目录

CONTENTS

第 1 章　直角三角形

第 2 章　四边形

目录

CONTENTS

第1章

1.1　直角三角形的性质和判定(Ⅰ)

扫码观看 本节精彩微课

课前预习

1. 理解直角三角形的两种判定方法

(1)有两个角________的三角形是直角三角形;

(2)在三角形中,如果一条边上的中线等于这条边的________,那么这个三角形是直角三角形.

2. 掌握直角三角形的性质

(1)直角三角形的两个锐角________;

(2)直角三角形斜边上的________等于斜边的一半;

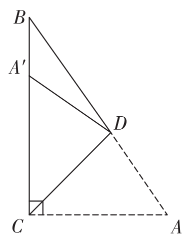
(3)在直角三角形中,如果一个锐角等于 30°,那么它所对的直角边等于________的一半;

(4)在直角三角形中,如果一条直角边等于斜边的一半,那么这条直角边所对的角等于________.

课堂探究

探究一:直角三角形两锐角关系及直角三角形的判定

【例1】(2017 东莞市校级模拟)如图,在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle ACB=90°$,$\angle A=55°$,将其折叠,使点 A 落在 BC 边上的点 A' 处,折痕为 CD,则$\angle A'DB=$(　　)



(A)40°　(B)30°

(C)20°　(D)10°

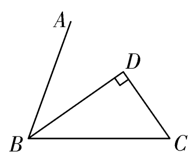
【思路导引】

1. 由折叠的性质,得$\angle CA'D=\angle$________$=$________.

2. 由直角三角形中两锐角互余,得$\angle B=$________.

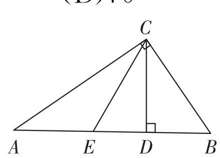
3. 由三角形外角的性质,得$\angle A'DB=\angle$________$-\angle$________$=$________.

变式训练 1-1:(2016 昆明校级模拟)如图,BD 平分$\angle ABC$,$CD\perp BD$,D 为垂足,$\angle C=55°$,则$\angle ABC$ 的度数是(　　)



(A)35°　(B)55°　(C)60°　(D)70°

变式训练 1-2:(2018 扬州)在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle ACB=90°$,$CD\perp AB$ 于点 D,CE 平分$\angle ACD$ 交 AB 于点 E,则下列结论一定成立的是(　　)

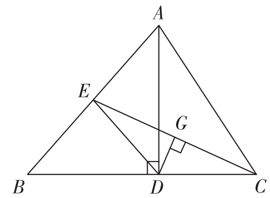


(A)$BC=EC$　(B)$EC=BE$

(C)$BC=BE$　(D)$AE=EC$

探究二:直角三角形斜边上中线的性质

【例2】(2017 古田县校级模拟)如图,$\triangle ABC$ 中,AD 是高,CE 是中线,点 G 是 CE 的中点,$DG\perp CE$,垂足为 G,连接 DE. 求证:$DC=BE$.



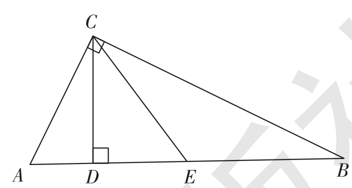
【思路导引】

1. 由直角三角形斜边上中线的性质,得________$=\frac{1}{2}AB=BE$.

2. 由题意得,DG 是 CE 的__________线,故 $DC=$________.

3. 由等量代换,得 $DC=BE$.

变式训练 2-1:(2018 黄冈)如图,在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle ACB=90°$,CD 为 AB 边上的高,CE 为 AB 边上的中线,$AD=2$,$CE=5$,则 $CD=$(　　)

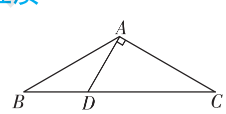


(A)2　(B)3　(C)4　(D)$2\sqrt{3}$

变式训练 2-2:在直角三角形中,斜边和斜边上的中线之和是 36 cm,则此三角形的斜边长为________ cm.

探究三:含 30°角的直角三角形的性质

【例3】在$\triangle ABC$ 中,$AB=AC$,$\angle BAC=120°$,$AD\perp AC$ 于点 A.



(1)求$\angle BAD$ 的度数.

(2)求证:$DC=2BD$.

【思路导引】

1. 由 $AD\perp AC$ 得$\angle DAC=$________,$\angle BAD=$________.

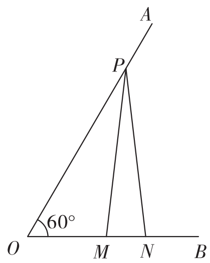
2. 由$\angle BAC=120°$，$AB=AC$，得$\angle B=\angle C=$________，因此$AD=$________，$DC=$________$AD=$________BD.

规律总结 含30°角的直角三角形性质的两种应用

(1)证明：用来证明三角形中线段的倍分问题.

(2)求解：知道30°角所对的直角边的长，求斜边的长，或知道斜边的长，求30°角所对的直角边的长.

变式训练 3-1：(2017 江都区三模)

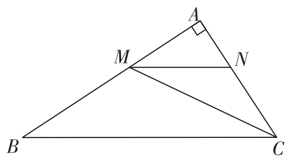


如图，已知$\angle AOB=60°$，点P在边OA上，$OP=10$，点M，N在边OB上，$PM=PN$. 若$MN=2$，则$OM=$(　　)

(A)3　　(B)4

(C)5　　(D)6

变式训练 3-2：(2018 淄博)



如图，在Rt△ABC中，CM平分$\angle ACB$交AB于点M，过点M作$MN\parallel BC$交AC于点N，且MN平分$\angle AMC$. 若$AN=1$，则BC的长为(　　)

(A)4　　(B)6

(C)$4\sqrt{3}$　　(D)8

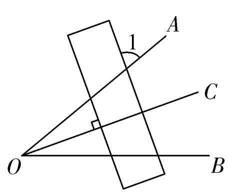
课堂达标

1. **(2018 百色)** 在△OAB中，$\angle O=90°$，$\angle A=35°$，则$\angle B=$(　　)

(A)35°　　(B)55°

(C)65°　　(D)145°

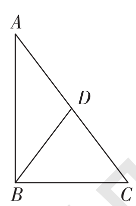
2. **(2016 石家庄校级模拟)** 如图，$\angle AOB=40°$，OC平分$\angle AOB$，直尺与OC垂直，则$\angle 1$等于(　　)



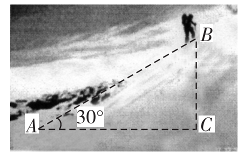
(A)60°　　(B)70°

(C)50°　　(D)40°

3. **(2018 徐州)** 如图，在Rt△ABC中，$\angle ABC=90°$，D为AC的中点. 若$\angle C=55°$，则$\angle ABD=$________°.



