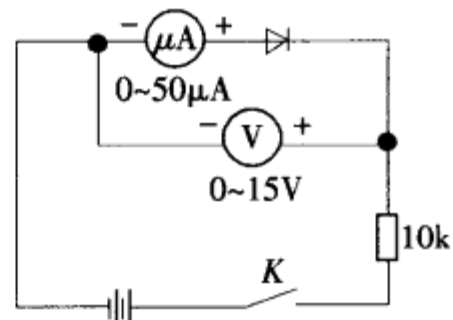


图 20.2-3

(2) 反向特性. 把二极管按图 20.2-3 接线, 采用 $0 \sim 50\mu A$ 电流表, 自 $0V$ 开始一直到略小于最高反向工作电压 (查半导体手册可知), 测五点数据. 然后用作图纸作图.

(3) 求硅二极管直流电阻和交流电阻

二极管所加直流电压 U 与流过的电流 I 之比称直流电阻 $R_{直}$.

$$R_{直} = \frac{\text{二极管两端所加电压 } U}{\text{电流 } I}$$

同 1 个二极管不同工作点直流电阻 $R_{直}$ 往往不相同.

由二极管特性曲线上还可以求得交流电阻 $R_{交}$.

$$R_{交} = \frac{\text{工作点附近电压变化 } \Delta U}{\text{相应电流变化 } \Delta I}$$

所以,在二极管特性曲线上求某点 B 直流电阻为 $\frac{U_B}{I_B}$ 值,而工作点 B 的交流电阻是该点作特性曲线($I-U$ 曲线)的切线,由切线的斜率 $\tan\alpha$,可求得交流电阻为

$$R_{交} = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\Delta U}{\Delta I}$$

2. 用补偿法测电压

补偿法测电压基本原理如图 20.2-4 所示.当两个直流电源同极性端相连接,且其电动势大小恰好相等时,回路中无电流通过,检流计 G 的指示数为 0,这时电路达到平衡,也称此电路为补偿电路.用补偿电路可由已知电压来测定未知电压.用补偿法测量未知电压或电动势的优点是测量电压时,不必从待测电路分出电流,从而避免了测量电压时,因电流流经电压表而引进的系统误差.

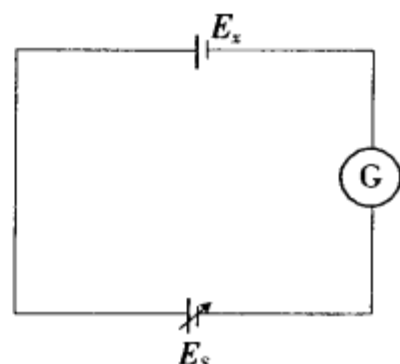


图 20.2-4

例 20.2-2 用补偿法测电压.

要求:

- (1)画出测量线路图.
- (2)当某电阻 R_x 通过电流时,用补偿法测量该电阻两端电压,用电流表测电流,求出待测电阻阻值.

可供仪器与材料:

干电池、电压表、电流表、检流计、滑线电阻、电阻箱、开关、导线等.

实验:

由于电压表和电流表均为指针式电表,一般可用补偿法测量电压,用伏安法测电阻,其测量线路如 20.2-5 所示.图中虚线框内电路为电压测量装置.当 $B、C$ 两点电压与 R_x 两端电压相等且相抵消时,检流计 G 通过的电流为零.这时,电压表 V 指示的电压 U 就是 R_x 两端电压,检流计 G 上的电流为零,说明虚框内装置测量电压时,没有取用待测回路中电流.所以,电阻 $R_x = U/I$.这里 I 为通过电阻 R_x 的电流,即电流表 A 的读数值.因此,用补偿法测量电压,可以消除一般电压表因内阻不高而带来的测量误差.

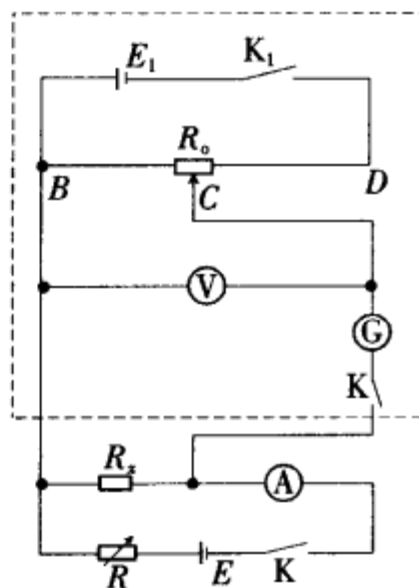


图 20.2-5

例 20.2-3 测量通过一只 2CW 型硅稳压二极管的电流与管两端电压的关系,给出此曲线图.

要求:

- (1)画出最佳测量线路图.
- (2)测量通过该二极管正反向电流值及对应的电压值(电流测量范围不超过 $\pm 10\text{mA}$).
- (3)在作图纸上描绘 $I-U$ 曲线.
- (4)分段说明该特性曲线的特点.

可供器材:多量程电压表、多量程电流表、检流计、直流稳压电源、电阻箱三台、滑线变阻器、待测二极管、开关、作图纸、导线.

实验:

用补偿法测量 2CW 型二极管正向和反向电压,测量不确定度比伏安法小.具体测量线路如图 20.2-6 所示.注意电压表不直接与二极管相接,当 K_1 和 K_2 接通时,调节 R_3 ,使检流计 G 的电流为零时,这时电压表指示电压值就是二极管两端的电压,由于这种方法的优点是不取用通过二极管的电流使电压表偏转,因此测量准确度高.

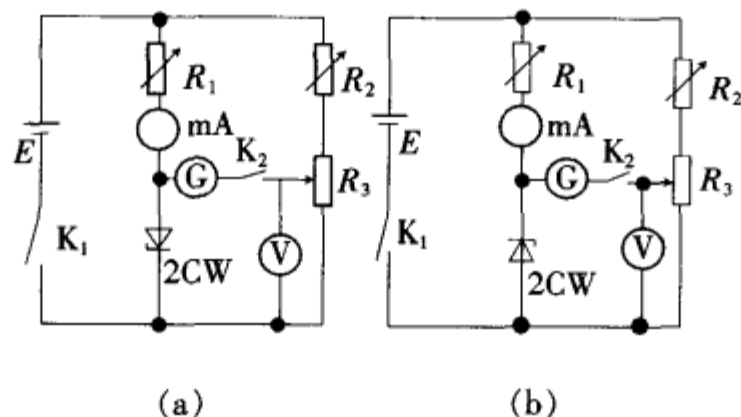


图 20.2-6

实验数据如表 1 和表 2

表 1 待测二极管正向特性 $I-U$ 数据

I/mA	0.050	0.100	0.200	0.500	1.00	2.00	3.00	4.00	7.00	10.00
U/V	0.545	0.575	0.600	0.625	0.650	0.675	0.680	0.690	0.700	0.710

表 2 待测二极管反向特性 $I-U$ 数据

I/mA	0.100	0.300	0.500	1.00	2.00	3.00	4.00	6.00	8.00	10.00
U/V	1.65	2.08	2.30	2.55	2.90	3.05	3.20	3.45	3.55	3.70

上述 $I-U$ 曲线图略. 从数据表中可知, 当二极管正向通以电流, 其两端电压约小于 0.7V 时, 电流随电压缓慢增加, 一旦电压约大于 0.7V 时, 电流聚增. 当二极管反向通以电流, 其两端电压小于 3.2V 时, 电流随电压缓慢增加, 一旦电压大于 3.2V 时, 电流骤增.

3. 电表改装

在实际工作中, 有时须把一只电流表通过并联一只电阻扩大电流表的量程, 如将一只 $0\sim 50\mu\text{A}$ 的电表, 改装为一个 $0\sim 100\text{mA}$ 的电流表; 或者将一只电流表通过串联一只电阻改装成一个电压表. 以下介绍改装的原理和方法.

(1) 电流表扩大量程

一个电流表的量程为 I_g , 它的内阻为 R_g . 若需要将此电表量程扩大为 $I (I > I_g)$, 那需要在电流表的输入端并联一个分流电阻 R_s . 根据欧姆定律

$$I = I_g \frac{R_g + R_s}{R_s} = NI_g$$

此式说明, 量程为 I_g 和内阻为 R_g 的电流表并联上分流电阻 R_s 后, 电流表的量程扩大了 $N = \frac{R_g + R_s}{R_s}$ 倍. 反之, 如果已知扩大后的量程 I , 可以算出所需分流电阻 R_s 的值, 即

$$R_s = \frac{I_g \cdot R_g}{I - I_g} = \frac{R_g}{N - 1} \quad (20.2-1)$$

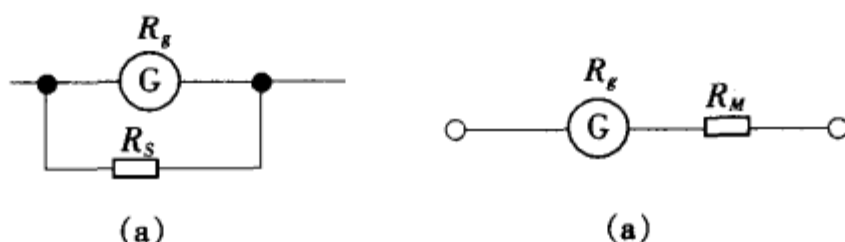


图 20.2-7

由此可见,如果已知电流表的量程 I_g 和内阻 R_g ,要将此表改装为量程为 I 的电流表,则可先计算扩程倍数 $N = \frac{I}{I_g}$,然后由(20.2-1)式计算分流电阻值.

(2)将电流表改装为电压表

在电流表的输入端串联一个附加电阻 R_M ,就构成一只电压表,其量程为 U ,则

$$U = U_g \cdot \frac{R_g + R_M}{R_g}$$

由上式可得

$$R_M = \frac{R_g}{U_g}(U - R_g) = \frac{R_g}{U_g} \cdot U - R_g = rU - R_g \quad (20.2-2)$$

(20.2-2)式中, $r = \frac{R_g}{U_g}$, R_g 为电流表内阻, U_g 为该电流表通过满量程电流时的端电压, r 值的单位为 Ω/V .

r 值的物理意义是:该电压表测量每伏电压需要多大的内阻值.在万用电表表面上一一般都标明电压档的 r 值,如 MF30 型万用电表的直流电压档标明 $20000\Omega/V$,这就说明该直流电压档 1V 档量程的内阻为 20000Ω ,而 5V 档量程使用时其内阻为 $5 \times 20000\Omega$.

4. 用外推法求钨丝灯泡在室温时的电阻值

本实验采用的电压表要求内阻要高些,例如万用电表电压档或数字直流电压表等均可.测量线路如图 20.2-8 所示.由于电流表内阻与灯泡电阻相比不可忽略,因此电流表必须外接.

在本实验中,要测量的钨丝灯泡电阻是在室温条件下.在用伏安法测灯丝电阻时,灯丝必须通过一定值的电流,这必定使灯丝发热,从而测得的电阻值偏大.为了测量室温条件下的电阻值,需要借助外推法,即测量在不同电流 I 时,灯泡的电阻 R 的值,然后作电阻 R 与电流 I 关系图,将电流 I 外推到零时,这条曲线与 y 轴(R 轴)的交点便是在室温条件下钨丝的电阻 R_0 .

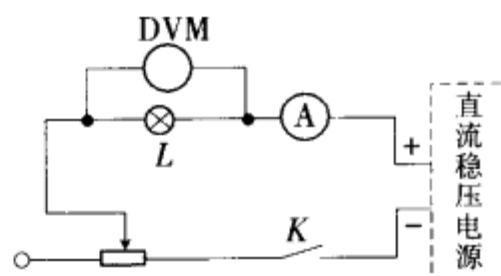


图 20.2-8

5. 用伏安法测量电感器的阻抗和电感量

电感器常等效为一个理想的电感 L 和一个损耗电阻 R_L 的串联.如图 20.2-9 所示.电感器有非铁磁材料为中介质电感器和铁磁材料为介质电感器之分.对非铁磁材料为介质电感器,在电感器使用交流电的频率很小时(如 50Hz),该电感器的损耗电阻 R_L 和导线的直流电阻相当接近.但是,如果电感器使用电流频率高时,如几千赫兹至几万赫兹,那么由于趋肤效应作用,此时电感器电阻值 R_L 将变大,通过的交流电流频率越大,那么电感器的损耗电阻越大, R_L 值是与频率有关的量.

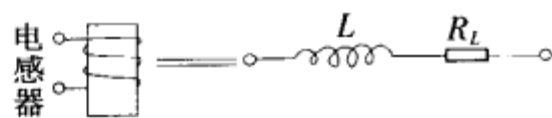


图 20.2-9

对于铁磁材料为介质的电感器其电感器不是常数,而是与通过该电感器电流大小有关的量,因此,测量该电感量需注明通过该电感线圈电流的数值及频率数值.因为磁介质的磁导率是与通过线圈的电流大小有关.

例 20.2-4 试设计一个电路,测出某电感器的直流电阻和通以正弦电流时的交流阻抗与电感量.

要求:

- (1)画出测量线路图,并测出电感器直流电阻 R_L .
- (2)测量电感器通以频率 $f = 50.0\text{Hz}$ 正弦电流时的交流阻抗 Z .
- (3)计算该电感器的电感量 L .

提示:当电感器通以正弦电流时,其两端电压 U 与理想电感器 L 上的电压 U_L 、损耗电阻上的电压 U_{R_L} 满足关系式 $U^2 = U_L^2 + U_{R_L}^2$,即矢量合成关系.

(4)求该电感器通过正弦电流时,电感器两端电压 U 与通过的电流 I 之间的相位差.

可供仪器与材料:

低频信号发生器、干电池、电阻箱、MF30 型万用表二只(内无电池电源)、待测电感器(以陶瓷为介质)、导线、开关.

实验:

测量直流电阻 R_L 线路如图 20.2-10 所示,实验时万用电表应拨至直流电压档.测量电感器的交流阻抗 Z 采用图 20.2-11,所示线路,但测量前必须把万用电表拨至交流电压档.

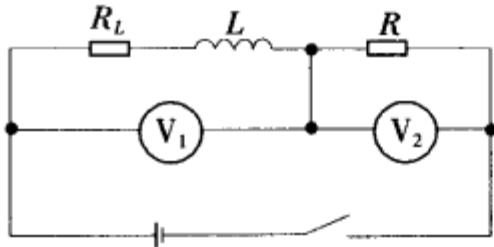


图 20.2-10

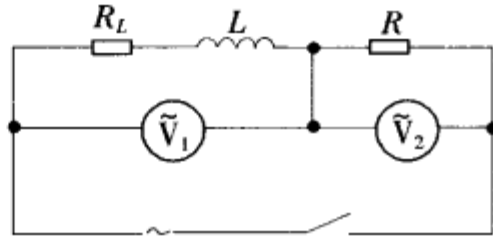


图 20.2-11

(1)测量直流电阻 R_L .

R 取 35.00Ω ,测得 $U_1 = 0.705\text{V}$, $U_2 = 0.680\text{V}$.

$$\therefore R_L = \frac{U_1}{I} = \frac{U_1}{\frac{U_2}{R}} = R \cdot \frac{U_1}{U_2} = 35.00 \times \frac{0.705}{0.680} = 36.3(\Omega)$$

(2)测量电感器的交流阻抗 Z .

正弦交流电频率 $f = 50.00\text{Hz}$. $R = 50.00\Omega$, 测得 $U_1 = 9.00\text{V}$, $U_2 = 9.35\text{V}$.

$$Z = \frac{U_1}{I} = \frac{U_1}{\frac{U_2}{R}} = 50.00 \times \frac{9.00}{9.35} = 48.1\Omega.$$

(3)因为 $U^2 = U_{R_L}^2 + U_L^2$, 则 $Z^2 = R_L^2 + (\omega L)^2$

$$\text{所以 } L = \frac{\sqrt{Z^2 - R_L^2}}{\omega} = \frac{\sqrt{48.1^2 - 36.3^2}}{2\pi \cdot 50.00} = 0.100(\text{H})$$

(4)由图 20.2-12 可以得出当电感器通过正弦交流电时,电感器两端的电压与通过它的电流之间的相位角 α 为

$$\cos\alpha = \frac{R_L}{Z} = \frac{36.3}{48.1} = 0.7547$$

$$\therefore \alpha = 41.0^\circ$$

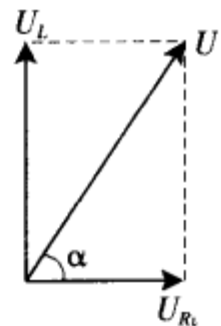


图 20.2-12

6. 利用串联谐振测量电感器的电感 L 和损耗电阻 R_L .

把电阻 R 、电容 C 和电感 L 组成的串联电路接至正弦信号发生器上.当电源输出的正弦电压角频率 ω 满足关系式 $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ 时,串联电路阻抗最小,电路中的电流最大,这一情形称为串联谐振.如果电路中电容值是已知的,那么可以利用串联谐振求出谐振频率 f_0 ,从而可以求得未知电感器的电感量.

例 20.2-5 利用串联谐振现象测定电感器的电感 L 和损耗电阻 R_L .

要求:

- (1)画出测量线路图.
- (2)测量和记录串联电路的谐振频率.
- (3)根据公式 $L = 1/\omega^2 C$ 计算电感器的电感量.
- (4)测量和计算电感器的损耗电阻 R_L (指使用频率为谐振频率).

给定仪器和材料:

正弦信号发生器(内阻约 50Ω)、电阻箱(取 20Ω)、待测电感器(约 $50\text{mH} \sim 200\text{mH}$)、标准电容 C 取

0. $1000\mu\text{F}$ 、晶体管电压表 2 台、导线若干。

实验：

按图 20.2-13(a)或图 20.2-13(b)接线，测量电路的谐振频率 f_0 。

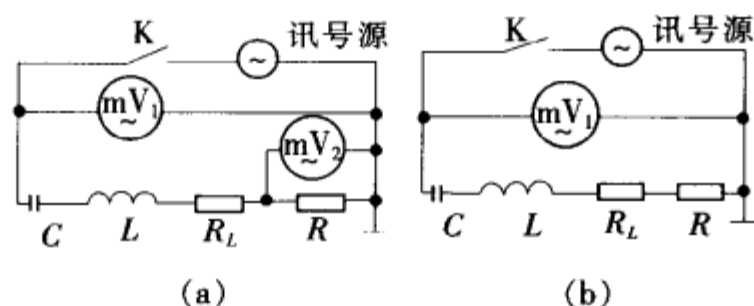


图 20.2-13

方法一：接线如图 20.2-13(a)所示。利用串联谐振时，电流最大的特点测量谐振频率 f_0 。调节正弦信号发生器频率 f ，观测电阻 R 两端电压变化，直至图 20.2-13(a)中晶体管电压表(图中 mV_2 表)读数 U_R 最大，此时信号源所示频率即为谐振频率 f_0 。在调节频率 f 时，由于外电路阻抗在变化，因而信号源输出电压会有所变化，这时需再调节信号源的输出电压，使图 20.2-13(a)中 mV_1 表的值保持一定值。

方法二：利用谐振时电路阻抗最小的特点测量谐振频率 f_0 。由于正弦信号发生器存在一定内阻，如 50Ω 。当调节输出信号频率时，外电路阻抗发生变化，因而输出电压也发生变化，当图 20.2-13(b)中 mV_1 表读数最小时，此时所示频率也即谐振频率 f_0 。

实验数据例：

当电容 C 取 $0.1000\mu\text{F}$ ， R 取 20.00Ω 时，调节串联谐振电路中电源频率，测得谐振频率 $f_0 = 129 \times 10\text{Hz}$ 。计算电感量

$$L = \frac{1}{\omega^2 C} = \frac{1}{(2\pi f)^2 C} \\ = [1 / (2 \times 3.142 \times 129 \times 10)^2] / 0.1000 \times 10^{-6} = 0.152(\text{H})$$

测量电感的损耗电阻 R_L ，当达到串联谐振时， $L\omega = \frac{1}{\omega C}$ 。此图 20.2-13(a)电路中只显示电阻性，因而有

$$\frac{U}{R + R_L} = \frac{U_R}{R}$$

式中， U 为 mV_1 表测得电压值， U_R 为 mV_2 表测得电压值。

实验测得 $U = 1.500\text{V}$ ， $U_R = 0.550\text{V}$ ， $R = 20.00\Omega$

$$\therefore R_L = (U \cdot R / U_R) - R \\ = (1.500 \times 20.00 / 0.550) - 20.00 = 34.6(\Omega) \quad (f = 129 \times 10\text{Hz 时})$$

7. 用放电法测量未知电容值

在电阻 R 、电容 C 和直流电源串联组成的电路中，当接通或断开电路的瞬间，由于各元件的特性导致电路有一个稳定的瞬态过程。现用方波替代时通、时断的直流电源，并用示波器来显示电容两端的充电和放电的瞬态过程，其波形如图 20.2-14 所示。在充放电过程中，电容上的电压随时间的变化关系为

$$U_c = U_0(1 - e^{-t/RC}) \quad (\text{充电过程})$$

$$U_c = U_0 e^{-t/RC} \quad (\text{放电过程})$$

式中 RC 称为电路的时间常数。而 U_c 由 U_0 减少到 $U_0/2$ 时，相应的时间称为半衰期 $T_{1/2}$ 。

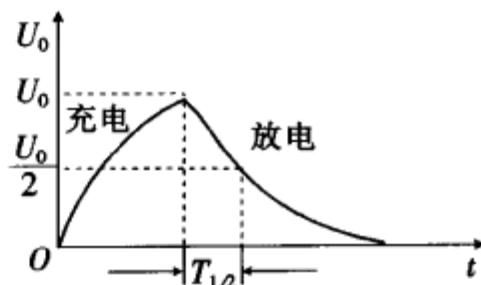


图 20.2-14

$$T_{1/2} = RC \ln 2 = 0.693RC \quad (20.2-3)$$

如果测出半衰期 $T_{1/2}$ 从(20.2-3)式就可以求出时间常数 RC 的值. 这里当 R 已知时, 便可由时间常数求出电容 C 的值.

用示波器采用放电法测电容应注意以下二点:

(1) 测量半衰期时, 放电曲线必须为充分放电. 因此, 若输入至 R 和 C 串联电路的方波周期为 T , 那么必须满足 $\frac{T}{2} \geq 5RC$, 这时放电曲线放电是充分的.

(2) 应选择示波器的时基档, 使放电曲线在示波器屏幕上显示半衰期 $T_{1/2}$ 尽可能数值大些, 例如至少大于 1cm.

例 20.2-6 用放电法测量未知电容的容量.

要求:

- (1) 画出测量线路图.
- (2) 测量 RC 电路的时间常数, 并测量方波发生器的内阻.
- (3) 计算待测电容的容量.

可供仪器和材料:

方波发生器、示波器、已知电阻 $R = 2.000 \times 10^4 \Omega$ 、导线和待测电容(约 $0.005 \mu\text{F} \sim 0.05 \mu\text{F}$ 范围)

实验:

(1) 实验线路图如图 20.2-15 所示.

(2) 测量电容两端最大电压 U_0 降至一半电压 $U_0/2$ 时, 所需时间 T' , 见图 20.2-16.

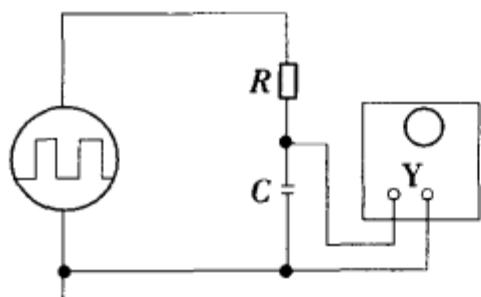


图 20.2-15

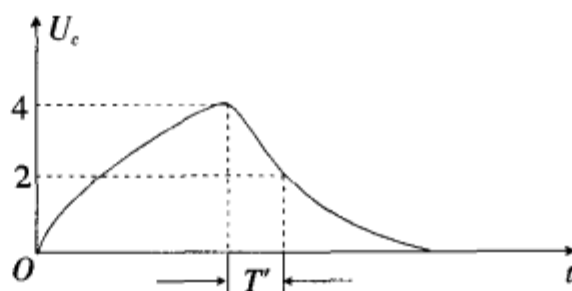


图 20.2-16

x 轴扫描档选择为 $30 \mu\text{s}/\text{cm}$, 在 x 轴上 T' 相应的长度为 4.67cm. 由于 x 轴扫描档仅是一个粗略参考值, 实际测量时, 须对此扫描档进行校准. 校准的办法是: 将正弦信号输入示波器, 保持 x 轴扫描档 $30 \mu\text{s}/\text{cm}$, 且扫描微调旋钮与测量 T' 值时保持一致. 调节信号源频率, 使正弦波显示 8 个周期, 在 x 轴长度为 8.00cm, 这时可计算扫描档的实际值. 例当信号源频率 $f = 33.1 \text{KHz}$, 屏上显示正弦波 $n = 8$ 个周期正好为 8.00cm, 那么扫描档实际值为

$$\frac{n}{f \cdot l} = \frac{8}{33.1 \times 10^3 \times 8.00} = 30.2 \times 10^{-6} \text{s}/\text{cm} = 30.2 \mu\text{s}/\text{cm}$$

$$\therefore T' = 4.67 \text{cm} \times 30.2 \mu\text{s}/\text{cm} = 141 \mu\text{s}$$

方波的内阻用半偏法测量. 用示波器直接与方波发生器输出相接, 这时读得方波信号幅度为 8.00cm, 注意测方波内阻时应保持原来测半衰期时电压输出幅度. 然后在方波发生器输出端接一电阻箱, 开始时阻值大, 然后逐渐减小电阻箱阻值, 直至示波屏上显示电压值降为一半, 此时电阻箱示值即为方波发生器内阻 $r = 50.0 \Omega$.

(3) 计算待测电容 C 的容量

$$C = \frac{T'}{\ln 2 \cdot (R + r)} = \frac{141 \times 10^{-6}}{0.693 \times (20.0 + 0.050) \times 10^3} = 0.0101 (\mu\text{F})$$

做好本实验须对示波器 x 轴扫描档的作用及扫描档分度值的含义有一个深刻的理解, 对如何测量一个脉冲波形放电时间, 本实验提供了一个典型例子.

8. 用直流电桥测量电阻

用直流电桥法测量电阻,是一种比较法测量电阻.这种方法测电阻在科学实验中常会用到.直流电桥不仅有平衡电桥,而且在传感器的非电量电测中,常用到非平衡直流电桥,所以掌握直流电桥测电阻的实验方法,在物理实验中较为重要.

基本电桥电路如图 20.2-17 所示. R_A 、 R_B 、 R_X 、 R_S 为四个电阻,联成四边形,每个边的电阻称为电桥的一个臂.对角 1 和 3 与直流电源相连,而在对角 2 和 4 之间连接一电流计(检流计),用于检测其间有无电流.当 2、4 两点电位相等时,检流计中无电流通过,称之为电桥平衡.这时,接点 1、2 之间的电位差应等于接点 1、4 之间的电位差,即 $i_{AB}R_A = i_{XS}R_X$;同理, $i_{AD}R_B = i_{XS}R_S$,于是有

$$\frac{R_A}{R_B} = \frac{R_X}{R_S} \quad (20.2-4)$$

这就是电桥的平衡方程.若已知 R_A 、 R_B 、 R_S ,即可由(20.2-4)式算出待测电阻 R_X .

在电桥调节时应掌握“先练习与观测再测量”和“先粗测再细测”的原则.若待测电阻为 $5\text{k}\Omega$ 左右,实验者可以先将电桥的比率置于 1:1,然后调节比较臂标准电阻,若标准电阻放置 $4.8\text{k}\Omega$,观察检流计偏转;再将标准电阻放 $5.2\text{k}\Omega$,看检流计偏转.若两次偏转方向相反,则说明待测电阻落在 $4.8\text{k}\Omega$ 至 $5.2\text{k}\Omega$ 范围内,可在此范围内选标准电阻,仔细调节,逐次逼近,最后达到电桥的平衡.反之,若两次偏转方向相同,则说明待测电阻不在 $4.8\text{k}\Omega$ 至 $5.2\text{k}\Omega$ 范围.这时要另选比较臂阻值,找到使检流计偏转相反的两个阻值,进一步缩小调节范围,由粗到细,最终获得平衡.

由粗到细,也应贯彻在加于电桥线路的电压和检流计的保护电阻上.一般情况,在开始时,应将电源回路的串联变阻器的阻值置于最大位置;同时,检流计支路接入并联保护电阻(开始保护电阻的阻值小些),粗略地调到平衡,然后将并联保护电阻阻值调节至最大值,以增大电桥灵敏度,再细调至平衡为止.这就是电桥先粗调后细调的原则.

使用电桥检流计支路开关时,要一按一放(按钮开关),即按下去马上松开手,让其断开,这样接通时间短,可防过大电流长时间通过检流计而损坏.

改变电桥电源电压,如在电桥桥臂允许的功率范围内增大电源电压;增大检流计灵敏度;桥臂更趋近于 1:1.这三项措施都能提高电桥灵敏度.因此,电桥真正达到平衡的要求是:由电桥调节灵敏度引起的不确定度应为小于该电桥总的不确定度的 $\frac{1}{10}$.

例 20.2-7 待测电阻为 1 个金属膜电阻,桥臂 R_A 、 R_B 、 R_S 均采用规格为 0.1 级的 $0\sim 9999.9\Omega$ 的电阻箱,电源为干电池,另提供检流计 1 只,导线若干.测量不同桥臂条件下及不同电源电压时,待测电阻 R_X 的值及其测量的不确定度 U_{R_X} .

可供仪器和材料.

$Z \times 21A$ 型电阻箱 3 只,干电池二节; $5\mu\text{A}/\text{分度}$ 的检流计(指针式)1 只、导线、单刀双向开关、待测电阻 1 个.

要求:

1. 改变不同的桥臂 R_A/R_B 值,测量电桥灵敏度 M 及待测电阻 R_X 的值.并求出由于电桥灵敏度不同而形成的不同的测量不确定度 U_{B1} 值.

2. 改变电源电压,检流计灵敏度不变仍为 $5\mu\text{A}/\text{分度}$,测量待测电阻 R_X 及计算测量不确定度 U_{B1} .

3. 选择不同灵敏度测量,电源电压为 1.5V ,进行上述测量.最后互易桥臂进行测量,以消除系统误差.

实验:

实验结果如表 1、表 2、表 3、表 4 所示.

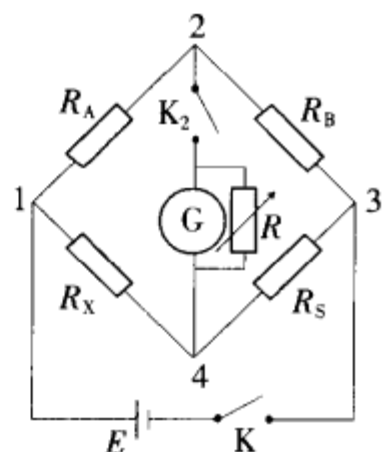


图 20.2-17

表 1 (改变 R_A/R_B ,其他不变) 电桥灵敏度 $M = \delta\theta/(\delta R_S/R_S)$

R_A/Ω	R_B/Ω	R_S/Ω	$\frac{\delta R_S}{\delta\theta}/(\Omega/\text{分度})$	$M/\text{分度}$	相对 $\frac{U_{B1}}{R_X}/(\%)$	R_X/Ω	U_{B1}/Ω
1000	1000	355.0	12	30	0.34	355.0	1.2
100.0	100.0	354.9	11	32	0.34	354.9	1.1
100.0	1000	3530	340	10.4	1	353.0	3.4
10.00	1000	3500×10	$2000/0.1$	1.75	6	3.5×10^2	0.2×10^2
条件	电源电压 1.5V;检流计灵敏度 $5\mu\text{A}/\text{分度}$						

表 2 (改变电源电压,其他不变)

电压	R_A/Ω	R_B/Ω	R_S/Ω	$\frac{\delta R_S}{\delta\theta}/(\Omega/\text{分度})$	$M/\text{分度}$	$\frac{U_{B1}}{R_X}/\%$	R_X/Ω	U_{B1}/Ω
1.5	100.0	100.0	354.9	11	32	0.34	354.9	1.1
3.0	100.0	100.0	354.9	6	59	0.17	354.9	0.6
条件	$R_A/R_B = 1.000$;检流计灵敏度为 $5\mu\text{A}/\text{分度}$							

表 3 (改变检流计灵敏度)

灵敏度	R_A/Ω	R_B/Ω	R_S/Ω	$\frac{\delta R_S}{\delta\theta}/(\Omega/\text{分度})$	$M/\text{分度}$	$\frac{\sigma_{RX}}{R_X}/\%$	$(R_X \pm U_{B1})/\Omega$
$5\mu\text{A}/\text{分度}$	10.00	1000	35000	$2000/0.1$	1.75	6	$(3.5 \pm 0.2) \times 10^2$
$3 \times 10^{-7}\text{A}/\text{分度}$	10.00	1000	35290	100	353	0.03	352.9 ± 0.1
条件	$R_A/R_B = 0.01000$;电源电压 1.5V						

表 4 (互易桥臂测量)

	R_A/Ω	R_B/Ω	R_S/Ω	R_A/Ω	R_B/Ω	R_S/Ω
互易前	1000	1000	354.8	100.0	100.0	356.0
互易后	1000	1000	354.6	100.0	100.0	353.4
$R_S = \frac{R_{S1} + R_{S2}}{2}$			354.7			354.7
条件	电源电压 1.5V;检流计灵敏度 $3 \times 10^{-7}\text{A}/\text{分度}$					

上述测量不确定度 U_{B1} 均由电桥灵敏度引入,所以 $\frac{U_{B1}(R_X)}{R_X} = \frac{U_{B1}(R_S)}{R_S}$.

由仪器的元件等级引起的不确定度,由于产品说明书没有说明其符合何种分布,按不确定度《指南》规定,一般作均匀分布处理,即“最大误差”除以 $\sqrt{3}$ 处理.即 $\frac{U_{B2}(R_A)}{R_A} = \frac{U_{B2}(R_B)}{R_B} = \frac{U_{B2}(R_S)}{R_S} = \frac{1}{\sqrt{3}}(0.1\%)$

$$\begin{aligned} \frac{U_{B2}(R_X)}{R_X} &= \sqrt{\left[\frac{U_{B2}(R_A)}{R_A}\right]^2 + \left[\frac{U_{B2}(R_B)}{R_B}\right]^2 + \left[\frac{U_{B2}(R_S)}{R_S}\right]^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3 \cdot (0.1\%)^2} = 0.1\% \end{aligned}$$

所以 $U_{B2} = R_X \cdot 0.1\% = 354.7 \times 0.1\% = 0.35(\Omega)$

总不确定度 $U_B = \sqrt{U_{B1}^2 + U_{B2}^2} = \sqrt{(0.1)^2 + (0.35)^2} \approx 0.4\Omega$

待测电阻阻值

$$R_x = 354.7 \pm 0.4 \Omega$$

9. 黑盒子内元件及连接线路的检测

所谓电磁学黑盒子实验是指在一个全封闭不透明的盒子内,装有一些基本元件,如干电池、电阻、电容、二极管、电感等,它们按某种方式连接或组合,其中每个元件端点分别连接于面盖上的接线柱上.但是盒外除看到接线柱外,不能观察到内部的元件和连接线,要求实验者通过实验及现象分析,测出元件性质、量值及相应连接线路,这种待测量装置称作黑盒子.黑盒子实验可训练学生熟悉万用表的使用方法,熟悉各种元件的性质及检测方法,有利于提高实验者分析和检查电学线路的能力.

例 20.2-8 一个黑盒子盖上有四个接线柱,编号表明在盒盖上.盒内有三个元件,按一定的方式连接.两接线柱间最多只有一个元件,可能没有,也可能短路.盒内三个元件有可能是电池、电阻、电容(电容值较大)、电感或半导体二极管,试用万用电表检查并确定三个元件名称及连接图.

要求:

(1)确定黑盒子内三个元件名称,绘出它们的连接图.

(2)说明判定方法.

可供仪器和材料:

1° °2

被检黑盒子、万用电表、低频信号发生器、导线等.被检黑盒子面板上接线柱编号如图 20.2-18 所示.

实验:

4° °3

(1)判别盒内有无电池.

图 20.2-18

用万用电表中直流电压中高压档进行检查,若无偏转,再逐次用直流电压最低档进行测量,如果指针仍无偏转,说明黑盒子内无电池.

(2)检查有无二极管.

可用万用电表欧姆档分别测两接线柱间电阻,且将测试表棒正负换位置,若正反电阻相差极大,说明二极管存在.对本黑盒子各接线柱间均无此现象,说明盒内无二极管.

(3)判定盒内有几个电容和电阻等.

用万用表电阻档 $\times 100 \Omega$ 及 $\times 1k \Omega$ 档进行测试.面板上有四个接线柱其编号如图 20.2-18 所示.

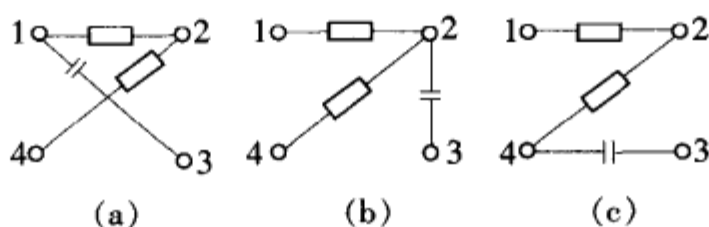


图 20.2-19

接线柱号码	1,2	1,3	1,4	2,3	2,4	3,4
充放电现象	无	有	无	有	无	有
接线柱间电阻	R_{12}	R_{13}	R_{14}	R_{23}	R_{24}	R_{34}
测示电阻值(Ω)	180	∞	200	∞	20	∞

从上表中可知,接线柱 1,2;接线柱 1,4;接线柱 2,4 之间存在电阻.且 $R_{14} = R_{12} + R_{24}$.根据上述测量结果可能有如图 20.2-19(a)、(b)、(c)三种情况.

把信号发生器输出端加于接线柱 3,4 间,测量接线柱 1,2 间有无电压,结论是在 1 与 2 端之间有电压,可以确定电容位于接线柱 1 与 3 之间.

(2)判定 1 与 2 端及 2 与 4 端间是电阻还是电感.

把低频讯号发生器、万用电表交流电流档 1 与 2 端相串联. 保持信号发生器输出电压不变, 改变其频率, 观测此串联电路中电流是否随频率变化. 实验线路如图 20.2-20 所示. 若信号发生器频率变化时, 交流电流表示值有明显变化, 说明 1 与 2 间是电感元件, 否则是电阻元件. 同理, 也可鉴别 2 与 4 端间是电阻还是电感元件.

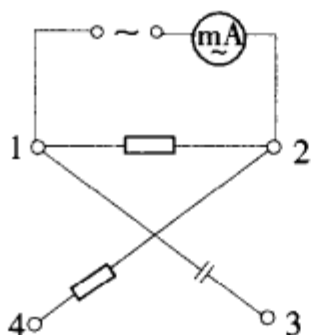


图 20.2-20

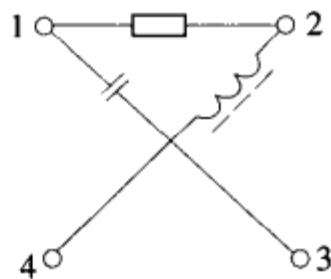


图 20.2-21

本实验最后检测结果是: 黑盒子内三个元件是, 一个电阻, 一个电感, 一个电容, 连接线路如图 20.2-21 所示.