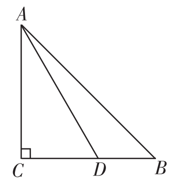
4. 如图，孔明同学背着一桶水，从山脚A出发，沿与地面成30°角的山坡向上走，送水到山上因今年春季受旱缺水的王奶奶家(B处)，$AB=80$ m，则孔明从A到B上升的高度BC是________ m.



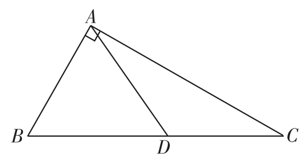
5. 如图，在△ABC中，$\angle C=90°$，$AC=BC$，点D在BC上，且$\angle BAD=15°$.

(1)求$\angle CAD$的度数.

(2)若$AC=5$，$BD=2$，求AD的长.



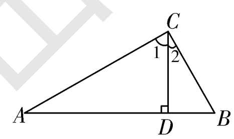
6. 如图，在Rt△ABC中，$\angle BAC=90°$，D是BC上一点，且$\angle BAD=2\angle C$. 求证：$\angle B=\angle ADB$.



课后提升

【基础达标】

1. **(2016 高青县期中)** 如图，$\angle ACB=90°$，$CD\perp AB$，垂足为D，下列结论错误的是(　　)



(A)图中有3个直角三角形

(B)$\angle 1=\angle 2$

(C)$\angle 1$和$\angle B$都是$\angle A$的余角

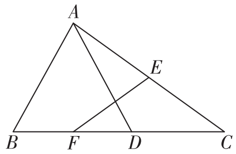
(D)$\angle 2=\angle A$

2. **(2016 祁阳县期末)** Rt△ABC中，$\angle C=90°$，$\angle B=36°$，则$\angle A=$(　　)

(A)44°　　(B)34°　　(C)54°　　(D)64°

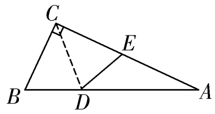
3. (2017 洪雅县期末)直角三角形的一个锐角$\angle A$是另一个锐角$\angle B$的 3 倍,那么$\angle B$的度数是(　　)
(A)22.5°　(B)45°　(C)67.5°　(D)135°

4. (2017 淄川区一模)如图,在$\triangle ABC$中,D是BC上一点,$AB=AD$,E,F分别是AC,BD的中点. 若$EF=2$,则AC的长是(　　)



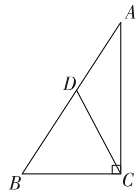
(A)3　(B)4　(C)5　(D)6

5. (2016 东台市期中)如图,$\triangle ABC$中,$\angle ACB=90°$,沿CD折叠$\triangle CBD$,使点B恰好落在AC边上的点E处,若$\angle A=25°$,则$\angle BDC$等于(　　)



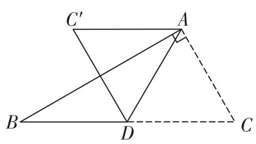
(A)44°　(B)60°
(C)67°　(D)70°

6. (2018 福建)如图,在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中,$\angle ACB=90°$,$AB=6$,D是AB的中点,则$CD=$________.

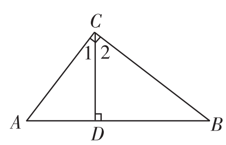


7. (2017 太谷县校级期末)有下列条件:①$\angle A+\angle B=\angle C$;②$\angle A:\angle B:\angle C=1:2:3$;③$\angle A=90°-\angle B$;④$\angle A=\angle B=\angle C$. 其中能确定$\triangle ABC$是直角三角形的条件是________(填序号).

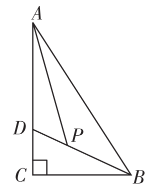
8. (2017 江阴市校级二模)如图,在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中,$\angle BAC=90°$,AD为斜边BC上的中线,将$\triangle ADC$沿AD翻折,使点C落在点C'处. 若$AC'/\!/BC$,则$\angle B=$________.



9. 如图,$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中,$\angle ACB=90°$,CD是AB边上的高,分别写出与$\angle 1$,$\angle 2$相等的角,并说明理由.



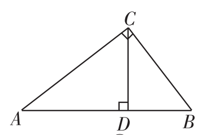
10. 如图,在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中,$\angle C=90°$,BD平分$\angle ABC$交AC于点D,AP平分$\angle BAC$交BD于点P.
(1)求$\angle APD$的度数;
(2)若$\angle BDC=58°$,求$\angle BAP$的度数.



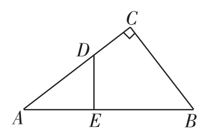
【能力提升】

11. (2017 绥化)在等腰$\triangle ABC$中,$AD\perp BC$交直线BC于点D. 若$AD=\frac{1}{2}BC$,则$\triangle ABC$的顶角的度数为________.

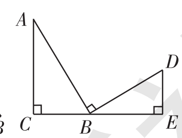
12. (1)如图①,在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中,$\angle ACB=90°$,$CD\perp AB$,垂足为D,$\angle ACD$与$\angle B$有什么关系?为什么?
(2)如图②,在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中,$\angle C=90°$,D,E分别在AC,AB上,且$\angle ADE=\angle B$,判断$\triangle ADE$的形状是什么,为什么?
(3)如图③,在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$和$\mathrm{Rt}\triangle DBE$中,$\angle C=90°$,$\angle E=90°$,$AB\perp BD$,点C,B,E在同一直线上,$\angle A$与$\angle D$有什么关系?为什么?



图①



图②



图③

1.2　直角三角形的性质和判定(Ⅱ)

第 1 课时　勾股定理

扫码观看
本节精彩微课

课前预习

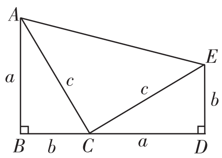
掌握勾股定理,并能灵活应用

直角三角形两直角边 a,b 的平方和,等于斜边 c 的平方,即 a^2+______$=$______.

课堂探究

探究一:勾股定理及其验证

【例 1】(1)如图,Rt△ABC≌Rt△CDE,$\angle B=\angle D=90^\circ$,且 B,C,D 三点共线. 试证明 $\angle ACE=90^\circ$.



(2)请你利用(1)中的结论和图形证明勾股定理.

【思路导引】

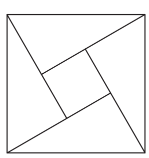
1. 全等三角形的对应角相等,所以 $\angle BAC=$______;

2. 梯形 $ABDE$ 的面积=三角形 ABC 的面积+三角形 CDE 的面积+______________.

方法技巧　勾股定理的证明

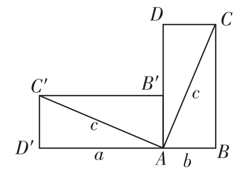
勾股定理的证明方法很多,可通过对图形的割补、拼接等方法,利用图形面积之间的关系进行证明,也可把直角三角形放在方格中,通过数格子、计算或用面积方法证明.

变式训练 1-1:(2018 泸州)"赵爽弦图"巧妙地利用面积关系证明了勾股定理,是我国古代数学的骄傲. 如图所示的"赵爽弦图"是由 4 个全等的直角三角形和 1 个小正方形拼成的大正方形. 设直角三角形较长的直角边长为 a,较短的直角边长为 b. 若 $ab=8$,大正方形的面积为 25,则小正方形的边长为(　　)



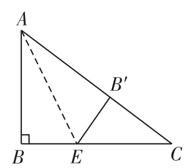
(A)9　　(B)6　　(C)4　　(D)3

变式训练 1-2:将两个完全相同的矩形拼成如图所示的图形,矩形的长为 a,宽为 b,对角线长为 c,请你用该图验证勾股定理.



探究二:勾股定理的应用

【例 2】如图,在 Rt△ABC 中,$\angle B=90^\circ$,$AB=3$,$BC=4$,将△ABC 折叠,使点 B 恰好落在边 AC 上,与点 B'重合,AE 为折痕,则 $EB'=$______.



【思路导引】

1. 在△ABC 中,$\angle B=90^\circ$,$AB=3$,$BC=4$,$AC=$______.

2. 由折叠可得 $AB'=AB=$______,$\angle AB'E=$______.

3. 在 Rt△$B'CE$ 中,$B'E^2+B'C^2=CE^2$,从而可设未知数,列方程求解.

规律总结　运用勾股定理求解线段长度问题的"四步法"

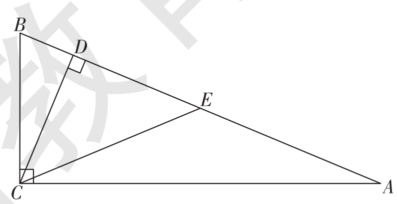
(1)找直角:找出图中的直角三角形,或作辅助线构造直角三角形.

(2)定关系:找出所求线段与直角三角形三边的关系.

(3)计算:根据勾股定理计算相关线段的平方.

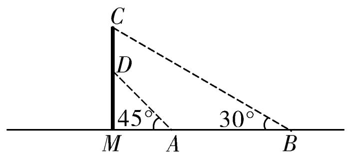
(4)求值:估算所求数值是哪个数的平方,然后确定线段长度.

变式训练 2-1:(2017 大连)如图,在△ABC 中,$\angle ACB=90^\circ$,$CD\perp AB$,垂足为 D,点 E 是 AB 的中点,$CD=DE=a$,则 AB 的长为(　　)



(A)$2a$　　(B)$2\sqrt{2}a$　　(C)$3a$　　(D)$\frac{4\sqrt{3}}{3}a$

变式训练 2－2:(2016 枣庄) 如图,是矗立在高速公路水平地面上的交通警示牌,经测量得到如下数据:$AM=4$ m,$AB=8$ m,$\angle MAD=45°$,$\angle MBC=30°$,则警示牌的高 CD 约为________ m(结果精确到 0.1 m,参考数据:$\sqrt{2}\approx1.41$,$\sqrt{3}\approx1.73$).

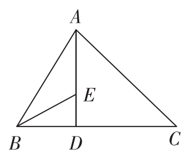


课堂达标

1. (2017 韶关市期末) 在直角三角形中,两条直角边的长分别是 12 和 5,则斜边上的中线的长是(　　)

(A)34　　(B)26　　(C)8.5　　(D)6.5

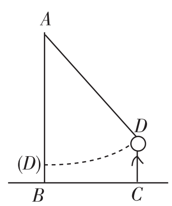
2. (2018 陕西) 如图,在△ABC 中,$AC=8$,$\angle ABC=60°$,$\angle C=45°$,$AD\perp BC$,垂足为 D,$\angle ABC$ 的平分线交 AD 于点 E,则 AE 的长为(　　)



(A)$\frac{4\sqrt{2}}{3}$　　(B)$2\sqrt{2}$　　(C)$\frac{8\sqrt{2}}{3}$　　(D)$3\sqrt{2}$

3. (2018 云南) 在△ABC 中,$AB=\sqrt{34}$,$AC=5$. 若 BC 边上的高等于 3,则 BC 边的长为________.

4. 某数学学习小组想利用旗杆上的绳子测量校园内旗杆 AB 的高度(如图,AB 垂直于地面 BC),方法如下:先把旗杆绳(AD)垂下,测得绳子底端 D 距地面刚好 1 m. 然后拉住绳子底端向外走 7 步(每步的距离约为 0.6 m),刚好能拉住绳子底端放在一高为 1.6 m 的同学的头顶上,求旗杆 AB 的长.



5. 在△ABC 中,$AB=15$,$BC=14$,$AC=13$,求△ABC 的面积.

某学习小组经过合作交流,给出了下面的解题思路,请你按照他们的解题思路完成解答过程.

作 $AD\perp BC$ 于点 D,设 $BD=x$,用含 x 的代数式表示 CD	→	根据勾股定理,利用 AD 作为"桥梁",建立方程模型求出 x	→	利用勾股定理求出 AD 的长,再计算三角形的面积

课后提升

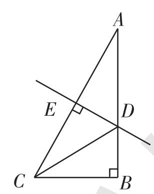
【基础达标】

1. (2017 德州市二模) 一个等腰三角形的顶角是 120°,底边上的高是 1 cm,那么它的周长是(　　)

(A)$(2+\sqrt{3})$ cm　　(B)$2(2+\sqrt{3})$ cm

(C)$2(2+\sqrt{5})$ cm　　(D)$2\sqrt{3}$ cm

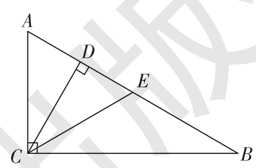
2. 如图,在 Rt△ABC 中,$\angle B=90°$,$\angle A=30°$,DE 垂直平分斜边 AC,交 AB 于点 D,E 是垂足,连接 CD. 若 $BD=1$,则 AC 的长是(　　)



(A)$2\sqrt{3}$　　(B)2

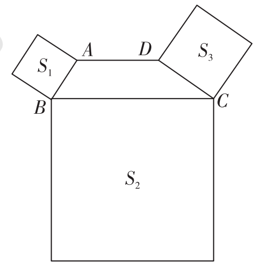
(C)$4\sqrt{3}$　　(D)4

3. (2017 蓝田县二模) 如图,在 Rt△ABC 中,$\angle ACB=90°$,CD,CE 分别是斜边上的高和中线. 若 $AC=CE=6$,则 CD 的长为(　　)



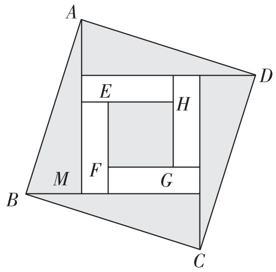
(A)$\sqrt{3}$　　(B)$3\sqrt{3}$　　(C)6　　(D)$6\sqrt{3}$