§ 20.3 电学和磁学综合实验

电磁学综合实验是着眼于学生进行过一定时间的电磁学实验训练后, 用于检验学生掌握电磁学实验的基本方法和操作与分析能力. 设计的这个综合性的电磁学实验, 所使用的器材均是在平时实验中经常使用的. 考试和检查的内容涵盖了电容、电感、电阻和二极管等的判别和测量. 同时, 这些实验兼具区分、选拔学生的作用, 所以, 题目难易结合, 可以使用的解题方法众多. 比如测量电容的值, 可以使用 RC 电路的瞬态过程方法, 也可以使用交流电矢量合成法或者稳态过程相移法测量. 但是, 各种方法往往难易程度不同. 当要学生在有限时间内来完成实验要求, 就要求学生能够选用最简单且最准确的测量方法, 并可从中看出学生对各种方法的理解程度以及掌握深度和熟练程度.

此外, 有的电磁学综合实验将电磁学和光学实验相结合. 这些实验较多的是测量光电传感器的特性或者太阳能电池的特性, 这里既要牵涉电磁学实验的知识, 又要牵涉到光学实验的知识. 知识面广, 而且还带有一些设计性和研究性的特征.

例 20.3-1 用示波器检测电磁学黑盒子实验 I

一个黑盒子上面板有 8 个接线柱, 其中接线柱上分别接有: 音频变压器、电感、二极管、电容 4 个元件. 请用实验方法测出这四个元件各接在哪些接线柱上, 并测出有关参数. (用示波器检测黑盒子实验 I)

仪器和材料:

黑盒子 1 个(其中含音频变压器、电感、二极管和电容, 各元件的输入输出端均接到黑盒子的面板上, 各元件之间连接不构成闭合回路), 双踪示波器 1 台, 信号发生器(正弦波、方波)1 台, 电阻箱 1 个, 电路接线若干, 作图纸 1 张.

要求:

- (1) 判断变压器的输入输出端分别接在哪几个接线柱上? 测量变压器次级与初级线圈的匝数之比(假定匝数少的为初级).
- (2) 判断二极管的正负极分别接在几号接线柱上.
- (3) 判断电容器接在哪两个接线柱上, 测量其电容值.
- (4) 判断电感器接在哪两个接线柱上, 是空心电感还是磁介质电感, 并测量其电感值和损耗电阻值.

(5)画出黑盒子内各元件的整体接线图.

(6)若某个元件表征元件量值的参数值明显地随另一个物理量而变化,测量它们的关系,并在作图纸上画出其变化的曲线图.

实验:

黑盒子接线柱分二排:上排编号自左至右为 1,2,3,4;下排编号自左至右为 5,6,7,8,共 8 个接线柱.

(1)判断各接线柱之间的元件

实验电路图如图 20.3-1 所示.图中虚框内的 i 、 j 表示黑盒子面板上的接线柱.采用正弦波信号发生器作为电压输入,电阻箱随情况取适当值,双踪示波器 CH1 端测量电阻箱两端电压,CH2 端监测信号发生器输出电压,当调节发生器输出频率时保持输出电压不变.图 20.3-1 中黑盒子面板上的 j 接线柱对应信号发生器输出红端.

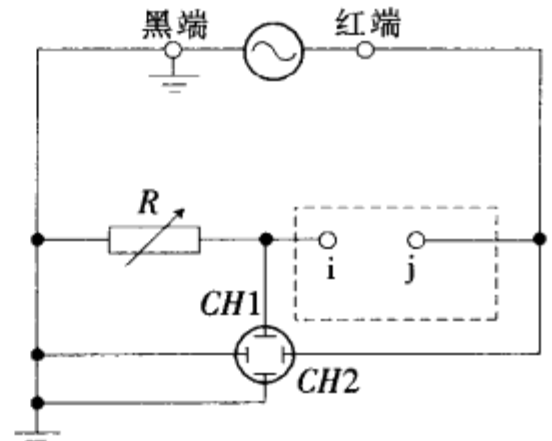


图 20.3-1

每次 i 、 j 接不同的接线柱,观测电阻箱两端的电压,即示波器 CH1 档的图形,整理得表 1(表中不予列出的对应电阻箱上电压为 0 的 i 、 j ,表示该 i 、 j 之间断开).

表 1

信号发生器 红端 j	i	信号发生器频率增大时 电阻箱上电压变化	由此判断 ij 间元件	备注
2	3		二极管	见图 20.3-2 及判断
4	8	减小	电感	
7	8	变大	电容	
1	5	减小	电感	
2	6	减小	电感	

利用图 20.3-2 所示示波器波形,当 2 接信号发生器红端时,正弦波的下半部分被削平,可见 2、3 间为一个二极管,且 2 号接线柱接二极管正极,3 号接线柱接负极.

当 1、5 端接信号发生器,2、6 端接示波器时,发现 2、6 端电压明显随 1、5 端输入电压的变化而变化,可以判定 1、5 和 2、6 构成变压器.

至此,可以画出黑盒子内各元件位置如图 20.3-3 所示.



图 20.3-2

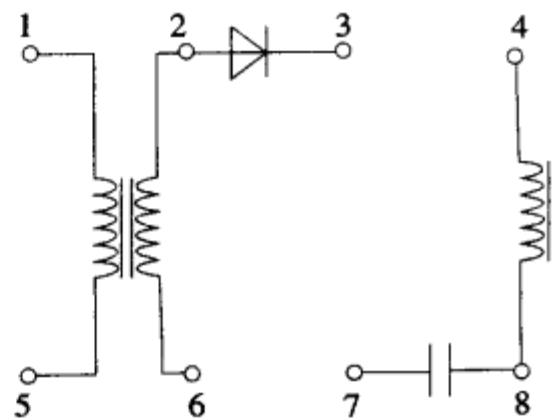


图 20.3-3

(2)变压器参数测定

信号发生器两端接 1、5,CH1 两端接 1、5,CH2 两端接 2、6,得数据如表 2 所示.

表 2

	峰—峰值/cm	电压档/V·cm ⁻¹	电压 U/V
CH1	6.00	1	6.00
CH2	6.00	2	12.00

表中, U 为峰—峰值. 测量结果显示: 1、5 为变压器初级; 2、6 为变压器次级. CH1 和 CH2 电压档微调旋钮均调至最大.

$$\text{匝数比 } n = \frac{U_{CH2}}{U_{CH1}} = 2.00$$

(3) 电容参数的测定

假定电容的损耗电阻可以忽略. 使用图 20.3-1 实验电路图, 其中 i, j 接 7、8, CH1 取 1V/cm 档; CH2 取 2V/cm 档. 取固定电阻箱某值, 调节信号发生器输出频率和输出电压, 使 CH1 和 CH2 波形都达到屏幕刻度满量程, 此时, $\frac{U_{CH1}}{U_{CH2}} = \cos 60.0^\circ = 0.500$, 即 $\frac{R}{\frac{1}{\omega C}} = \tan 30.0^\circ$, 所以 $C = \frac{1}{2\sqrt{3}\pi f R}$. 测量数据见表 3.

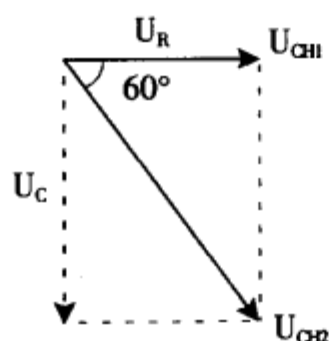


图 20.3-4

表 3

R/Ω	500.0
f/kHz	0.855
$C/\mu\text{F}$	0.215

最后, $C = 0.215\mu\text{F}$

(4) 电感参数的测定

实验电路图如图 20.3-1 所示, 其中 i, j 接 4、7 接线柱. 利用 LC 串联谐振测量电感值 $L = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 C}$, 其中 f_0 为谐振频率. 以 U_R 和 U_0 表示电阻 R 两端电压和信号发生器输出电压, 则谐振时电感损耗电阻 $R_L = (\frac{U_0}{U_R} - 1)R$. 实验数据如表 4 所示.

表 4

R/Ω	U'_R/V	U'_0/V	I/mA	f_0/kHz	L/mH	R_L/Ω
100.0	12.0	16.0	42.4	1.995	29.6	33.3

改变信号发生器的输出电压得表 5. $I_{\text{有效}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} I_{\text{峰—峰}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{U'_R}{R}$.

表 5

R/Ω	$U'_R/\text{V}(\text{峰—峰})$	$I_{\text{有效}}/\text{mA}$	f_0/kHz	L/mH
100.0	4.00	14.1	2.038	28.3

从表 4 和表 5 中可见电感 L 随电流 I 变化, 故该电感不是空心电感. 电感值 L 随电流 I 变化数据如下:

表 6

U'_R/V	12.0	10.0	8.00	6.00	4.00	2.00
$I_{\text{有效}}/mA$	42.4	35.3	28.3	21.2	14.1	7.07
f_0/kHz	1.995	1.980	1.982	2.000	2.038	2.110
L/mH	29.6	30.1	30.0	29.5	28.3	26.5

表 6 图略。

本实验题有几个重要特点:(1)用示波器通过观察元件或部分电路的波形,来分析元件性质与好坏,这在科学实验中非常有用,本题联系实际比较密切。(2)实验带有综合性,虽然测量电容和电感方法有多种,但在有限时间内,要选用准确度高,简便快捷的方法,反映了学生的实验知识的深度和动手能力强弱。

例 20.3-2 用示波器检测电磁学黑盒子 II。

给定一个“黑盒子”,其内含有 3 个电磁学元件(电阻 R 、电容 C 和电感 L),组成三角形连接方式,3 个接点分别连接黑匣子面板上 1、2、3 号接线柱。1、2 间元件为 Z_1 ,2、3 间元件为 Z_2 ,1、3 间元件为 Z_3 ,如图 20.3-5 所示,要求使用现有仪器进行判断和测量。

仪器和材料:

黑匣子 1 个,双踪示波器 1 台,低频信号发生器 1 台,电阻箱 1 只,单刀双向开关 1 个,作图纸,电容箱一只。

要求:

(1)确定黑匣子内三个元件是何元件,它们分别连接在哪两个连接柱上?画出它们连接的电路图,并且简述判断的方法。

(2)测量此三个电学元件的数值。

(3)如果电学元件的数值与某一物理量有关,须测出它们的关系。

实验:

(1)确定黑匣子内元件类别。

检测 1:用导线连接接线柱 1、2,使之短路。将电阻 R 串联到接线柱 2 上。电路简化为图 20.3-6(a) 所示电路。保持电源输出电压不变,改变电源输出频率 f ,观测 R 两端电压 U_R 的变化。

检测 2:使接线柱 2、3 间短路。把电阻 R 串接到接线柱 3 上,电路简化为图 20.3-6(b) 所示。保持电源输出电压不变,改变信号源输出频率 f ,观测 R 两端电压 U_R 变化。

检测 3:使接线柱 1、3 间短路,将电阻 R 串接到接线柱 3 上。电路简化为图 20.3-6(c) 所示。保持电源输出电压不变,改变信号源输出频率 f ,观测 R 两端电压 U_R 变化。

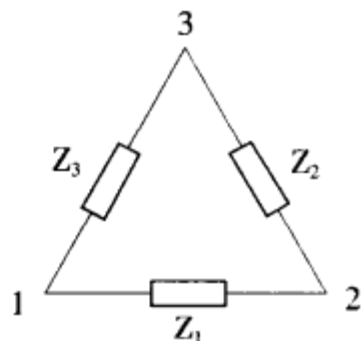


图 20.3-5

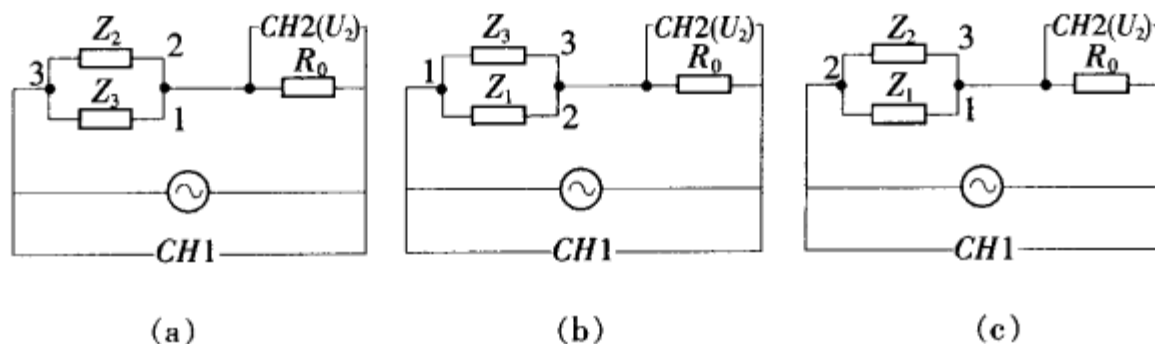


图 20.3-6

	检测 1	检测 2	检测 3
观测有无谐振现象	有	无	无

续表

	检测 1	检测 2	检测 3
频率 f 增大, U_R 值变化	在谐振频率, U_R 最小值	U_R 值减小	U_R 值增大
分析可能性	Z_2 和 Z_3 中 有电感和电容	Z_1 和 Z_3 中 有电感和电阻	Z_1 和 Z_2 中 有电容和电阻

综合以上测量,可总结出如图 20.3-7 线路和相关电学元件,即接线柱 1、2 间接电阻 R ,接线柱 2、3 间接电容 C ;接线柱 1、3 间接电感 L .

(2)测量电阻 R 和电容 C 的方法

将 1、3 接线柱用导线短路,将黑匣子、电阻箱、电源、示波器接成如图 20.3-8 线路.当取信号源频率 f 较小,如 $f=20\text{Hz}$.这时,可以近似为 $\frac{1}{\omega C} \gg R$;调节电阻箱值 R_0 ,使 $U_2 = \frac{1}{2} U_1$,即 $U_{R_0} = U_R$,则 $R = R_0 = 204\Omega$.

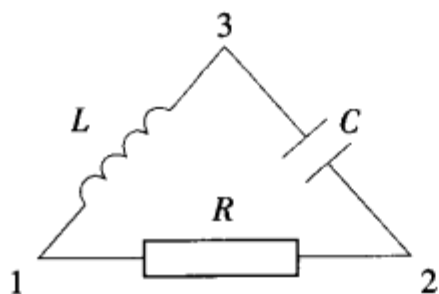


图 20.3-7

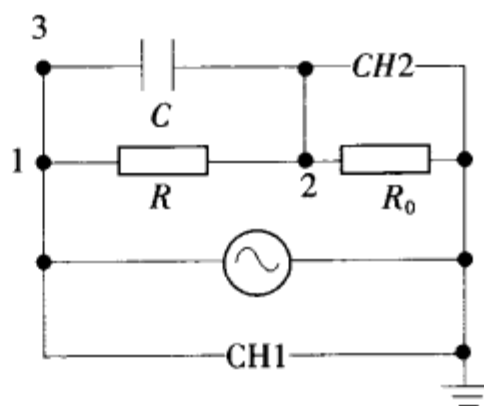


图 20.3-8

在测出电阻 R 值以后,再将黑匣子、低频信号发生器、示波器电容箱接线如图 20.3-9 电路,当调节电阻箱 $R_0 = R = 204\Omega$,取频率 $f = 1000\text{Hz}$,调节外接电容箱的值 C_0 ,使达到 $U_2 = \frac{1}{2} U_1$ 时,这时待测电容 C 和电容箱 C_0 的电压降相等,因而 $C = C_0 = 0.100\mu\text{F}$.

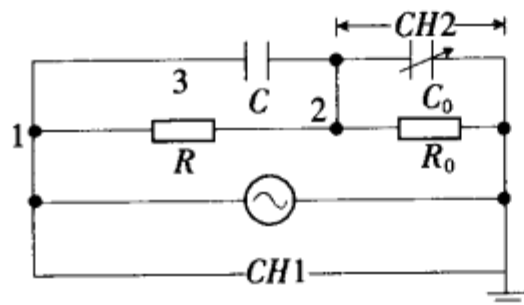


图 20.3-9

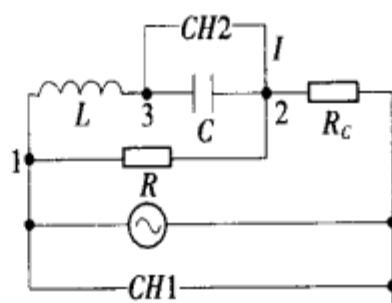


图 20.3-10

(3)测量电感 L 特性的方法

将黑匣子、低频信号发生器、示波器接成如图 20.3-10 线路.调节信号发生器频率 f ,当 LC 电路达到谐振时,电容 C 上测到电压 U_c 为最大值.由 $\omega^2 = \frac{1}{LC}$,及谐振频率 $f_0 = 3.30\text{kHz}$; $C = 0.100\mu\text{F}$,所以电感 $L = 23.3\text{mH}$ ($I = 8.29\text{mA}$).

电感值随电流增加而变化,其测量值与电流关系图略.

例 20.3-3 用直流电表检测电磁学黑盒子实验

在一个有三个接线端 1,2,3 的黑盒子里连接着三个彼此性质不同的电子元件.它们中的一个或许是电池;或许是大于 100Ω 的电阻;或许是大于 $1\mu\text{F}$ 的电容;或许是正向电阻可忽略的二极管;或许是其

他什么电子元件,黑盒子里面的元件接线如图 20.3-11 所示.

要求:

(1)如果盒内有一个电池,那么测定其电动势大小,并画出测量电路图.

(2)如果盒内有一个电阻,那么测定其阻值,并画出测量电路图.

(3)如果盒内有一个电容,测定其电容值,并画出测量电路图.

(4)如果盒内有一个二极管,标出它的极性,并测出它的正向阈值电压.二极管正向电阻较小,可忽略.

(5)画出盒内有关电子元件的分布图,并标明它们的极性.

可供仪器和材料:

万用表中的电压档 0~6V(120kΩ 内阻)、电流档 0~30mA(10Ω 内阻)、带电压表的稳压电源 1 台、可变电阻箱 1 只、秒表 1 只、开关 1 只、导线若干.

实验:

(1)用电压表测量各端口检查有无电池存在,检查结果无.

(2)确定和画出内部结构,检查电路如图 20.3-11 所示.

1)1,3 端出现单向持续导电,说明内为二极管与电阻串联.

2)1,2 端出现脉冲单向导电,说明二极管在 1 端.

3)2,3 端出现脉冲双向导电,说明电容在 2 端.

从上述判断,可知三个不同元件分别为二极管、电容、电阻,它们的接线如图 20.3-12 所示.

(3)用伏安法测量电阻和二极管阈值电压.

实验线路如图 20.3-13 所示.测量待测二极管与电阻串联组合的伏安特性曲线($I-U$ 曲线),从 $I-U$ 曲线阈值电压以上的某点电压 U_1 ,作切线求切线斜率 $\frac{\Delta I}{\Delta U}$ 的倒数,便是电阻 R

的值, $R = \frac{\Delta U}{\Delta I}$. 当将电流 I 外推至 $I=0$ 时,即可得二极管的阈值电压 $U=U_0$ 值.

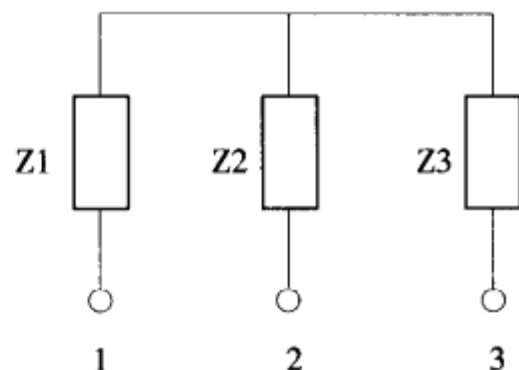


图 20.3-11

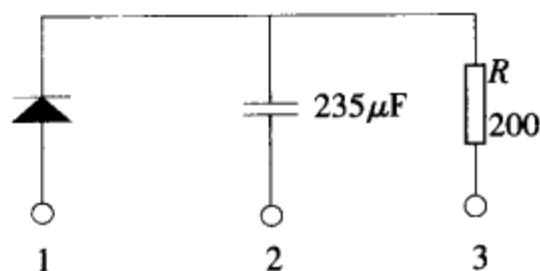


图 20.3-12

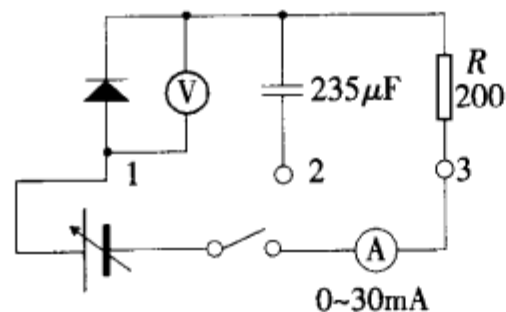


图 20.3-13

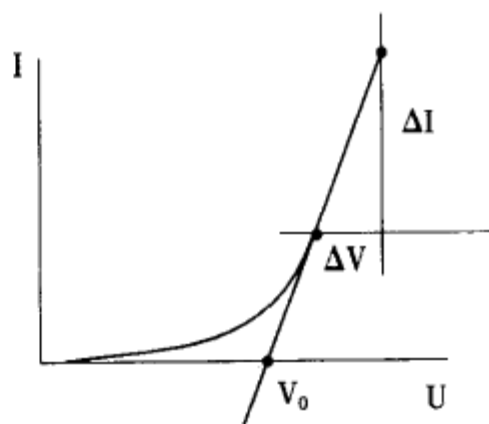


图 20.3-14

(4)用放电法测电容

接线图如图 20.3-15(a)或(b)所示.通过测放电时间常数,已知电阻 R 的情况下,求得未知电容 C 的值.

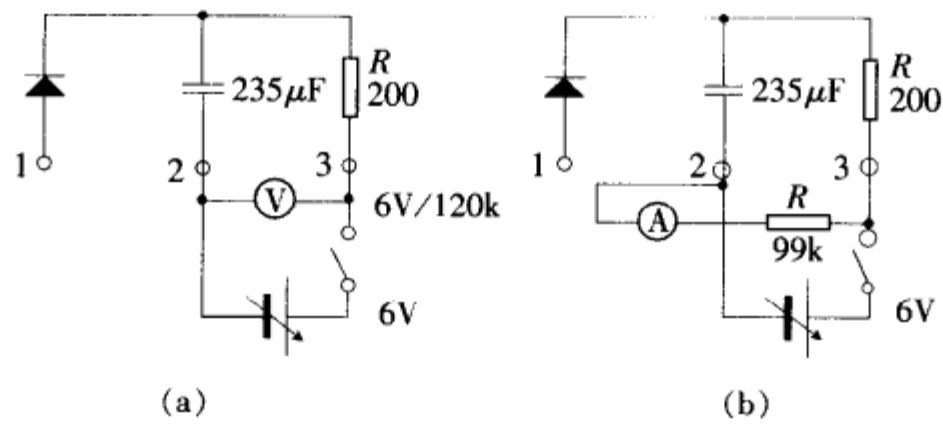


图 20.3-15

例 20.3-4 太阳能电池的基本特性测量

太阳能电池能吸收光能(电磁波),将吸收之光子能量转换为电能,它是太空飞船、人造卫星及各种环保型仪器、机械的重要能量转换器.本实验要求准确测量太阳能电池的一些特性参数,以便更高效率利用太阳能.

(1)基本名词介绍

- 1)短路电流 I_{SC} ;当外部电路短路时,即负载电阻为零时,太阳能电池的输出电流.
- 2)开路电压 U_{OC} ;当外部电路断路时,即负载电阻为无穷大时,太阳能电池的输出电压.
- 3) P_m 是太阳能电池输出的最大功率.
- 4)充填因子 FF 定义为 $P_m/(I_{SC} \cdot U_{OC})$,是代表太阳能电池优劣的一个重要参数.

(2)可供仪器和材料

40W 钨丝灯泡台灯 1 只,万用电表 2 只,太阳能电池(包括引线)1 块,导线若干,作图纸 3 张.

(3)要求

- 1)测量太阳能电池在光照下的伏-安特性,画出测量线路图.
- 2)求太阳能电池的短路电流 I_{SC} 、开路电压 U_{OC} 和太阳能电池最大输出功率 P_m .
- 3)计算该太阳能电池的充填因子.

(4)实验

在白色光(40W 白炽灯)照射太阳能电池,保持它们间距 20.0cm. 测量太阳能电池在不同负载电阻 R 情况下,太阳能电池的输出电流 I 对太阳能电池输出电压 U 的变化关系.测量装置如图 20.3-16 所示.

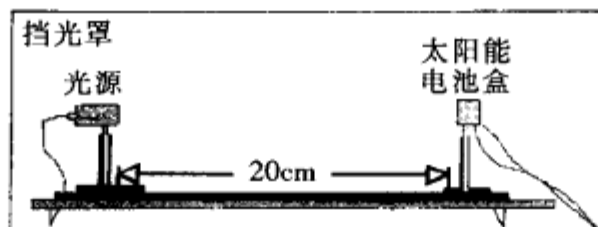


图 20.3-16

实验测量结果如图 20.3-17 所示.从太阳能电池的 $I-U$ 曲线中可知,在 $U=0$ 时,可得短路电流 $I_{SC}=0.650\text{mA}$. 当 $I=0$ 时,可得开路电压 $U_{OC}=370\text{V}$.

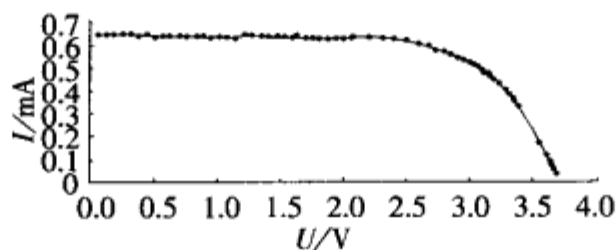


图 20.3-17

由 $I-U$ 图可以得太阳能电池输出功率 P 对外电路负载电阻 R 的关系图,如图 20.3-18 所示.

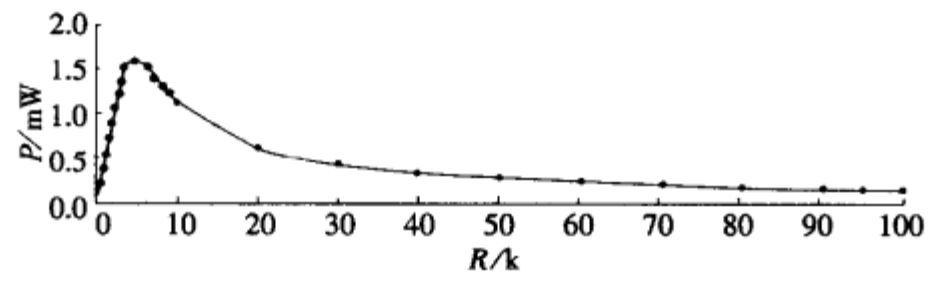


图 20.3-18

由图 20.3-18 可知,当负载电阻 $R = 4800\Omega$ 时,太阳能电池为最大功率输出 $P_{\max} = 1.604\text{mW}$.

$$\text{充填因子 } FF = \frac{P_m}{I_{sc}U_{oc}} = \frac{1.604}{0.650 \times 3.70} = 0.667$$

光学实验

光学实验是一门应用性很强的学科,许多精密测量常采用光学实验的方法.近年来,由于激光的出现和激光技术的发展,使光学实验有了突飞猛进的发展,并对科学技术、国民经济和人民生活产生重要的影响.学习光学实验,可以学到许多精密调节和测量技能,并可以加深对许多光学原理的理解.

§ 21.1 基本光学仪器结构及使用要点

1. 测微目镜

测微目镜通常用作光学仪器的一个重要部件,如读数显微镜、内调焦平行光管等光学仪器都装有这种目镜.有时测微目镜也常单独使用,直接测量非定域干涉条纹的宽度或者光学系统形成的实像大小.

测微目镜由目镜、本体盒、接头套筒、玻璃标尺、分划板、读数鼓轮、丝杆和固定螺丝组成,如图 21.1-1(a)所示.

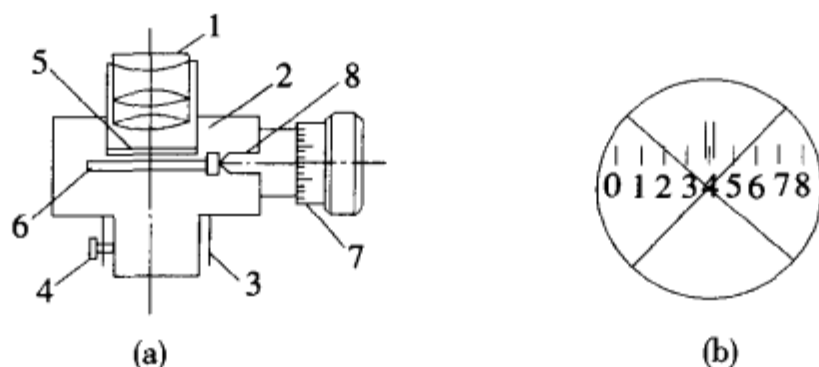


图 21.1-1

图(a)中:1-目镜;2-本体盒;3-接头套筒;4-螺丝;
5-玻璃标尺;6-分划板;7-读数鼓轮;8-丝杆

测微目镜的焦平面的内侧,固定了一块量程为 8mm,分度值为 1mm 的刻线玻璃尺,与该玻璃尺相距 0.1mm 处平行地放置一块由薄玻璃制作的分划板,其上刻有十字准线和一组双线.人眼贴近目镜筒观察时,可在明视距离处看到玻璃尺上放大的刻线像及相叠的准丝像,如图 21.1-1 所示.

分划板框架的一边与由读数鼓轮带动的丝杆相连,另一边与弹簧相连.鼓轮转动时,可以将分划板同步移动,如图 21.1-1 所示.鼓轮轮周上均匀刻有 100 条线,分成 100 小格,鼓轮每转过 1 小格,准丝平移 0.01mm.测量时须注意,当准丝对准待测物上某一标志时,该标志位置应是主尺上准丝的整数指示值加上鼓轮上小数读数值.

2. 读数显微镜

它由显微镜和读数装置组成.一种结构简单的 DM 型读数显微镜,其结构是上述测微目镜的接头套筒上接一个装有线放大率为 1 的物镜镜筒组成.

3. 望远镜

光学仪器上的望远镜是光学仪器上重要附件之一,它可用于观察平行光及用于测量.望远镜通常用自准直法调整.以阿贝目镜结构的望远镜为例,其结构如图 21.1-2 所示,望远镜的调节方法是:先调节目镜,看清叉丝像.同时,入射光束经小棱镜全反射后,将部分叉丝照亮,对目镜调焦较方便,对于用自准

直法调整时,这部分叉丝可以看为物镜的物,伸缩 B 筒,调整物镜和叉丝的距离,使叉丝处在物镜的焦平面上,这时透过物镜的光必为平行光.如果在望远镜前放置一面反射镜,则这束射出的平行光由此反射镜反射,反射光线必按原来光路返回,且成像于物镜的焦平面上(也就是叉丝所处的平面),此成像原理就是自准直法.若望远镜已调好,通过目镜可同时看到叉丝的两个像.一个是叉丝对于目镜成的像;另一个是叉丝由望远镜物镜对反射光线成的像,该两个像重合且无视差.

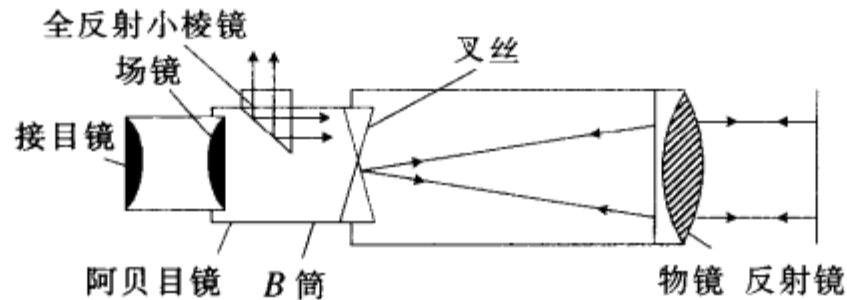


图 21.1-2

阿贝目镜结构望远镜在分光计等光学仪器调整中经常用到.

4. 分光计及调整要求

分光计是一种能将复色光分解为光谱且能精确测量角度的光学仪器.分光计的结构如图 21.1-3 所示.图中 1 为平行光管,2 为自准直望远镜(与游标盘相连),3 为载物平台(与主分度盘相连),4 为底座.

分光计的调整要求:

- (1)调节自准直望远镜,使望远镜调焦至无穷远,即能观察平行光.
- (2)用二分之一调节法,调节自准直望远镜的光轴与分光计转轴垂直.

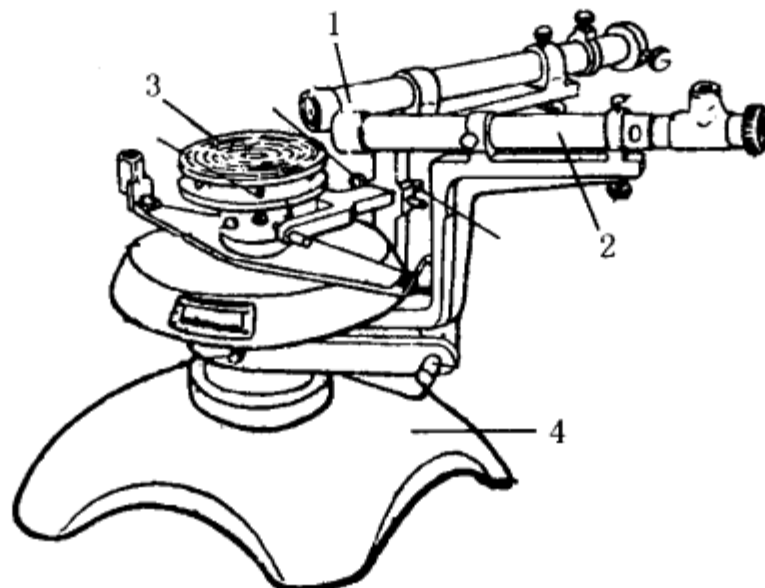


图 21.1-3

- (3)调节平行光管使能发射平行光,且光轴也垂直于分光计的转轴.

分光计在游标盘某一直径的两端分别开一读数窗口,读数时,应将两个窗口的读数取平均,这样可消除偏心差(即读数装置与转轴不重合引起偏差).

§ 21.2 光学实验仪器调整的基本方法

1. 等高同轴调整

光学实验常需通过光学仪器对物理现象进行观察和测量.在测量前,首先应将光学仪器调整好,如果仪器没有调整好,实验将无法进行下去.在光学仪器的调整中,光学元件之间的等高共轴调整是最基

本的调整.例如,用透镜成像法测透镜焦距,这就要求光源、物像、被测透镜等等高同轴,否则有可能连成像也困难.其他光学实验也一样.对光学仪器的等高共轴调整,通常分粗调和细调两步进行.

粗调:将光源和各光学元件靠近,用目测判断,使光源和各元件的中心调节成等高.这样,各光学元件的光轴已大致接近重合.

细调:利用光学系统本身或其他光学仪器进行调节.一般方法是移动光学元件,使像没有上下左右偏移,而且要反复细细调整,才能达到要求.

2. 消除视差

用读数显微镜或望远镜测量物体大小时,都必须消除视差.以读数显微镜为例,测量前先调节目镜与分划板的间距,使分划板刻线及准丝用眼睛观察达到最清晰.然后调节物镜与被测物的距离,使视场中看到被测物像也最清晰.最后进行细调直至准丝与被测物的像在同一平面上,无视差为止.判别无视差的方法是当左右或上下稍微改变视线方向时,准丝和像之间没有相对移动,这样才能准确测量和读数.

3. 自准直法

若在一薄凸透镜左侧焦平面处放一物(箭头状孔板),则此物发出的光经透镜后必成平行光,并成像于无限远处.此时可在透镜右侧放一平面反射镜,这时平行光被反射,此反射光经透镜后成像于透镜左侧焦平面处,这种方法称自准直法,如图 21.2-1 所示.对单透镜而言,像与物(箭头)是上下颠倒,左右反转的,单个透镜调节一般较容易.但如果由多个独立透镜组成的光路,在采用自准直法使像和物重合时,必须认真、仔细、反复调节才能使成像的质量较好.

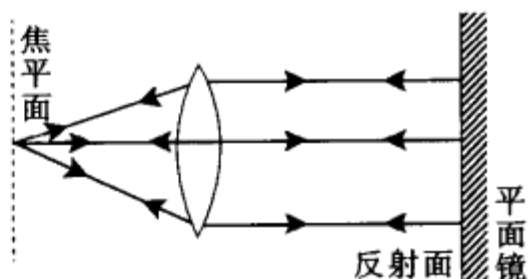


图 21.2-1

§ 21.3 光学仪器和光学元件使用中的注意事项

- 1) 光学仪器或光学元件应轻拿、轻放,避免激烈震动和失手跌落.
- 2) 不准用手触摸光学元件表面,取放光学元件,手只能接触非光学表面部分.即磨砂面,如透镜边缘、棱镜的上、下底面等.
- 3) 光学元件的表面如有轻微的污痕或指印,可用特制的擦镜纸或清洁麂皮轻轻揩去.如果光学表面有灰尘,可用专用橡皮球吹去灰尘.

§ 21.4 基本光学实验

1. 物距象距法测凸透镜焦距

仪器和材料:

光具座、白炽灯、物屏(箭头孔板)、薄凸透镜、成像屏等.

实验:

利用透镜的近轴光线成像公式

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f} \quad (21.4-1)$$

(式中 u, v, f 分别为物距、像距和透镜焦距.)

由于凸透镜可以成实像,所以只要直接测出物距 u 和像距 v 之后,代入公式(21.4-1),即可算出凸透镜焦距 f .

2. 共轭法测量凸透镜焦距

仪器和材料:

光具座、白炽灯、物屏(箭头孔板)、薄凸透镜、屏等.

实验:

共轭法又称二次成像法. 由凸透镜成像规律可知, 如果物体与像屏间相对距离 D 保持不变, 而且 $D > 4f$, 当凸透镜在物体与像屏之间移动时, 可实现两次成像, 如图 21.4-1 所示. S_0 为物屏, P 为像屏, 1 表示物, 2 表示小像, 3 表示大像. 透镜在位置 x_1 时, 成倒立、放大的实像; 透镜在位置 x_2 时, 成倒立、缩小的实像. 假设此两位置间的距离绝对值为 d , 位置 x_2 与像屏之间的距为 U_2 . 由图 21.4-1 可知, 对于位置 x_1 有

$$u_1 = D - d - v_2$$

$$v_1 = d + v_2$$

对于位置 x_2 有 $u_2 = D - v_2$, 利用透镜成像公式(21.4-1), 可以证明, 透镜焦距 f 为

$$f = \frac{D^2 - d^2}{4D} \quad (21.4-2)$$

实验必须满足 $D > 4f$.

通常在凸透镜焦距测量中把物、透镜架、屏放在光具座上, 但是由于透镜光心与透镜底座架上的读数刻线有可能不共面, 从而存在一定不确定度. 采用共轭法后, 从光具座标尺位置 $D = |P - S_0|$ 、 $d = |x_2 - x_1|$ 来计算 f . 这样, 二个共轭位置测量的差值, 可以避免此项系统误差, 测量结果较直接用物距像距法测量准确.

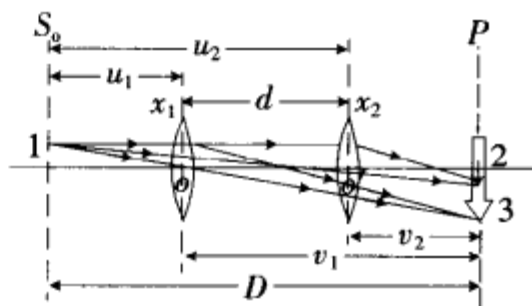


图 21.4-1

3. 自准直法测凸透镜焦距

仪器和材料

白炽灯、物屏(箭头孔板)、反射镜、光具座.