4. (2017 贵阳) 如图,在四边形 $ABCD$ 中,$AD\parallel BC$,$\angle ABC+\angle DCB=90°$,且 $BC=2AD$. 分别以 AB,BC,DC 为边向外作正方形,其面积分别为 S_1,S_2,S_3. 若 $S_1=3$,$S_3=9$,则 $S_2=$(　　)



(A)12　　(B)18　　(C)24　　(D)48

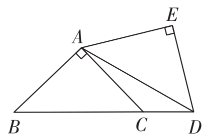
5.（2017 温州）4 个全等的直角三角形按图示方式围成正方形 $ABCD$，过各较长直角边的中点作垂线，围成面积为 S 的小正方形 $EFGH$. 已知 AM 为 Rt$\triangle ABM$ 的较长直角边，$AM=2\sqrt{2}EF$，则正方形 $ABCD$ 的面积为（　　）



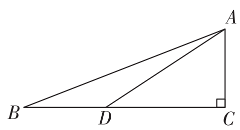
(A)$12S$　　(B)$10S$　　(C)$9S$　　(D)$8S$

6.（2016 甘孜州）直角三角形的斜边长是 5，一直角边的长是 3，则此直角三角形的面积为________.

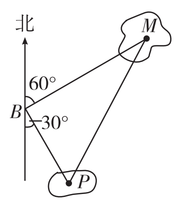
7.（2018 福建）把两个同样大小的含 45°角的三角尺按如图所示的方式放置，其中一个三角尺的锐角顶点与另一个三角尺的直角顶点重合于点 A，且另外三个锐角顶点 B，C，D 在同一直线上. 若 $AB=\sqrt{2}$，则 $CD=$________.



8.（2018 荆州）为了比较 $\sqrt{5}+1$ 与 $\sqrt{10}$ 的大小，可以构造如图所示的图形进行推算，其中 $\angle C=90°$，$BC=3$，D 在 BC 上，$BD=AC=1$. 通过计算可得，$\sqrt{5}+1$ ________ $\sqrt{10}$（填“>”“<”或“=”）.



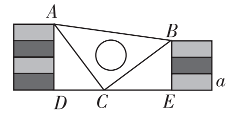
9. 如图所示，缉毒警方在基地 B 处获知有贩毒分子分别在 P 岛和 M 岛进行毒品交易，于是缉毒艇立即出发. 已知甲艇沿北偏东 60°方向以每小时 40 海里的速度前进，乙艇沿南偏东 30°方向以每小时 30 海里的速度前进，半小时后甲艇到 M 岛，乙艇到 P 岛，则 M 岛与 P 岛之间的距离是多少？



10. 课间，小明拿着老师的等腰三角板玩，不小心将三角板掉到了两墙之间，如图.

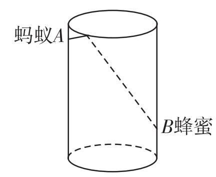
(1)求证：$\triangle ADC\cong\triangle CEB$；

(2)从三角板的刻度可知 $AC=25$ cm，请你帮小明求出砌墙砖块的厚度（每块砖的厚度相等）.

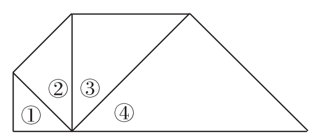


【能力提升】

11. 如图，圆柱形容器高 18 cm，底面周长为24 cm，在杯内壁离杯底 4 cm 的点 B 处有一滴蜂蜜，此时一只蚂蚁正好在杯外壁，离杯上沿 2 cm 与蜂蜜相对的点 A 处，则蚂蚁从外壁 A 处到达内壁 B 处的最短距离为________cm.



12. 下图由等腰直角三角形组成，其中第一个直角三角形的腰长为 1 cm.



(1)求第 4 个直角三角形的直角边长；

(2)猜想第 n 个直角三角形的直角边长.

第 2 课时　勾股定理的逆定理

扫码观看
本节精彩微课

课前预习

掌握勾股定理的逆定理,并能灵活应用

如果三角形的三条边长 a,b,c 满足关系:$a^2+b^2=c^2$,那么这个三角形是______.

课堂探究

探究一:勾股定理的逆定理

【例1】(2017 上城区二模)已知△ABC 的三边 $a=m-n(m>n>0),b=m+n,c=2\sqrt{mn}$.

(1)求证:△ABC 是直角三角形;

(2)利用第(1)题的结论,写出两组 m,n 的值,要求三角形的边长均为整数.

【思路导引】

验证 a^2+______$=$______,从而根据勾股定理的逆定理可知△ABC 是直角三角形.

变式训练 1-1:(2018 南通)下列长度的三条线段能组成直角三角形的是(　　)

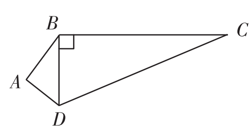
(A)3,4,5　　(B)2,3,4

(C)4,6,7　　(D)5,11,12

变式训练 1-2:如图,已知 $AB=4,BC=12,CD=13,AD=3,BC\perp BD$.

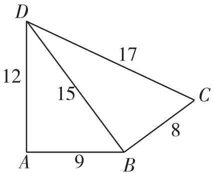
(1)求 BD 的长;

(2)求证:$AB\perp AD$.



探究二:勾股定理的逆定理的应用

【例2】一种机器零件的形状如图所示,按规定这个零件中的∠A 和∠DBC 都应为直角.工人师傅量得这个零件各边的尺寸如图所示,这个零件符合要求吗? 请说明理由.

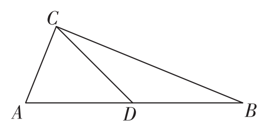


【思路导引】

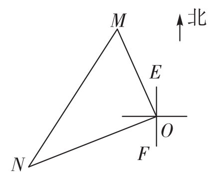
1. AB^2+AD^2 ____ BD^2,△ABD 是______.

2. BD^2+BC^2 ____ DC^2,△CBD 是______.

变式训练 2-1:(2017 益阳)如图,在△ABC 中,$AC=5$,$BC=12$,$AB=13$,CD 是 AB 边上的中线,则 $CD=$______.