实验:

当箭头光源 S_0 置于透镜 L 的焦平面上时, 光线经透镜 L 后成为一束平行于主轴的平行光. 如图 21.4-2 所示. 若在透镜后面放一块与透镜主光轴垂直的平面反射镜 M , 将这束光反射回去. 根据光路的可逆性原理, S_0 必然成象于透镜的焦平面. S_0 的象与 S_0 等大、倒立, 左右反转. 透镜光心 O 与光源 S_0 之间的距离便是所测透镜焦距 f .

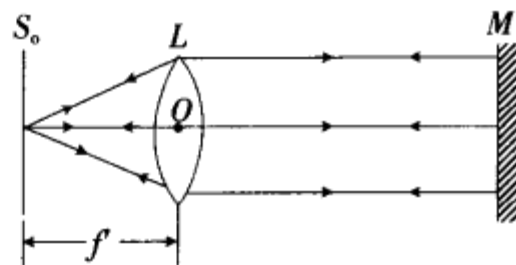


图 21.4-2

4. 凹透镜焦距的测量

仪器和材料:

光具座、凸透镜、凹透镜、物屏、屏、平面镜等.

实验:

方法一: 物距像距法

先用凸透镜 L_1 使物 AB 成缩小、倒立的实像 $A'B'$, 然后把待测凹透镜 L 置于凸透镜 L_1 与像 $A'B'$ 之间, 如图 21.4-3 所示. 如果 $O'A' < |f_{凹}|$ ($f_{凹}$ 为凹透镜焦距), 则通过 L_1 的光束经 L_2 折射后, 仍然成一实像 $A''B''$. 须注意, 对 L_2 而言, $A'B'$ 为虚物, $A''B''$ 为其实像, 则 $u_2 = -\overline{O'A'}$, $v_2 = \overline{O'A''}$. 把 u_2 和 v_2 代入透镜焦距公式 $\frac{1}{f} = \frac{1}{u} + \frac{1}{v}$, 即能计算出透镜焦距 $f_{凹}$.

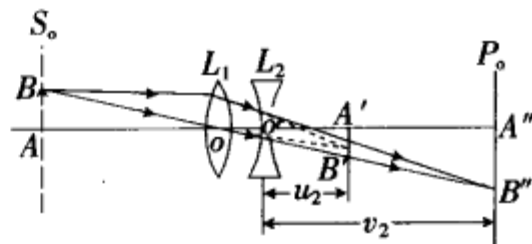


图 21.4-3

方法二：自准直法

凹透镜是发散透镜,如果要用凹透镜获得一束平行光,必须借助于一凸透镜才能实现.先由凸透镜 L_1 将位于 S_0 处的光点成象 S_0' 处.记录 S_0' 位置在光具座标尺上读数值,如图 21.4-4 所示.若 L_2 的光心 O 到 S_0' 之间的距离 $\overline{OS_0'} > |f_{凹}|$,则将待测凹透镜 L_2 和平面镜 M 置于 L_1 和 S_0' 之间.当移动 L_2 使 L_2 的光心 O' 到 S_0' 间距离为 $\overline{O'S_0'} = |f_{凹}|$ 时,由 S_0 处光点发出的光束经过 L_1 、 L_2 后成平行光,通过平面镜 M 的反射,又在 S_0 处成一清晰的实像.确定了 S_0' 和 L_2 的位置 O' 就能测出凹透镜焦距 $f_{凹}$.

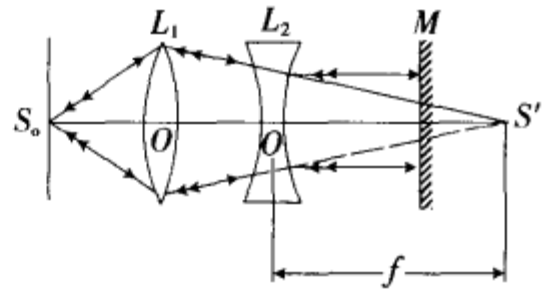


图 21.4-4

5. 用双缝干涉原理测量钠黄光的波长

仪器和材料:

光具座、钠灯、屏、镀膜玻璃、两把刀片、钢尺一把、透明标尺.

要求:

- (1) 利用两把刀片和镀薄膜的玻璃,自制双缝一片.
- (2) 在光具座上安装好双缝、标尺的位置,并进行测量.
- (3) 测量双缝的宽度,计算出钠光的波长.
- (4) 说明误差产生的主要原因.

提示:图 21.4-5 为双缝干涉实验装置.若用人眼代替图 21.4-5 中的屏,则可在光源的同侧观察到干涉条纹的虚像.图 21.4-6 中 $\tan\theta$ 可从光源的一侧求得.

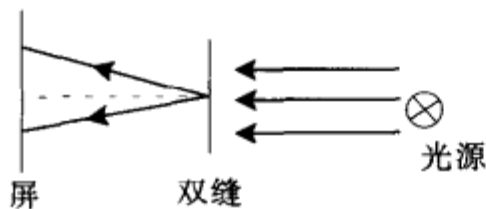


图 21.4-5

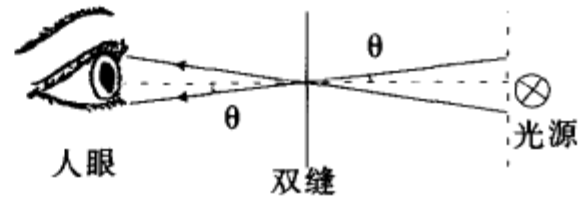


图 21.4-6

实验:

- (1) 双缝的制作.用两片刮胡子刀片夹紧在镀膜的玻璃上沿钢尺边刻直线,可得双缝.
- (2) 用千分尺测双缝的宽度 d .
- (3) 在双缝与光源之间放好标尺.
- (4) 眼睛靠近双缝往光源方向看干涉条纹,移动双缝与标尺的距离,使在 15cm 长的标尺上可读到整数的条纹,便可计算出条纹宽度 Δx .
- (5) 测定双缝到标尺距离 D .
- (6) 将记录数据代入公式 $\lambda = d \cdot \frac{\Delta x}{D}$,计算出钠光的波长 λ .
- (7) 本实验误差主要是 Δx 和 d 的测量误差引起的.

6. 用双棱镜干涉法测量钠灯的光波波长

仪器和材料:

光具座、钠灯、光缝、双棱镜、凸透镜、测微目镜.

实验装置简介:

用双棱镜测光波波长的基本光路如图 21.4-7 所示.

a' 为钠灯,发出黄光,基本上视为单色光.

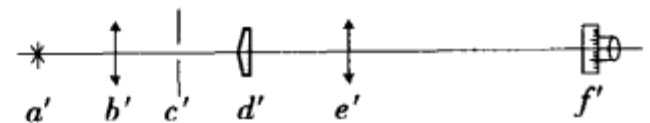


图 21.4-7

b' 为准直透镜, 钠光通过透镜射到单缝上, 增加狭缝射出亮度. c' 为单狭缝, 它产生的衍射光是相干的. d' 为双棱镜, 其作用如图 21.4-8 所示. 原来只有一个狭缝 S , 经双棱镜折射后产生两个狭缝的虚像. e' 为成像透镜, 利用它使虚像 S_1 、 S_2 成为可测实像, 用以测出 S_1 和 S_2 之间距离, 测干涉条纹时不用此镜. f' 为测微目镜, 在目镜的视场中有一叉丝, 转动侧面鼓轮可使叉丝移动, 它的构造原理和千分尺相同, 叉丝移动距离可以从鼓轮上的刻度读出来.

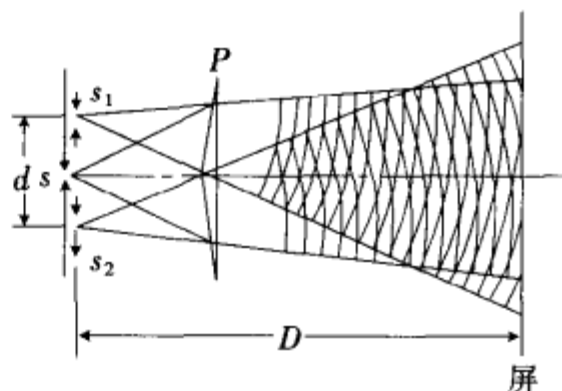


图 21.4-8

要求:

- (1) 按光路图摆好仪器, 调出干涉条纹.
- (2) 测出条纹宽度, 测量并计算出双像 S_1 、 S_2 之间距离, 计算出光波波长.

实验:

- (1) 按照光路图要求把光学器件摆上光具座. 调节光源、透镜、光缝、双棱镜、测微目镜等高同轴, 使光路准直. 调整光缝使光缝与双棱镜中间一条边严格平行.
- (2) 调节钠灯左右位置, 使两虚光源产生的光波交迭区域在测微目镜的通光孔径内两边照度相等, 调节狭缝的宽度, 使干涉条纹清晰明亮.
- (3) 用测微目镜测量干涉条纹的宽度 Δx .
- (4) 使测微目镜与虚象间距离在透镜 e' 4 倍焦距以外, 利用物与象的共轭关系, 测得一次放大象 d_1 和一次缩小象 d_2 , 算出 $d = \sqrt{d_1 \cdot d_2}$. 测出目镜分划极与狭缝间距 D .
- (5) 用杨氏公式求波长 λ , $\lambda = \Delta x \cdot \frac{d}{D}$.

7. 用凹面镜测液体的折射率, 并确定凹面镜的焦距

如图 21.4-9 所示, A 点为凹面镜中设有盛液体时物与像重合的位置. 而 A' 点为凹面镜中盛有液体后物与像重合的位置. O 点为液面的位置.

要求:

- (1) 证明液体的折射率

$$n \approx \frac{OA}{OA'}$$

- (2) 测定折射率 n 值.
- (3) 确定凹面镜焦距.

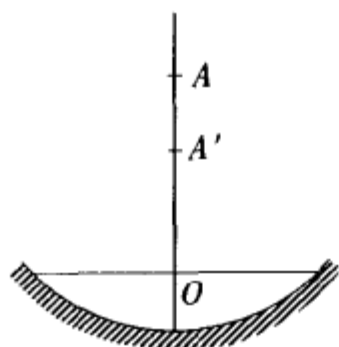


图 21.4-9

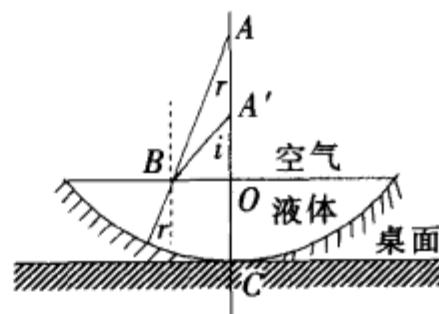


图 21.4-10

仪器和材料:

凹面镜、物屏、光源、直尺.

实验:

- (1) 证明 $n = OA/OA'$

$$n = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{BO/BA'}{BO/BA} = \frac{BA}{BA'} \approx \frac{OA}{OA'}$$

(当物体尺寸 \ll 凹面镜的曲率半径时)

(2)当凹面镜放在桌上,镜面面向光源,用孔屏在光源和凹面镜之间上下移动,使屏上成像,用直尺测出 OA 的长度,见图 21.4-9 和图 21.4-10.

(3)把液体注入凹面镜,重复上面过程,测出 OA' 长度.

(4)用直尺测量液面高度 OC ,算出 OA 和 OA' . 根据公式计算出折射率 n 的值.

(5)根据球面镜的焦距等于球面曲率半径的一半,计算得凹面镜焦距 $f = \frac{AC}{2}$

本实验测量参考结果: $OA \approx 25.0\text{cm}$, $OA' \approx 19.0\text{cm}$, $n = 1.32$.

8. 用牛顿环测量凸透镜的曲率半径

一个光学玻璃制成的平面和曲率半径较大的球面之间形成一劈尖状空气薄层,如图 21.4-11 所示.入射光在空气薄层的上下表面依次发生反射,在透镜表面相遇时就会发生干涉现象,如图 21.4-12 所示.干涉条纹是以接触点为中心的一系列明暗相同的同心圆环,即牛顿环.测量牛顿环直径(或弦长),即可以通过计算求得平凸透镜的曲率半径.

(1)证明平凸透镜的曲率半径 R 为

$$R = \frac{D_{k+m}^2 - D_k^2}{4m\lambda}$$

式中, D_{k+m} 为第 $k+m$ 级暗环直径, D_k 为 k 级暗环直径, m 为诸环序数, λ 为单色光的波长.钠光的波长 $\lambda = 589.3\text{nm}$.

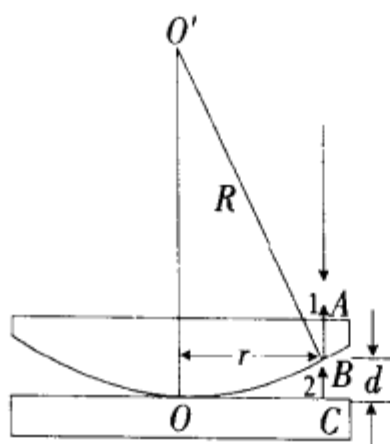


图 21.4-11

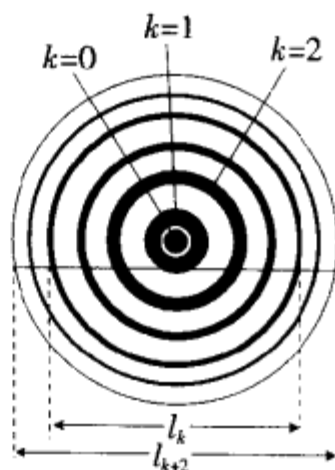


图 21.4-12

(2)测量环的弦长 l_k 和 l_{k+m} ,如图 21.4-12 所示,并计算平凸透镜半径 R .

提示: $l_{k+m}^2 - l_k^2 = D_{k+m}^2 - D_k^2$,其中 l_{k+m} 为第 $k+m$ 级暗环的弦长, l_k 为第 k 级暗环的弦长.

实验:

(1)证明公式:按照波动理论,设形成牛顿环处空气薄层厚度为 d ,两束相干光的光程差为

$$\Delta = 2d + \frac{\lambda}{2} = (2k+1) \cdot \frac{\lambda}{2} \quad (k=0,1,2,\dots) \quad (21.4-3)$$

式中, λ 为光波的波长, k 为暗环的级数.在环中心处, $k=0$,为暗环.

由图 21.4-11 中的几何关系,在 B 点可得

$$R^2 = (R-d)^2 + r^2$$

式中, r 暗环的半径.

$$r^2 = R^2 - (R-d)^2 = 2Rd - d^2$$

因 $R \gg d$,所以 $2Rd \gg d^2$,略去 d^2 得

$$d = \frac{r^2}{2R}$$

此代入式(21.4-3)中可得

$$2 \cdot \frac{r_k^2}{2R} = 2k \cdot \frac{\lambda}{2}$$

$$\therefore R = \frac{r_k^2}{\lambda k}$$

当测得较高的第 k 级和第 $k+m$ 级暗环直径 D_k 和 D_{k+m} 时,由 $r_k^2 = kR\lambda$ 得

$$r_{k+m}^2 - r_k^2 = mR\lambda$$

$$D_{k+m}^2 - D_k^2 = 4mR\lambda$$

$$\therefore R = \frac{D_{k+m}^2 - D_k^2}{4m\lambda} \quad (21.4-4)$$

不难证明 $R = \frac{l_{k+m}^2 - l_k^2}{4m\lambda}$, 其中 l_{k+m} 和 l_k 分别为第 $k+m$ 级和第 k 级暗环在同一条直线上相应的弦长.

(2) 实验方法

a. 接通钠光灯电路,待钠光灯正常发光后,调整读数显微镜底座上反光镜使黄光垂直射到牛顿环装置上.

b. 读数显微镜调整,使牛顿环中心对准显微镜物镜,调焦使目镜中看到叉丝和干涉条纹均清晰.

c. 微调物镜手轮,使目镜中看到十字叉丝和牛顿环纹之间无视差,两者更清晰.

d. 测量第 $k+m$ 级和第 k 级暗环在同一直线上的弦长 l_{k+m} 和 l_k ,移动读数显微镜,应始终往一个方向移动,以避免螺距误差.

e. 把 l_{k+m} 、 l_k 、 λ 、 m 的值代入公式(21.4-4)式,计算凸透镜曲率半径.

实验数据例:

$$k=5, m=15$$

位置 次数	E_5	E_5'	E_{5+15}	E_{5+15}'
1	14.051	13.723	14.230	13.566
2	14.100	13.722	14.222	13.565
3	14.100	13.725	14.220	13.560
4	14.050	13.722	14.220	13.565
平均	14.075	13.723	14.223	13.564

$$l_5 = E_5 - E_5' = 0.352\text{cm}, l_5^2 = 0.1239\text{cm}^2$$

$$l_{20} = E_{20} - E_{20}' = 0.659\text{cm}, l_{20}^2 = 0.4343\text{cm}^2$$

$$\therefore R = \frac{l_{20}^2 - l_5^2}{4m\lambda} = \frac{0.3104}{4 \times 15 \times 5.893 \times 10^{-5}} = 87.7(\text{cm})$$

9. 用最小偏向角法测量光学透明介质折射率

图 21.4-13 为一个玻璃制的三棱镜.光线以入射角 i_1 投射到三棱镜的 AB 面上,相继经棱镜两个面折射后,以 i_2 角从 AC 出射,出射光线和入射光线的夹角 D 称为偏向角. D 的大小随入射角 i_1 而改变.可以证明,当 $i_1 = i_2$ 时,偏向角取极小值 D_{\min} ,称棱镜的最小偏向角.它与棱镜的顶角 A 和折射率 n 之间有如下关系:

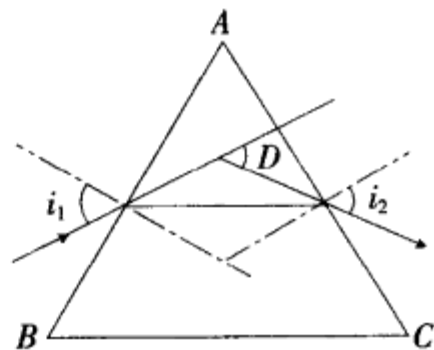


图 21.4-13

$$n = \frac{\sin \frac{A + D_{\min}}{2}}{\sin \frac{A}{2}} \quad \text{①}$$

用分光计分别测量棱镜顶角 A 和最小偏向角 D_{\min} , 就可利用①式求得棱镜的折射率 n .

仪器和材料:

分光计、低压汞灯、三棱镜

要求:

1. 测量三棱镜顶角 A .
2. 用最小偏向角法测材料的折射率.

实验:

1. 将待测三棱镜按图 21.4-14 要求放置在分光计载物平台上, 其中 CA 和 AB 间的夹角 A , 便是三棱镜的顶角, 放置位置使 $AB \perp ab$. (a, b, c 为平台下调节螺丝). 先转动望远镜, 使它对准 AB 面, 调节螺线 a 或 b , 使 AB 面垂直于望远镜的光轴, 从望远镜中可观察到图 21.4-15 中 (b) 所示的图像. 然后将望远镜转向 AC 面, 调节螺丝 c , 使 AC 面与望远镜的光轴垂直. 将上述过程来回反复调节, 直至 AB 面和 AC 面均能与望远镜的光轴垂直为止. 利用分光计的读数装置分别读出自准直望远镜光轴垂直于 AB 面和 AC 面时的读数, 两读数之差就是两法线的夹角 α , 故棱镜顶角 $A = 180^\circ - \alpha$.

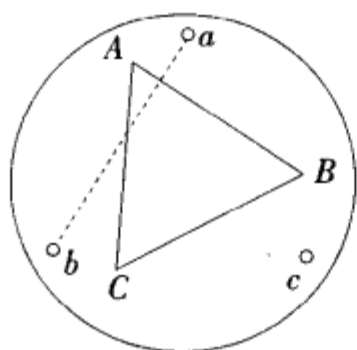


图 21.4-14

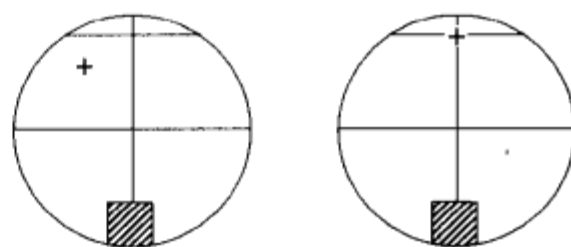


图 21.4-15

2. 用低压汞灯照明分光计平行光管的狭缝, 转动载物平台和望远镜, 使平行光管、三棱镜、望远镜粗调到图 21.4-16 位置, 通过望远镜目镜, 可看到汞光谱线 (即狭缝的单色像). 实验时, 先将望远镜对准某一光谱线 (例如 $\lambda = 546.1\text{nm}$ 的绿色谱线). 让载物平台带动游标盘一起转动, 使该谱线朝偏向角小的方向移动为止, 此转折点即为相应于该谱线的最小偏向角位置. 此时记下最小偏向角位置两读数窗口角游标尺读数 φ_1' 和 φ_1'' . 同时取下棱镜, 望远镜对准入射光的白色狭缝像, 记下读数 φ_0' 和 φ_0'' . 则该谱线的最小偏向角为

$$D_{\min} = \frac{(\varphi_1' - \varphi_0') + (\varphi_1'' - \varphi_0'')}{2}$$

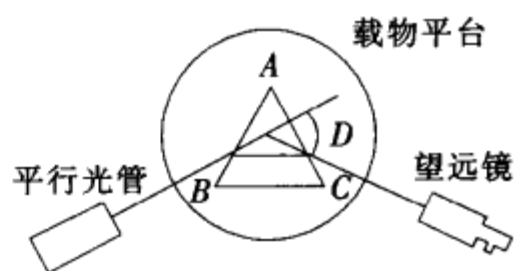


图 21.4-16

实验结果例: 入射光波长 $\lambda = 577.0\text{nm}$; 棱镜顶角 $A = 60^\circ 1.8'$

测量序数	入射光位置		折射光位置	
	φ_0'	φ_0''	φ_1'	φ_1''
1	$163^\circ 58'$	$344^\circ 0'$	$225^\circ 9'$	$45^\circ 7'$
2	$163^\circ 57'$	$343^\circ 59'$	$225^\circ 8'$	$45^\circ 8'$
3	$163^\circ 58'$	$344^\circ 0'$	$225^\circ 9'$	$45^\circ 8'$
4	$163^\circ 57'$	$344^\circ 0'$	$225^\circ 9'$	$45^\circ 7'$
5	$163^\circ 58'$	$343^\circ 59'$	$225^\circ 8'$	$45^\circ 8'$
平均值	$163^\circ 57.6'$	$343^\circ 59.6'$	$225^\circ 8.6'$	$45^\circ 7.6'$

由上表数据可得最小偏向角

$$D_{\min} = \frac{(225^{\circ}8.6' - 163^{\circ}57.6') + (360^{\circ} + 45^{\circ}7.6' - 343^{\circ}59.6')}{2}$$

$$= \frac{61^{\circ}11' + 61^{\circ}8'}{2} = 61^{\circ}9.5'$$

将此值代入公式①得该棱镜的玻璃折射率:

$$n = \frac{\sin \frac{A + D_{\min}}{2}}{\sin \frac{A}{2}} = \sin \frac{60^{\circ}1.8' + 61^{\circ}9.5'}{2} / \sin \frac{60^{\circ}1.8'}{2} = 1.7415$$

用分光计测棱镜介质材料折射率注意事项:

1. 测量前须按 21.1-3 的要求将分光计调整好.
2. 当望远镜已处于最小偏向角位置,此时须固定载物平台的游标盘,微调望远镜位置,使垂直准丝对准该谱线中间,再进行角位置记录.

§ 21.5 光学综合实验

1. 用外推法测量半导体硅的折射率

原理:

当光照到半导体表面时,将部分反射,部分透射,部分吸收.反射光功率 I_r 与入射光功率 I_i 之比 R ,称为反射系数.即

$$R = \frac{I_r}{I_i} \quad (21.5-1)$$

入射光可分解为两个偏振分量,一个与入射面平行偏振分量 P ,另一个与入射面垂直的偏振分量 S .本实验用的是 650nm 波长半导体激光,它在硅表面的吸收可忽略不计.在此条件下,对于自空气入射到材料表面的反射系数 R_P 和 R_S 由费涅尔公式给出:

$$\pm \sqrt{R_P} = \frac{n \cos \theta_i - \cos \theta_t}{\cos \theta_i + n \cos \theta_t} \quad (21.5-2)$$

$$- \sqrt{R_S} = \frac{\cos \theta_i - n \cos \theta_t}{\cos \theta_i + n \cos \theta_t} \quad (21.5-3)$$

式中 n 是材料的折射率, θ_i 为入射角, θ_r 为反射角, θ_t 为折射角,如图 21.5-1 所示.

在 $\theta_i = 0$ 情况下,直接测量 R_P 和 R_S 实际上不可行.然而费涅尔公式允许由任意斜入射角下得到 R_P 和 R_S 值计算出 n .

仪器和材料:

实验装置如图 21.5-2 所示.

(1) 一个固定在转台上半导体激光器及电源.激光波长 650nm.

(2) 一个固定在转台上直径为 20mm 的线偏振片.注意:转台上的 O 读数位置不一定是偏振片的偏振轴所指方向.

(3) 一玻璃片(对波长 650nm 光的折射率为 1.57),一片半导体薄片(样品),分别固定在一矩形砖(样品砖)的两相对侧面.

(4) 能固定样品砖的光学转台.



图 21.5-1

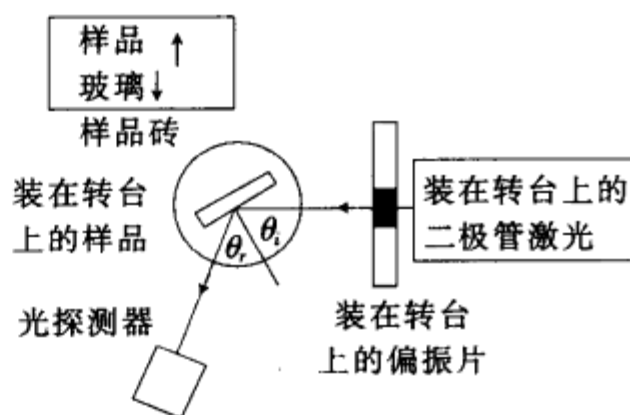


图 21.5-2

- (5) 一个数字显示激光功率表,与固定在支架上的光探测器相接,该支架可绕样品转动.
- (6) 一个光具座,遮光罩及作图纸,手电筒和软尺等.

要求:

- (1) 确定入射激光的偏振面.
- 实验时,偏振片的偏振轴应与激光最强的线偏振方向一致.
- (2) 测量半导体硅薄片的反射系数 R_P 和 R_S .
- (3) 计算半导体硅材料的折射率 n .

实验:

(1) 在本实验中,首先必须确定入射激光的偏振面.值得注意的是半导体激光器发出的激光为部分偏振光.为了在实验中获得最好的结果,偏振片的偏振轴应与激光最强的线偏振分量一致.激光器、偏振片和探测器放在一条直线上.固定激光器和偏振片中的任一个,旋转另一个.观测探测器所测得光强,直至光强达到最大值.在以后测量中,将偏振片和激光器当作一个系统,需要时一起转.

由玻璃的折射 n , 根据公式

$$\theta_i = \arctan n \quad (21.5-4)$$

计算出玻璃的布儒斯特角,并按此位置把玻璃样品固定在转台上.旋转偏振系统,测量不同偏振角度下反射激光功率.实验结果如图 21.5-3 所示,由此可得出反射激光功率最小时偏振片相对于入射玻璃样品的角度.根据布儒斯特原理,可以确定此时激光的偏振面与样品的人射面平行.

(2) 由上述确定的激光偏振面方向,使其分别垂直和平行于半导体硅的入射面,在不同角度下测得反射激光功率,如图 21.5-4 所示.此图中将 $R_P \sim \theta_i$ 和 $R_S \sim \theta_i$ 关系外推至入射角 θ_i 为零时的反射系数,应归于一点.

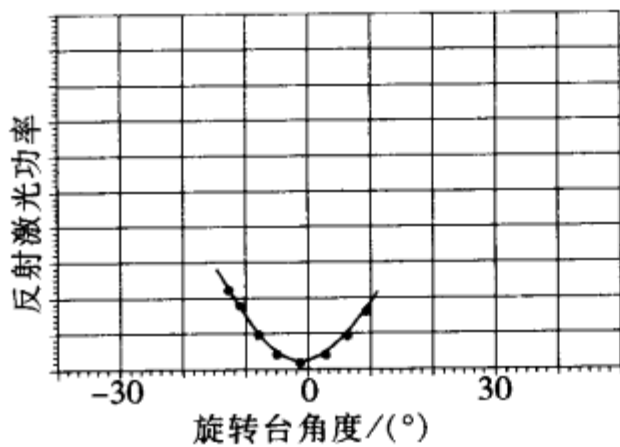


图 21.5-3

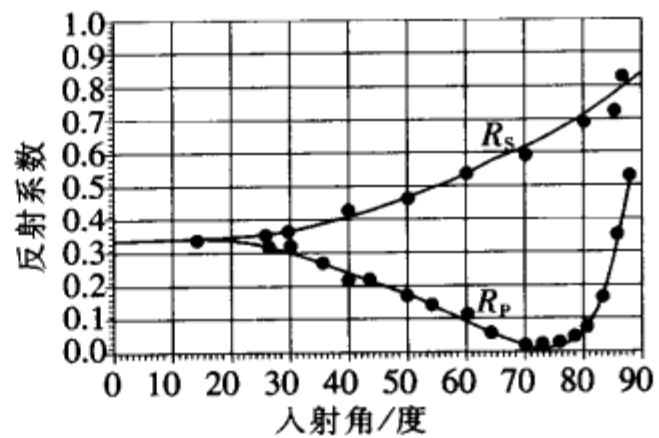


图 21.5-4

在作图时,须注意在极小值处,应多测几点,保证图象的光滑性与正确性.

(3) n 的六个值测量结果

θ_i /度	R_P	R_S	n	\bar{n}
20.0	0.341	0.366	3.93	3.81
30.0	0.293	0.382	3.82	
40.0	0.248	0.435	3.81	
50.0	0.187	0.497	3.82	
60.0	0.115	0.576	3.85	
80.0	0.037	0.812	3.61	

2. 光学黑盒子实验

一个长方形的光学黑盒子,其内部装有三个光学元件,它们可能是光栅、透镜或平板玻璃等,黑盒子的两

对面各开有一条 2.5cm 长、0.5cm 宽的狭缝.在狭缝内侧贴有红色滤色片.用肉眼不能直接看到内部三个光学元件,黑盒子的外型如图 21.5-5 所示.要求检测并判别盒子内为哪三个光学元件,它们安放的位置,并测出这些元件的有关光学元件参数.

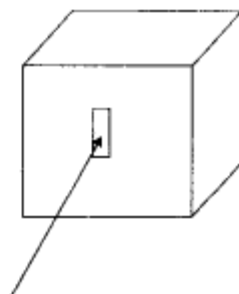


图 21.5-5

仪器和材料:

光学黑盒子、半导体激光器(激光波长 650nm)及支架、可调节平台、屏、30cm 长毫米刻度尺等.

要求:

- (1)检测黑盒子内有哪三个光学元件,写出它们的名称,并画出它们安放位置.
- (2)测量这些光学元件的参数,例如光栅常数、透镜焦距或者平板玻璃的厚度等.

实验:

(1)判别黑盒子内元件名称及安放位置

1)将半导体激光垂直从黑盒子一侧面射入狭缝,并从另一侧面狭缝出射,在屏上可观测到光栅衍射图像,如图 21.5-6 所示.图中黑点(实际应为红色)为衍射光点,而 + 符号表示未放黑盒子时,激光在屏上入射点.这说明在靠近屏一侧缝内放有一块衍射光栅,且光栅条纹与衍射光点连线垂直.由光栅零级衍射点偏离入射光的方向,说明在黑盒子内斜放有一块平板玻璃.由于玻璃板的折射引起偏离.

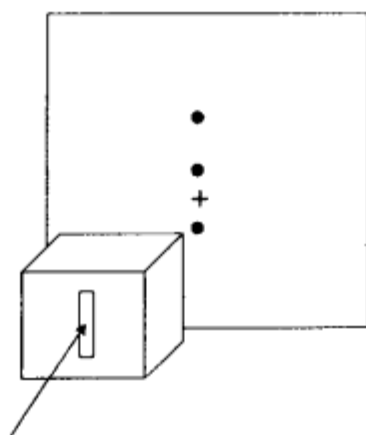


图 21.5-6

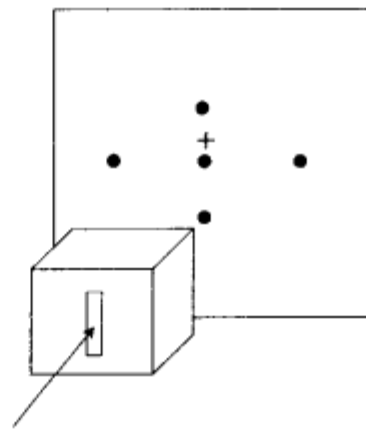


图 21.5-7

2)将黑盒旋转 180°,即激光从黑盒子另一侧狭缝垂直入射,这时从对面狭缝出射的光可观测到如图 21.5-7 所示的图像.这说明靠屏一边的内侧贴紧地放了一块衍射光栅,此衍射光栅条纹的方向与狭缝平行.从零级衍射光点,偏离入射光的方向,说明是由平板玻璃折射引起的.

3)从上述两次试验可知:

- (1)光栅 NO.1 与黑盒子左壁的距离几乎为零.且光栅 NO.1 的条纹刻线与黑盒子的狭缝成直角.
- (2)光栅 NO.2 与黑盒子右壁的距离几乎为零,且光栅 NO.2 的条纹刻线与黑盒子狭缝平行.
- (3)NO.3 为平行光滑透明玻璃片.

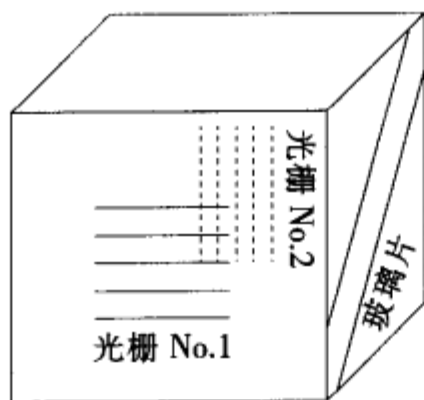


图 21.5-8

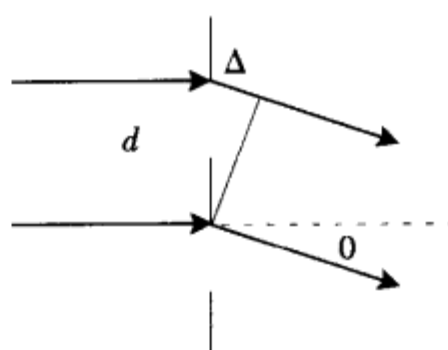


图 21.5-9

(4)衍射光栅的实验原理如图 21.5-9 所示,如果相邻条纹刻线的间距为 d (即光栅常数),那么
光栅差

$$\Delta = d \sin \theta$$

衍射条件

$$\Delta = m \lambda$$

上二式中, d 为光栅常数, θ 为衍射角, m 为衍射级次.

所以,对一级衍射 $m = 1$,有

$$\sin \theta = \lambda / d$$

对 NO.1 光栅测量三次,得 $\overline{\tan \theta} = 0.320$ 可计算得 $\overline{\sin \theta} = 0.305$.

由 $d_1 = \frac{\lambda}{\overline{\sin \theta}} = \frac{650.0}{0.305} \text{nm} = 2.13 \mu\text{m}$

同理对 NO.2 光栅测量三次,得 $\overline{\tan \theta} = 1.04$,可计算得 $\overline{\sin \theta} = 0.721$

由 $d_2 = \frac{\lambda}{\overline{\sin \theta}} = \frac{650.0}{0.721} \text{nm} = 0.902 \mu\text{m}$

5) 平行光滑透明玻璃片厚度测量

如图 21.5-10 所示,其中 φ 为玻璃片平面的垂直线与入射光的夹角,

由 Snell 定律: $\sin \varphi = n \sin \varphi'$

式中, n 为玻璃折射率, $\varphi' = \angle BAC$.

透明玻璃片里的光程:

$$AC = AB / \cos \varphi'; AB = h = \text{玻璃片厚度.}$$

光束位置移动:

$$CD = t = AC \sin(\angle CAD), \text{其中 } \angle CAD = \varphi - \varphi'$$

因此有: $t = h \sin \varphi [1 - \cos \varphi / (n^2 - \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}]$ (21.5-5)

若已知玻璃的折射 $n = 1.51$,改变激光的入射角 φ ,当 $\varphi = 49.0^\circ$ 角时,入射光束在屏上投影点 + 与光栅衍射零级衍射点重合.将 t 值、 n 值及 $\varphi = 49.0^\circ$ 代入公式(21.5-5),便可求得平板玻璃的厚度 h .

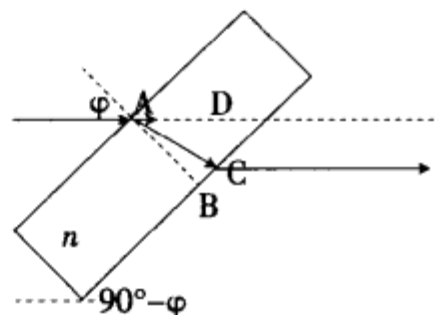


图 21.5-10

附 录

物理常数

平均重力加速度	$g = 9.81 \text{m/s}^2$
万有引力常量	$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{kg}^2$
电子质量	$m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{kg}$
质子质量	$m_p = 1.67 \times 10^{-27} \text{kg}$
光速	$c = 3.00 \times 10^8 \text{m/s}$
三相点温度	$T_s = 273 \text{K}$
普适气体常量	$R = 8.31 \text{J/mol} \cdot \text{K}$ $R = 0.0821 \text{atm} \cdot \text{l/mol} \cdot \text{K}$
玻耳兹曼常量	$k = 1.38 \times 10^{-23} \text{J/K}$
阿伏伽德罗常量	$N_A = 6.02 \times 10^{23} / \text{mol}$
(真空)电容率	$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{F/m}$ $1/4\pi\epsilon_0 = 8.99 \times 10^9 \text{Nm}^2/\text{C}^2$
基本电荷	$e = 1.60 \times 10^{-19} \text{C}$
(真空)磁导体	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{Tm/A}$
普朗克常量	$h = 6.63 \times 10^{-34} \text{Js}$ $h = 4.14 \times 10^{-15} \text{eVs}$ $\hbar = h/2\pi = 1.05 \times 10^{-34} \text{Js}$ $\hbar = 6.58 \times 10^{-16} \text{eVs}$
玻尔半径	$r_B = 5.29 \times 10^{-11} \text{m}$
电子伏特	$\text{eV} = 1.60 \times 10^{-19} \text{J}$
(统一)原子质量单位	$u = 1.66 \times 10^{-27} \text{kg}$

太阳系

天体	平均轨道半径(m)	平均半径(m)	质量(kg)
太阳		6.96×10^8	1.99×10^{30}
水星	5.79×10^{10}	2.42×10^6	3.35×10^{23}
金星	1.08×10^{11}	6.10×10^6	4.89×10^{24}
地球	1.50×10^{11}	6.37×10^6	5.97×10^{24}
火星	2.28×10^{11}	3.38×10^6	6.46×10^{23}
木星	7.78×10^{11}	7.13×10^7	1.90×10^{27}
土星	1.43×10^{12}	6.04×10^7	5.69×10^{26}
天王星	2.87×10^{12}	2.38×10^7	8.73×10^{25}
海王星	4.50×10^{12}	2.22×10^7	1.03×10^{26}
冥王星	5.91×10^{12}	3×10^6	5.4×10^{24}
月球	3.84×10^8	1.74×10^6	7.35×10^{22}

物理性质(空气、水)

物理性质(室温、大气压下)	空气	水
密度	1.20kg/m ³	1.00 × 10 ³ kg/m ³
比热容	1.00 × 10 ³ J/kg·K	4.18 × 10 ³ J/kg·K
声速	343m/s	1.26 × 10 ³ m/s
折射率(可见光)	1.000293	1.33

微积分公式

导数运算法则

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} [u(x) \pm v(x)] &= \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \\ \frac{d}{dx} [u(x)v(x)] &= v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx} \\ \frac{d}{dx} \left[\frac{u(x)}{v(x)} \right] &= \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2} \\ \frac{d}{dx} \{ u[v(x)] \} &= \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}\end{aligned}$$

基本函数的导数

$$\begin{aligned}\frac{dx^n}{dx} &= nx^{n-1} & \frac{d}{dx} \sin x &= \cos x & \frac{d}{dx} \sin^{-1} x &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \frac{d}{dx} a^x &= a^x \ln a & \frac{d}{dx} \cos x &= -\sin x & \frac{d}{dx} \cos^{-1} x &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \frac{d}{dx} e^x &= e^x & \frac{d}{dx} \tan x &= \sec^2 x & \frac{d}{dx} \tan^{-1} x &= \frac{1}{1+x^2} \\ \frac{d}{dx} \ln x &= \frac{1}{x}\end{aligned}$$

不定积分运算法则

$$\begin{aligned}\int dx &= x + C \\ \int \frac{d[f(x)]}{dx} dx &= f(x) + C \\ \int af(x) dx &= a \int f(x) dx \\ \int [af(x) + bg(x)] dx &= a \int f(x) dx + b \int g(x) dx \\ \int u dv &= uv - \int v du\end{aligned}$$

基本积分公式(每个不定积分后均应加上任意常数)

$$\begin{aligned}\int a dx &= ax \\ \int x^n dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)\end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x|$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int \cos x dx = \sin x$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x dx = \tan x$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x dx = -\cot x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \sin^{-1} \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}$$

近似公式(式中三角函数的角度均用弧度)

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dots \quad (|x| < 1)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots \quad (x^2 < \frac{\pi^2}{4})$$

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \dots \quad (x^2 < \pi^2)$$

$$\sin^{-1} x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \dots \quad (x^2 < 1)$$

$$\cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} x \quad (x^2 < 1)$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \quad (x^2 < 1)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \dots \quad (x^2 > 1)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots \quad (x^2 < 1)$$

希腊字母

字符	大写	小写	字符	大写	小写
Alpha	A	α	Nu	N	ν
Beta	B	β	Xi	Ξ	ξ

续表

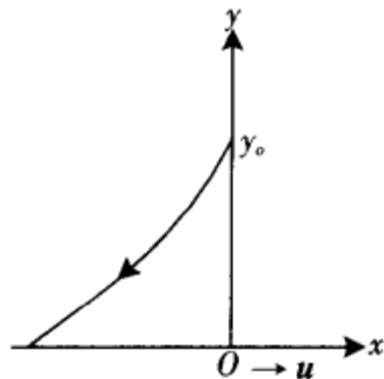
字符	大写	小写	字符	大写	小写
Gamma	Γ	γ	Omicron	O	o
Delta	Δ	δ	Pi	Π	π
Epsilon	E	ϵ	Rho	P	ρ
Zata	Z	ζ	sigma	Σ	σ
Eta	H	η	Tau	T	τ
Theta	Θ	θ	Upsilon	Υ	υ
Iota	I	ι	Phi	Φ	φ, ϕ
Kappa	K	κ	Chi	X	χ
Lamda	Λ	λ	Psi	Ψ	ψ
Mu	M	μ	Omega	Ω	ω

习题提示

第 1 章

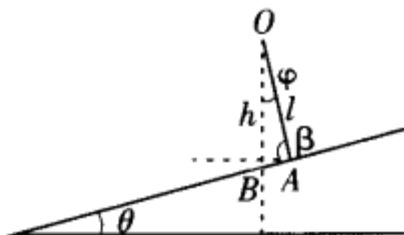
1.8 选择以加速度 g 相对地面运动的参照系 S' , 其速度为 $u = gt$, 任一小球 i 在该参照系中的速度为 $u_{i'}$ 在地面参照系中的速度为 $v_{i'} = v_{i0} + gt$, 则 $v_{i'} = v_{i'} - u = v_{i0}$. 而已知各小球速率相同, $|v_{i0}| = v_0$, 由此在 S' 系中各小球均作匀速直线运动, 由此可证出所求结果.

1.10 设 u 为车对地速度, v 为雨对地速度, v' 为雨对车速度, a 为车的加速度, 选如图所示的车参照系上的坐标系, 任一时刻 t , 车速为 $u = u_0 + at$, 雨对车速度为 $v_x' = -u = -u_0 - at$, x 和 y 方向运动方程分别为 $x = -u_0t - \frac{1}{2}at^2$ 和 $y = y_0 - Vt$, 消去 t 可得轨迹方程.



图习题 1.10

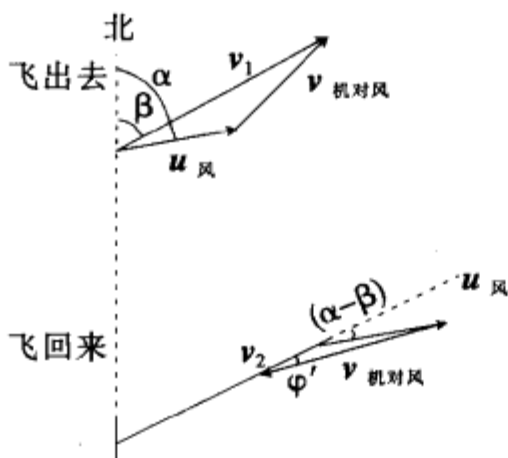
1.11 设 $OA = l, OB = h, OA$ 与水平线夹角为 $\beta = \frac{\pi}{2} - \varphi$, 小球加速度沿斜槽方向分量为 $a = g\sin\beta = g\cos\varphi$, 由正弦定理得 $\frac{h}{\sin(\theta + \beta)} = \frac{l}{\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)}$, 又 $l = \frac{1}{2}at^2$ 可解出结果.



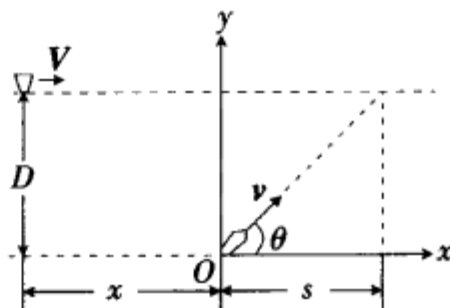
图习题 1.11

1.12 作矢量图, 飞机去和回速度方向相反, 数值不同, 风速大小和方向不变, 由矢量图可得飞出去时 $\frac{u}{\sin\varphi} = \frac{v}{\sin(\alpha - \beta)}$, 可解得 $v\cos\varphi$. 由图又得 $v_1 = u\cos(\alpha - \beta) + v\cos\varphi$. 飞回来同样可求得 $v_2, t_{\max} = s(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}) = \frac{2R}{v}$ 可得 s_{\max} .

1.13 由图中几何关系, 经 t 时间船和艇碰头, 则 $Vt - x = v\cos\theta \cdot t$ ①
 $D = v\sin\theta \cdot t$ ② 解得 $x = \frac{DV}{v\sin\theta} - \frac{D\cos\theta}{\sin\theta}$ ③ 求 x 的极小值, 即先求 $\frac{dx}{d\theta} = 0$ 时 θ 的值, $\frac{dx}{d\theta} = \frac{DV}{v} \cdot \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} - \frac{D(-\sin^2\theta - \cos^2\theta)}{\sin^2\theta} = 0$, 得 $\cos\theta = \frac{v}{V}$ 为 x 的极小值时的 θ 值, 即可求得对应的 x 和 s .

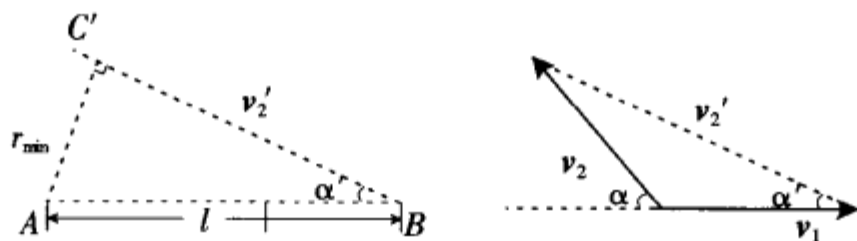


图习题 1.12



图习题 1.13

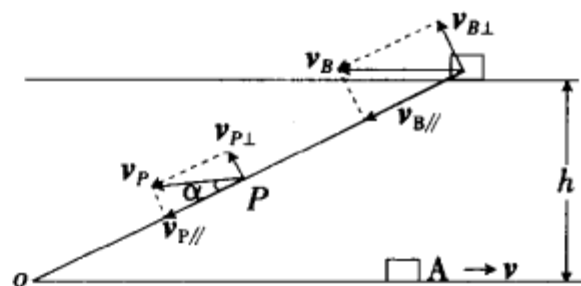
1.14 以 A 为参照系, 质点 B 以相对速度 v_2' 沿直线 BC' 作匀速直线运动, BC' 与 AB 的夹角为 α' , 在 A 的参照系中, 从 A 到直线 BC' 的垂直距离即为两质点的最短距离, 而 v_1, v_2, v_2' , 三者的矢量关系如图, $v_2' = v_2 - v_1$, 由余弦定理 $v_2'^2 = v_2^2 + v_1^2 + 2v_1v_2\cos\alpha$ 和正弦定理 $\frac{v_2'}{\sin\alpha'} = \frac{v_2}{\sin(\pi - \alpha)}$ 及 $r_{\min} =$



图习题 1.14

$l \sin \alpha'$ 可求得 r_{\min} .

1.15 物体 B 的速度分解为沿绳方向 $v_{B//}$ ($=v$) 及垂直于绳方向 $v_{B\perp}$ ($=v \tan \theta$), 绳中的小水滴 P 的速度也分成这两个方向, $v_{P//} = v$, $v_{P\perp} = v \tan \alpha$, $v_{P\perp}$ 可看成是绳子绕 O 点转动的速度, 转动角速度为 ω , $\omega = v_{P\perp} / (B_0/2) = v_{B\perp} / \overline{BO}$, 由以上关系可解得 $v_{P\perp}$, v_P . 水滴以后作斜向下抛体运动.

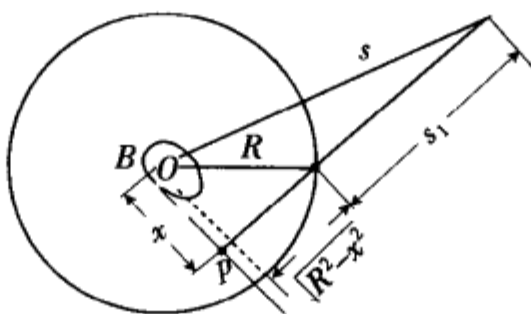


图习题 1.15

1.16 绳对物块的拉力仅改变速度的方向, 是向心力

$T_0 = \frac{mv_0^2}{x}$ 可解得绳长 x . 由题意知 $OB \perp BP$, 物块速度在

离开桌面前不变, 仍为 v_0 , 离开桌面后作平抛运动, $H = \frac{1}{2}gt^2$, $s_1 = v_0t$, 由图中几何关系可得 $s = \sqrt{(s_1 + \sqrt{R^2 - x^2})^2 + x^2}$



图习题 1.16

第 2 章

2.1 正方体受四个力, 如图所示, 由力平衡, 有

$$N_2 - f = 0$$

$$N_1 - mg = 0$$

以 O 点为参考点, 力矩平衡方程为

$$N_2 a \sin \theta = mg \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} a \cdot \sin(45^\circ - \theta)$$

当摩擦力刚好阻止其滑动时,

$$f = f_{\max} = \mu N_1$$

2.4 设 AC 和竖直方向的夹角为 θ , 以 A 为参考点, 力矩平衡

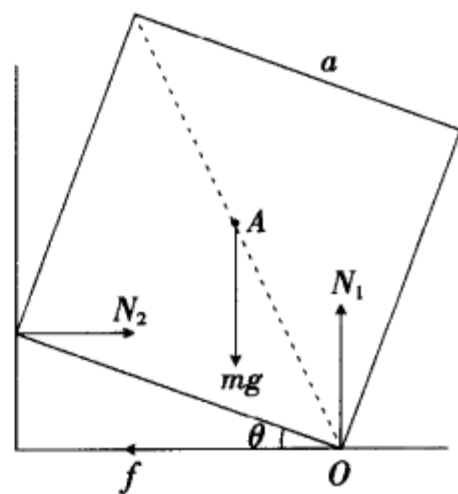
$$W \cdot \overline{AM} \sin \theta - N_E \cdot \overline{AE} = 0 \quad ①$$

又由 $\sum F_y = 0$, 得

$$W - N_E - N_A = 0 \quad ②$$

取 CE 杆为隔离体, 以 C 为参考点, 由 $\sum M_C = 0$ 得

$$N_E \cdot \overline{CE} \sin \theta - T \cdot \overline{CD} \cos \theta = 0 \quad ③$$



图习题 2.1

2.7 如图所示为滑轮 A、B,人和升降机的隔离受力图,由力的平衡条件可列出下列各式:

$$\begin{aligned} F_2 - 2F_1 &= 0 \\ F_1 - 2F_3 &= 0 \\ F_3 + F_4 - P_1 &= 0 \\ F_1 + F_3 - F_4 - P_2 &= 0 \end{aligned}$$

2.8 (1) 将链条视为一个整体,在重力和两固定点作用力三力作用下平衡.

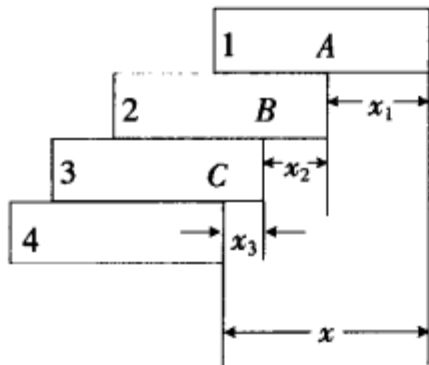
(2) 将链条的一半隔离出来,由水平方向力的平衡及(1)中的结果即可求出链条最低点张力.

2.10 砖头 1 的质心应落在下面一块砖的边缘, $x_1 = \frac{l}{2}$, 砖 1 和 2 的合力重心应落在砖 3 的边缘 K 点,以 B 为参考点

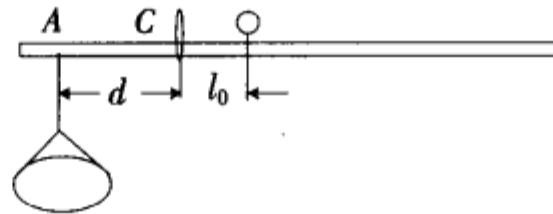
$$Wx_2 = W\left(\frac{l}{2} - x_2\right)$$

$$\text{得 } x_2 = \frac{l}{4}.$$

以此方法类推.



图习题 2.10



图习题 2.11

2.11 如图所示,秤盘中不放物体时,秤砣应放在 O 处,此时秤杆和秤盘对 C 点(提纽)的合力矩为零, $M = m_0 l_0$, M 为秤盘的力矩. 当秤盘中亦有质量为 m 的物体时,由力矩平衡条件 $md + M = m_0(l_0 + \lambda_m)$. 用双砣称重量为 m 的物体时,设读数为 m' , $md + M = 2m_0(l_0 + \lambda_{m'})$

2.13 如图所示,本板的重心必在木棒 A 的左边,设重心在 C 点,取如图坐标, f_A 和 f_B 为木棒和木板间的摩擦力

$$x \text{ 方向: } f_A + f_B - G_x = 0$$

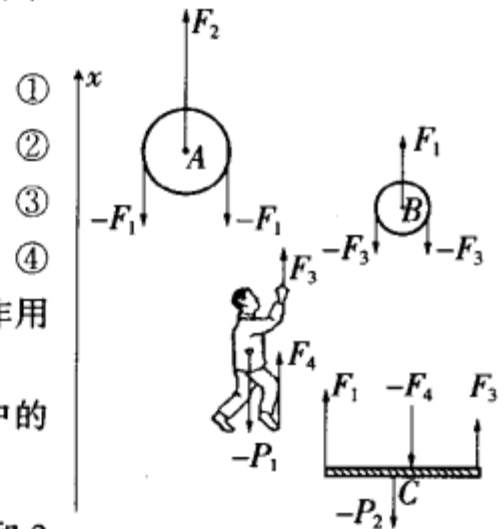
$$y \text{ 方向: } N_A - N_B - G_y = 0$$

木棒滑动前 $f_A \leq \mu N_A$, $f_B \leq \mu N_B$, 以 A 为参考点,

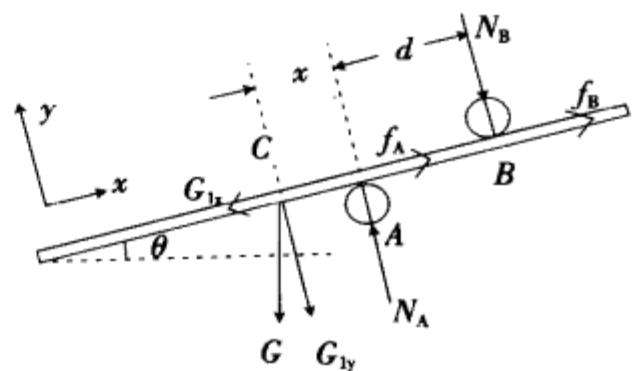
$$G_y \cdot x - N_B \cdot d = 0$$

2.15 如图所示为蜘蛛在 A 端(图 a)及在 B 端(图 b)的两种状态下吸管质心和蜘蛛质心的位置. 它在 A 端时,吸管和蜘蛛组成的体系质心坐标为 x_c ,

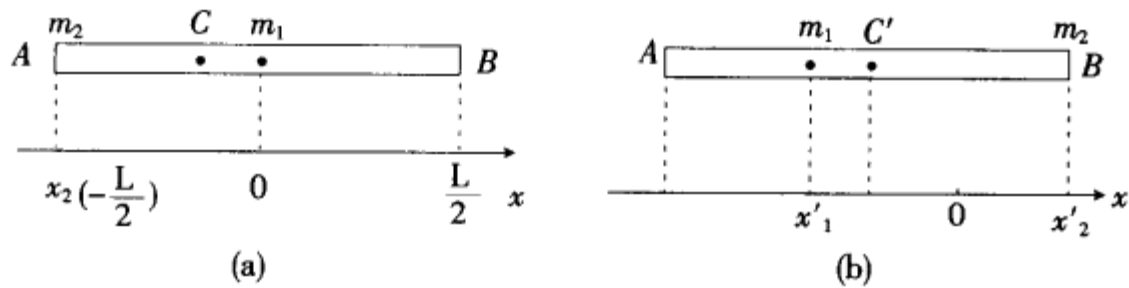
$$x_c = \frac{m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$



图习题 2.7



图习题 2.13



图习题 2.15

上式中 $x_2 = -\frac{L}{2}$. 蜘蛛在 B 端时, 体系质心为 x_c' ,

$$x_c' = \frac{m_1 x_1' + m_2 x_2'}{m_1 + m_2}$$

式中 $x_2' = \frac{L}{2} - |x_1'|$

因质心不变, $x_c = x_c'$

由此可解出 x_1', x_2' . 设松香质量为 m' , 以桌边为参考点, 要使吸管不倾倒, 力矩应满足

$$m_1 g |x_1'| \geq (m_2 + m') g \left(\frac{L}{2} - |x_1'| \right)$$

2.16 如图所示, 各球位置如上面的顶视图, 下面是其中一个处于下面的球和上面的球相互作用的受力图, 所画为侧视图的截面图.

上球受力 N_2, F_2 和 mg ; 下球受力 $F_1, F_2' = F_2, N_2' = N_2, mg, N_1$ 5 个力作用, 力平衡方程为:

$$\text{上球: } 3N_2 \sin \theta - 3F_2 \cos \theta = mg \quad \text{①}$$

$$\text{下球: } F_1 + F_2 \cos \theta = mg + N_2 \sin \theta \quad \text{②}$$

$$N_1 = N_2 \cos \theta + F_2 \sin \theta \quad \text{③}$$

对四个球整体而言, 共受到圆筒壁给于的摩擦力为 $3F_1$,

$$3F_1 = 4mg \quad \text{④}$$

下球以其球心 O_1 为参考点, 力矩平衡

$$F_1 r = F_2 r \quad \text{⑤}$$

为了实际不产生任何滑动, 上面的摩擦力 F_1, F_2 都必须小于或等于最大静摩擦力, 即

$$F_1 \leq \mu N_1, F_2 \leq \mu N_2 \quad \text{⑥}$$

2.17 如图所示, 力 F 必在 AC 线和 BC 线之间, 因为以 A 为支点和以 B 为支点讨论杆的平衡时 F 的力矩不能和重力矩同方向. 再由作用在 BC 杆上三力必共点可证明力 F 必在 DC 线和 BC 线之间.

以 A 点为参考点, 有

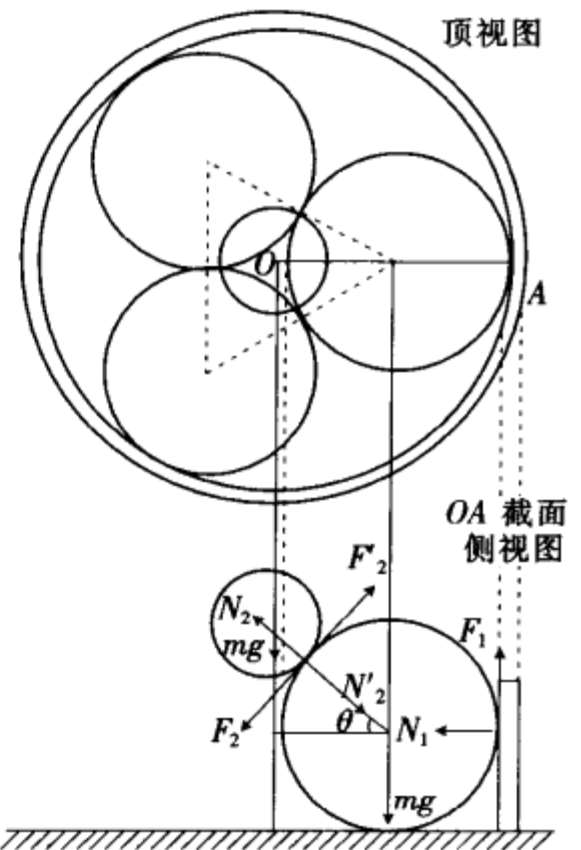
$$(m_1 + m_2) g \cdot \frac{l}{2} \cos 45^\circ = F \sin \theta \cdot \sqrt{2} l$$

以 B 为参考点, 有

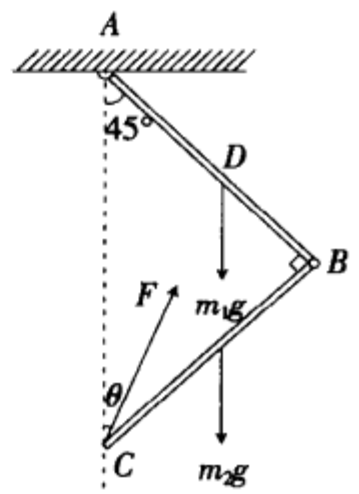
$$F \sin(45^\circ - \theta) l = m_2 g \cdot \frac{l}{2} \cos 45^\circ$$

2.19 (1) 考虑单位长度的动脉血管, 血管壁的内外压强差为 $p_1 - p_2$. 如图 2.19(a) 所示, 半个圆管上由内外压力差产生的铅垂方向的合力

$$F = 2 \int_0^{\pi/2} (P_1 - P_2) r \sin \theta d\theta = 2r(p_1 - p_2) \quad \text{①}$$



图习题 2.16



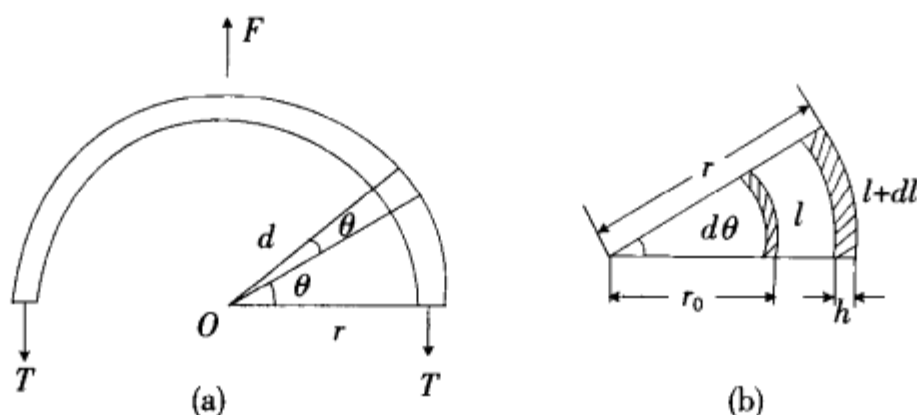
图习题 2.17

由力平衡条件 $2T = F$, 即得结果

$$T = (p_1 - p_2)r \quad ②$$

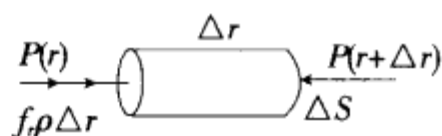
(2) 在内外压力差作用下血管半径由 r_0 变为 r , 如图(b)所示, $d\theta$ 角所对应的血管壁在圆周方向的应变即周向应变, 可表达为

$$\frac{(l + dl) - l}{l} = \frac{rd\theta - r_0d\theta}{r_0d\theta} = \frac{r - r_0}{r_0} \quad ③$$



图习题 2.19

2.20 (1) 球具有空间对称性, 在相同的半径 r 处压强应相等. 沿球径向取一细圆柱体, 底面为 ΔS , 高为 Δr , 如图 2.20 所示, 取 $\Delta S \rightarrow 0$ 的情况讨论. 小圆柱体两端面受到的压力分别为 $P(r)\Delta S$ 和 $P(r + \Delta r)\Delta S$, 作用在 r 处单位质量的流体上的万有引力为 f_r , 沿径向, 则小圆柱受到的万有引力为 $f_r \cdot \rho \Delta S \Delta r$. 由力平衡条件



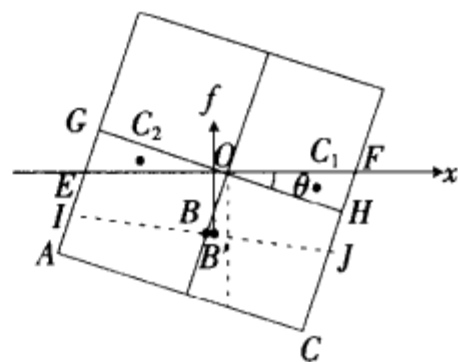
图习题 2.20

$$P(r)\Delta S - P(r + \Delta r) \cdot \Delta S + f_r \rho \Delta S \Delta r = 0 \quad ①$$

$$\frac{dp}{dr} = f_r \rho \quad ②$$

(2) 取地球为中心处 $r = 0$, 利用 $P(r)$ 关系可求得结果.

2.21 设木棒横截面的边长为 $2a$, 先讨论情况 a , 如图 2.21a 所示, 设想棒沿顺时针方向转过一个小角度 θ , O 为木棒中心, B 为木棒未倾斜时的浮心, B 点应在 $ACHG$ 长方形的中心上, 倾斜后, 浮心 B' 即梯形 $ACEF$ 的重心, 它必在 AE 中点 I 和 CF 中点 J 的连线上. 取水平方向为 x 轴, 求 B' 的 x 坐标 $x_{B'}$, 即可判断力矩所起的作用. 梯形 $ACFE$ 可看成矩形 $ACHG$ 加上三角形 OHF , 减去三角形 OGE , 因而 B' 的 x 坐标可由 B 点的 x 坐标 x_B 和三角形 OHF 的重心 C_1 的 x 坐标 x_{c1} , 三角形 OGE 的重心 C_2 的 x 坐标 x_{c2} 得到,

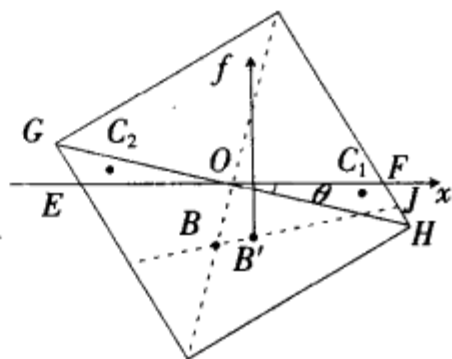


图习题 2.21a

$$x_{B'} = \frac{2a^2 \cdot x_B + \frac{1}{2} \cdot \overline{FH} \cdot x_{c1} - \frac{1}{2} a \cdot \overline{EG} \cdot x_{c2}}{2a^2}$$

再讨论(b)的情况, 如图 2.21b 所示, 仿照前面同样可得

$$x_{B'} = \frac{2a^2 \cdot x_B + \frac{1}{2} a \cdot \overline{FH} \cdot x_{c1} - \frac{1}{2} a \cdot \overline{GE} \cdot x_{c2}}{2a^2}$$



图习题 2.21b

第 3 章

3.5 m_2 受到绳子的摩擦力 f 即为绳子的拉力, 两物体的运动方程为

$$\begin{aligned} m_1 g - f &= m_1 a_1 \\ m_2 g - f &= m_2 (a_2' - a_1) \end{aligned}$$

注意到方程的列出是以地面为参照系的,因此 m_2 对地的加速度应为 $(a_2' - a_1)$

3.6 m (小方块) 的下滑运动不受 M (木板) 的影响,而 M 的下滑运动要受到 m 的影响,,因为 m 的存在使 M 所受的摩擦力增大了,分别求出 m 和 M 的下滑加速度,由此得出 m 相对 M 的加速度,即可求出方块从板上滑下的时间.

3.7 分别作圆筒 C 和小球 D 的受力图 列出运动方程:

$$D: \quad F - T \cos \theta = m_2 a$$

$$T \sin \theta = m_2 g$$

$$C: \quad T \cos \theta - f = m_1 a$$

$$N = m_1 g + T \sin \theta$$

$$\text{又} \quad f = \mu N$$

要维持圆筒运动, $a \geq 0$, 由以上关系解出临界角 θ .

3.8 先假设 B 有下滑趋势,则 A 有上滑趋势, A 和 B 的摩擦力方向应如图 3.8 所示,列出运动方程

$$N_A = m_A g \cos \alpha$$

$$N_B = m_B g \cos \beta$$

$$T - m_A g \sin \alpha - f_A = 0$$

$$m_B g \sin \beta - T - f_B = 0$$

同时满足条件: $f \leq \mu N$, 则可解得 $\frac{m_A}{m_B}$ 的最小值,若反过来, A 有下滑趋势,则 B 有上滑趋势,两者受力图中摩擦力的方向反过来,按上面相同方法可得 $\frac{m_A}{m_B}$ 的最大值,由此 $\frac{m_A}{m_B}$ 的范围即可知.

3.9 (2)图所示为 M 和 m_2 的受力图.三者相对静止时具有共同的水平方向加速度, m_2 向右运动的水平分量为张力 T 的水平分量,因此绳子应与竖直线有一夹角 θ .

$$T = m_1 a$$

$$T \cos \theta = m g$$

$$T \sin \theta = m_2 a$$

对 M 有: $F - T - T \sin \theta = M a$

3.10 M 和 m 相对于绳的加速度相同,但相对于地的加速度不同.

$$T - M g = M a_1$$

$$T - m g = m a_2$$

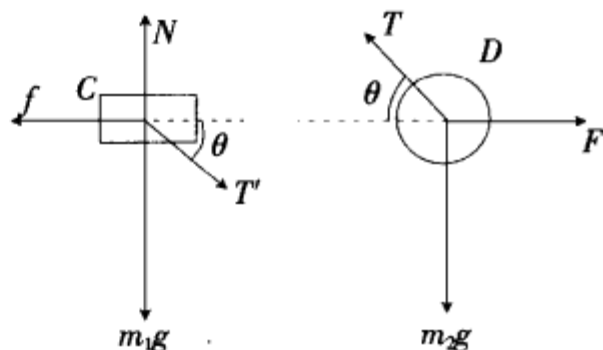
又 $h = \frac{1}{2} a_2 t^2, h' = \frac{1}{2} a_1 t^2$ 分别为 m 和 M 在 t 时间内上升的高度.

3.12 万有引力是月球作圆周运动的向心力,设月地间距为 R_{em} ,月球绕地球转动的角速度为 ω_m ,

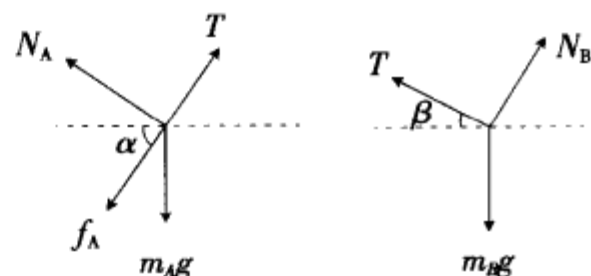
$$G_T \frac{M_e M_m}{R_{em}^2} = M_m \omega_m^2 R_{em}$$

利用 $G_T \frac{M_e \cdot m}{R_e^2} = m g$ 可得结果.

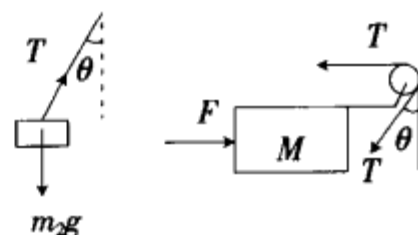
* 3.13 以小车为非惯性参照系,如图所示,小球受三力作用,其中,惯性力 $f^* = m a$, a 为小车加速度, $a = g \sin \theta$,沿斜面方程: $m g \sin \theta + T \cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta - \varphi \right) = f^* = m g \sin \theta$



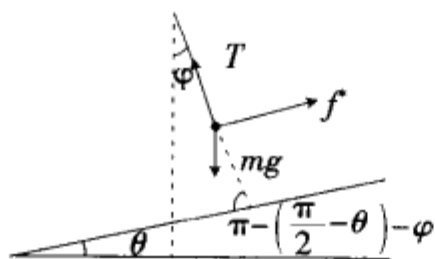
图习题 3.7



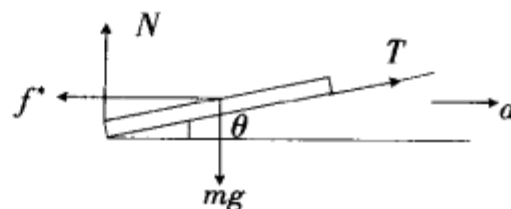
图习题 3.8



图习题 3.9



图习题 3.13



图习题 3.14

* 3.14 以车为非惯性参照系, $f^* = ma$, 由受力图可列出方程

$$T \cos \theta = f^*$$

$$T \sin \theta = mg$$

由几何关系有

$$\tan \theta = \frac{h}{\sqrt{(l+d)^2 - h^2}}$$

* 3.15 盒内两物体的运动以盒为非惯性参照系, m_1 和 m_2 相对于滑轮的加速度大小为 a' , 如图可得

$$m_1 g - T - f_1^* = m_1 a'$$

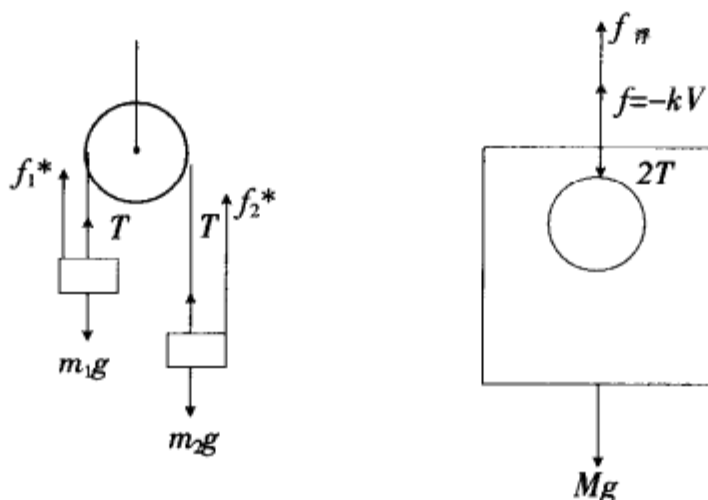
$$T + f_2^* - m_2 g = m_2 a'$$

惯性力

$$f_1^* = m_1 a$$

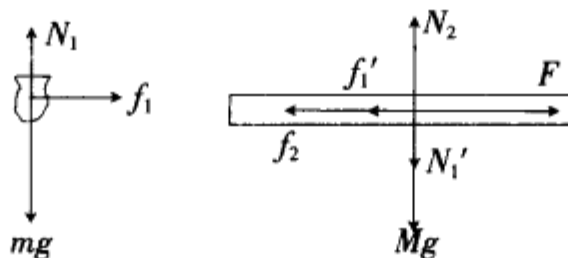
$$f_2^* = m_2 a$$

$$Mg + 2T - KV - \rho Vg = Ma$$



图习题 3.15

3.16 以地面为参照系, 花瓶和板的受力如图所示, 在板抽出过程中, 板与花瓶间的滑动摩擦力为 $f_1 = N_1 \mu$, 板与桌面间 $f_2 = \mu N_2$, $N_1 = N_1' = mg$, $N_2 = N_1 + Mg$, 两物沿水平方向的运动方程为



图习题 3.16

$$\mu m_1 g = ma_1$$

$$F - \mu mg - (M + m)g\mu = Ma_2$$

a_1 和 a_2 分别为花瓶和板的加速度. 由以上几式可解出 a_1 或 a_2 .

经过时间 t , 板从花瓶下抽出. $\frac{1}{2} a_2 t^2 - \frac{1}{2} a_1 t^2 = l$, 由此解出 t .

在板抽出过程中, 花瓶从静止开始作加速运动, $a_1 = \mu g$, 其速度从零变到 $v = a_1 t$, 位移为 $s_1 = \frac{v^2}{2a_1}$.

花瓶掉到桌上后, 在水平方向受摩擦力 $f_1' = -\mu mg$, 加速度为 $a_1' = -\mu g$. 为使花瓶不从桌边落下, 至少在桌边停住, 其速度由 v 变到零, 位移为 $s_2 = \frac{v^2}{2a_1'} = \frac{v^2}{2a_1}$.