变式训练 2-2:(2016 河北市模拟)一艘轮船和一艘渔船同时沿各自的航向从港口 O 出发,如图所示,轮船从港口 O 沿北偏西 20° 的方向行驶 60 海里到达点 M 处,同一时刻渔船已航行到与港口 O 相距 80 海里的点 N 处.若 M,N 两点相距 100 海里,则∠NOF 的度数为(　　)



(A)50°　　(B)60°　　(C)70°　　(D)80°

课堂达标

1. **(2017 裕华区校级模拟)**下面由线段 a,b,c 组成的三角形不是直角三角形的是(　　)

(A)$a=7,b=24,c=25$　　(B)$a=\sqrt{41},b=4,c=5$

(C)$a=\frac{5}{4},b=1,c=\frac{3}{4}$　　(D)$a=\frac{1}{3},b=\frac{1}{4},c=\frac{1}{5}$

2. 下列各组数据中,是勾股数的是(　　)

(A)0.3,0.4,0.5　　(B)−5,12,−13

(C)12,35,37　　(D)1,$\sqrt{2}$,1

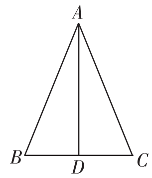
3. **(2016 阳谷县一模)**在△ABC 中,∠A,∠B,∠C 的对边分别为 a,b,c,且 $(a+b)(a-b)=c^2$,则(　　)

(A)∠A 为直角　　(B)∠C 为直角

(C)∠B 为直角　　(D)△ABC 不是直角三角形

4. (2017 安顺)如果三角形的三边长分别为 3,4,5,那么最长边上的中线长等于________.

5. 如图,在$\triangle ABC$中,$AB=13$ cm,$BC=10$ cm,BC边上的中线$AD=12$ cm,求$\triangle ABC$的面积.



课后提升

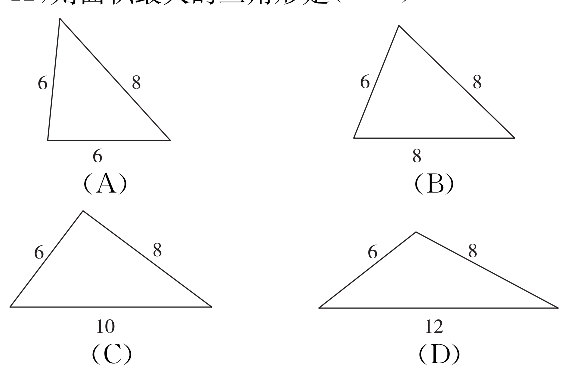
【基础达标】

1. (2018 河池二模)下列长度的线段中,能构成直角三角形的一组是(　　)

(A)$\sqrt{3}$,$\sqrt{4}$,$\sqrt{5}$　　(B)6,7,8

(C)12,25,27　　(D)$2\sqrt{3}$,$2\sqrt{5}$,$4\sqrt{2}$

2. (2017 潮阳区模拟)如图,有四个三角形,各有一边长为 6,一边长为 8,若第三边的长分别为 6,8,10,12,则面积最大的三角形是(　　)

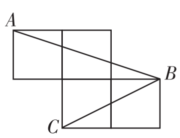


3. (2017 潮阳区模拟)已知a,b,c是$\triangle ABC$的三边长,且$|a-3|+(4-b)^2+\sqrt{c-5}=0$,则$\triangle ABC$是(　　)

(A)等腰三角形　　(B)等边三角形

(C)等腰直角三角形　　(D)直角三角形

4. 如图,每个小正方形的边长为 1,A,B,C是小正方形的顶点,则$\angle ABC$的度数为(　　)

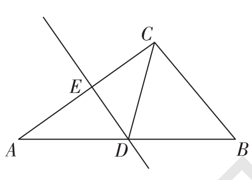


(A)90°　　(B)60°

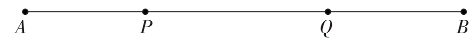
(C)45°　　(D)30°

5. (2017 和平区校级模拟)已知$\triangle ABC$的三边长为a,b,c满足$a+b=10$,$ab=18$,$c=8$,则此三角形为________三角形.

6. (2018 黔南州一模)如图,已知在$\triangle ABC$中,$AB=10$,$AC=8$,$BC=6$,DE是AC的垂直平分线,DE交AB于点D,连接CD,则$CD=$________.

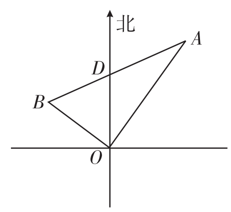


7. (2017 虹口区模拟)定义:如图,点P,Q把线段AB分割成线段AP,PQ和BQ,若以AP,PQ,BQ为边的三角形是一个直角三角形,则称点P,Q是线段AB的勾股分割点.已知点P,Q是线段AB的勾股分割点,如果$AP=4$,$PQ=6(PQ>BQ)$,那么$BQ=$________.

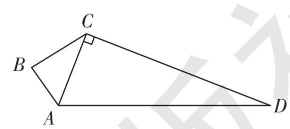


8. (2017 新洲区期末)甲、乙两艘客轮同时离开港口,航行的速度都是 40 m/min,甲客轮用 15 min 到达点A,乙客轮用 20 min 到达点B.若A,B两点的直线距离为 1 000 m,甲客轮沿着北偏东 30°的方向航行,则乙客轮的航行方向可能是____________.

9. 在寻找马航 MH370 航班的过程中,两艘搜救舰艇接到消息,在海面上有疑似漂浮目标A,B.接到消息后,一艘舰艇以 16 海里/时的速度离开港口O(如图所示)向北偏东 40°方向航行,另一艘舰艇在同时以 12 海里/时的速度向北偏西一定角度的航向行驶,已知它们离港口一个半小时后到达漂浮目标处,此时相距 30 海里,问另一艘舰艇的航行方向是北偏西多少度?

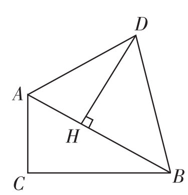


10. 如图,四边形$ABCD$中,$AB=3$,$BC=4$,$CD=12$,$AD=13$,$AC\perp CD$.求四边形$ABCD$的面积.



【能力提升】

11. 如图,在$\triangle ABC$中,$AC=6$,$BC=8$,D是$\triangle ABC$外一点,$DH\perp AB$于点H,且$S_{\triangle ABD}=60$,$DH=12$,求$\angle C$的度数.



12. (2017 宜昌)阅读:能够成为直角三角形三条边长的三个正整数 a,b,c 称为勾股数. 世界上第一次给出勾股数通解公式的是我国古代数学著作《九章算术》,其勾股数组公式为 $\begin{cases} a=\frac{1}{2}(m^2-n^2), \\ b=mn, \\ c=\frac{1}{2}(m^2+n^2), \end{cases}$ 其中 $m>n>0$,m,n 是互质的奇数.

应用:当 $n=1$ 时,求有一边的长为 5 的直角三角形的另外两条边的长.

1.3　直角三角形全等的判定

扫码观看
本节精彩微课

课前预习

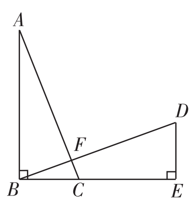
掌握斜边、直角边定理,会用它判定两个直角三角形全等

斜边、直角边定理:斜边和一条直角边对应相等的两个直角三角形全等(可以简写成"斜边、直角边"或"________").