3.17 先分析钢件受右滚轴作用, 如图所示, 在 x 方向, $v_x = \omega r$. (相对于轴) 在 y 方向, $v_y = v_0$. 合成速度为相对速度 v , 其方向为 $\tan\theta = \frac{v_x}{v_y} =$

$$\frac{\omega r}{v_0}$$

$f_{\text{右}}$ 的方向与 v 反向, 在 y 方向的投影为

$$f_{\text{右}} \cos\theta = f_{\text{右}} \frac{v_0}{v} = \frac{f_{\text{右}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega r}{v_0}\right)^2}}$$

左滚轴与右滚轴对称, 因而在水平方向与 $f_{\text{右}}$ 的水平分量相抵消, 在 y 方向分量相同, 总摩擦力等于 $f_{\text{右}}$ 的 y 分量的两倍.

$$F = f = 2f_{\text{右}} \cos\theta$$

钢件对称, 左、右滚轴受到的正压力各为 $\frac{1}{2} mg$,

$$f_{\text{右}} = \mu \cdot \frac{1}{2} mg$$

由以上关系式可解得结果

3.18 作 A 和 B 的受力图如 3.18 图所示,

$$N_B = m_{BG} + N \cos\theta$$

$$N \sin\theta - \mu N_B = m_{BA} a > 0 \quad \text{①}$$

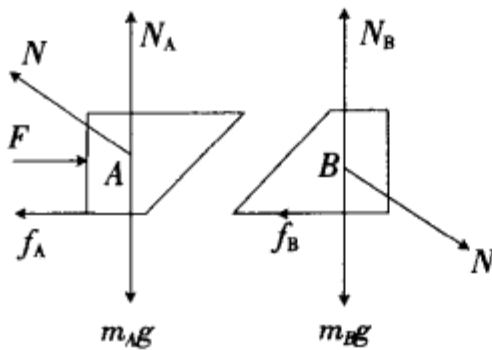
$$N_A \geq 0, \text{ 即 } N \cos\theta \leq m_{AG} \quad \text{②}$$

又

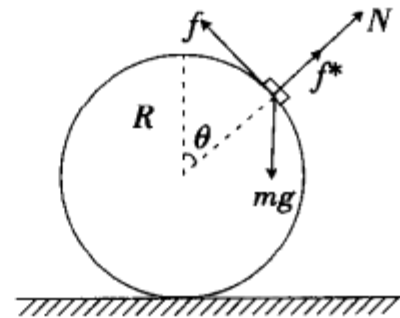
$$N_A = m_{AG} - N \cos\theta \quad \text{③}$$

A 的水平方向运动方程为

$$F - \mu(m_{AG} - N \cos\theta) - N \sin\theta = m_{AA} a \quad \text{④}$$



图习题 3.18



图习题 3.19

* 3.19 轮心相对地面作匀速直线运动, 因此轮心参照系即惯性系, 图示为在该参照系中小石子的受力情况, 其中 $f^* = m\omega^2 R$ 为小石子所受的惯性离心力. 设在图示位置(石子的角位移为 θ)时, 发生相对滑动, 此时 $f = f_{\text{max}} = \mu N$. 由石子静止条件可得

$$mg \cos\theta - N - m\omega^2 R = 0 \quad \text{①}$$

$$mg\sin\theta - \mu N = 0 \quad ②$$

* 3.20 以大环为匀速转动的参照系,小环相对大环静止,如图为小环的受力图,设 \overline{OA} 与 x 轴的夹角为 φ ,由圆的几何关系, $\varphi = \theta/2$.

$$\text{又 } \overline{OA} = r = 2R\cos\varphi$$

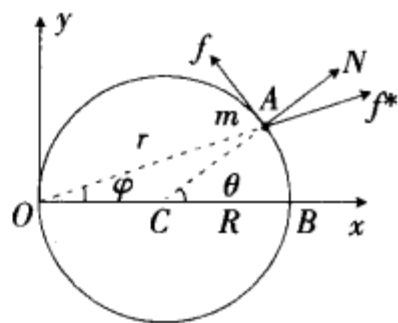
小环受到的惯性离心力为 $f^* = m\omega^2 r = 2m\omega^2 R\cos\varphi$

设摩擦力和正压力方向如图,摩擦力为切向,正压力为法向:

$$f^* \sin\varphi - f = 0$$

$$N + f^* \cos\varphi = 0$$

要保持小环和大环相对静止,则 $f \leq f_{\max} = \mu N$,可得 μ .



图习提 3.20

第 4 章

4.1 m 下落 h 后,绳张紧, m 、 M 受绳子的冲力作用,这时冲力比重力大得多,可忽略重力的影响.在冲力作用下 m 和 M 达到共同速度 V ,以向上为正方向

$$T\Delta t = MV - 0$$

$$T\Delta t = -mV - (-mv)$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

由以上方程解得 V .以后, m 、 M 在绳子张力和物体重力作用下运动.

4.4 以大球球心 O' 为参照系 s' 的原点,小球坐标 x' 、 y' 分别为

$$x' = R\sin\theta \quad y' = R\cos\theta$$

由上面二式得

$$x'^2 + y'^2 = R^2 \quad ①$$

m 相对地面的位移:(设小球在大球顶端时 O, O' 重合)

$$x = x' + X \quad ②$$

$$y = y' \quad ③$$

小球和大球体系在水平方向不受外力,质心的 x 坐标不变

开始

$$x_c = 0,$$

以后

$$x_c = \frac{mx + MX}{M + m}$$

4.5 以投出麻袋后单个船和对方投来的麻袋为体系,因水的阻力忽略不计,沿船的方向动量守恒.载重小的船速度为 v_1 ,麻袋扔进来后速度变为 0,

$$(m_1 - m)v_1 - mv_2 = 0 \quad ①$$

载重大的船

$$-(m_2 - m)v_2 + mv_1 = -m_2v \quad ②$$

4.6 (1)以墙背风的一面底部边缘为轴,即图中 O 处,在水平方向取单位长度的墙面进行计算,这部分墙的体积为 $hd \cdot 1$,墙重为 $m_1g = \rho_1ghd$,重力作用在质心上,对 O 轴的力矩为

$$M_1 = m_1g \cdot \frac{d}{2} = \rho_1gh \cdot \frac{d^2}{2} \quad ①$$

这部分墙面面积为 $h \cdot 1$,该部分墙面受到的风力是单位时间内打到墙上的空气分子的动量.

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} \quad ②$$

单位时间打到墙面上的空气分子是体积在 $v \cdot \Delta t \cdot h \cdot \Delta l$ 里的分子,这里取 $\Delta t = 1, \Delta l = 1$ (单位长度),这些空气分子的质量为

$$m_2 = \rho_2vh \quad ③$$

这些分子具有速度 v (风速),打到墙上速度变为 0,因此

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{m_2v}{1} = (\rho_2vh)v = \rho_2v^2h \quad ④$$

这体积的空气分子的质心在墙面上高为 $\frac{h}{2}$, 风力对 O 轴的力矩为

$$M_2 = F \cdot \frac{h}{2} = \rho_2 v^2 h^2 / 2 \quad (5)$$

当墙正好被风吹倒时的风速临界值可由 $M_1 = M_2$ 求得.

(2) 墙在翻倒时, 不发生滑动的条件为

$$F_2 \leq \mu F_1$$

4.7 车和 N 个人组成的体系水平方向不受外力, 因此体系水平方向动量守恒, 开始时体系处于静止状态, 系统总动量为零.

(1) N 个人同时跳出车子, 由动量守恒:

$$Mv + Nm(v + u) = 0 \quad (1)$$

(2) N 个人一个一个地跳车, 第一人跳车时, 车速为 v_1 ,

$$[M + (N - 1)m]v_1 + m(v_1 + u) = 0$$

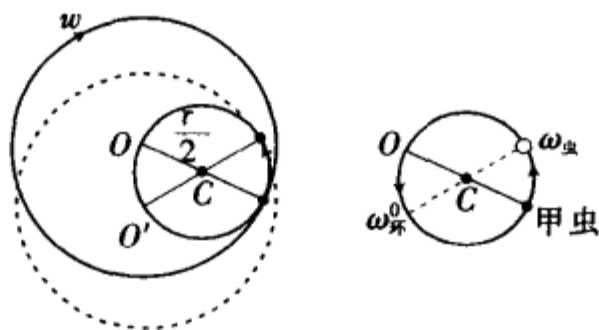
当第二人跳车时, 车速变为 v_2 . 由水平方向动量守恒

$$[M + (N - 2)m]v_2 + m[v_2 + u] = [M + (N - 1)m](-mu) / (M + m)$$

依此类推.

4.8 甲虫和圆环系统在水平方向不受外力, 所以不管甲虫怎么在环上爬行, 系统质心保持不变. 如图所示, 在甲虫和环心 O 作一直线, 设圆环半径为 r , 因甲虫与圆环质量相等, 所以其共同的质心在该连线的中点, 即离 O 为 $\frac{r}{2}$ 处, 当甲虫爬行时, C 不变, 则环以后的质心 O' 和甲虫、质心 C 永远在一直线上, 如图中所示, 由此可知, 甲虫围绕 C 点作半径为 $\frac{r}{2}$ 的圆周运动, 圆环的中心 O' 亦作同样的圆周运动, 且转向相同, 使甲虫和 O' 永远在一直线上, 转速也必相等, 即

$$\omega_{\text{虫}} = \omega_{\text{环心}} \quad (1)$$



图习题 4.8

对 C 点体系的角动量守恒

$$m \left(\frac{r}{2}\right)^2 \omega_{\text{虫}} + m \left(\frac{r}{2}\right)^2 \omega_{\text{环心}} + mr^2 \omega = 0 \quad (2)$$

上式中第二项是环心绕 C 点的角动量, 第三项是环绕自己质心的角动量, 这两者之和为圆环的总角动量. 由①②式得

$$\omega_{\text{虫}} = \omega_{\text{环心}} = -2\omega \quad (3)$$

由题意, 甲虫相对环的角速度为 ω_0 , 由相对运动关系.

$$\omega_0 = \omega_{\text{虫}} - \omega = -2\omega - \omega = -3\omega \quad (4)$$

4.9 重力对碎片的动量变化的影响可忽略不计, 体系动量守恒, $v_1 = v_2 = v_3$, $v_{1y} = v_{2y} = \frac{1}{2}v$,

$$y_1(t) = H + \frac{1}{2}vt - \frac{1}{2}gt^2$$

$$y_3(t) = H - vt - \frac{1}{2}gt^2$$

由 $y_1(T_2)=0$ 和 $y_3(T_1)=0$, 代入上面两式可解得 H .

而
$$a_c = \frac{Ma_M + ma_m}{M + m}$$

由相对运动

$$a_{m对M} = a_m - a_M$$

4.13 如图习 4.13 所示. 绳子断后, 质点沿切向作匀速直线运动,

$$v = v_0 \sin \theta = v_0 \frac{b}{l}$$

绳断开时的角动量为

$$L = mvr \sin \varphi = mvl = mv_0 b$$

质心对 O 点的角动量不变.

4.14 小孔喷出的水作竖直上抛运动, 达到高为 h 时, 速度为 v .

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gh} \quad \text{①}$$

每秒钟从小孔中喷出的水的质量为 $\frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho v_0 S$, 这些水的动量变化率为

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{-\Delta m \cdot v - \Delta m v}{\Delta t} = -2 \frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot v = -2\rho v_0 S v$$

当桶停留在空中时, 桶的重力与水对桶的向上冲力平衡, 即

$$f - Mg = 0 \quad \text{③}$$

* 4.16 轻杆和两小球组成的系统和另一小球碰撞过程中全系统不受外力矩作用, 对 O 轴的角动量守恒.

$$mv_0 \cdot \frac{2}{3}l = -m \cdot \frac{v_0}{2} \cdot \frac{2}{3}l + m \left(\frac{2}{3}l\right)^2 \omega + 2m \left(\frac{1}{3}l\right)^2 \omega$$

4.17 质点对中央立柱的角动量守恒(而不是对顶点 O 守恒), 即

$$mr_1 v_1 = mr_2 v_2$$

* 4.18 以地面为参照系, 研究汽车质心的运动. 地面给后轮竖直向上的正压力 N_2 , 开动引擎使汽车后轮加速转动, 这就使后轮的着地点有向后滑动的趋势, 因此地面给后轮向前的摩擦力. 由质心运动定理

$$f = ma \quad \text{①}$$

$$N_1 + N_2 - mg = 0 \quad \text{②}$$

上式中 N_1 、 N_2 分别是前轮和后轮上得到的向上的正压力. 相对于质心坐标系列出转动定律的方程. 在质心系中, 车静止, $M=0$, 对质心来说,

$$fh + N_1 l - N_2 l = 0 \quad \text{③}$$

由①~③可解出 f 、 N_1 、 N_2 .

不打滑的条件为

$$f \leq \mu N_2$$

4.19 解法一: 设细绳拉紧时, AB 和 BC 绳中的张力的冲量分别为 I_1 和 I_2 , 对 A 球来说, 它只受冲量 I_1 ($-y$ 方向), 坐标选取见题图, 故 A 球的动量沿 x 方向的分量保持不变,

$$v_{Ax} = v_0 \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} v_0$$

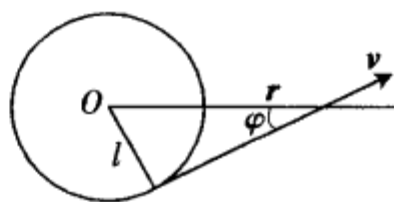
由质点的动量定理, 有

$$3mv_{AY} - 3mv_0 \sin 30^\circ = -I_1 \quad \text{①}$$

将 B 球速度沿 AB 方向和 BC 方向分解, B 球受 I_1 和 I_2 作用,

$$v_B = v_{BA} + v_{BC}$$

$$2mv_{BA} = I_1 \quad \text{②}$$



图习提 4.10

$$2mv_{BC} = I_2 \quad (3)$$

C 球受冲量 I_2 作用,

$$mv_C = I_2 \quad (4)$$

解法二:如图习题 4.19 所示,取 x 、 y 方向为水平和垂直方向,设绳拉紧时 A、B 球的速度 v_A 和 v_B 与绳的夹角分别为 θ 和 φ , A、B、C 三球组成的体系在水平方向不受外力,故沿 x 和 y 方向系统的动量均守恒.由此可得

$$3mv_0 = 3mv_A \cos(\theta - 60^\circ) + 2mv_B \cos(\varphi + 60^\circ) + mv_C \quad (5)$$

$$-3mv_A \sin(\theta - 60^\circ) + 2mv_B \sin(\varphi + 60^\circ) = 0 \quad (6)$$

由沿绳方向两球的速度分量相等,可得

$$v_A \cos \theta = v_B \cos \varphi \quad (7)$$

$$v_C = v_B \cos(\varphi + 60^\circ) \quad (8)$$

另外,由 A 球在绳拉紧前后沿垂直于绳方向上动量不变,可得

$$v_A \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} v_0 \quad (9)$$

由⑤~⑨式,可解得 v_C .

4.20 设行星质量为 m ,恒星质量为 M ,行星绕恒星作半径为 r 的圆周运动,角速度为 ω ,线速度为 v ,行星受到恒星的万有引力作用,大小为 GMm/r^2 ,行星运动方程为

$$GMm/r^2 = mv^2/r = mr\omega^2 \quad (1)$$

行星绕恒星运动的角动量为 $L = mr^2\omega$,在有心力场中,行星的角动量守恒

4.21 (1)取 x 轴平行于火箭轨道并指向运动前方.火箭在自由场中运动, $F = 0$,被喷射气体的相对速度为 $-u$,于是,由密舍尔斯基方程,有

$$M \frac{dv}{dt} = -u \frac{dM}{dt} \quad (1)$$

假设初始时刻火箭质量为 M_0 ,速度为 v_0 ,燃料烧完时火箭质量为 M_S ,速度为 v ,将①式分离变量积分,

$$\int_{v_0}^v dv = -u \int_{M_0}^{M_S} \frac{dM}{M}$$

4.22 解法一:应用变质量的密舍尔斯基方程.某时刻,落在秤盘上的链条长 $(l-x)$,留在空中的长为 x ,链条速度为

$$u = -\sqrt{2g(l-x)} \quad (1)$$

以秤盘上那段链子作为主体,则 $v=0$, $M = \rho(l-x)$.主体所受重力为

$$F = -\rho(l-x)g$$

秤盘支承力 N 竖直向上,由密舍尔斯基方程

$$M \frac{dv}{dt} = (u - v) \frac{dM}{dt} + F \quad (2)$$

解法二:用质心运动定理.

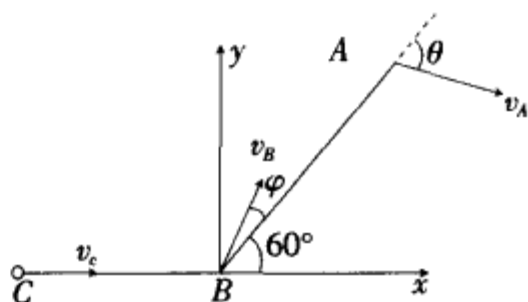
链条质心位置

$$x_c = \frac{\rho x \cdot \frac{x}{2} + 0}{\rho l}$$

质心速度

$$v_c = \frac{dx_c}{dt}$$

质心加速度



图习题 4.19

$$a_c = \frac{dv_c}{dt}$$

由质心运动定理

$$N - \rho gl = \rho la_c = \rho l \cdot \frac{2gl - 3gx}{l}$$

可得 N 的值

解法三:用动量定理.

秤盘对链条的支承力除去落在秤盘上的那段链条重力 $\rho g(l-x)$ 外,要使得在 dt 时间内,链条长为 dx 的一段在落下时动量从 $\rho dx \cdot v$ 变为零,因此

$$\begin{aligned} N - \rho g(l-x) &= \frac{dP}{dt} = v \frac{dm}{dt} = v\rho \frac{dx}{dt} = \rho v^2 \\ &= \rho(\sqrt{2g(l-x)})^2 = 2\rho g(l-x) \\ N &= 3\rho g(l-x) \end{aligned}$$

解得

第 5 章

5.2 设汽车功率为 P ,汽车重力沿斜坡的分量为 F ,阻力为 f ,功率不变.

$$\text{上坡时} \quad (F+f)v_1 = P \quad \text{①}$$

$$\text{下坡时} \quad (f-F)v_2 = P \quad \text{②}$$

$$\text{水平路面} \quad fv = P \quad \text{③}$$

5.3 (1)由功能原理,小球上升到 h 高度和回到原处时分别有

$$mgh - \frac{1}{2}mv_0^2 = -fh \quad \text{①}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -2fh \quad \text{②}$$

又由已知条件

$$v = \frac{3}{4}v_0 \quad \text{③}$$

(2)真空中无阻力,由机械能守恒

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh_0 \quad \text{④}$$

5.5 (1)链条开始下滑时,下垂部分的重力等于桌面上链条所受到的最大静摩擦力

$$f = \mu N = \mu \frac{l-a}{l}mg, \text{下垂部分重力为 } \frac{a}{l}mg,$$

$$\text{由} \quad \mu \frac{l-a}{l}mg = \frac{a}{l}mg$$

可求得 a

(2)由功能原理

$$W_f = E_P + E_K - E_{P0} \quad \text{①}$$

$$\text{其中} \quad E_{P0} = -\frac{a}{l}mg \cdot \frac{a}{2}, E_P = -mg \frac{l}{2}, E_K = \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{②}$$

当链条下滑了 x 长度时,摩擦力所作元功为

$$dW_f = -f_\mu dx = -\mu \frac{m}{l}(l-a-x)g dx$$

$$\text{总功为} \quad W_f = \int dW_f = \int_0^{l-a} -\mu \frac{m}{l}(l-a-x)g dx = -\frac{mg}{2l}\mu(l-a)^2 \quad \text{③}$$

5.6 取弹簧自由伸长时的端点位置为 x 轴坐标原点 O , x_1 是加了外力 F 和 m_A 以后体系的平衡位置, x_2 是撤去外力后、 m_B 离开地面的瞬时 m_A 的位置,提起 m_B 时, $N=0$, 所以有

$$kx_2 \geq m_B g \quad \text{①}$$

$$F + m_A g = kx_1 \quad \text{②}$$

体系机械能守恒(撤去外力后计算)

$$\frac{1}{2} kx_2^2 + m_A g x_2 = \frac{1}{2} kx_1^2 - m_A g x_1 \quad (3)$$

5.8 滑块和木板体系水平方向不受外力,该方向动量守恒

$$mv_0 = m \cdot \frac{v_0}{5} + MV$$

由动能定理,木板不固定时

$$-fL = \frac{1}{2} m \left(\frac{v_0}{5} \right)^2 + \frac{1}{2} MV^2 - \frac{1}{2} mv_0^2$$

木板固定时

$$-fL = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2$$

5.9 先由已知条件找出 A、B 球碰撞后的速度 v_A 、 v_B 和 A 球碰前速度 v_{A0} 的关系

$$v_{A0} = k(v_A + v_B)$$

$$v_B = nv_A$$

两球碰撞过程中水平方向动量守恒

$$m_A v_{A0} = m_A v_A + m_B v_B$$

设 B 球到达右端时, A 球经过距离 s ,

$$s = v_A \cdot t = v_A \cdot \frac{l}{v_B}$$

A 球和 B 球对 O 点的重力矩之和为

$$M = m_{AG} \left(\frac{l}{2} - s \right) - m_{BG} \frac{l}{2}$$

当 $M \geq 0$ 时,木板不会翻倒.

5.12 电子和原子体系碰撞,动量守恒,体系总能量守恒,设碰撞后电子和原子的速度分别为 v 和 V ,有

$$mv_0 = mv + MV$$

$$\frac{1}{2} mv_0^2 = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} MV^2 + E$$

v 必须为实数.

5.13 M, m 和地球体系机械能守恒

$$mgh = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} MV^2$$

M, m 体系水平方向不受外力,动量守恒

$$mv_x = MV$$

设 m 相对于 M 以 v' 运动,则

$$v_x = v' \cos \alpha - V$$

$$v_y = v' \sin \alpha$$

5.14 (1) 小球与壁作完全弹性碰撞,速率不变,仍为 v_0 ,两壁间往返一次需时间 $t = \frac{2l}{v_0}$,小球每碰一次,动量改变为 $2mv_0$,由动量定理,每个壁所受平均力为

$$F = \frac{2mv_0}{t} = \frac{2mv_0}{2l/v_0} = mv_0^2/l$$

(2) 当左壁以 V 向右运动时,以左壁为参照系

$$v_{\text{绝对}} = v' + V = (V + v) + V = 2V + v$$

因而反弹一次,球的速率增加为

$$\Delta v = (2V + v) - v = 2V$$

球往返一次所需时间为 $\Delta t \approx 2x/v$, x 是某时刻两壁间距.

当壁间距离为 x 时, 每壁平均受力为

$$F = \frac{2m(v+V)}{2x/v} \quad (V \leq v)$$

(3) 把左壁从距离 l 推进到 x 时所需的功为

$$W = \int_l^x -F dx$$

5.15 (1) 摩擦力对小车所作的功等于它动能的变化.

$$-\mu Mg s = 0 - \frac{1}{2} m v_0^2$$

由此可得 s

(2) 小车和墙壁第一次碰撞后的瞬间, 速度变为 $-v_0$, 而滑块速度仍为 v_0 , 因此质心速度为

$$v_{c1} = \frac{M-m}{M+m} v_0$$

以后体系水平方向不受外力作用, 直到和墙发生第二次碰撞, 质心速度变为

$$v_{c2} = \frac{M-m}{M+m} v_{c1} = \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2 v_0$$

以后, 小车与墙发生多次碰撞, 每次情况类似.

(3) 体系最后速度减为零, 停在墙边, 设滑块相对车的总位移为 L , 则由动能定理

$$\frac{1}{2} (M+m) v_0^2 = \mu Mg L, L \text{ 即为小车最短长度.}$$

5.16 当质点位于碗内 k 点时, $r = R \sin \theta_0$, r 为质点到轴 OO' 的距离, 小球所受的重力 mg 与轴平行, 另一个力 N 是碗壁对质点的正压力, 方向指向球心 O , 该力在竖直方向的分量与 mg 大小相等, 方向相反, 互相抵消, N 在水平方向的分量和轴 OO' 垂直, 与 r 方向相反, 故合力对 OO' 轴的力矩为零, 质点对 OO' 轴角动量守恒, 当质点到达碗口时, 角动量为

$$L = mRv$$

质点被抛射时, 角动量为

$$L_0 = mrv_0 = mRv_0 \sin \theta.$$

质点在整个运动过程中仅重力做功, 机械能守恒,

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v^2 + mgR \cos \theta_0.$$

5.17 由题图知小环受三力作用, mg 、 N 、 f . 沿圆环切向的分量为

$$F_t = mg \sin 2\theta - f \sin \theta$$

$$f = k(2R \cos \theta - R)$$

得

$$F_t = (mg - kR) \sin 2\theta + kR \sin \theta$$

在本题中, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$, 满足 $\cos \theta \leq 1$.

由 B 、 C 两点 $E_B = E_C$, 得

$$-\frac{1}{2} mgR = -2mgR \cos^2 \theta + \frac{1}{2} kR^2 (2\cos \theta - 1)^2 + \frac{1}{2} m v_m^2$$

小环在 C 点处的法向运动方程为

$$N + k(2R \cos \theta - R) \cos \theta - mg \cos 2\theta = m \cdot \frac{v_m^2}{R}$$

5.18 (1) 当球到达最低点时, 绳子的张力等于重力和维持小球作圆周运动所需的向心力, 设绳伸长 Δl 长度,

$$k \Delta l = mg + \frac{mv^2}{l + \Delta l}$$

小球、弹性绳和地球组成的体系只有重力和弹性力作用,体系机械能守恒

$$\frac{1}{2}k(\Delta l)^2 + \frac{1}{2}mv^2 = mg(l + \Delta l)$$

由以上二式并利用 $\Delta l \leq l$ 即可求得结果.

5.19 (1)铁球和小车系统水平方向不受外力,水平方向动量守恒,设铁球离开车时速度为 v_1' ,方向为 x 正方向,这时车速为 V_1 ,方向为 $-x$ 方向,由动量守恒定律

$$-mv = -mV_1 + mv' \quad (1)$$

对铁球、小车和地球体系,上述过程只有保守内力做功,机械能守恒,取轨道水平处为势能零点.

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mV_1^2 + \frac{1}{2}mv'^2 \quad (2)$$

(2)当铁球上升到最大高度 h 时,它相对小车的速度为零,因而它对地具有与小车相同的水平速度 V_2 ,上升过程中铁球、小车与地球系统机械能守恒.

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh + \frac{1}{2}mV_2^2 + \frac{1}{2}mV_2^2 \quad (3)$$

小车与球水平方向动量守恒.

$$-mv = -mV_2 - mV_2 \quad (4)$$

5.20 (1)如图所示,由于整个体系在水平方向动量守恒,当小球运动有水平方向分量时,木板有一反方向运动,小球相对桌面的位移为

$$\Delta r = \Delta r' + \Delta r_M$$

式中 $\Delta r'$ 是球相对木板的位移, Δr_M 是木板相对地面的位移,这过程中,绳子张力 T 对小球做功为

$$\begin{aligned} \Delta A &= T \cdot \Delta r = T \cdot (\Delta r' + \Delta r_M) = T \cdot \Delta r' + T \cdot \Delta r_M \\ &= T \cdot \Delta r_M \end{aligned}$$

张力 T 对木板做功为 $\Delta A_M = -T \cdot \Delta r_M$

因此 $\Delta A + \Delta A_M = 0$

由动能定理,对木板

$$A_M = \frac{1}{2}Mv_M^2 \quad (1)$$

系统水平方向动量守恒,

$$mv_c + Mv_M = 0 \quad (2)$$

体系机械能守恒.

$$\frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}Mv_M^2 = mgl \quad (3)$$

(2)小球运动到 B 点,球相对板的速度为 v' ,由水平方向动量守恒和体系机械能守恒.

$$m(v_M - v' \cos 60^\circ) + Mv_M = 0 \quad (4)$$

$$\frac{1}{2}m[(v_M - v' \cos 60^\circ)^2 + (v' \sin 60^\circ)^2] + \frac{1}{2}Mv_M^2 = mgl(1 - \cos 60^\circ) \quad (5)$$

由④⑤式得 v_M .

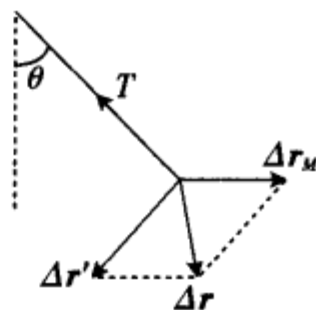
第 6 章

6.1 弹簧振子的固有频率 ω 由振子质量和弹簧的劲度系数决定.而振子总能量与振幅 A 有关.由初始条件可以定出初相 φ .由 A, ω, φ 值即可列出振动方程.

6.2 正确作出二分振动的参考图,使其旋转矢量在 x 轴上投影为振幅一半,从而找出它们间的位相差.

6.3 在匀加速运动系统中振子受到惯性力,振动平衡位置变化,不影响其振动频率.

6.4 (1)物体在水平方向振动时受到水平力的最大值为最大静摩擦力,再由 $a = -\omega^2 x$ 决定出位



图习题 5.20

移最大值即振幅。

(2)物体在竖直方向振动时不致脱离板的条件应该是在最高点处支撑力接近为零。

6.5 匀质杆在水平方向的振动,由水平方向上所受的二个水平摩擦力决定,摩擦力与正压力有关,正压力可以通匀质杆质心处重力与一轮上支撑力对另一轮与匀质杆接触点力矩平衡求得。

6.6 由于液体质量分散,因此可用能量法分析液体振动.取两边液面相齐平时为平衡位置 O ,并取平衡时势能为零.列出机械能守恒式,再推导出加速度与位移关系,即解求得圆频率。

6.7 (1)由 m_1 固定时,弹簧频率与 m_2 固定时弹簧频率之比与振子质量间关系即能求得 m_1 的振动频率。

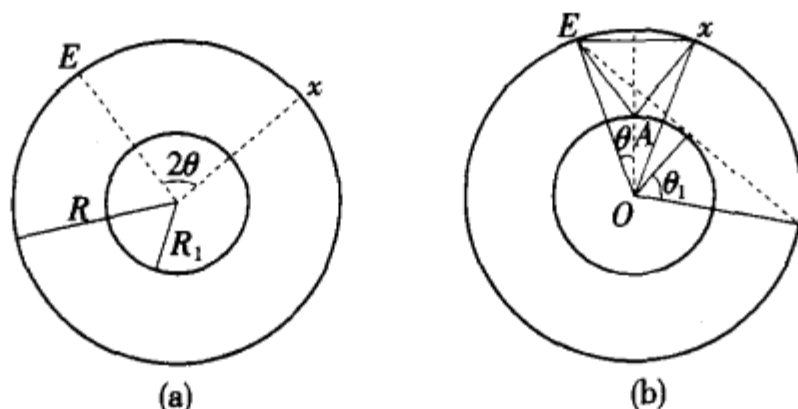
(2) m_1, m_2 均自由时,可分别列出其动力学方程,然后相加后求得合成振动频率。

6.8 在弹簧质量不可忽略的情况下,严格说来是弹性波在弹簧振子中的传播问题.由于通常弹性波的波长比振子的长度要长得多,在此条件下,弹簧上各部分和机械振动物体均以相同的位相作简谐振动,在不考虑摩擦力情况下,弹簧振子的总机械能守恒,取离弹簧固定端为 l 的一小段弹簧 dl ,则其质量为 $\frac{m}{L}dl$,位移为 $\frac{l}{L}x$,速度为 $\frac{l}{L}v$.由一段弹簧上动能列出整个长度 L 上各质元动能.再列出机械能守恒式,再由速度导数求得加速度,即能列出动力学方程 $a = -\omega^2 x$ 从而求得振动频率。

6.9 该题是验证题,因而只需列出第 i 质点的运动方程,然后用解代入试解,验证要能满足此方程时对应的圆频率,然后再推广到无穷多质点。

6.10 (a)地震波在地幔中,横波纵波均沿直线传播,传播最远距离为 x ,此时 E, x 与地心间有一最大夹角 θ (如图习提 6.10(a)所示),根据 x, v ,即可求得时间。

(b)在 $\theta <$ 此角时,波传播到地心时横波不能传播,而纵波要产生折射,纵波要经二次折射后才能到达 x 处(如图习提 6.10(b)所示)。



图习提 6.10

根据折射定律, x 位置由入射角 R 传播速度 v 决定,由此可求得 θ, v_p 与入射角之间关系。

6.13 由波形图中得出 λ , 给出效率从而求得周期,分别根据在 Δt 内通过距离求得波沿正、反面方向传播的波速 u_+, u_- . 并与题设比较即能判断出此波沿哪方向传播。

6.14 在波速一定情况下,弦两端固定时二端必为波节,则对应波长只能取 $\frac{1}{2}\lambda$ 或 $\frac{3}{2}\lambda$ 。

6.15 孤立波在绳上匀速传播对应画出 $t = 6$ 秒时各点相应传播距离即得 t 时波形。

在遇到固定点反射时要注意到半波损失影响,对应点的位相在反射点要有 π 突变,然后再与入射波迭加。

6.16 入射波与反射波在波动方程中仅是波速方向相反,但注意到反射波在反射点有半波损失位相要有 π 突变.将入射波与反射波迭加即成驻波,波腹即为振幅最大处,波节即为振幅为 0 处。

6.17 将驻波方程与 $y = 2A \cos \frac{2\pi}{\lambda} \cos \frac{2\pi}{T} t$ 比较即可得出相应值.质点速度可由位移的一阶导数求得。

6.18 (1) 声波与观察者同时相对媒质运动时,接收频率 $\nu' = \frac{u - v_2}{u - v_1} \nu$

(2) 当空气有风时,相对静止系统声速 $u = (340 - 15)\text{m/s}$

(3) 二车同方向运行时 $\nu' = \frac{u - v_2}{u - v_1} \nu$ 有风时 $u = (340 + 15)\text{m/s}$

6.19 声波在空气中传播速度 $u = \sqrt{\frac{\delta P}{S}}$.

空气柱固有频率 $\nu_n = n \frac{u}{2l}$,井口是开端共鸣时井口应为波腹.

第 7 章

7.1 要考察倒插在液体中的 U 形管中的液体能否流过 U 形管的顶部沿着管上流动,怎样流动,只要先假定液体静止,分析管内顶部一薄液片两侧的压强大小,若压强不等,液片将从压强大的一侧向压强小的一侧流动.

7.2 1mol 理想气体状态方程为 $pV = RT$,因而由初态 $p_0 T_0$ 及状态方程就能求出 α 值.

7.3 闭管中气体是一定量气体,在温度不变时,在 U 形管内水银漏出前后 $p_1 V_1 = p_2 V_2$,开始压强已知,由 V_1, V_2 即可求出 p_2 ,漏出气体体积应表示二管内气体体积变化总和,再根据连通器中同一高度处压强必须相等,即可求出右臂水银面下降的高度.

7.4 左右两管中空气柱在封闭管子前后由于温度不变,一定量气体分别满足玻义耳定律,求出在封闭管子前后压强与体积关系,和两边体积变化的总和应等于压入 U 形管中水银体积,即可求出原来压强.

7.6 在 40°C 时溶入啤酒内 CO_2 的质量减少 Δm ,根据质量守恒就应该是气态 CO_2 质量增加了 Δm ,由同种气体体积不变时 $\frac{p}{T}$ 与 m 成正比,由此即可求得温度升高后瓶内 CO_2 气体的压强.

7.7 以玻璃管作研究对象分析它的受力情况,开始管内气体压力,弹簧秤拉力与玻璃管重力及大气压力相平衡,当玻璃管没入水中一定深度后,再根据管内液面压差即可求得插入深度.

7.8 杯子浮在水面处于平衡状态时,盛水杯子的重力与浮力相等,根据阿基米德原理,排开液体重量可称出浮力,当其沉入水中能不上浮也不下沉时,所受浮力等于杯子重力,这样根据已知浮力即可求得排开气体体积.

7.9 对一定量气体在保持温度不变时,压强与体积关系为 $p_1 V_1 = p_2 V_2$,开始状态压强,体积已知,后来状态压强与体积则需由 A, B 两活塞处于新平衡状态时受力分析求得.

7.12 在溶化冰过程中,若不计热量损失则球形工件失去热量应该等于冰溶化时吸收热量 $Q_{\text{放}} = Q_{\text{吸}}$,当球形工件陷入冰中后,要注意计算融化冰的体积时应为半个球体体积和以球截面积为底的柱形体积之和.

7.13 本题是个文字题,因此在讨论用量热器测量比热 $Q_{\text{放}} = Q_{\text{吸}}$ 时,要分三种情况讨论.

(1) 水全部变成冰终温度 $t < 0^\circ\text{C}$.

(2) 冰全部化成水终温度 $t > 0^\circ\text{C}$.

(3) 仍为冰水混合物,终温度 $t = 0^\circ\text{C}$.

7.16 由于毛细现象,当毛细管中上升液体重量等于该液柱所受表面张力时,液柱就不再上升.

7.17 当毛细管插入液体中,由于液体润湿毛细管,使管内液面发生弯曲产生附加压强,液面将沿管壁上升,当毛细管中上升液体重量等于液柱所受表面张力在竖直方向分力时,液柱就处在力平衡状态,由此可求得液柱上升高度,再根据功的定义可求得表面张力所作之功.

第 8 章

8.1 气体向真空室膨胀不做功,且气缸绝热,所以气体内能不变.

8.2 气体原来内能为 E_0 ,当 1mol 气体进入绝热室后又达到平衡时做功 $p_0 v_0$,此功即为其内能变化的量度.

8.3 系统吸收热量在系统对外不做功时就应该等于系统中气体新增加的内能,并且系统在任何情况下 A, B 两室压强相等.

8.4 循环效率 $\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$, 在狄塞系循环中只有等压过程中吸热, 等容过程中放热.

8.5 1-2 和 3-4 是等容过程, 4-1 和 2-3 是等压过程在整个循环过程中功可由曲线包围面积求得, 在 1-2 和 2-3 过程中吸热可由等容及等压过程求得.

8.6 可由热力学第一定律着手, 讨论在等压过程中热量、内能与功间关系.

8.7 本题中气体是经历了一系列等值过程, 开始是等容过程, 然后是等压过程, 再经历等温过程.

8.8 根据题意活塞从位置 1 到 2 气体经历绝热过程. 当活塞位置保持不变时, 是等容降温过程, 再让活塞缓慢上升到位置 1 则为等温膨胀过程.

8.9 循环过程中所做的功可由 pV 图中包围面积计标, ab 过程中吸收热量可由摩尔热容 C_m 求得 $Q_{ab} = \nu C_m (T_{b1} - T_{a1})$, 而通过质点的过程方程 $p = kv$ (k 为恒量) 相当于 $pv^{-1} = k$ 即过程方程 $pv^n = C$ 中 $n = 1$, 则 $C_m = \frac{\gamma - n}{1 - n} C_v = \frac{1}{2} (\gamma + 1) c_v$ 是常量, 由 $Q_{a_1 b_1}$ 和 A 值即可求得热机效率 η 并与 $a'_2 b_2 c_2 a_2$ 循环比较.

8.10 可以考虑是否违背了热力学第二定律.

第 9 章

9.2 把扇面看成是由一系列半径不同的同心半圆环构成, 由对称性可知, 各半圆环上电荷在 O 点场强沿对称轴方向, 通过求出各半圆环对 O 点场强的贡献, 即可求得 O 点总场强.

9.3 把球体看成是由一系列半径不同的同心球面构成, 然后先计算半球面在球心 O 点的场强, 而半球面则由四个八分之一球面构成, 利用对称性就可求得八分之一球面在 O 点的场强, 再由场强叠加原理, 将半径不同的各八分之一球面在 O 点的场强求和, 即可求得八分之一球体在 O 点的场强.

9.4 只须补上相同的带电半球面, 使之构成一整球面. 由均匀带电整球面在球内任一点产生的场强为零, 即可判断 E_1 和 E_2 的大小关系.

9.5 求解本题的关键在于将圆环上待求的电荷分布与球面上均匀的电荷分布联系起来. 均匀带电的球面内的场强处处为零, 考察任一直径上场强的建立: 将球面沿垂直于此直径的方向切割成一系列半径不同的小球带, 由对称性可知, 小球带的电荷在直径上某点产生的场强, 相当于把小球带上一半电荷折叠到小球带上某线元处, 而另一半折叠到其对称线元处时, 两线元电荷在该点的场强, 这两线元电荷即为待求圆环上对应处的电荷.

9.10 注意两小球体系质心此时的位置.

9.13 (2) 由于 β 很小, 故粒子径向运动为小振幅的简谐振动.