课堂探究

探究一:应用"HL"证明直角三角形全等

【例 1】如图,点 C 在 BE 上,$AB\perp BE$,$DE\perp BE$,且 $AB=BE$,$AC=BD$,AC 交 BD 于点 F. 求$\angle BFC$ 的度数.

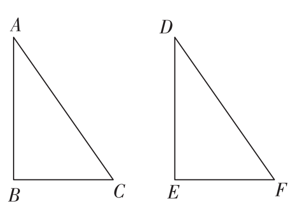


【思路导引】

1. 证明 $\text{Rt}\triangle ABC\cong$____________.

2. 由 $\angle DBE=$________ 与 $\angle ABC=90^\circ$,可得 $\angle BFC=$________.

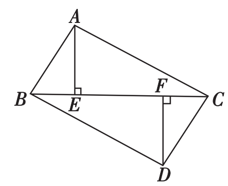
变式训练 1-1:(2018 南浔区一模)如图,$\angle B=\angle E=90^\circ$,$AB=DE$,$AC=DF$,则 $\triangle ABC\cong\triangle DEF$ 的理由是(　　)



(A)SAS　　(B)ASA

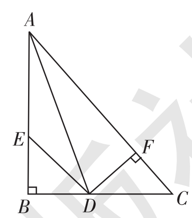
(C)AAS　　(D)HL

变式训练 1-2:如图所示,点 E,F 在 BC 上,$AE\perp BC$,$DF\perp BC$,$AC=DB$,$BE=CF$,求证:$AC\parallel BD$.



探究二:用合适的方法判定直角三角形全等

【例 2】如图,在 $\triangle ABC$ 中,$\angle B=90^\circ$,AD 为 $\angle BAC$ 的平分线,$DF\perp AC$ 于点 F,$DE=DC$,那么 $BE=FC$ 吗? 请说明理由.



【思路导引】

1. 利用"________"来判定 $\triangle ABD\cong\triangle AFD$,可得 $BD=$________.

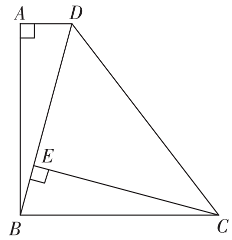
2. 利用"________"来判定 $\triangle BDE\cong\triangle FDC$,可得 $BE=$________.

变式训练 2-1:(2018 深圳期末)下列条件中,能判定两个直角三角形全等的是(　　)

(A)一锐角对应相等　　(B)两锐角对应相等

(C)一条边对应相等　　(D)两条直角边对应相等

变式训练 2－2：如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，$\angle A=90°$，$BD=BC$，$CE\perp BD$ 于点 E. 求证：$AD=EB$.



课堂达标

1.（**2017 临安市期末**）下列判断正确的是（　　）

(A)两边和一角对应相等的两个三角形全等

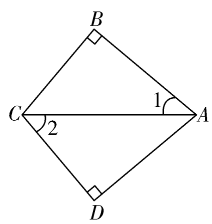
(B)一边及一锐角相等的两个直角三角形全等

(C)顶角和底边分别相等的两个等腰三角形全等

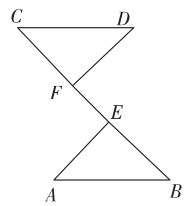
(D)三个内角对应相等的两个三角形全等

2. 如图，$\angle B=\angle D=90°$，$BC=CD$，$\angle 1=40°$，则 $\angle 2=$（　　）

(A)$40°$　　(B)$50°$　　(C)$60°$　　(D)$75°$



第 2 题图



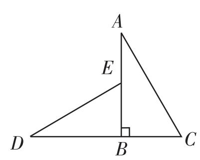
第 3 题图

3.（**2018 来宾期末**）如图，$BE=CF$，$AE\perp BC$，$DF\perp BC$，要根据“HL”证明 Rt$\triangle ABE\cong$Rt$\triangle DCF$，则还需要添加的一个条件是（　　）

(A)$AE=DF$　　(B)$\angle A=\angle D$

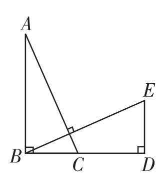
(C)$\angle B=\angle C$　　(D)$AB=DC$

4. 如图，已知 $AB\perp CD$，垂足为 B，$BC=BE$，若直接应用“HL”判定 $\triangle ABC\cong\triangle DBE$，则需要添加的一个条件是__________.



5. 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=90°$，点 D 在 BC 的延长线上，且 $BD=AB$. 过点 B 作 $BE\perp AC$，与 BD 的垂线 DE 交于点 E.

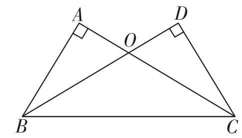
求证：$\triangle ABC\cong\triangle BDE$.



6.（**2017 宝丰县期末**）如图，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DCB$ 中，$\angle A=\angle D=90°$，$AC=DB$，AC 与 DB 相交于点 O.

(1)求证：$\triangle ABC\cong\triangle DCB$.

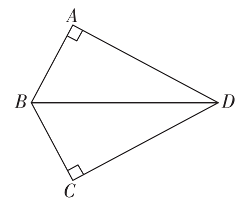
(2)$\triangle OBC$ 是何种三角形？证明你的结论.



课后提升

【基础达标】

1.（**2017 来宾市期末**）如图，$\angle BAD=\angle BCD=90°$，$AB=CB$，可以证明 $\triangle BAD\cong\triangle BCD$ 的理由是（　　）



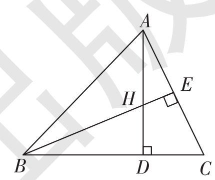
(A)HL　　(B)ASA

(C)SAS　　(D)AAS

2.（**2017 滦南县期末**）如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AD\perp BC$，D 为 BC 的中点，有以下结论：①$\triangle ABD\cong\triangle ACD$；②$AB=AC$；③$\angle B=\angle C$；④$AD$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线. 其中正确的有（　　）

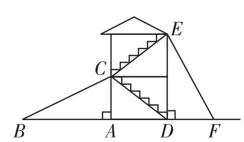
(A)1 个　　(B)2 个　　(C)3 个　　(D)4 个

3.（**2018 南郑区期末**）如图所示，H 是 $\triangle ABC$ 的高 AD，BE 的交点，且 $DH=DC$，有下列结论：①$BD=AD$；②$BC=AC$；③$BH=AC$；④$CE=CD$. 其中正确的有（　　）



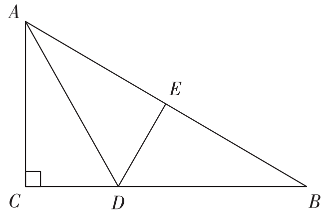
(A)1 个　　(B)2 个　　(C)3 个　　(D)4 个

4. 如图，有两个长度相等的滑梯（即 $BC=EF$），左边滑梯的高度 AC 与右边滑梯水平方向的长度 DF 相等，则 $\angle ABC+\angle DFE$ 的度数为（　　）