9.19 (2) 在导体球壳外放置点电荷 q' , 并不会改变球壳内表面上的电荷分布, 也不会改变球壳外表面上的电荷总量, 只是改变了外表面上的电荷分布, 而这些外表面上的电荷对球心 O 电势的贡献与电荷在外表面上的位置无关, 故 O 点的电势仅增加了 q' 在 O 点产生的电势.

9.20 参看例 9-11 题的分析.

9.21 设想在点电荷 q 处有一平行于 A 、 B 板的导体板 C , 让 C 板上带电 nq , 计算此情况下 A 、 B 板上所带的电量 Q_A 和 Q_B , 则 $\frac{Q_A}{n}$ 和 $\frac{Q_B}{n}$ 即为本题之所求.

9.23 先在导体球心上设置点电荷 q_1 (即是均匀分布在球面上电荷在球外场的等效电荷), 以使球内为等势区, 再用电象法 (即镜象法) 求出此点电荷相对平板的像电荷 q'_1 , 使 q_1 和 q'_1 两电荷在平板上的总电势处处相等. 再求 q'_1 相对球的象电荷 q_2 , 即在球上此象位置上再设置点电荷 q_2 , 以消除由 q'_1 的存在而对球内等势的破坏, ... 如此不断设置下去. 直至球与板均逼近等势. 计算出球上设置电荷的总电量 Q , 再求出球的电势 U , 利用 $C = \frac{Q}{U}$ 即可求得电容 C .

9.24 用镜象法求出两点电荷在两接地导体板上的象电荷, 由于一导体板上的象电荷在另一板上还有象电荷, 故两点电荷在两板上共有无穷多个象电荷, 只要求出这些象电荷, 即可求解本题中的各小题.

第 10 章

10.2 通过电流计所设置的三个电流档以及精密电阻 R_1 的阻值,先求出被烧坏表头的满刻度电流 I_0 和内阻 r 之间所满足的关系式,然后看 A、B 两表头的参数是否满足此关系式,即可确定用哪个表头修复此电流计及怎样修复.

10.4 滑线变阻器是在圆柱面上用电阻丝单层密绕而成,故其滑动端移动时,接入电路的电阻的最小改变量为其一匝电阻丝的电阻,对应电流 I 的最小改变量 ΔI .

10.6 因电路相对 AB 连线上、下对称,故可将其沿 AB 线上、下对折,即可求得 R_{AB} .

10.7 设有电流从 A 点流入从 B 点流出,并根据电路对称性设置各支路电流,用基尔霍夫方程求出 A、B 间的电压与电流的关系,即可求得 R_{AB} .

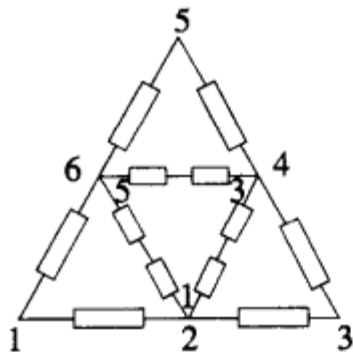
10.8 若在 A、B 端前再增加一级,该级两电阻的阻值为 $\frac{R}{2}$,这样构成的网络与原网络相比,各相应级电阻的阻值均为原网络的一半,故等效电阻也为原网络的一半,由此可求得 R_{AB} .

10.9 先求 A、C 左边(包括 A、C 间连接的电阻 R)半无限电阻网络(以 A、C 为端点)的等效电阻,这也是 B、C 右边半无限电阻网络的等效电阻.然后利用电阻串并联关系求出 R_{AB} 和 R_{AC} .

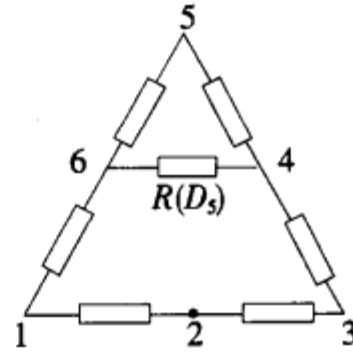
10.10 参照例 10-8 题的解题方法:设有电流 I 从 A 点流入,向四面八方流向无穷远;再设电流 I 从无穷远四面八方汇聚到 B 点流出,用叠加原理求出两情况下 AB 支路中的电流代数和,此即为电流从 A 流入从 B 流出情况下 AB 支路中的电流,并通过求出 A、B 两点电势差求得 R_{AB} .

10.11 可把电阻环画成三角形,两相连环的连接可画成图习题 10.11a 所示的图形.本题有多种解法,以下为其中两种:

方法 I:把两相连环等效为一单环,导出此单环上六个相等电阻阻值与两相连环上(两环阻值不同)阻值之间的递推关系.这样,可利用此递推关系一一求得: D_5 接入 D_4 的等效单环阻值,此单环再接入 D_3 后的等效单环阻值,……最后求得 D_1 环上 1、3 点间的等效电阻.



图习题 10.11a

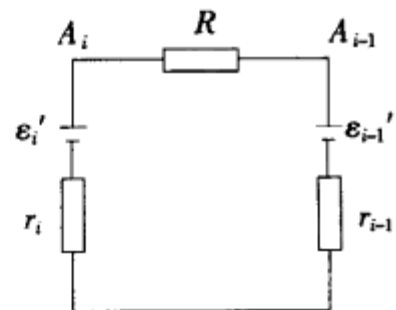


图习题 10.11b

方法 II:把图习题 10.11a 中的内环当作 D_5 ,外环当作 D_4 ,由对称性可知,在求连接后 D_4 环上 1、3 两点间等效电阻时,可把 D_5 的 1 点与 D_4 的 2 点断开,这样 D_5 环等效为一电阻 $R(D_5)$,如图习题 10.11b 所示,求出 $R(D_5)$ 和此情况下 D_4 上 1、3 两点间的等效电阻 $R_{1,3}(D_4)$,再把 D_4 按要求连到 D_3 上后,只需将图习题 10.11b 中的电阻 $R(D_5)$ 换成 $R_{1,3}(D_4)$ 即可求出 D_3 环上 1、3 两点间的等效电阻,依此类推,不难求得 D_1 环上 1、3 两点间的等效电阻.

10.12 (1)按戴维宁定理,等效电压源的电动势为 A、B 端开路时的端电压,故只需求出网络 A、B 端开路时 A_1 (即 A 点)B 支路中的电流,然后根据一段含源电路的欧姆定律,即可求得端电压,而 A、B 支路中的电流可根据叠加定理求得,即为各级中的电源单独在 A_1B 支路中产生的电流的叠加.

(2)为找出在 A_1, A_2, \dots, A_{10} 点中哪点电势最高,可先求任两相邻节点 A_{i-1} 和 A_i 的电势及其电势差,此时可把 A_i 点以左的电路(包括 A_iB 支路)以及 A_{i-1} 以右的电路(包括 $A_{i-1}B$ 支路)分别等效为两个电压源,



图习题 10.12

求出各自电动势 ϵ_i' 、 ϵ_{i-1}' 以及内阻 r_i 、 r_{i-1} , 此时电路等效为图习提 10.12 所示的电路. 若 A_i 点为最高电势, 则有 $U_i - U_{i-1} > 0$, $U_{i+1} - U_i < 0$ 由图可知, 即为 $\epsilon_i' - \epsilon_{i-1}' > 0$, $\epsilon_{i+1}' - \epsilon_i' < 0$, 可见通过比较各等效电压源电动势的大小, 即可找出最高电势点, 并通过最高电势点与相邻点电势差的计算求得最高电势值.

10.13 各支路中设置电流, 并通过各回路基尔霍夫第二方程的求解即可.

10.14 此电阻网络相对 A 、 B 两点上、下对称, 故可把此立体框架网络挤压成平面网络, 即把上、下对称节点挤压为一点. 此平面网络相对 A 、 B 点仍具有某种对称性, 再利用此对称性将电路简化, 并通过 $Y-\Delta$ 形电路的等效替换, 使电路变换成简单的电阻串、并联关系, 即可求得 A 、 B 间的等效电阻.

第 11 章

11.3 取半个线圈, 受到的磁场力为 $F = 2BIR$, 由张力和磁场力平衡

$$F = 2T$$

可得 T .

11.4 根据(11.3-4)式, 第一个线圈在其中心产生的 $B_1 = \frac{\mu_0 I}{2R_1}$, 第二个回路受到的磁力矩为

$$M = NI_2 SB_1$$

11.6 导线在磁场中受到安培力的冲量等于其动量的增量:

$$F\Delta t = mv_0, \quad v_0 = \sqrt{2gh}$$

$$F = IlB$$

导线的电量

$$q = I\Delta t$$

11.7 轴线上的磁感应强度 B 等于载流面电流密度为 j 的整个管在轴上所产生的 B_1 与宽度为 h 的载流面电流密度为 $-j$ 导线在轴上产生的 B_2 的矢量和.

11.8 由安培环路定理可得载流平面对其两侧产生的磁场为

$$B_{\perp} = B_{\mp} = \frac{\mu_0}{2} j = B$$

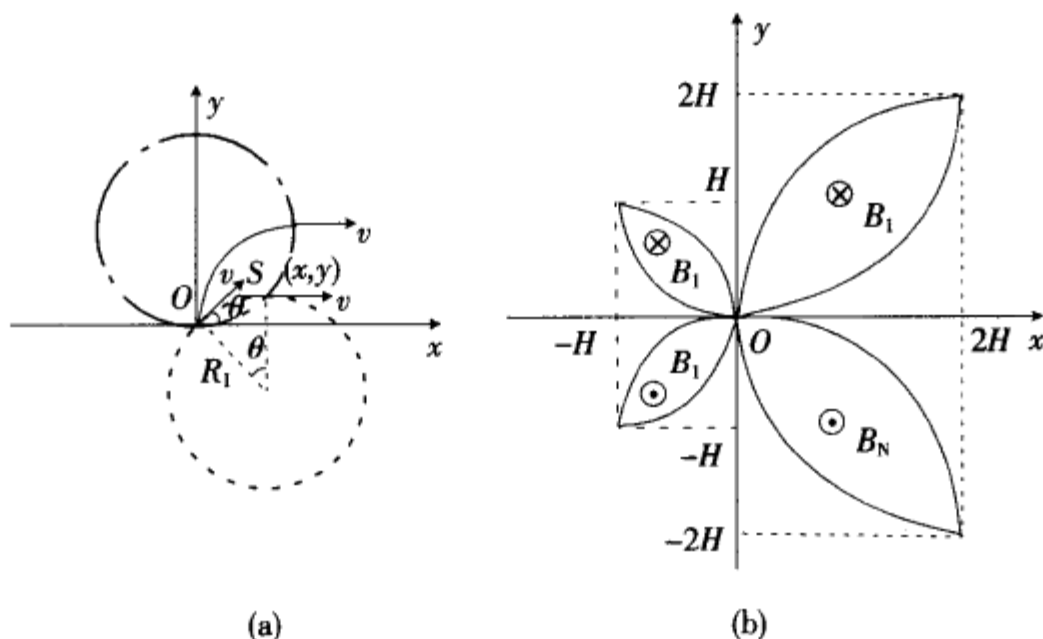
由磁场的叠加原理

$$B_1 = B_0 - B, \quad B_2 = B_0 + B$$

电流元在外磁场 B_0 中受到安培力为

$$dF = B_0 j dS$$

11.12 以第一象限的磁场为例, 如图习提 11.12(a), 电子以半径 $R_1 = \frac{m_e v}{eB_1}$ 作圆周运动, 电子到达磁场区边界上的 $S(x, y)$ 点, (图 11.12(b))



图习提 11.12

$$x = R_I \sin \theta, y = R_I - R_I \cos \theta$$

磁场区边界曲线方程为

$$x^2 + (y - R_I)^2 = R_I^2$$

另一限制是 $\theta \approx \frac{\pi}{2}$ 的电子轨道 $(x - R_I)^2 + y^2 = R_I^2, R_I = 2H$. 其他象限类推, 结果如图习提 11.12(b) 所示.

11.13 空白区域内的磁场可以看作是两根完整的圆柱形长直载流导体所产生的磁场之和, 每根导体的电流 I' 由

$$\frac{I}{I'} = \frac{\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right) D^2}{\frac{\pi}{4} D^2} \quad \text{解出}$$

由安培环路定理, 由左边导体产生的 B 为

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi r} \left[\frac{\pi r^2 I'}{4} \right]$$

分解为 x', y' 方向, (坐标原点在导线轴上), 另一根导体也同样求出, 再叠加, (化为以 O 为坐标原点的值)

11.14 带电质点到达原点时有速度 $v_1 = \sqrt{2g|y|}$, 进入磁场区后还受洛伦兹力作用, 设质点沿 x 轴正向和负向都有速度 v_0 , 沿正 x 轴方向的初速度引起的洛伦兹力和重力相等, 就可在计算时省去重力因素. 故 $qv_0 B = mg$, 质点沿 x 轴负方向的 v_0 和向下的 v_1 合速度为 $v = \sqrt{v_0^2 + v_1^2}$, 此即在磁场区作匀速圆周运动的速度, 可以导出质点离开磁场区域前任何时刻 t 质点的坐标为

$$\begin{aligned} x &= v_0 t - [R \sin(\omega t + \alpha) - x'_0] \\ y &= y'_0 - R \cos(\omega t + \alpha) \end{aligned}$$

式中 $x'_0 = R \sin \alpha, y'_0 = R \cos \alpha$, 为质点进入磁场瞬间所对应的圆周运动的圆心 O' 的位置坐标.

第 12 章

12.1 北极磁场方向向下, $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 方向向左, 故飞机左翼顶端为正, 右翼顶端为负, $U = lvB$, 其他类推.

$$\begin{aligned} 12.2 \quad \epsilon &= \epsilon_{\text{动}} + \epsilon_{\text{感}} = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} + \left(- \int_s \frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot d\mathbf{s} \right) \\ &= vB_0 \overline{EF} - k \cdot \frac{1}{2} x_0 \overline{EF} \end{aligned}$$

$$12.3 \quad \text{由动能定理, } A = \oint_L -e \mathbf{E}_{\text{感}} \cdot d\mathbf{l} = -e\epsilon = \Delta E_k$$

$$\text{又 } \epsilon = - \frac{\Delta E_k}{e}, \frac{d\Phi}{dt} = -\epsilon, \epsilon = \oint_L \mathbf{E}_{\text{感}} \cdot d\mathbf{l}.$$

$$12.4 \quad i = \frac{Q}{L} \cdot \frac{\omega}{2\pi} = \sigma r \omega, B_{\text{内}} = \mu_0 i, I = \frac{\epsilon}{R} = \frac{1}{R} \left(- \frac{d\Phi}{dt} \right).$$

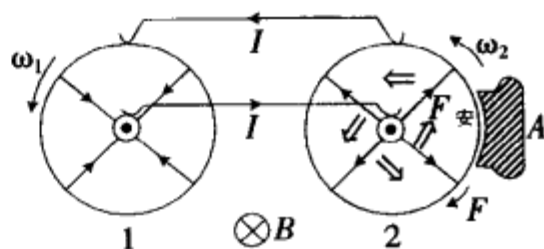
12.5 用补偿法, $0 = \epsilon_0 + \epsilon', \epsilon_0$ 为所求的电势差, ϵ' 为补上元线段 l 所产生的感生电动势.

$$12.6 \quad \text{线框下面一边受到安培力 } F = IBL, I = \frac{\epsilon}{R} = \frac{BLv}{R}.$$

12.7 如图习提 12.7 所示为两轮的电流方向. 稳定转动时合力矩为零, 即阻力矩等于四条轮辐上的力矩之和, 功率 P 等于转轮 1 的电源功率即 $P = \epsilon_1 I$

12.8 水平方向分速度为 v_0 , 竖直方向安培力 $F = mg$, 可求得 $u, v_0 = \sqrt{v^2 - u^2}$

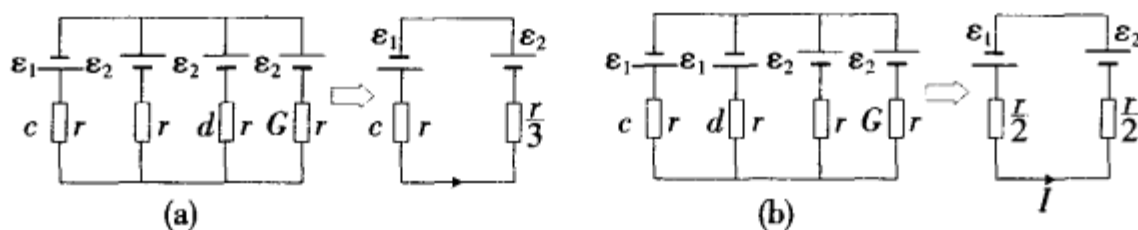
12.9 通过小回路的磁通量为 $\Phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = B \cdot \pi r^2$,



图习提 12.7

$$\epsilon = -\frac{d\Phi}{dt} \quad M = \frac{\Phi}{I}$$

12.10 (1)图习提 12.10(a)为等效电路图,(2)和(1)相同,(3)见图(b)



图习提 12.10

12.11 二极管导通的半个周期内,三个电阻并联,二极管截止的半周期中三个电阻串联.

12.12 当电键 K_2 闭合后两线圈的感生电动势相等.

$$L_1 \frac{\Delta I_1}{\Delta t} = L_2 \frac{\Delta I_2}{\Delta t}$$

稳定情况下 $I_1 + I_2 = \frac{\epsilon}{r}$.

12.13 通过电阻的电流

$$i_R = I_m \cos \omega t$$

通过电容的电流

$$i_C = I_m \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right),$$

$$i = i_R + i_C$$

12.14 无磁场时两端压力差与摩擦力平衡, $kv_0 = Pab$, 有磁场存在时

$$\Delta F = F_{\text{安}} + f \quad \text{即} \quad Pab = F_{\text{安}} + f, f = kv.$$

12.15 小球在涡旋电场中受到切向力,

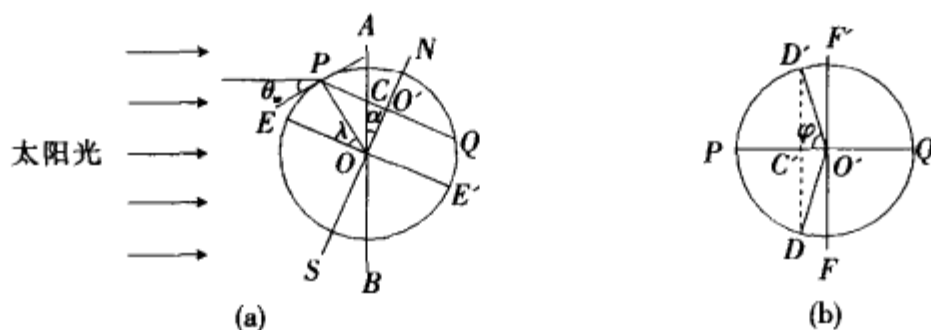
$$a_t = \frac{Ft}{m} = \frac{qE_{\text{旋}}}{m}, E_{\text{旋}} = \frac{R}{2} \frac{dB}{dt}.$$

$$F_{\text{洛}} + N' = F_{\text{向心力}}$$

第 13 章

13.2 图习提 13.2(a)画出冬至中午时情形. NS 为地球自转轴, EE' 为地球赤道, 它与地球轨道平面夹角 $\alpha = 23.5^\circ$, P 为观察点, 其纬度为 λ , PQ 是纬度为 λ 的纬线, AB 为过地球中心且与太阳光线垂直的平面, 过 P 作圆的切线, 此切线与太阳光线夹角 θ_w 即为所求的太阳光与地面夹角. 夏至时, 可设想太阳光从右边射来, 并在 Q 点作圆的切线, 此切线与太阳光线夹角即为太阳光与地面夹角.

为求日长, 设想过 AB 作垂直于纸面的平面, 则在此平面以左的地球表面才照得到阳光. 画出纬线 PQ 所围的圆, 如图习提 13.2(b), 图中 D, D' 为此圆与过 AB 的面的两个交点, P 点随地球自转而转动, 当 P 点在 $\angle D'O'D$ 以内即为白天, 只要求出 $\angle D'O'D$, 即可求得日长. 夏至时, 在 $\angle D'O'D$ 以内则为黑夜.



图习提 13.2

13.6 求点状物体 O 的像的位置可用 CO 与镜 1 平面所成的角 α 给出,或用 CO 与镜面 2 所成的角 β 来确定(图习提 13-6),设物体 O 的位置用 $\alpha_0, \beta_0 = \varphi - \alpha_0$ 表示,用 $O_1, O_{12}, O_{121}, \dots$ 依次表示物体 O 被镜 1,再镜 2,再镜 1, \dots 所成的像,用 $O_2, O_{21}, O_{212}, \dots$ 表示物体 O 被镜 2,再镜 1,再镜 2, \dots 所成的像,容易看出,对于像 $O_2, O_{12}, O_{212}, O_{1212}, \dots$,角 α 有下列值:

$$\alpha = 2\varphi - \alpha_0, 2\varphi + \alpha_0, 4\varphi - \alpha_0, 4\varphi + \alpha_0, \dots$$

这个系列在镜 1 平面的背面第一次出现时中断,因为这以后该像的光线已不能从镜 1 再反射了,类似地,像 $O_1, O_{21}, O_{121}, O_{2121}, \dots$,角 α 有下列值:

$$\alpha = -\alpha_0, -2\varphi + \alpha_0, -2\varphi - \alpha_0, -4\varphi + \alpha_0, \dots$$

该系列在镜 2 平面的背面第一次出现时中断.下面用两个例子来说明这个解.

例 1. $m = 5$ ($\varphi = 2\pi/5$ 弧度 $= 72^\circ$), $\alpha_0 = 22^\circ$ ($\beta_0 = 50^\circ$). 对于上一列像,有 $\alpha_1 = 122^\circ, 166^\circ, 266^\circ$ ($> 180^\circ$, 像中断);对于下一列,有 $\alpha_2 = -22^\circ, -122^\circ$ ($< -108^\circ$, 像中断),对应的正值为 $360^\circ - 22^\circ = 338^\circ, 360^\circ - 122^\circ = 238^\circ$,与上一列无重复的像.全部有 5 个像.

例 2. $m = 8$ ($\varphi = 45^\circ$), $\alpha_0 = 28^\circ$ ($\beta_0 = 17^\circ$). 对于上一列像,有 $\alpha_1 = 62^\circ, 118^\circ, 152^\circ, 208^\circ$;对于下一列像,有 $\alpha_2 = -28^\circ$ (332°), -62° (298°), -118° (242°), -152° (208°),最后一个像在两列中重复,因此全部像为 7 个.

一般地,若 m 是奇数,像的数目等于 m ;若 m 是偶数,则像的数目等于 $m - 1$,对于 m 不是整数的情况,上述方法也有用.

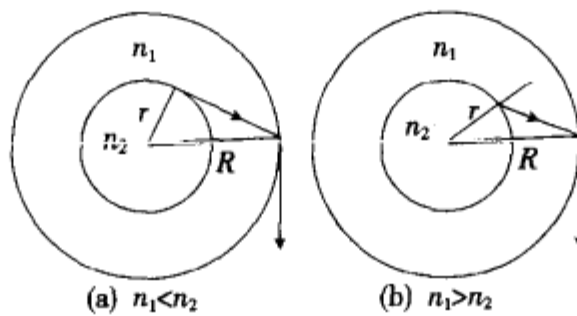
13.10 先考察进入棱镜后的最初一条光线和最后一条光线之间的偏向角,再证明所求偏向角与此偏向角相等.

13.11 注意折射定律可写成

$$n \sin \alpha = C$$

并注意 $\alpha_\infty - \alpha_0$ 为一小角.

13.12 注意分 $n_1 < n_2$ 和 $n_1 > n_2$ 两种情况讨论.前一种情况,自筒内液体射出的光可与内筒壁相切(图习提 13.12a);后一种情况,自筒内液体射出的光不可能与内筒壁相切(图习提 13.12b).

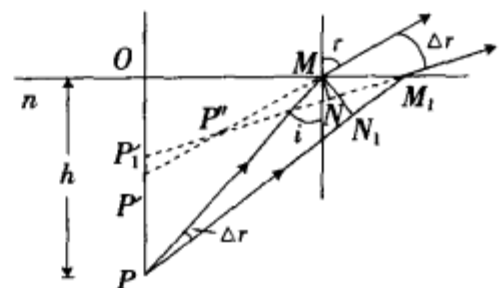


图习提 13.12

13.13 参见例 13-3 式②(正入射情况).

13.16 如图习提 13.16(参见图例 13-3a)所示,子午焦线位于 P' 处,弧矢焦线位于 P'' 处.弧矢焦线与光束和液面交点 M 的距离 l_1 即为 $P'M$.子午焦线与 M 的距离 $l_2 = P''M$ 可由微分关系求得, $P''M$ 和 $P'M$ 夹角 Δr ,由 M 向 $P'M$ 引垂线,垂足为 N ,则 $MN = MM_1 \cos r$,由 M 向 $P''M$ 引垂线,垂足为 N_1 ,则 $MN_1 = MM_1 \cos i$,而 $MN/P'M = \Delta r, MN_1/PM = \Delta i$,于是

$$P''M = \frac{MN}{\Delta r} = \frac{MM_1 \cos r}{\Delta r}$$



图习提 13.16

$$= \frac{MN_1 \cos r}{\cos i \Delta r} = \frac{PM \Delta i \cos r}{\cos i \Delta r} = \frac{h \cos r \Delta i}{\cos^2 i \Delta r}$$

而 $\frac{\Delta i}{\Delta r} \approx \frac{di}{dr}$ 可由折射定律求微分得出.

13.17. (2)取式(13.2-9)对 i_1 的导数,得

$$\frac{d\delta}{di_1} = 1 + \frac{di_1'}{di_1} \quad ①$$

δ 取极值的条件是

$$\frac{d\delta}{di_1} = 0$$

即

$$\frac{di_1'}{di_1} = -1 \quad ②$$

由折射定律,

$$\begin{aligned} \sin i_1 &= n \sin i_2 \\ \sin i_1' &= n \sin i_2' \end{aligned} \quad ③$$

取微分得

$$\begin{aligned} \cos i_1 di_1 &= n \cos i_2 di_2 \\ \cos i_1' di_1' &= n \cos i_2' di_2' \end{aligned}$$

由以上两式得

$$\frac{di_1'}{di_1} = \frac{\cos i_1 \cos i_2' di_2'}{\cos i_2 \cos i_1' di_2}$$

但 $i_2 + i_2' = A$, 所以 $di_2' = -di_2$, 上式变为

$$\frac{di_1'}{di_1} = -\frac{\cos i_1 \cos i_2'}{\cos i_2 \cos i_1'}$$

由②式, δ 取极值的条件变为

$$\frac{\cos i_1}{\cos i_2} = \frac{\cos i_1'}{\cos i_2'}$$

利用折射定律③式, 上式化为

$$\frac{1 - \sin^2 i_1}{1 - \sin^2 i_1'} = \frac{n^2 - \sin^2 i_1}{n^2 - \sin^2 i_1'}$$

因 $n \neq 1$, 上式只有在 $i_1 = i_1'$ 时成立, 此时 $i_2 = i_2'$ 亦成立. 此即光路对称情况, 进一步可证明这时 $\frac{d^2\delta}{di_1^2} > 0$, 即光路对称时 δ 为极小值.

13.18 当 A 很小时, δ 也很小. 由

$$\sin \frac{\delta + A}{2} = n \sin \frac{A}{2} \quad ①$$

(1)利用近似公式 $\sin x \approx x$, 上式变为

$$\begin{aligned} \delta + A &= nA \\ \delta &= (n-1)A \end{aligned} \quad ②$$

得

(2)利用 $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3$, ①式变为

$$\begin{aligned} \delta + A - \frac{1}{24}(\delta + A)^3 &= nA - \frac{1}{24}nA^3 \\ \delta - (n-1)A &= \frac{1}{24}[(\delta + A)^3 - nA^3] \end{aligned}$$

由②式, $\delta + A = nA$, 以 nA 作为 $(\delta + A)$ 的近似值代入上式右边, 得

$$\delta - (n-1)A = \frac{1}{24}nA^3(n^2-1)$$

得

$$\delta = (n-1)A \left[1 + \frac{n(n+1)}{24}A^2 \right]$$

13.19 设棱镜最小偏向角为 δ , 顶角为 A , 则有

$$\sin \frac{\delta + A}{2} = n \sin \frac{A}{2}$$

两边对 λ 求导:

$$\cos \frac{\delta + A}{2} \cdot \frac{1}{2} \frac{d\delta}{d\lambda} = \sin \frac{A}{2} \frac{dn}{d\lambda}$$

即可求得 $\frac{d\delta}{d\lambda}$.

13.20 在垂直于棱方向, 物体各部分对棱镜的入射角不同, 偏向角也不同, 且不成线性关系, 故物体形状失真. 在最小偏向角情况下, 入射角变化引起的偏向角变化最小.

13.22 如图, 由折射定律有

$$n \sin \theta = C$$

$$n \cos \theta d\theta + \sin \theta dn = 0$$

$$d\theta = -\frac{1}{n} \tan \theta dn$$

即

$$d\theta = -\frac{1}{n} \tan \theta \frac{dn}{dr} dr$$

由

$$n = n_0 - \alpha(r - R)$$

$$\frac{dn}{dr} = -\alpha, \tan \theta = \frac{R}{\sqrt{r^2 - R^2}}$$

由于 $r - R \leq 20 \text{ km} \ll 6400 \text{ km} = R$,

$$\tan \theta = \frac{R}{\sqrt{r^2 - R^2}} = \frac{R}{\sqrt{(r+R)(r-R)}} \approx \frac{R}{\sqrt{2R}\sqrt{r-R}}$$

代入②式:

$$d\theta = \frac{\alpha}{n_0 - \alpha(r-R)} \sqrt{\frac{R}{2}} \frac{dr}{\sqrt{r-R}}$$

令 $r - R = x$, 则 $dr = dx$, 上式化为

$$d\theta = \sqrt{\frac{R}{2}} \cdot \alpha \frac{dx}{(n_0 - \alpha x)\sqrt{x}}$$

$$\Delta\theta = \int d\theta = \alpha \sqrt{\frac{R}{2}} \int_0^{20} \frac{dx}{(n_0 - \alpha x)\sqrt{x}}$$

查积分表即得结果.

$$\Delta t = \frac{\Delta\theta}{\pi} \times 12 \text{ 小时.}$$

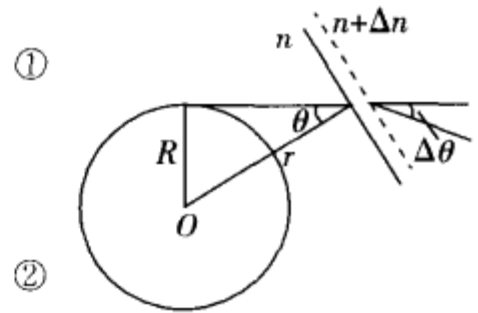
13.23 如图.

$$\frac{\alpha}{2} = r - (i - r) = 2r - i$$

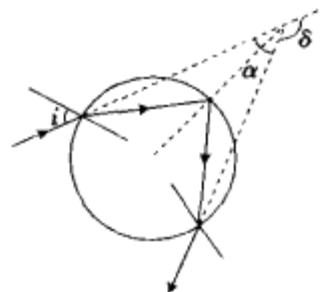
偏向角 $\delta = \pi - \alpha$ 随入射角 i 而变, 在偏向角取极值 (δ 取极小值, α 则为极大值) 情况下, 入射角变化引起的偏向角变化最小, 故在最小偏向角处出射光强最大. 上式对入射角 i 求导并令其为零:

$$\frac{1}{2} \frac{d\alpha}{di} = 2 \frac{dr}{di} - 1 = 0$$

由此得到的 α 角即为极值 (极大值), 该 α 就是虹的角半径.



图习题 13.22



图习题 13.23

第 14 章

14.4 因线状物很短,可认为 $L = \Delta u$,由物距变化 Δu 引起的像距变化即为 L' ;因 u 增大时 v 减小,故 $L' = -\Delta v$,由物像公式

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$$

及

$$\frac{1}{u + \Delta u} + \frac{1}{v + \Delta v} = \frac{1}{f}$$

即可求出 $L'/L = -\Delta v/\Delta u$ (保留一级小量).

14.6 设由点光源 S 经 M_1 点反射后成实像于 S' (图习提 14.6a),由物像等光程性,有

$$SM_1 + M_1S' = \text{常数.}$$

若由点光源 S 经 M_2 点反射后成虚像于 S' (图习提 14.6b),则有

$$SM_2 - M_2S' = \text{常数}$$

由几何性质即可知 M_1 和 M_2 的轨迹.

14.7 (1) 设有逆着 y 轴方向射来的平行光,则 $y = D$ 的平面 PQ 必为同相面(图习提 14.7a).对经 PQ 上任一点 A 入射的光经 $M(x, y)$ 反射后欲聚焦于 y 轴上 F (焦点),应有

$$D - y + \sqrt{x^2 + (y - d)^2} = C$$

式中 d 为 F 点与原点的距离.上式经移项、平方整理后变为:

$$y = \frac{1}{2(C - D + d)}x^2 + \frac{d^2}{2(C - D + d)} \quad \textcircled{2}$$

可见 M 点的轨迹是抛物线(其实是以 y 轴为轴的旋转抛物面).上式还可简化.当 A 点在 y 轴上时,应有

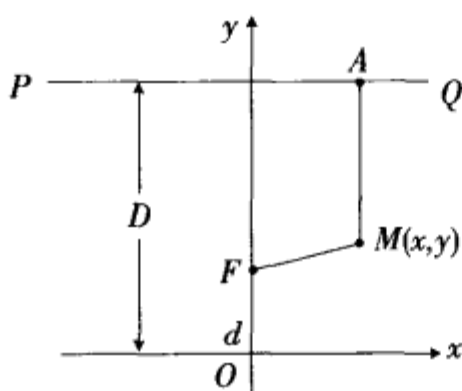
$$C = D + d - 2y_0 \quad \textcircled{3}$$

其中 y_0 为 M 点在 y 轴上时的 y 值,即

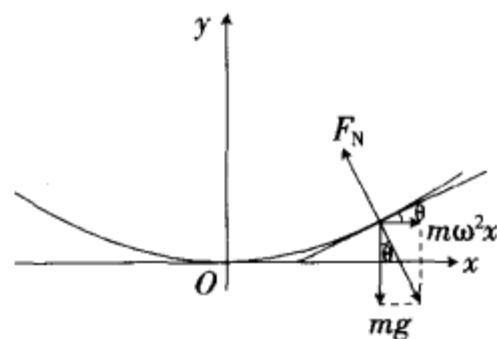
$$y_0 = \frac{d^2}{2(C - D + d)} \quad \textcircled{4}$$

以④代入③式即可解得 $C = D$,于是②式化简为

$$y = \frac{1}{2d}x^2 + \frac{d}{2} \quad \textcircled{5}$$



图习提 14.7a
求平行光反射等光程面



图习提 14.7b
旋转液面为抛物面

(2) 这时的液面为旋转抛物面,只要求出此抛物面方程,即可求得焦距.可由力学平衡求出此抛物面方程.取转轴为 y 轴,过 y 轴任取一竖直平面为 xy 平面(图习提 14.7b).在与液体一起旋转的非惯性系中,液体静止不动.考察液面上离轴距离为 x 的液体微团(质量为 m),它受重力 mg 、(惯性)离心力 $m\omega^2x$ 和周围其他流体的作用力 F_N 而平衡,因静止流体内无切应力, F_N 应与液面垂直,设液面切线与

x 轴夹角为 θ , 则有

$$\frac{dy}{dx} = \tan\theta = \frac{\omega^2 x}{g}$$

因而

$$y = \frac{\omega^2}{2g} x^2 + C$$

为抛物线, 与本题(1)部分的式⑤比较, 即可求得焦距.

14.8 证法 1: 利用费马原理. 设椭圆半长轴为 a , 两焦点为 F, F' , $F'O = OF = c$, 如图习提 14.8a 所示. 设 $M(x, y)$ 为椭圆上任一点, 作 MA 平行于 x 轴, 与直线 $x = a$ 交于 A 点, 只要证明

$$\overline{AM} + n \overline{MF'} = \text{常数} = n \overline{A_1 F'}$$

即可. 以 $\overline{AM} = a - x$, $\overline{MF'} = \sqrt{y^2 + (x + c)^2}$, $n = \frac{1}{e} = \frac{a}{c} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}$, $\overline{A_1 F'} = a + c$ 代入上式得

$$a - x + \frac{a}{c} \sqrt{y^2 + (x + c)^2} = \frac{a}{c} (a + c)$$

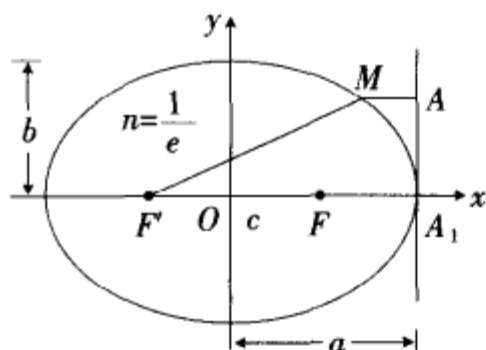
即

$$a \sqrt{y^2 + (x + c)^2} = a^2 + cx$$

两边平方, 整理即得

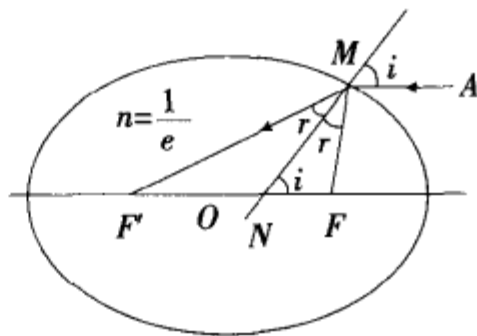
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

得证.



图习提 14.8a

用费马原理证明本题



图习提 14.8b

用折射定律证明本题

证法 2: 利用折射定律和椭圆性质. 设 M 为椭圆上一点, F' 和 F 为两焦点, 如图习提 14.8b 所示. 只要证明沿 x 方向入射的光 AM 经椭圆折射后沿 MF' 行进, 满足折射定律即可. 连结 MF , 作 $\angle F'MF$ 的平分角 MN , 由于自 F 点发出的光经椭圆面反射后射向 F' , 可知 MN 即为过 M 点椭圆的法线, 则入射光 AM 的入射角 i 即等于 $\angle MNF$, $\angle F'MN = \angle NMF = r$ 即折射角. 在 $\triangle MNF$ 和 $\triangle MNF'$ 中应用正弦定理:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{MF}{NF} = \frac{MF'}{NF'}$$

于是

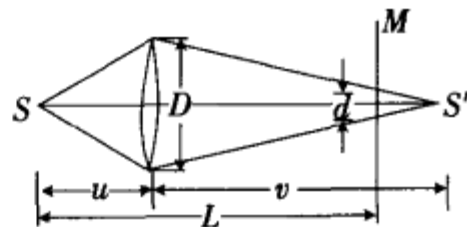
$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{MF + MF'}{NF + NF'} = \frac{2a}{2c} = \frac{a}{c} = \frac{1}{e} = n$$

得证.

14.14 为使光斑尽量小, S 应被透镜成实像, 否则光斑将大于透镜的直径. 由于 $f > \frac{L}{4}$, 像必在 M 后方. 故得光路图如右. 设光斑直径为 d , 则有

$$\frac{d}{D} = \frac{u + v - L}{v} = 1 + \frac{u}{v} - \frac{L}{v}$$

由透镜物像公式得



图习提 14.14

$$v = \frac{fu}{u-f}$$

代入上式得

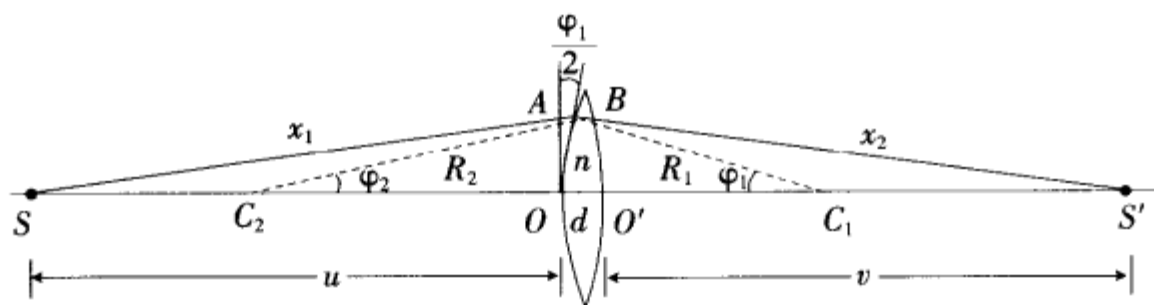
$$\frac{d}{D} = 1 + \frac{u-f}{f} - \frac{L(u-f)}{fu} = \frac{u}{f} + \frac{L}{u} - \frac{L}{f}$$

再利用不等式

$$\frac{u}{f} + \frac{L}{u} = \left(\sqrt{\frac{u}{f}} - \sqrt{\frac{L}{u}} \right)^2 + 2\sqrt{\frac{L}{f}} \geq 2\sqrt{\frac{L}{f}}$$

即可求出结果.

14.16 设从光源 S 发出的某近轴光 SA 经第一个球面折射后成 AB , 再经第二球面折射后成 BS' , 如图习题 14.16 所示.



图习题 14.16 用费马原理导出薄透镜物像公式

设两球面顶点为 O, O' , 令 $SO = u, O'S' = v, AB = x, OO' = d, C_1, C_2$ 分别为前、后球面的曲率中心. 与单球面折射中的几何关系类似, 有

$$SA = x_1 = u \left(1 + \frac{R_1^2 \varphi_1^2}{2u^2} + \frac{R_1 \varphi_1^2}{2u} \right)$$

$$S'B = x_2 = v \left(1 + \frac{R_2^2 \varphi_2^2}{2v^2} + \frac{R_2 \varphi_2^2}{2v} \right)$$

对近轴光, 有 $R_1 \varphi_1 \approx R_2 \varphi_2$, AB 与光轴几乎平行, 故有

$$d - x = R_1 \varphi_1 \cdot \frac{\varphi_1}{2} + R_2 \varphi_2 \cdot \frac{\varphi_2}{2} = \frac{1}{2} (R_1 \varphi_1^2 + R_2 \varphi_2^2)$$

根据费马原理, 有

$$x_1 + x_2 + nx = u + v + nd$$

用以上结果代入, 得

$$\begin{aligned} & u + \frac{1}{2u} R_1^2 \varphi_1^2 + \frac{1}{2} R_1 \varphi_1^2 + v + \frac{1}{2v} R_2^2 \varphi_2^2 + \frac{1}{2} R_2 \varphi_2^2 \\ &= u + v + \frac{n}{2} (R_1 \varphi_1^2 + R_2 \varphi_2^2) \end{aligned}$$

即
$$\frac{1}{2u} R_1^2 \varphi_1^2 + \frac{1}{2} R_1 \varphi_1^2 + \frac{1}{2v} R_2^2 \varphi_2^2 + \frac{1}{2} R_2 \varphi_2^2 - \frac{n}{2} (R_1 \varphi_1^2 + R_2 \varphi_2^2) = 0$$

两边除以 $\frac{1}{2} R_1^2 \varphi_1^2 = \frac{1}{2} R_2 \varphi_2^2$ 并整理即得

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

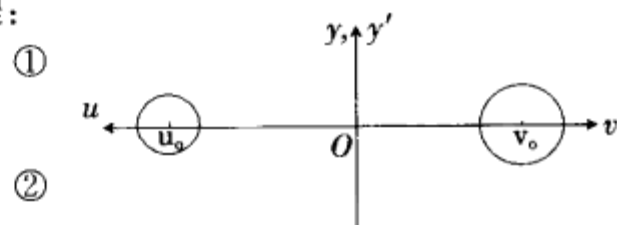
此即薄透镜物像公式.

14.17 建立如图的 u, y 和 v, y' 坐标, 则物点满足方程:

$$(u - u_0)^2 + y^2 = R^2 \quad \textcircled{1}$$

像点 v, y' 满足的方程可由物像公式和放大率公式求得:

$$u = \frac{fv}{v-f}$$



图习题 14.17

$$\left| \frac{y}{y'} \right| = \left| \frac{u}{v} \right| = \left| \frac{f}{v-f} \right| \Rightarrow y^2 = y'^2 \frac{f^2}{(v-f)^2} \quad (3)$$

以②、③代入①:

$$\left(\frac{fv}{v-f} - u_0 \right)^2 + y'^2 \frac{f^2}{(v-f)^2} = R^2$$

整理后得

$$(f^2 + u_0^2 - 2fu_0 - R^2)v^2 + 2f(fu_0 - u_0^2 + R^2)v + f^2y'^2 = f^2(R^2 - u_0^2) \quad (4)$$

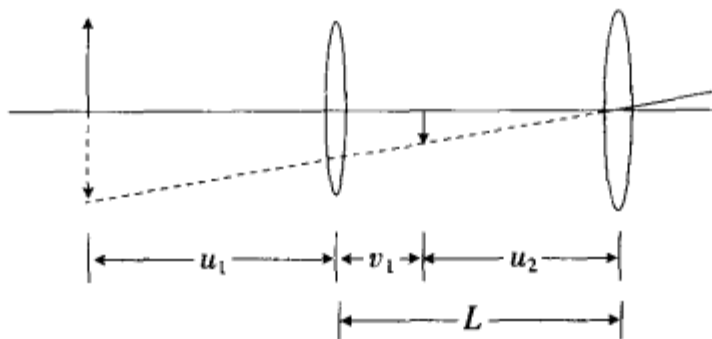
为使 v, y' 为一圆, v^2 和 y'^2 的系数应相等, 因而有

$$R^2 = u_0^2 - 2fu_0$$

得

$$R = \sqrt{u_0(u_0 - 2f)}$$

14.18 首先可以判定物体不可能先经第一透镜成虚像, 也不可能经第一透镜成放大实像, 因为这样经第二透镜后的像都将比物大, 与题意不符. 故只可能先经第一透镜成缩小实像, 可见, $u_1 > 2f_1$.



图习题 14.18

如图, 其中 $v_1 = \frac{f_1 u_1}{u_1 - f_1}$, $u_2 = L - v_1$, 题意要求 $v_2 = -(L + u_1)$, 代入透镜 2 的物像公式, 得:

$$-\frac{1}{L + u_1} + \frac{1}{L - \frac{f_1 u_1}{u_1 - f_1}} = \frac{1}{f_2} \quad (1)$$

由题意, 两次成象总的放大率应为 -1 , 即

$$K_1 \cdot K_2 = -\frac{v_1}{u_1} \cdot \left(-\frac{v_2}{u_2} \right) = -1$$

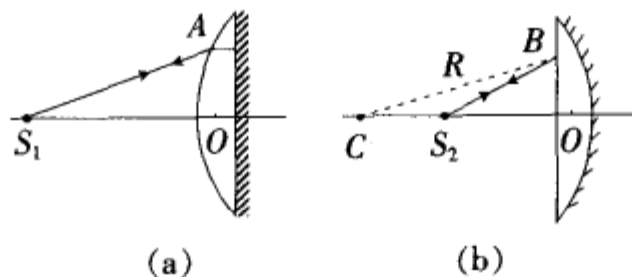
以相应量代入, 得

$$\frac{f_1}{u_1 - f_1} \cdot \frac{L + u_1}{L - v_1} = \frac{f_1}{u_1 - f_1} \cdot \frac{L + u_1}{L - \frac{f_1 u_1}{u_1 - f_1}} = 1 \quad (2)$$

由②式可解得 L , 代入①式即可得 f_2 .

14.19 对凸透镜, 当物距为 $2f$ 时, 像距也是 $2f$. 可利用此性质来解本题.

对平面镀银的透镜 1(图习题 14.19a), 设想从原未镀银透镜的焦点 S_1 发出一条近轴光线 S_1A , 经球面折射后必成平行光轴的光, 经镀银面反射后沿原路返回.



图习题 14.19 物、像距都是 $2f$ 时求镀银透镜焦距

对球面镀银的透镜 2, 设想从主轴上某点 S_2 发出一条近轴光 S_2B , 经平面折射后恰沿着球面的半行行进, 此光线经球面反射后沿原路返回, 再经平面折射后又回到 S_2 点, 如图习题 14.19b 所示. 显然,

$S_2O = 2f_2$. 若球面未镀银, 则光经平面折射后将不偏折地射出球面, 其延长线将交主轴于球心 C .

14.22 利用物方与像方媒质不同时的物像公式

$$\frac{f}{u} + \frac{f'}{v} = 1$$

本题像距不变, 焦距改变, 但 $f'/f = n$ (玻璃状液折射率) 保持不变.

14.25 这时, 经物镜所成实像将成目镜(凹透镜)的虚物于目镜的物方焦平面上.

14.26 (1)物镜最小分辨角

$$\delta\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

其中 D 为物镜有效直径. 由于显微镜中物放在物镜的焦点(外)附近, 故最小分辨距离

$$\delta y = f_o \cdot \delta\theta$$

(2)为使距离为 δy 的两点能被肉眼分辨, 应使它对眼的视角达到 $1' = 3.0 \times 10^{-4}$, 故有效放大率

$$M = \frac{3.0 \times 10^{-4}}{\delta y / S_0}$$

式中 S_0 为明视距离.

(3)由显微镜视角放大率公式

$$M = -\frac{\Delta S_0}{f_o f_E}$$

即可求出筒长 ($L = \Delta + f_o + f_E$).

第 15 章

15.5 (1)飞船飞离地球至到达宇航站, 按飞船时间, 共经历 $\Delta t_1' = 30$ 分, 此为本征时间间隔, 按地球时间, 此时间间隔 Δt 由时间膨胀为 $\Delta t_1 = \Delta t_1' / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ (分) 故宇航站上指示的飞船到达时间(即地球时间)为 $t = 12:00 + \Delta t_1$.

(2)显然此距离就是飞船在 Δt_1 时间内飞行距离:

$$l = v\Delta t_1 = 0.8c \times \Delta t_1 \times 60(\text{s})$$

(3)光从宇航站至地球需时 $\Delta t_2 = l/c$, 故信号到地球时间为 $t + \Delta t_2 = t + \frac{l}{c}$.

(4)地球上发出回答信号时, 离飞船飞离地球已经过 $\Delta t_1 + \Delta t_2$ 时间, 这时飞船离地球距离为 $L = v(\Delta t_1 + \Delta t_2)$, 回答信号从地球发出至到达飞船需经历时间 $\Delta t_3 = L/(c - 0.8c)$, 从飞船飞离地球至回答信号到达飞船共经历时间为 $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3$, 此时间间隔对地球为非本征时, 对飞船则为本征时, $\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - v^2/c^2}$.

15.6 由洛伦兹变换, 在 S' 系中两事件的时间间隔为

$$t_2' - t_1' = \frac{t_2 - t_1 - \frac{u}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

欲两事件次序颠倒, 应有 $t_2' < t_1'$, 即 $t_2' - t_1' < 0$, 由上式, 这要求 $t_2 - t_1 < \frac{u}{c^2}(x_2 - x_1)$, 这只有在 $t_2 - t_1 < \frac{x_2 - x_1}{c}$ 时才有可能, 若两事件有因果联系, 由于任何信号速度不可能大于光速, 故有 $t_2 - t_1 > \frac{x_2 - x_1}{c}$, 于是在任何参照系看来, 两事件的次序不可能颠倒.

15.7 只要让竿以足够大的速度运动, 由长度收缩, 竿的长度可能小于仓库的长度. 但在某乙看来, 仓库长反而缩短, 更不能放进竿. 两者的矛盾来自同时性的相对性, 在乙看来, 两门并未同时关闭, 前方的门先打开.

15.8 (1)由长度收缩, 每艘飞船的长度都缩短为 $100 \sqrt{1 - 0.8^2} = 60(\text{m})$, 但两飞船的距离仍为

200m;

(2) 飞船长度及两飞船的距离均收缩为 0.6 倍;

(3) 在 S' 系中, 飞船静止, 故长度为 100m. 再者, 在 S' 系看来, 两飞船的发动机并不同时点燃的, 而是前面一艘先点燃, 先达到 $0.8c$, 故两飞船的距离不是 200m, 而是 $200/0.6 = 333\frac{1}{3}$ (m).

15.9 (1) 本题与例 15-2 相仿, 但现在是由 S 系转换为 S' 系, 故应将例 15-2 的式②中的 u 换为 $-v$. 同时, 现在的 θ, θ' 角与原来 θ_0, θ 的意义也不同, 应相应换为 $(\theta_0 - \pi), (\theta - \pi)$. 但换了后, 仍有

$$\cos\theta' = \frac{\cos\theta + \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}\cos\theta}$$

(2) 由上式解出 $\cos\theta$, 得

$$\cos\theta = \frac{\cos\theta' - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}\cos\theta'}$$

以 $\theta' = \frac{\pi}{2}$ 代入上式, 得 $\cos\theta = -\frac{v}{c}$, 当 $v \rightarrow c$ 时, $\cos\theta \rightarrow -1, \theta \rightarrow \pi$.

15.10 相对地面参照系, 玻璃厚度减为 $D\sqrt{1-v^2/c^2}$, 而光在玻璃中传播速度 u 则可由相对论速度变换求得:

$$u = \frac{\frac{c}{n} + v}{1 + \frac{v}{c^2} \frac{c}{n}} = \frac{\frac{c}{n} + v}{1 + \frac{v}{nc}}$$

于是光从进入玻璃到射出玻璃所需时间 t_1 可由下式求得

$$ut_1 = D\sqrt{1-v^2/c^2} + vt_1$$

而光从 A 传播到 B 的总时间 $t = t_1 + t_2 = t_1 + \frac{L - ut_1}{c}$.

15.13 利用例 15-5 的结果.

15.14 粒子的能量 E 为两光子的能量和: $E = E_1 + E_2$, 粒子的动量 p 也为两光子的动量和: $p = p_1 + p_2$ (图习提 15.14), 而光子的动量值为其能量除以 c , 再利用粒子的能量动量关系即可求出粒子的静质量.

15.15 由题意, 激发态原子的静能为 $m_0c^2 + E_0$. 设激发态原子的运动速度为 v , 发射光子的能量为 E' , 由能量守恒, 有

$$\frac{m_0c^2 + E_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m_0c^2 + E'$$

由动量守恒, 有

$$\frac{m_0c^2 + E_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{v}{c^2} = \frac{E'}{c}$$

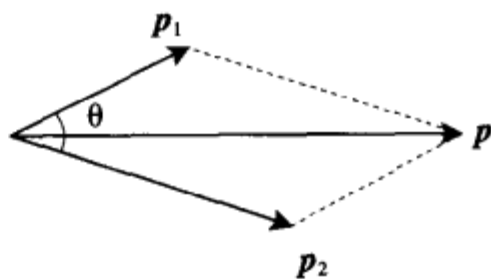
由以上两式即可解出 E' .

15.16 辐射能即光子. 设某一时刻火箭的质量为 m , 它在辐射出动量为 dp 的若干光子后, 由能量守恒有

$$c^2dm + cdp = 0$$

而由动量守恒则有

$$d(mv) - dp = 0$$



图习提 15.14

以第二式代入第一式得

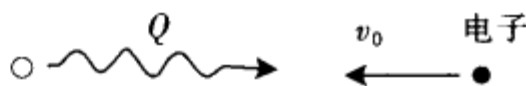
$$d(mv) = -cdm$$

两边积分得:

$$\frac{M_f v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = c \left[M_i - \frac{M_f}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right]$$

由此即可求出末速度 v .

15.17 设电子初速为 v_0 , 碰后电子速度为 v , 以光子运动方向为正(如图习题 15.17), 由能量守恒, 有



图习题 15.17

$$Q + \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} c^2 = Q + \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} c^2 \quad (1)$$

由动量守恒, 有

$$\frac{Q}{c} - \frac{m_0 v_0}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} = -\frac{Q}{c} + \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2)$$

由①式, $|v| = v_0$, 代入②得:

$$2 \frac{Q}{c} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} (v_0 + v) \quad (3)$$

可见 v 只能取正值, 于是由式③可得

$$\frac{Q}{c} = \frac{m_0 v_0}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}$$

由此可解出 v_0 .

15.18 (1)由能量、动量守恒和能量动量关系不难证明吸收光子全部能量后的电子的静质量必然增大, 而电子作为基本粒子, 静质量不可能改变.

(2)分别列出动量、能量守恒, 即可证明其不能同时满足.

(3)同(2).

第 16 章

16.3 喜马拉雅山主峰高度为 8848 米.

16.5 量子数 n 只能取整数.

16.6 正常情况下氢原子处于基态.

16.7 玻尔理论适用于类氢离子.

16.8 $E_k = \frac{1}{2} m_e v^2 \approx \Delta E_{13}$.

16.9 以电压 V 加速电子, 使之与原子碰撞, 把原子从基态激发到较高能态, 用来加速电子的电势差称为激发电势. 从基态激发到第一激发态的相应的电势差称为第一激发电势. 原子从第一激发态向基态跃迁的谱线称为共振线.

16.10 $E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \left(1 + \frac{m}{M}\right) \Delta E_{12}$.

16.11 电子偶素可看作类氢体系, 折合质量 $\mu = \frac{m_e}{2}$.

16.12 所发射光子的最低频率对应于两能级之间的最小能量差.

16.14 可见光的波长范围为 $4000\text{\AA} \sim 7600\text{\AA}$.

16.16 光电子在磁场中所受的洛仑兹力等于它作匀速运动的向心力.

- 16.19 质子的质量为电子质量的 1836 倍.
- 16.23 ^{232}Th 的半衰期很长,在观察时间内核数目几乎不变, $A = \lambda N \approx \lambda N_0$.
- 16.25 $P_{\text{总}} = P_{\text{有效}}/\eta$,需由 n 次的 α 衰变来提供, $n = P_{\text{总}}/E_{\alpha}$.

习题答案

第 1 章

1.1 (1)5.45s, (2)145.5m

1.2 $\theta = \frac{\pi}{4}$

1.3 $\frac{H}{H-h}v$

1.4 (1)以地球为参照系, $y = \frac{v_0 \sin \theta \cdot x}{v_0 \cos \theta + v} - \frac{gx^2}{2(v_0 \cos \theta + v)^2}$

(2)以船为参照系, $y = \tan \theta \cdot x - \frac{gx^2}{2v_0 \cos^2 \theta}$

1.5 (1) $\mathbf{r} = 3t \mathbf{i} + (8 - t^2) \mathbf{j}$, $y = 8 - \frac{x^2}{9}$

(2)4.23m/s, 与 x 方向夹角为 -45°

(3) $t = 1$ 时 $v_1 = 3.6\text{m/s}$, 与 x 轴夹角为 -33.7°

$t = 2$ 时 $v_2 = 5\text{m/s}$, 与 x 轴夹角为 -53.12°

加速度 $\mathbf{a} = -2\mathbf{j}$ 为常矢量, $t = 0$ 时 v 有最小值 3m/s,

(4) $t = 1.87\text{s}$ 时 $r_{\min} = 7.2\text{m}$.

1.6 (1) $\theta = 14.57^\circ$, (2) $t = 0.75\text{s}$, (3)最高点 $\rho_1 = 10.2\text{m}$, 落地点, $\rho_2 = 81.5\text{m}$.

1.7 (1)1.32s, (2)2.6m

1.9 速度为 21.6km/h, 与水平方向夹角为 -73.9°

1.10 $x = -\frac{u_0}{v}(y_0 - y) - \frac{1}{2} \frac{a}{v^2}(y_0 - y)^2$

1.11 $\varphi = \frac{\theta}{2}$

1.12 $s_{\max} = \frac{R(v^2 - u^2)}{v \sqrt{v^2 - u^2 \sin^2(\alpha - \beta)}}$

1.13 (2) $s = \frac{Dv}{\sqrt{V^2 - v^2}}$

1.14 $r_{\min} = \frac{v_2 \sin \alpha \cdot l}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos \alpha}}$

1.15 (1) v_p 与水平面夹角为 13.9° , 大小为 $1.04v$, (2) $t = \frac{1}{4g}(\sqrt{v^2 + 16gh} - v)$

1.16 (1)0.60m (2)2.5m

第 2 章

2.1 $\tan \theta = \frac{1}{2\mu + 1}$

2.2 $F_1 = 0.45mg$, $F_2 = 1.09mg$, F_2 与水平方向夹角为 $\alpha = 65.9^\circ$

2.3 $mg \cdot \frac{r}{L}$

2.4 $N_E = 257.25\text{N}$, $N_A = 428.75\text{N}$, $T = 132.88\text{N}$

2.5 $2mg$, $F_{\min} = \frac{4mg}{\mu}$

2.6 $N_1 = \frac{\sin \theta_2 \cdot W}{\sin(\theta_2 - \theta_1)}$ 垂直于下面斜面

$$N_2 = \frac{\sin\theta_1 \cdot W}{\sin(\theta_2 - \theta_1)} \text{ 垂直于上面斜面}$$

2.7 $F_3 = 220.5\text{N}, F_4 = 367.5\text{N}$

2.8 (1) $N = \frac{W}{2\cos\theta}$ (2) $T = \frac{W}{2}\tan\theta$

2.9 $F = \frac{\sqrt{2rh - h^2}}{r - h}W, F_m = \frac{\sqrt{2rh - h^2}}{r}W$

2.10 $\frac{11}{12}l$

2.11 $m = 15\text{kg}$

2.12 (a) 随遇平衡, (b) 稳定平衡, (c) 不稳定平衡

2.13 $x \geq \frac{d}{2\mu}(\tan\theta - \mu)$

2.14 (1) $x_c = 20\text{cm}$, (2) $x_c = 5\text{cm}, y_c = 3\text{cm}$

2.15 $\frac{m_2(m_1 + m_2)}{m_1 - m_2}$

2.16 $0.155r < R \leq 0.680r$

2.17 (1) $F = \frac{1}{4}g\sqrt{2m_1^2 + 10m_2^2 + 8m_1m_2}, \cot\frac{1}{3} \leq \theta \leq 45^\circ$ (2) $29.6\text{N } 24.4^\circ$

2.19 (1) $T = (P_1 - P_2)r$ (2) $r = \frac{r_0}{1 - \frac{P_1 - P_2}{Eh}} r_0$

2.20 (1) $P(r) = \frac{3GM^2}{8\pi R^6}(R^2 - r^2)$ (2) $2.0 \times 10^{11}\text{Pa}$

2.21 (a) 不稳定平衡 (b) 稳定平衡

第3章

3.1 $\mu = \tan\theta - \frac{2s}{gt^2\cos\theta}, F = mg\tan\theta - \frac{2ms}{t^2\cos\theta}$

3.2 (1) $a_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1}g, a_2 = 0$ (2) $a_1 = \frac{m_2}{m_1}g, a_2 = g$

3.3 $T_1 = \frac{m}{2}\left(\frac{2S}{t^2\sin\theta} + \frac{g}{\cos\theta}\right), a = g\tan\theta$

$$T_2 = \frac{m}{2}\left(\frac{2S}{t^2\sin\theta} - \frac{g}{\cos\theta}\right)$$

3.4 $8.02 \times 10^4\text{N}$

3.5 $a_1 = \frac{(m_1 - m_2)g + m_2a_2'}{m_1 + m_2}, f = \frac{m_1m_2(2g - a_2')}{m_1 + m_2}$

3.6 (a) 0.62s (b) 0.73s

3.7 (1) $\theta = \cot\left[\frac{(m_1 + m_2)g}{\frac{m_1}{m_2}F + \mu(m_1 + m_2)g}\right]$

(2) $F \geq \mu(m_1 + m_2)g \quad \theta = \cot\left[\frac{m_2}{\mu(m_2 + m_1)}\right]$

3.8 $\frac{\sin\beta - \mu\cos\beta}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} \leq \frac{m_A}{m_B} \leq \frac{\sin\beta + \mu\cos\beta}{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}$

3.9 (1) $F = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}g$ (2) $F = \frac{(m_1 + m_2 + M)m_2}{\sqrt{m_1^2 - m_2^2}}g$

3.10 $\frac{M - m}{M}\left(h + \frac{1}{2}gt^2\right)$

3.11 $w = \sqrt{\frac{g}{\mu R}}$

3.12 $4.1 \times 10^8 \text{m}$

3.13 $\varphi = \theta$

3.14 $a = g \frac{\sqrt{(l+d)^2 - h^2}}{h}$

3.15 $a = g - \frac{(m_1 + m_2)(kV + \rho Vg)}{M(m_1 + m_2) + 4m_1m_2}$

3.16 $F \geq 2\mu gM \left(1 + \frac{m}{M} + \frac{l}{L-l}\right)$

3.17 2.0N

3.18 $\mu < \frac{m_A}{m_A + m_B} \tan\theta$

$$\mu(m_A + m_B)g < F \leq \frac{m_A}{m_B}(m_A + m_B)(\tan\theta - \mu)g$$

3.19 $t = \frac{R}{v} \left[\arcsin\left(\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + 1}}\right) - \arcsin\left(\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + 1}} \cdot \frac{v^2}{gR}\right) \right]$

3.20 $N = m\omega^2 R(1 + \cos\theta), \mu \geq \frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta}$

第4章

4.1 $\frac{m^2 h}{M^2 - m^2}$

4.2 $I_T = mv\sqrt{4 + \pi^2 \cot^2 \alpha}, I_T = mv(-2j + \pi \cot \alpha k)$

4.3 车走了 $\frac{m}{M+m}l$, 人对地走了 $\frac{M}{M+m}l$

4.4 $\left(1 + \frac{m}{M}\right)x^2 + y^2 = R^2$

4.5 $v_1 = 1\text{m/s}, v_2 = 9\text{m/s}$

4.6 (1) $v = d\sqrt{\frac{\rho_1 g}{\rho_2 h}}$ (2) $\mu \geq 0.05$

4.7 (1) $v = -Nmu/(M + Nm)$, (2) $v_N = \sum_{n=1}^N \frac{-m v}{M + (N+1-n)m}$
(3) 第二种情况车的末速度大

4.8 $\varphi = -\frac{2}{3}\pi$

4.9 $\frac{gT_1 T_2 (T_1 + 2T_2)}{2(2T_1 + T_2)}$

4.10 16m

4.11 $mRv\cos\alpha, mv_1(R+h)$

4.12 $L = ml^2\omega\sin^2\alpha, M = 0$

4.13 质点沿切向飞出以 $v = v_0 \frac{b}{l}$ 作匀速直线运动, 角动量不变

4.14 $h = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{8} \left(\frac{M}{\rho v_0 s}\right)^2$, 必须满足 $v_0 > \sqrt{\frac{gM}{2\rho s}}$

4.15 $\frac{2\pi M}{M+m}$

4.16 $\omega = \frac{3v_0}{2l}$

4.17 $v_2 = \frac{l_1 \sin\theta_1}{l_2 \sin\theta_2} v_1$

4.18 $\mu \geq \frac{2la}{gl + ha}$

$$4.19 \quad v_c = \frac{2}{19} v_0$$

$$4.20 \quad r^2 = \frac{M_1}{M_2} r_1, \omega_2 = \left(\frac{M_2}{M_1}\right)^2 \sqrt{\frac{G_1 M_1}{r_1^3}}$$

$$4.21 \quad (1) v_2 = u \ln[(M_1 + M_2)M_2 / (M_2 + m_1)m_2] \\ (2) u \ln[M_2(m_1 + m_2) / m_2(m_1 + M_2)]$$

$$4.22 \quad 3\rho g(l-x)$$

第5章

$$5.1 \quad (1) V = \frac{Mv_0}{m+M} \quad (2) S = \frac{Mv_0^2}{2\mu g(M+m)} \quad (3) \Delta E = \frac{mMv_0^2}{2(M+m)}$$

$$5.2 \quad 15\text{m/s}$$

$$5.3 \quad (1) f/mg = \frac{7}{25} \quad (2) h/h_0 = \frac{25}{32}$$

$$5.4 \quad v = \sqrt{\frac{g}{l}(l^2 - a^2)}$$

$$5.5 \quad (1) a = \frac{\mu}{1+\mu} l \quad (2) v = \sqrt{\frac{gl}{1+\mu}}$$

$$5.6 \quad F \geq (m_A + m_B)g$$

$$5.7 \quad X_{\max} = \sqrt{\frac{Mm}{(M+m)k}} v_0$$

$$5.8 \quad (1) v = \frac{v_0}{5} \sqrt{1 + \frac{16m}{M}} \quad (2) L = \frac{v_0^2(12 - 8\frac{m}{M})}{25\mu g}$$

$$5.9 \quad k \leq \frac{n-1}{n+1} \quad \text{且} \quad k \neq \frac{1}{n+1}$$

$$5.10 \quad v_{\max} = \frac{GM + \sqrt{G^2 M^2 + v_0^4 d^2}}{v_0 d}, r_{\min} = \frac{\sqrt{G^2 M^2 + v_0^4 d^2} - GM}{v_0^2}$$

$$5.11 \quad E_1 = 20\text{J}(\text{重质点}), E_2 = 40\text{J}(\text{轻质点})$$

$$5.12 \quad v_0 \geq \sqrt{2E \left(\frac{M+m}{Mm} \right)}$$

$$5.13 \quad V = \sqrt{\frac{2m^2 gh \cos^2 \alpha}{(M+m)(M+m \sin^2 \alpha)}}$$

$$5.14 \quad (1) F = mv_0^2/l \quad (2) F = \frac{mv_0^2 l^2}{x^3}$$

$$5.15 \quad (1) S = 0.476\text{m} \quad (2) v_{cn} = 2 \times 6^{-n} \quad (3) L = 1.143\text{m}$$

$$5.16 \quad v_0 = \sqrt{\frac{2gR}{\cos \theta_0}}$$

$$5.17 \quad v_m = \sqrt{\frac{gR}{kR - mg} mg}$$

$$kR \geq 2mg \text{ 时, } N = \frac{2mg - kR}{kR - mg} mg$$

$$kR < 2mg \text{ 时, } N = 4mg - 2kR$$

$$5.18 \quad v = \sqrt{2g \left(l - \frac{3mg}{2k} \right)}$$

$$5.19 \quad (1) v' = 0 \quad (2) h = \frac{v^2}{4g}$$

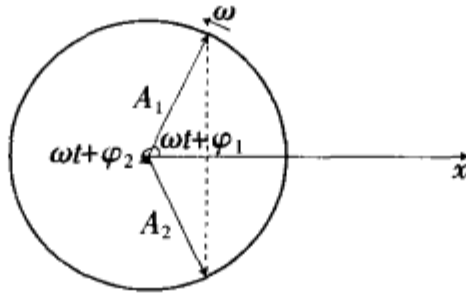
$$5.20 \quad (1) A = -\frac{m^2 gl}{M+m}, (2) v_M = m \sqrt{\frac{gl}{4M^2 + 7mM + 3m^2}}$$

第 6 章

6.1 (1) $\omega = 10\text{s}^{-1}$ $A = 0.1\text{m}$ $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$

(2) $x = 0.1\cos\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$ (m)

(3) $v_m = 1.0\text{m/s}$



图习答 6.1

6.2 $\Delta\varphi = \frac{4}{3}\pi$ 或 $\frac{2}{3}\pi$

6.3 在加速运动升降机中, 弹簧振子其振动频率没有变化.

在升降机中的单摆, 当升降机以 a_0 上升时, 其摆动周期为 $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a_0}}$.

当升降机以 a_0 加速下降时 $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g-a_0}}$, 如果升降机以加速度 $a_0 > g$ 下降, 物体将靠在天花板上, 随天花板一起以 a_0 下降.

如摆一端固定在地板上, 则成倒立单摆其周期为 $T = \sqrt{\frac{l}{g+a_0}}$

6.4 (1) $A_{\max} \leq 0.031\text{m}$

(2) $A_{\max} \leq 0.062\text{m}$

6.5 $T = 2\pi\sqrt{\frac{d}{\mu g}}$

6.6 $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$

6.7 (1) $v_1 = v\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$ (2) $v\sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_1}}$

6.8 $T = 2\pi\sqrt{\frac{M+m/3}{k}}$

6.9 $m \frac{d^2 x_n}{dt^2} = k(x_{n+1} - x_n) + k(x_{n+1} - S_n) \quad n = 1, 2, \dots, N$

当 $N \rightarrow \infty$ 时, ω_i 取值可能范围是 $0 \rightarrow 2\omega_0 = 2\sqrt{\frac{k}{m}}$

6.10 (1) $t = \frac{2R\sin\theta}{v}$ 对地震纵波 $v = v_p$ 对地震横波 $v = v_s$

(2) $\theta = i - \arcsin\left(\frac{R_c}{R}\sin i\right) + 90^\circ - \arcsin\left(\frac{v_{cp}}{v_p}\sin i\right)$

6.11 $y = 10\cos\left[7\pi t - \frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{\pi}{3}\right]$

6.12 (1) $A = 1.0 \times 10^{-3}\text{m}$; $\nu = 4.78 \times 10^4\text{Hz}$

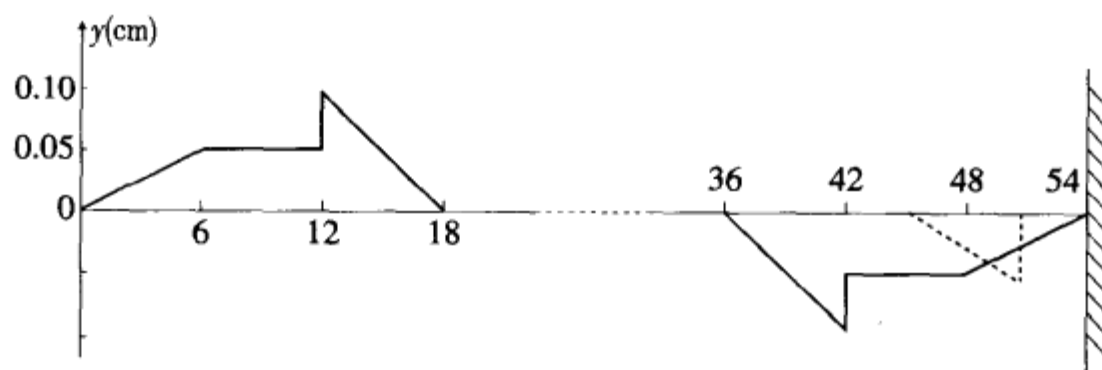
(2) $u = 1.5 \times 10^3\text{m/s}$; $\lambda = 3.14 \times 10^{-2}\text{m}$

(3) $\Delta\varphi = 8\text{rad}$

6.13 $u = 200\text{m/s}$ 沿 x 反向传播

6.14 $\nu = 15\text{Hz}, 45\text{Hz}$

6.15



图习答 6.15

- 6.16 (1) $y_2 = A \cos\left(2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \pi\right)$
 (2) $y = 2A \cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda} + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(2\pi\frac{t}{T} - \frac{\pi}{2}\right)$
 (3) 波腹位置 $x = \left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}$, 波节位置 $x = n\frac{\lambda}{2}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)

- 6.17 (1) $A = 0.01\text{m}, u = 47\text{m/s}$
 (2) 波节间距离 $\Delta x = 0.2\text{m}$
 (3) $\nu = -10.4\text{m/s}$

- 6.18 (1) $\nu_1 = 137\text{Hz}$
 (2) $\nu_2 = 136\text{Hz}$
 (3) $\nu_1' = 118.1\text{Hz}; \nu_2' = 118.2\text{Hz}$

6.19 $l = 12.4\text{m}$

第 7 章

7.1 (1) 液体由短臂向长臂一端流动, 发生的条件是必须有大气压存在, 且液柱 h_1 的压强必须小于大气压.

(2) 液体由长臂一端向短臂一端流动, 直到二管中油面高度相等.

7.2 (1) $\alpha = \frac{p_0^2}{RT_0}$; (2) $T = 4T_0$

7.3 20cm

7.4 $1.52 \times 10^5 \text{Pa}$

7.5 (1) 21.4cm, (2) 22°C

7.6 1.6atm

7.7 管内上方气体压强 $p = p_0$
 玻璃管插入液面深度为 h

7.8 $\frac{2}{3}hs; \frac{3}{2}P_0$

7.9 0.66m

7.10 $3.21 \times 10^{14} \text{cm}^{-3}; 20 \times 10^{-7} \text{J}$

7.11 $1.16 \times 10^{14} \text{Pa}$

7.12 802.6J/(kg·K)

7.13 (1) 水全部结成冰, 且终温 $t < 0^\circ\text{C}$

则 $t_3 < \frac{-[(m_1c_1 + m_2c_2)t_{12} + m_2L]}{m_3c_3}$

(2) 冰全部化为水, 且终温 $t > 0^\circ\text{C}$

$$\text{则 } t_3 > \frac{m_3 L - (m_1 c_1 + m_2 c_2) t_{12}}{m_3 c_3}$$

(3) 冰水混合, 终温 $t = 0^\circ\text{C}$

$$\text{则 } -\frac{(m_1 c_1 + m_2 c_2) t_{12} + m_2 L}{m_3 c_3} \leq t_3 \leq \frac{m_3 L - (m_1 c_1 + m_2 c_2) t_{12}}{m_3 c_3}$$

7.14 120 分钟

7.15 $3.34 \times 10^5 \text{J/kg}$

7.16 29.2:11

7.17 $0.13\text{m}; 5.0 \times 10^{-6}\text{J}$; 一半为水柱上升势能, 另一半消耗在克服摩擦力做功并转化为热能.

7.18 (1) 12cmHg; (2) 6cmHg; (3) 44cmHg

第 8 章

$$8.1 \quad T = \frac{p_0 V}{2R}$$

$$8.2 \quad E_f = E_0 + p_0 v_0 \\ T = 270\text{K}, V = 27\text{L}$$

$$8.3 \quad T_1 = 1080\text{K}, T_2 = 540\text{K}$$

$$8.4 \quad \eta = 1 - \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$$

$$8.5 \quad A = R(T_1 + \sqrt{T_1 T_3} + T_3) \\ \Delta Q = \frac{1}{2} R(5T_3 - 2\sqrt{T_1 T_3} - 3T_1)$$

8.6 略

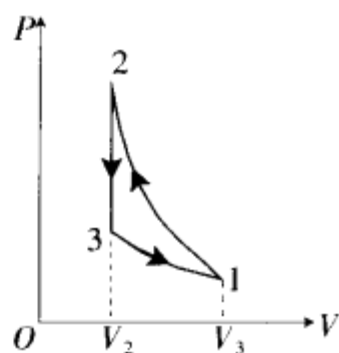
$$8.7 \quad T = 540\text{K}$$

8.8 (1) 如图

$$(2) m = 71.6\text{g}$$

$$8.9 \quad \eta_1 = \eta_2 = \frac{R(V_2 - V_1)}{C_n(V_2 + V_1)} \quad C_n \text{ 为 } ab \text{ 过程摩尔热容}$$

8.10 由于这台组合机从高温热源净吸热 $Q_1 - Q_3$, 低温热源不发生变化, 而将热量全部转化为有用功 A' , 这是违背热力学第二定律的, 所以这样的设计是不可能实现的.