(A)$75°$　　(B)$60°$　　(C)$90°$　　(D)$120°$

5. **(2017 济宁期末)** 如图，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，边 AB 的垂直平分线交 BC 于点 D，交 AB 于点 E，AD 平分 $\angle BAC$，则下列结论中不正确的是(　　)



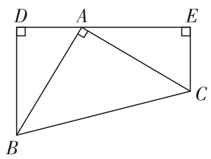
(A) $\angle B$ 的度数等于 30°

(B) $AC=AE=BE=AD$

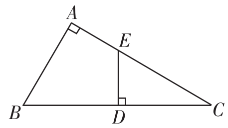
(C) $\angle ADB$ 的度数等于 120°

(D) Rt△ADE≌Rt△BDE≌Rt△ADC

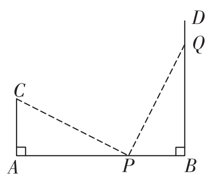
6. **(2017 老河口市期中)** 如图，在 Rt△ABC 中，$\angle BAC=90^\circ$，$AB=AC$，分别过点 B，C 作过点 A 的直线的垂线 BD，CE. 若 $BD=4$ cm，$CE=3$ cm，则 $DE=$________cm.



7. 如图，D 为 Rt△ABC 中斜边 BC 上的一点，且 $BD=AB$，过 D 作 BC 的垂线，交 AC 于点 E，若 $AE=6$ cm，$DC=8$ cm，则 CE 的长为________cm.



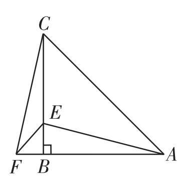
8. **(2017 汶上县期末)** 如图，$CA\perp AB$ 于点 A，$DB\perp AB$ 于点 B，$AB=12$ m，$AC=4$ m. 若点 P 从点 B 向点 A 运动，每分钟走1 m，点 Q 从点 B 向点 D 运动，每分钟走 2 m，P，Q 两点同时出发，则它们运动________min 后，△CAP 与△PBQ 全等.



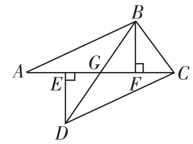
9. 在△ABC 中，$AB=CB$，$\angle ABC=90^\circ$，F 为 AB 延长线上一点，点 E 在 BC 上，且 $AE=CF$.

(1) 求证：Rt△ABE≌Rt△CBF.

(2) 若 $\angle CAE=30^\circ$，$\angle BAC=45^\circ$，求 $\angle ACF$ 的度数.

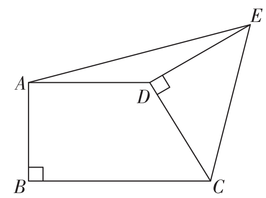


10. 如图，A，E，F，C 在一条直线上，$AE=CF$，过 E，F 分别作 $DE\perp AC$，$BF\perp AC$，若 $AB=CD$，求证：BD 平分 EF.



【能力提升】

11. **(2017 启东市期中)** 如图，$AD/\!/BC$，$AB\perp BC$，$CD\perp DE$，$CD=ED$，$AD=2$，$BC=3$，则△ADE 的面积为(　　)



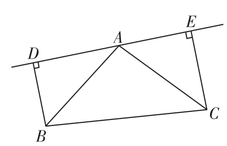
(A)1　　　　(B)2

(C)5　　　　(D)无法确定

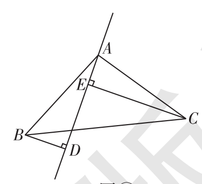
12. 在△ABC 中，$AB=AC$，DE 是过点 A 的直线，$BD\perp DE$ 于点 D，$CE\perp DE$ 于点 E.

(1) 若 B，C 在 DE 的同侧(如图①所示)，且 $AD=CE$，求证：$AB\perp AC$.

(2) 若 B，C 在 DE 的两侧(如图②所示)，其他条件不变，AB 与 AC 仍垂直吗？若是，请给出证明；若不是，请说明理由.



图①



图②

1.4　角平分线的性质

扫码观看
本节精彩微课

课前预习

掌握角平分线的性质定理和判定定理

(1)角平分线的性质定理

角的平分线上的点到角的两边的距离________.

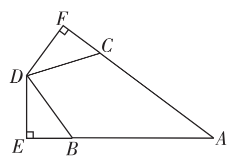
(2)角平分线的性质定理的逆定理

角的内部到角的两边距离相等的点在角的________上.

课堂探究

探究一:角平分线的性质

【例1】 如图所示,$AB=AC$,$BD=CD$,$DE\perp AB$ 于点 E,$DF\perp AC$ 于点 F,求证:$DE=DF$.

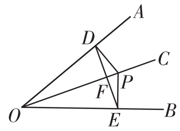


【思路导引】

1. 已知条件 $AB=AC$,$BD=CD$ 分别在________和________中,故可连接________.

2. 要证 $DE=DF$,只需证 AD 是 $\angle EAF$ 的__________.

规律总结 如图,OC 平分 $\angle AOB$,$PD\perp OA$ 于点 D,$PE\perp OB$ 于点 E,DE 交 OC 于点 F,可以得到以下结论:



(1)角的相等关系

$\angle AOC=\angle BOC=\angle PDF=\angle PEF$;

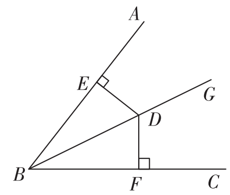
$\angle ODP=\angle OEP=\angle DFO=\angle EFO=\angle DFP=\angle EFP$;

$\angle DPO=\angle EPO=\angle ODF=\angle OEF$.

(2)线段的相等关系

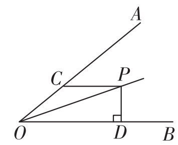
$OD=OE$,$DP=EP$,$DF=EF$.

变式训练 1-1:(2018 梧州) 如图,已知 BG 是 $\angle ABC$ 的平分线,$DE\perp AB$ 于点 E,$DF\perp BC$ 于点 F. 若 $DE=6$,则 DF 的长是(　　)



(A)2　　(B)3　　(C)4　　(D)6

变式训练 1-2:(2016 铜仁) 如图,已知 $\angle AOB=30^\circ$,P 是 $\angle AOB$ 的角平分线上的一点,$CP\parallel OB$,交 OA 于点 C,$PD\perp OB$,垂足为 D. 若 $PC=4$,则 PD 等于(　　)

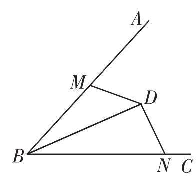


(A)1　　(B)2　　(C)4　　(D)8

探究二:角平分线的判定

【例2】 如图,点 D 为锐角 $\angle ABC$ 内一点,点 M 在边 BA 上,点 N 在边 BC 上,且 $DM=DN$,$\angle BMD+\angle BND=180^\circ$.