图习答 8.8

第 9 章

$$9.1 \quad \frac{2k\pi a Q}{\sqrt{a^2 + R^2}}$$

$$9.2 \quad 2k\sigma \ln 2$$

$$9.3 \quad \frac{\sqrt{3}}{4} k\pi\rho R$$

$$9.4 \quad E_1 < E_2$$

$$9.5 \quad \lambda(\theta) = \frac{Q}{4R} \sin\theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi) \quad (\theta \text{ 为环上位置点与圆心的连线与该直径的夹角})$$

$$9.6 \quad U_{p_1}' = \frac{2}{3} U_1, \quad U_{p_2}' = \frac{1}{6} U_1 + \frac{1}{2} U_2$$

$$9.7 \quad U = \begin{cases} 2\pi k(\sigma_1 R_1 + \sigma_2 R_2) & (r \leq R_2) \\ 2\pi k\left(\sigma_1 R_1 + \frac{\sigma_2 R_2^2}{r}\right) & (R_2 < r \leq R_1) \end{cases}$$

$$9.8 \quad U = \frac{4kQ}{R} - U_0$$

- 9.9 $U(r) = \begin{cases} k \frac{q}{R} & (r \leq R) \\ k \frac{q}{r} & (r > R) \end{cases}$
- 9.10 $h = h_1 + h_2 - g \left(\frac{l}{v} \right)^2$
- 9.11 $t = (\sqrt{2} + \sin^{-1} \frac{\sqrt{3}}{3}) \sqrt{\frac{-m}{4\pi k q \rho}}$
- 9.12 $v = q \sqrt{\frac{2k}{3ml}}$
- 9.13 (1) $v_0 = \sqrt{\frac{kq}{m}}$; (2) $\angle AOP = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi$
- 9.14 (1) $W = \frac{3kQ^2}{l} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{5}{2} \right)$; (2) $A = \frac{kQ^2}{l} \left(3 - \frac{4}{\sqrt{3}} \right)$
- 9.15 $\frac{qQ}{Q-q}$
- 9.16 $U_A = -\frac{kq}{R} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$
- 9.17 $q_3 = \frac{q_2^2}{q_1}$
- 9.18 (1) $q_A = -2.0 \times 10^{-7} \text{C}$; $q_c = -1.0 \times 10^{-7} \text{C}$;
(2) $U_B = 2261 \text{V}$
- 9.19 (1) $U_0 = \frac{kq}{r} - \frac{kq}{a} + \frac{k(q+Q)}{b}$; (2) $\Delta U_0 = \frac{kq'}{d}$
- 9.20 $-2q$
- 9.21 $Q_A = -\frac{l-d}{l}q$ $Q_B = -\frac{d}{l}q$
- 9.22 $U = \frac{2\epsilon_r R^2 V}{3rd}$
- 9.23 $C = \frac{R}{k} \left(1 + b + \frac{b^2}{1-b^2} + \dots \right)$, (式中 $b = \frac{R}{2d}$)
- 9.24 (1) $A = \frac{kQ^2}{d} \ln 2$; (2) $F_{+Q} = 0, F_{-Q} = 0$;
(3) $F_{\text{左}} = \frac{kQ^2}{24d^2} (\pi^2 - 6)$; $F_{\text{右}} = \frac{-kQ^2}{24d^2} (\pi^2 - 6)$
(4) $F_{\text{左}}' = \frac{kQ^2}{4d^2} \ln 2$; $F_{\text{右}}' = \frac{-kQ^2}{4d^2} \ln 2$
(5) $Q_{\text{左}} = -\frac{1}{2}Q$; $Q_{\text{右}} = +\frac{1}{2}Q$;
(6) $Q_{\text{左}}' = -\frac{3}{4}Q$, $Q_{\text{右}}' = \frac{1}{4}Q$
- 9.25 $A = \frac{V^2 S}{16\pi k d}$
- 9.26 (1) $Q = \frac{2}{27} C q^2$ (2) $i_1 = \frac{19\epsilon}{60R}$ $i_2 = \frac{\epsilon}{60R}$
- 9.27 $Q_A = 3.6 \times 10^{-5} \text{C}$ $Q_B = 6.0 \times 10^{-5} \text{C}$
- 9.28 $C_{AB} = 2.9 \mu\text{F}$

第 10 章

- 10.1 $I_{\epsilon_1} = 3\text{A}$, $I_{\epsilon_2} = 1\text{A}$, $I_{\epsilon_3} = 4\text{A}$
- 10.2 表头 B; 方法是将表头 B 与 $-R = 40\Omega$ 的电阻串联接入原表头位置

- 10.3 (1) 1A
 (2) $11.7 \times 10^{-5} \text{C}$
- 10.4 (1) $\Delta I = -\frac{U}{(R_0 + R_{AC})^2} \cdot \frac{R}{N}$
 (2) $N \geq 1000 \frac{R}{R_0}$
 (3) $I_e \geq \frac{(R_0 + R)}{R_0 R} U$
- 10.5 AB 边; $\Delta I_{\max} = \frac{U}{R}$
- 10.6 $2R$
- 10.7 $\frac{15}{11}R$
- 10.8 $\frac{3 + \sqrt{17}}{4}R$
- 10.9 (1) $(1 - \frac{\sqrt{5}}{5})R$
 (2) $\frac{\sqrt{5}}{5}R$
- 10.10 R
- 10.11 (2) $\frac{388}{627}R$
- 10.12 (1) $\epsilon = \sum_{i=1}^n \frac{\epsilon_i}{2^i}, r = R$
 (2) A_8 点; $U_{\max} = 16.14 \text{V}$
- 10.13 (2) $\frac{i_5}{i_2} = \frac{\alpha}{1 - \mu\alpha}; \frac{i_7}{i_2} = \frac{\mu\alpha}{1 - \mu\alpha}$
- 10.14 $\frac{24}{35}R$

第 11 章

- 11.1 (1) 向西; (2) $F_{\text{洛}} = 3.2 \times 10^{-16} \text{N}, F_{\text{洛}}/F_{\text{重}} = 1.95 \times 10^{10}$.
- 11.2 (1) 向东; (2) $6.3 \times 10^{14} \text{m/s}^2$; (3) $2.98 \times 10^{-3} \text{m}$.
- 11.3 BIR
- 11.4 (1) $9.42 \times 10^{-5} \text{T}$ (2) $1.48 \times 10^{-6} \text{N} \cdot \text{m}$
- 11.5 $7.2 \times 10^{-5} \text{T}$; \mathbf{B} 在 XZ 平面上, 与 X 方向的夹角为 33.7°
- 11.6 (1) $\frac{m \sqrt{2gh}}{Bl}$ (2) 0.38C
- 11.7 $\frac{\mu_0 j h}{2\pi R}$, 垂直于 OO' 与 h 组成的平面
- 11.8 $\frac{B_2^2 - B_1^2}{2\mu_0}$, $-z$ 方向
- 11.9 $B = \mu_0 j d (y > d); \mu_0 j y (y < d)$
- 11.10 $\frac{qB^2 x^2}{8U}$
- 11.11 (1) 4.06V/m ; (2) $2.5 \times 10^{-2} \text{V}$
- 11.12 由 $x^2 + (y - R_1)^2 = R_1^2$ 和 $(x - R_1)^2 + y^2 = R_1^2$ 包围的区域为第一象限的磁场区域, 方向垂直于纸面向里

$$R_1 = \frac{m_e v}{e B_1} = 2H$$

其他三个象限可由对称性得出.

$$11.13 \quad B = B_y = \frac{6\mu_0}{(2\pi + 3\sqrt{3})D} I$$

$$11.14 \quad \begin{cases} x = v_0 t - [R \sin(\omega t + \alpha)] - R \sin \alpha \\ y = R \cos \alpha - R \cos(\omega t + \alpha) \\ x = 0.63 \\ y = 0.80 \quad z = 0 \end{cases}$$

$v = 4.5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, 与 x 轴夹角为 27°

第 12 章

12.1 (1) 0.96V, 左翼为正 (2) $U = 0$ (3) 机身下正上负 $U = 0.048\text{V}$
(4) 机翼左正右负, $U = 0.73\text{V}$, 机高上负下正, $U = 0.023\text{V}$

$$12.2 \quad \frac{\sqrt{3}}{3} x_0 (2vB_0 - kx_0)$$

12.3 79.6(V/m), 方向与该处电子运动的方向相反

$$12.4 \quad -\frac{\mu_0 \pi r^3 \sigma \omega_0}{R}, \sigma > 0 \text{ 时, } I \text{ 流向与 } \omega_0 \text{ 相反.}$$

$$12.5 \quad -Blv \sin \alpha$$

$$12.6 \quad 128D^2 \rho^2 g / B^4$$

$$12.7 \quad Fl\omega_1 \quad Fr / 2B^2 l^3$$

$$12.8 \quad \sqrt{v^2 - \left(\frac{mgR}{K^2 a^4}\right)^2}$$

$$12.9 \quad (1) \frac{\pi \mu_0 I R^2 r^2}{2x^3} \quad (2) \frac{3\mu_0 \pi I R^2 r^2 v}{2x^4} \quad (3) \text{与大回路中电流方向相同} \quad (4) \frac{\pi \mu_0 R^2 r^2}{2x^3}$$

$$12.10 \quad (1) \frac{\pi D^2 K}{16r}, (2) \text{与(1)同}, (3) \frac{\pi D^2 k}{8r}$$

$$12.11 \quad 1\text{W}$$

$$12.12 \quad I_1 = \frac{L_2 \epsilon / r + L_1 I_0}{L_1 + L_2}, I_2 = \frac{L_1 (\epsilon / r - I_0)}{L_1 + L_2}$$

$$12.13 \quad 1.41 \text{ 安培}$$

$$12.14 \quad Bav_0 \left[1 + \frac{B^2 a v_0}{Pb \left(R_L + \frac{\rho a}{bl} \right)} \right]^{-1}$$

$$12.15 \quad N = \frac{1}{2} F_{\text{洛}} = \frac{q^2 B_0^2 R t^2}{4mT^2}, v_0 = \frac{qB_0 R}{2m} \quad (t < T)$$

$$N = \frac{q^2 B_0^2 R}{4m} \quad (t \geq T)$$

第 13 章

$$13.1 \quad r_1 = R \left(1 + \frac{l_2}{l_1} \right) - r \frac{l_2}{l_1},$$

$$r_2 = R \left(1 + \frac{l_2}{l_1} \right) + r \frac{l_2}{l_1}$$

13.2 冬至: 太阳光与地面夹角 $\theta_\omega = 66.5^\circ - \lambda = 26.5^\circ$

$$\text{日长 } \tau_\omega = \frac{\pi - 2\sin^{-1}(\tan \lambda \tan \alpha)}{2\pi} \times 24\text{h} \stackrel{\lambda=40^\circ}{=} 9.15\text{h}$$

(只在 $\lambda \leq 90^\circ - \alpha = 66.5^\circ$ 时适用)

夏至: $\theta_S = 113.5^\circ - \lambda = 73.5^\circ$

$$\tau_S = \frac{\pi + 2\sin^{-1}(\tan \lambda \tan \alpha)}{2\pi} \times 24\text{h} \stackrel{\lambda=40^\circ}{=} 14.85\text{h}$$

13.3 $1.64 \times 10^4 \text{ km}^2$

13.4 略

13.5 $\frac{H}{2}$

13.6 m 个 (m 为奇数时); $(m-1)$ 个 (m 为偶数时)

13.7 $n = \sqrt{n_g^2 - \sin^2 i_0'}$, $n < n_g$

13.8 (1) 平行; (2) 不能

13.9 把半径为 0.45cm 的圆形区域遮盖起来; 63%.

13.10 $\delta = 2\alpha$; 不同颜色的出射光互相平行, 但彼此有一定位移 (若用望远镜观察则无色散.)

13.11 $\alpha_\infty - \alpha_0 \approx (n_0 - 1) \tan \alpha_0$

13.12 $\frac{r}{R} \geq \frac{1}{n_1} (n_1 < n_2)$, $\frac{r}{R} \geq \frac{1}{n_2} (n_1 > n_2)$

13.13 $n = 1.5$

13.14 $l_2 = l_1 + d/n = 18 \text{ cm}$

13.15 $t = d \sin \theta \left(1 - \frac{\cos \theta}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} \right)$ (参见图习答 13.5)

13.16 $l_1 = \frac{h}{n \cos i}$,
 $l_2 = \frac{h}{n} \frac{1 - n^2 \sin^2 i}{\cos^3 i}$

13.17 (1) $\delta = i + \sin^{-1} [\sin A \sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \sin i \cos A] - A$

13.18 (1) $\delta = (n-1)A$

(2) $\delta = (n-1)A \left[1 + \frac{n(n+1)}{24} A^2 \right]$

13.19 $\frac{d\delta}{d\lambda} = \frac{2 \sin \frac{A}{2}}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \frac{A}{2}}} \frac{dn}{d\lambda}$

13.20 在最小偏向角情况下观察.

13.21 提早 $\Delta t \approx (n-1) \sqrt{\frac{R}{2h}} \approx 7.08 \times 10^{-3}$

提早时间 $\Delta t = \frac{\Delta \theta}{\pi} \times 12 \text{ h} = 2.70 \times 10^{-2} \text{ h}$

$= 1.62 \text{ min (分)}$ (图习答 13.21)

13.22 提早时间 $\Delta t = 1.56 \text{ min}$.

13.23 $\alpha = 4 \sin^{-1} \sqrt{\frac{4-n^2}{3n^2}} - 2 \sin^{-1} \sqrt{\frac{4-n^2}{3}}$,

$\alpha_{\text{红}} = 42^\circ 40'$

$\alpha_{\text{紫}} = 40^\circ 39'$

第 14 章

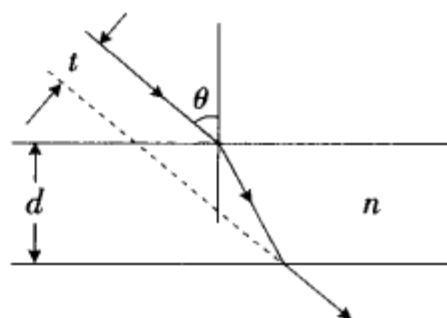
14.1 像距 $v = 90 \text{ cm}$, 放大率 $K = -2$, 为放大倒立实像.

14.2 物像公式: $\frac{n_1}{u} + \frac{n_2}{v} = \frac{n_2 - n_1}{R}$; 放大率 $K = -\frac{v n_1}{u n_2}$.

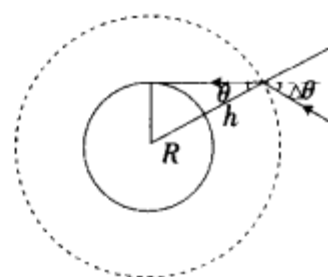
14.3 $v = 42 \text{ cm}$, $K = -3$, 为放大倒立实像.

光路图如图习答 14.3.

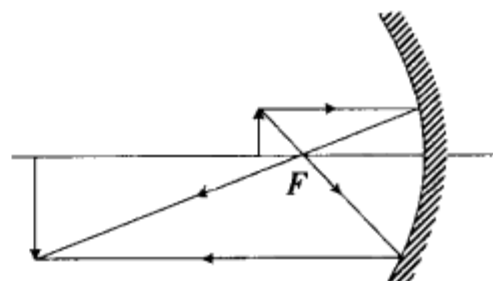
14.4 (1) $\frac{L'}{L} = -\frac{\Delta v}{\Delta u} = \frac{f^2}{(u-f)^2}$



图习答 13.15



图习答 13.21



图习答 14.3

$$(2) \frac{L'}{L} = \left(\frac{v}{u}\right)^2 = K^2.$$

14.5 $a = 22.5\text{cm}$, 图见图习答 14.5.

14.6 成实象时为旋转椭球面, 成虚象时为旋转双曲面.

14.7 (1) 见提示. (2) $f = \frac{g}{2\omega^2}$.

14.8 见提示

14.9 45mm, 90mm.

14.10 会聚透镜, $f = \frac{80}{9}\text{cm}$, $u = \frac{80}{3}\text{cm}$.

14.11 略

14.12 (1) $r_1 = \frac{4}{3}a$, $r_2 = 2a$ (2) $R_1 = 0$, $R_2 = 2a$.

14.13 $l > 100v/p$

14.14 $u = \sqrt{Lf}$, $d_{\min} = 2\sqrt{\frac{L}{F} - \frac{L}{f}}$

14.15 物像公式: $\frac{n_1}{u} + \frac{n_2}{v} = \frac{n - n_1}{R_1} + \frac{n - n_2}{R_2}$, 物方焦距 $f_1 = \frac{n_1}{\frac{n - n_1}{R_1} + \frac{n - n_2}{R_2}}$, 像方焦距

$$f_2 = \frac{n_2}{\frac{n - n_1}{R_1} + \frac{n - n_2}{R_2}}$$

14.16 见提示

14.17 只要 $\mu_0 > 2f$, 且 $R = \sqrt{\mu_0(\mu_0 - 2f)}$, 即可使像也是一球, 球心与物的球心对称, 半径也是 R .

14.18 $L = \frac{2f_1 u_1}{u_1 - 2f_1}$, $f = \left(\frac{u_1}{u_1 - 2f_1}\right)^2 f_1$

14.19 平面镀银者 $f_1 = \frac{f}{2}$, 球面镀银者 $f_2 = \frac{Rf}{2(R + f)}$

14.20 2mm

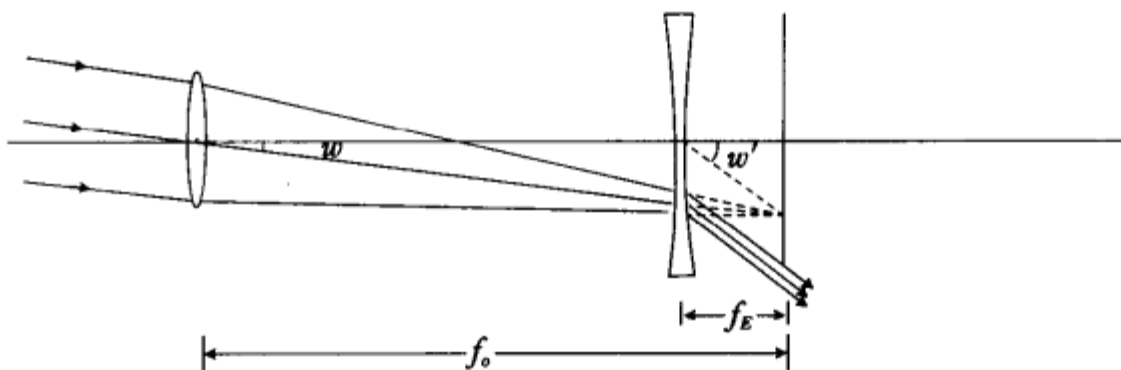
14.21 (1) 1.35cm (2) $K = 3.12$ (3) $M_E = 3.25$ (4) $M = 10.13$

14.22 21.8mm.

14.23 50mm 至 52.2mm

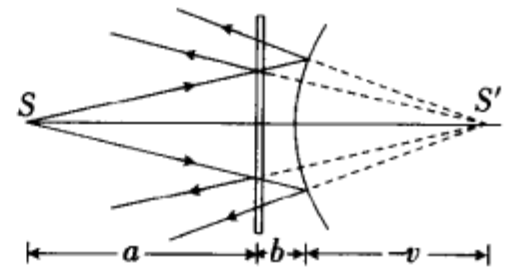
14.24 24.7ms \approx 25ms

14.25 光路图如图习答 14.25, 视角放大率 $M = \frac{w'}{w} = -\frac{f_o}{f_E}$ (注意 f_E 为负)



图习答 14.25 伽利略望远镜光路图

14.26 (1) $0.366\mu\text{m}$ (2) 205 (3) 130mm



图习答 14.5

第 15 章

15.1 $1/\sqrt{1-u^2/c^2}m$, S' 系认为两枪不同时发, 前面的枪先发.

15.2 $\sqrt{5}c = 6.71 \times 10^8 (m)$

15.3 $0.99c$

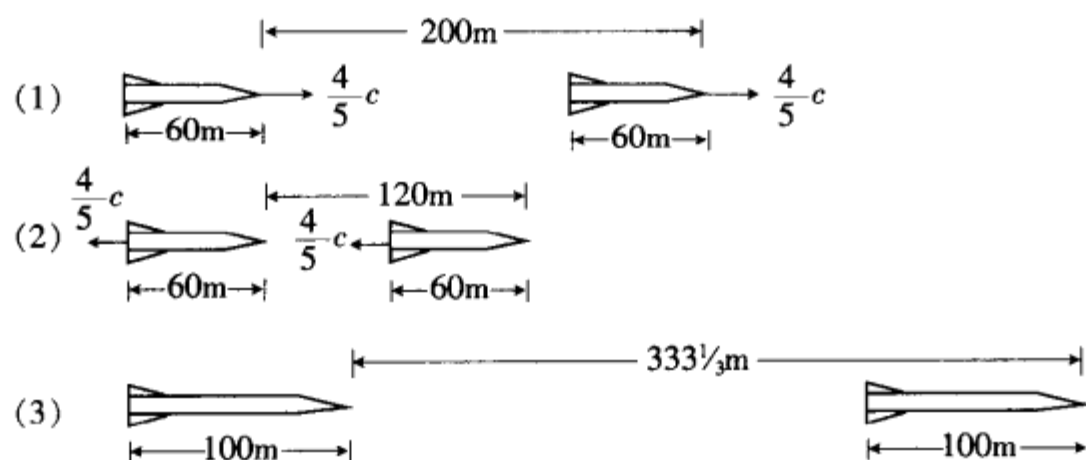
15.4 (1) $t' = \frac{l_0}{c}$ (2) $t_1 = \frac{l_0}{c} \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$ (3) $t_2 = \frac{l_0}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$

15.5 (1) 12:50 (2) $2400c = 7.2 \times 10^{11} (m)$ (3) 13:30 (4) 16:30

15.6 略

15.7 略

15.8 见图习答 15.8



图习答 15.8

15.9 (1) $\theta' = \cos^{-1} \left[\frac{\cos\theta + \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c} \cos\theta} \right]$

15.10 $t = \frac{L}{c} + \frac{D(n-1)(1-v/c)}{c \sqrt{1-v^2/c^2}}$

15.11 (1) $E_1 = 1.15m_0c^2, p_1 = 0.58m_0c; E_2 = 1.67m_0c^2, p_2 = 1.33m_0c$

(2) $E = 2.69m_0c^2, p = 2.50m_0c$

15.12 $2m_0/\sqrt{1-u^2/c^2}$

15.13 (1) 84.0° (2) 26.1°

15.14 $\sqrt{2E_1E_2(1-\cos\theta)}/c^2$

15.15 $E_0(1 + E_0/2m_0c^2)$

15.16 $c(M_i^2 - M_f^2)/(M_i^2 + M_f^2)$

15.17 $c/\sqrt{1 + (m_0c^2/Q)^2}$

15.18 略

第 16 章

16.1 0.14nm

16.2 1.44MeV·fm

16.3 高约 $9 \times 10^{-2}m$

16.4 364.6 - 656.3nm

16.5 $n = 3$

16.6 94.9nm

- 16.7 $Z=3$, 为锂离子 Li^{++} ; 72.9nm, 13.5nm, 11.4nm 三条.
- 16.8 $4.13 \times 10^6 \text{m/s}$
- 16.9 $r_1: 0.0625 \text{nm}, r_2: 0.106 \text{nm}, v_1: 4.38 \times 10^6 \text{m/s}, v_2: 2.19 \times 10^6 \text{m/s}; 54.4 \text{eV}, 40.8 \text{V}, 30.4 \text{nm}.$
- 16.10 $6.26 \times 10^4 \text{m/s}$
- 16.11 0.1058nm; 6.80V, 5.10V; 243nm
- 16.12 6条; $6.40 \times 10^{14} \text{Hz}.$
- 16.13 $1.24 \times 10^5 \text{eV}/c, 0.124 \text{MeV}, 2.2 \times 10^{-31} \text{kg}; 2.07 \text{eV}/c, 2.07 \text{eV}, 3.7 \times 10^{-36} \text{kg}.$
- 16.14 锂、钷
- 16.15 2.0eV; 2.0V
- 16.16 2.31eV
- 16.17 $3.88 \times 10^{-2} \text{eV}; 0.145 \text{nm}$
- 16.18 电子: $3.88 \times 10^{-2} \text{nm}$, 质子: $9.05 \times 10^{-4} \text{nm}$; 子弹: $1.33 \times 10^{-26} \text{nm}$
- 16.19 质子
- 16.20 子弹: $1 \times 10^{-31} \text{m}$, 电子: $1 \times 10^{-3} \text{m}$. 可见, 对于象子弹那样的宏观物体, 不确定关系对实验方法实际上没有什么限制.
- 16.21 9.47MeV
- 16.22 ${}^3_2\text{He}$; 1.68MeV, 为放能反应.
- 16.24 $4.88 \times 10^{-18} \text{秒}^{-1}; 3.0 \times 10^3 \text{kg}; 1.23 \times 10^4$ 个 α 粒子.
- 16.25 4.55×10^{14} 贝克; 720g; 功率变化小于 1%
- 16.26 4.38MeV; ${}^{232}\text{Th}$ 衰变放出的 α 粒子的能量为 $4.01 \text{MeV} < 4.38 \text{MeV}$, 不能引起上述的核反应.
- 16.27 3.27MeV, 4.03MeV, 17.59MeV, 18.35MeV; 1克氦放出的能量为 $3.45 \times 10^{11} \text{J}$, 相当于煤的质量 $10.5 \times 10^3 \text{kg}.$
- 16.28 $F_{\text{引}}: 1.86 \times 10^{-34} \text{N}, F_{\text{电}}: 2.30 \times 10^2 \text{N}, F_{\text{引}}/F_{\text{电}}: 8 \times 10^{-37}$, 可见质子间的万有引力远比它们间的电磁作用小.

全国中学生物理竞赛内容提要

编者按:按照中国物理学会全国中学生物理竞赛委员会第九次全体会议的建议,由中国物理学会全国中学生物理竞赛委员会常务委员会根据《全国中学生物理竞赛章程》中关于命题原则的规定,结合我国目前中学生的实际情况,制定了《全国中学生物理竞赛内容提要》,作为今后物理竞赛预赛、复赛和决赛命题的依据.它包括理论基础、实验基础、其他方面等部分.其中理论基础的绝大部分内容和国家教委制订的《全日制中学物理教学大纲》中的附录,即1983年教育部发布的《高中物理教学纲要(草案)》的内容相同.主要差别有两点:一是少数地方做了几点增补;二是去掉了教学纲要中的说明部分.此外,在编排的次序上做了一些变动,内容表述上做了一些简化.1991年2月20日经全国中学生物理竞赛委员会常务委员会扩大会议讨论通过并开始试行.1991年9月11日在南宁由全国中学生物理竞赛委员会第十次全体会议正式通过,开始实施.

经2000年,第十九次竞委会原则同意对《全国中学生物理竞赛内容提要》作适当的调整和补充.考虑到适当控制预赛试题难度的精神,提要中新补充的内容将用“※”符号标出,作为复赛题和决赛题增补的内容,预赛试题仍沿用原规定的内容提要,不增加修改补充后的内容.新规定的《全国中学生物理竞赛内容提要》将从2002年起实行,2001年举行的第十八届物理竞赛预、复、决赛仍采用未修改、补充的《全国中学生物理竞赛内容提要》.

一、理论基础

力 学

1. 运动学

参照系 质点运动的位移和路程、速度、加速度 相对速度

矢量和标量 矢量的合成和分解

匀速及匀变速直线运动及其图象 运动的合成 抛体运动 圆周运动

刚体的平动和绕定轴的转动

※质心 质心运动定理

2. 牛顿运动定律 力学中常见的几种力

牛顿第一、二、三运动定律 惯性参照系的概念

摩擦力

弹性力 胡克定律

万有引力定律 均匀球壳对壳内和壳外质点的引力公式(不要求导出) 开普勒定

律 行星和人造卫星运动

※惯性力的概念

3. 物体的平衡

共点力作用下物体的平衡

力矩 刚体的平衡条件 重心

物体平衡的种类

4. 动量

冲量 动量 动量定理 动量守恒定律

反冲运动及火箭

5. ※冲量矩 ※质点和质点组的角动量 ※角动量守恒定律

6. 机械能

功和功率

动能和动能定理

重力势能 引力势能 质点及均匀球壳壳内和壳外的引力 势能公式(不要求导出) 弹簧的弹性势能

功能原理 机械能守恒定律

碰撞

7. 流体静力学

静止流体中的压强

浮力

8. 振动

简谐振动 $[x = A\cos(\omega t + \alpha)]$ 振幅 频率和周期 相位

振动的图象

参考圆 振动的速度和加速度

由动力学方程确定简谐振动的频率

阻尼振动 受迫振动和共振(定性了解)

9. 波和声

横波和纵波 波长、频率和波速的关系 波的图象

波的干涉和衍射(定性) ※驻波

声波 声音的响度、音调和音品 声音的共鸣 乐音和噪声 ※多普勒效应

热 学

1. 分子动理论

原子和分子的数量级

分子的热运动 布朗运动 温度的微观意义

分子力

分子的动能和分子间的势能 物体的内能

2. 热力学第一定律

热力学第一定律

3. ※热力学第二定律

※热力学第二定律 ※可逆过程与不可逆过程

4. 气体的性质

热力学温标

理想气体状态方程 普适气体恒量
理想气体状态方程的微观解释(定性)
理想气体的内能
理想气体的等容、等压、等温和绝热过程(不要求用微积分运算)
5. 液体的性质
液体分子运动的特点
表面张力系数
浸润现象和毛细现象(定性)
6. 固体的性质
晶体和非晶体 空间点阵
固体分子运动的特点
7. 物态变化
熔解和凝固 熔点 熔解热
蒸发和凝结 饱和气压 沸腾和沸点 汽化热 临界温度
固体的升华
空气的湿度和湿度计 露点
8. 热传递的方式
传导、对流和辐射
9. 热膨胀
热膨胀和膨胀系数

电 学

1. 静电场
库仑定律 电荷守恒定律
电场强度 电场线 点电荷的场强 场强叠加原理 均匀带电球壳壳内的场强和壳外的场强公式(不要求导出) 均强电场
电场中的导体 静电屏蔽
电势和电势差 等势面 点电荷电场的电势公式(不要求导出) 电势叠加原理
均匀带电球壳壳内和壳外的电势公式(不要求导出)
电容 电容器的连接 平行板电容器的电容公式(不要求导出)
电容器充电后的电能
电介质的极化 介电常数
2. 稳恒电流
欧姆定律 电阻率和温度的关系
电功和电功率
电阻的串、并联
电动势 闭合电路的欧姆定律
一段含源电路的欧姆定律 ※基尔霍夫定律
电流表 电压表 欧姆表
惠斯通电桥 补偿电路

3. 物质的导电性

金属中的电流 欧姆定律的微观解释

液体中的电流 法拉第电解定律

气体中的电流 被激放电和自激放电(定性)

真空中的电流 示波器

半导体的导电特性 P型半导体和N型半导体

晶体二极管的单向导电性 三极管的放大作用(不要求机理)

超导现象

4. 磁场

电流的磁场 磁感应强度 磁感线 匀强磁场

安培力 洛伦兹力 电子荷质比的测定 质谱仪 回旋加速器

5. 电磁感应

法拉第电磁感应定律

楞次定律 ※感应电场(涡旋电场)

自感系数

互感和变压器

6. 交流电

交流发电机原理 交流电的最大值和有效值

纯电阻、纯电感、纯电容电路

整流、滤波和稳压

三相交流电及其连接法 感应电动机原理

7. 电磁振荡和电磁波

电磁振荡 振荡电路及振荡频率

电磁场和电磁波 电磁波的波速 赫兹实验

电磁波的发射和调制 电磁波的接收 调谐 检波

光 学

1. 几何光学

光的直进、反射、折射 全反射

光的色散 折射率与光速的关系

平面镜成像 球面镜成像公式及作图法

薄透镜成像公式及作图法

眼睛 放大镜 显微镜 望远镜

2. 波动光学

光的干涉和衍射(定性)

光谱和光谱分析 电磁波谱

3. 光的本性

光的学说的历史发展

光电效应 爱因斯坦方程

光的波粒二象性

近代物理

1. 原子结构

卢瑟福实验 原子的核式结构

玻尔模型 用玻尔模型解释氢光谱 玻尔模型的局限性

原子的受激辐射 激光

2. 原子核

原子核的量级

天然放射现象 放射线的探测

质子的发现 中子的发现 原子核的组成

核反应方程

质能方程 裂变和聚变

“基本”粒子 ※夸克模型

3. ※不确定关系 ※实验粒子的波粒二象性

4. ※狭义相对论 爱因斯坦假设 时间和长度的相对论效应

$$p = mv = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, E = mc^2$$

5. ※太阳系 银河系 宇宙和黑洞的初步知识

数学基础

1. 中学阶段全部初等数学(包括解析几何)

2. 矢量的合成和分解 极限 无限大和无限小的初步概念

3. 不要求用微积分进行推导或运算

二、实验基础

1. 要求掌握国家教委制订的《全日制中学物理教学大纲》中的全部学生实验.

2. 要求能正确地使用(有的包括选用)下列仪器和用具:

米尺 游标卡尺 螺旋测微器 天平 秒表 温度计 量热器 电流表 电压表
欧姆表 万用电表 电池 电阻箱 变阻器 电容器 变压器 开关 二极管 光
具座(包括平面镜、球面镜、棱镜、透镜等光学元件在内).

3. 有些没有见过的仪器,要求能按给定的说明书正确使用,例如电桥、电势差计、示波器、稳压电源、信号发生器等.

4. 除了国家教委制订的《全日制中学物理教学大纲》中规定的学生实验外,还可安排其他的实验来考查学生的实验能力,但这些实验所涉及到的原理和方法不应超过本提要第一部分(理论基础),而所用仪器应在上述第2、3指出的范围内.

5. 对数据处理,除计算外,还要求会用作图法.关于误差,只要求直读示数时的有效数字和误差、计算结果的有效数字(不作严格的要求)和主要系统误差来源的分析.

三、其他方面

物理竞赛的内容有一部分有较大的开阔性,主要包括以下三方面:

1. 物理知识在各方面的应用.对自然界、生产和日常生活中一些物理现象的解释.
2. 近代物理的一些重大成果和现代的一些重大信息.
3. 一些有重要贡献的物理学家的姓名和他们的主要贡献.

参考资料

1. 全国中学生物理竞赛委员会办公室主编的历届《全国中学生物理竞赛参考资料》.
2. 《北京市高级中学实验课本 物理》.北京市教育委员会编.主编 沈克琦.



物理奥林匹克竞赛编辑部编

物理奥林匹克竞赛专家委员会审定

高 中

物理奥林匹克竞赛 标准教材

主编 郑永令

编者 梁励芬 张馥宝 方小敏

郑永令 陆汉忠 陆申龙

北京教育出版社

天津出版社

高中



物理奥林匹克竞赛编辑部编
物理奥林匹克竞赛专家委员会审定

物理奥林匹克竞赛 标准教材

郑永令 主编

北京教育出版社
天津出版社



封面设计：大盟文化

专家阵容最为强大

物理奥林匹克竞赛专家委员会名单

- 舒幼生 北京大学物理科学院教授，
国际中学生物理奥林匹克竞赛中国队教练、领队。
- 陈秉乾 北京大学物理科学院教授，
国际中学生物理奥林匹克竞赛中国队教练、领队。
- 郑永令 复旦大学物理系教授，
国际中学生物理奥林匹克竞赛中国队教练、领队。
- 陆申龙 复旦大学物理系教授，
物理竞赛上海赛区物理实验竞赛命题组组长，
国际中学生物理奥林匹克竞赛中国队教练、领队。
- 张馥宝 上海交通大学物理系教授，
全国中学生物理奥林匹克竞赛委员会委员，
上海市物理竞赛命题、审题组成员，
上海市物理高考命题、审题组成员，
全国成人高考物理命题组成员。

ISBN 7-80554-469-7



ISBN 7-80554-469-7/G · 65

定价：38.00 元

序 言

本书是根据作者历年在上海市物理业余学校讲授奥赛物理课程的讲稿修订而成的。该业余学校是上海市物理学会为适应广大中学生的需要,特别是有志于参加全国物理竞赛的学生需要而开办的。

与当前众多的同类书相比,本书有以下几个特点:

1. 遵循新纲,内容充实.本书涵盖物理竞赛委员会颁发的竞赛大纲(即竞赛内容提要,见本书附录)全部内容,包括2002年开始实施的新增项目,如角动量、热力学第二定律、基尔霍夫方程、相对论等.全书计有力学6章、热学2章、电学4章、光学2章、近代物理2章、实验5章,共21章,是一本内容十分完整的物理竞赛课程教材.其中实验部分,更为同类书所鲜见.

2. 高屋建瓴,深入浅出.本书作者都是大学的正、副教授,具有丰富的大学物理教学经验,又长期关注中学教学,因而在讲授本课程时,能站在大学的高度,又联系中学生实际,阐述物理学基本原理,并重视物理思想和物理方法及物理概念的历史发展,在适当的地方还注意联系科技新成果和学科的最新进展.

其中第一、二、三、四、五、十一、十二章由上海市中学生物理奥林匹克竞赛委员会委员、国际奥林匹克竞赛中国集训队教练、上海复旦大学物理系梁励芬副教授编写。

第六、七、八章由全国中学生物理奥林匹克竞赛委员会委员,上海市物理竞赛命题、审题组成员,上海市物理高考命题、审题组成员,全国成人高考物理命题组成员,上海交通大学物理系张馥宝教授编写。

第九、十章由全国中学生物理奥林匹克竞赛委员会委员、国际奥林匹克竞赛中国集训队教练、上海复旦大学物理系方小敏副教授编写。

第十三、十四、十五章由国际中学生物理奥林匹克竞赛中国队教练、领队,上海复旦大学物理系郑永令教授编写。

第十六章由上海复旦大学物理系陆汉忠教授编写。

第十七、十八、十九、二十、二十一章由国际中学生物理奥林匹克竞赛中国队教练、领队,物理竞赛上海赛区物理实验竞赛命题组组长、上海复旦大学物理系陆申龙教授编写。

全书二十一章由郑永令教授统稿。

3. 题例丰富,层次分明.在正文的每节末,有适量紧扣该节内容的例题,在每章末有大量本章综合例题.例题的选择力求典型和切题,例题的分析力求思路清晰、方法精巧.

每章末附有大量习题,习题的选择力避陈题,编排由浅入深,层次分明.例题或习题中凡选用历届竞赛题(包括国内的和国际的),尽量注明出处.对较难的习题,给出简明扼要的提示.提示不放在该题之后,而集中一起独立编排,以利读者思考.这也是本书特色之一.书末附有全部习题的答案.

本书对数学的要求,在正文中限于初等数学(包括矢量代数),但在某些例题和习题中,根据需要也不回避使用微积分.因此本书对于参加高考和有志于参加国内、国际物理竞赛的学生,都极有参考价值.

以上所述或为作者自诩,读者当自行阅览鉴赏之.

最后要感谢北京教育出版社、天津出版社对我们的大力支持,使本书得以顺利出版,并以精美的印刷和装帧奉献于读者.

限于作者水平,错误和不妥之处在所难免,敬请同仁与广大读者不吝指正.

郑永令

2004年6月于复旦大学

责任编辑：吕心鹏 解重庆

图书在版编目 (CIP) 数据

物理奥林匹克竞赛标准教材. 高中/物理奥林匹克竞赛编辑部编. —北京：文津出版社，2004

ISBN 7-80554-469-7

I. 物… II. 物… III. 物理课—高中—教学参考资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2004) 第 062461 号

高中 物理奥林匹克竞赛标准教材

物理奥林匹克竞赛编辑部编

*

北京教育出版社 出版
文津出版社

(北京北三环中路 6 号)

邮政编码：100011

网 址：www.hph.com.cn

北京出版社出版集团总发行

北京奥林文化艺术中心经销

网 址：www.ao-lin.com.cn

北京乾洋印刷有限公司印刷

*

787×1092 毫米 16 开本 31.75 印张 983 千字

2004 年 8 月第 1 版 2004 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 7-80554-469-7/G·65

定价：38.00 元