求证:BD 平分 $\angle ABC$.

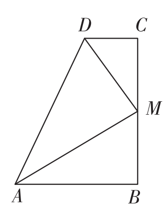


【思路导引】

1. 要证 BD 平分 $\angle ABC$,只要证点 D 到角两边的距离________.

2. 作 $DE\perp AB$ 于点 E,$DF\perp BC$ 于点 F,由 $\angle BMD+\angle BND=180^\circ$,得 $\angle DME=$________,再证 $\triangle DEM\cong\triangle$________.

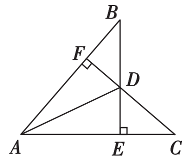
变式训练 2-1:(2018 大庆) 如图,$\angle B=\angle C=90^\circ$,$M$ 是 BC 的中点,DM 平分 $\angle ADC$,且 $\angle ADC=110^\circ$,则 $\angle MAB=$(　　)



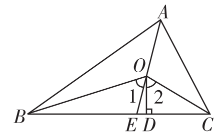
(A)30°　　(B)35°

(C)45°　　(D)60°

变式训练 2－2：如图所示，已知 $BE \perp AC$ 于点 E，$CF \perp AB$ 于点 F，BE，CF 相交于点 D，连接 AD，若 $BD=CD$，求证：AD 平分 $\angle BAC$.



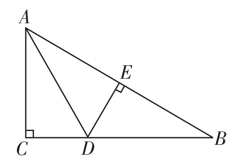
5. 如图，AE，OB，OC 分别平分 $\angle BAC$，$\angle ABC$，$\angle ACB$，$OD \perp BC$，求证：$\angle 1=\angle 2$.



6. 如图，Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，AD 平分 $\angle CAB$，$DE \perp AB$ 于点 E，若 $AC=6$，$BC=8$，$CD=3$.

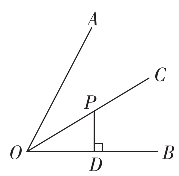
(1)求 DE 的长；

(2)求△ADB 的面积.



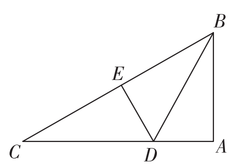
课堂达标

1. **(2017 台州)** 如图，点 P 是 $\angle AOB$ 的平分线 OC 上的一点，$PD \perp OB$，垂足为 D. 若 $PD=2$，则点 P 到边 OA 的距离是(　　)



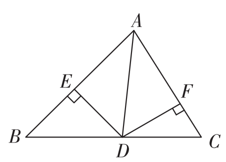
(A)1　　(B)2　　(C)$\sqrt{3}$　　(D)4

2. **(2018 常德)** 如图，已知 BD 是△ABC 的角平分线，DE 是 BC 的垂直平分线，$\angle BAC=90°$，$AD=3$，则 CE 的长为(　　)

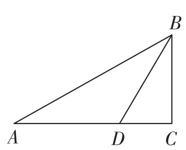


(A)6　　(B)5　　(C)4　　(D)$3\sqrt{3}$

3. **(2017 越秀区校级一模)** 如图，AD 是△ABC 中 $\angle BAC$ 的角平分线，$DE \perp AB$ 于点 E，$DF \perp AC$ 于点 F，$S_{\triangle ABC}=7$，$DE=2$，$AB=4$，则 $AC=$________.



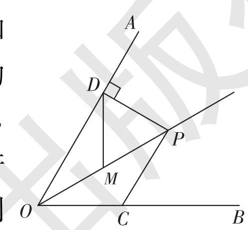
4. **(2017 来宾)** 如图，在△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$\angle ABC$ 的平分线 BD 交 AC 于点 D. 已知 $AC=3$，$AD=2$，则点 D 到 AB 边的距离为________.



课后提升

【基础达标】

1. **(2017 日照市一模)** 如图，已知点 P 是 $\angle AOB$ 角平分线上的一点，$\angle AOB=60°$，$PD \perp OA$，M 是 OP 的中点，$DM=4$. 若点 C 是 OB 上的一个动点，则 PC 的最小值为(　　)



(A)2　　(B)$2\sqrt{3}$　　(C)4　　(D)$4\sqrt{3}$

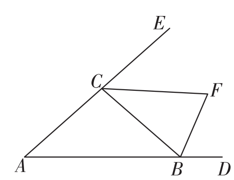
2. **(2017 大石桥市模拟)** 如图，△ABC 的外角 $\angle CBD$ 和 $\angle BCE$ 的平分线相交于点 F，则下列结论正确的是(　　)

(A)点 F 在 BC 的垂直平分线上

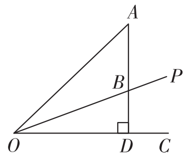
(B)点 F 在 $\angle BAC$ 的平分线上

(C)△BCF 是等腰三角形

(D)△BCF 是直角三角形



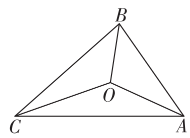
3. **(2018 遂川县模拟)** 如图，OP 是 $\angle AOC$ 的平分线，点 B 在 OP 上，$BD\perp OC$ 于点 D，$\angle A=45°$. 若 $BD=2$，则 AB 的长为(　　)



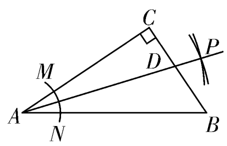
(A)2　　(B)$2\sqrt{3}$　　(C)$2\sqrt{2}$　　(D)3

4. **(2017 新华区校级模拟)** 如图，$\triangle ABC$ 的三边 AB，BC，CA 的长分别是 20，30，40，$\triangle ABC$ 的三条角平分线交于点 O，将 $\triangle ABC$ 分为三个三角形，则 $S_{\triangle ABO}:S_{\triangle BCO}:S_{\triangle CAO}$ 等于(　　)

(A)1∶1∶1
(B)1∶2∶3
(C)2∶3∶4
(D)3∶4∶5

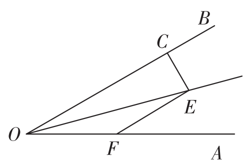


5. **(2017 枣庄)** 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，以顶点 A 为圆心，适当长为半径画弧，分别交 AC，AB 于点 M，N，再分别以点 M，N 为圆心，大于 $\frac{1}{2}MN$ 的长为半径画弧，两弧交于点 P，作射线 AP 交边 BC 于点 D. 若 $CD=4$，$AB=15$，则 $\triangle ABD$ 的面积是(　　)

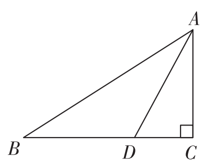


(A)15　　(B)30　　(C)45　　(D)60

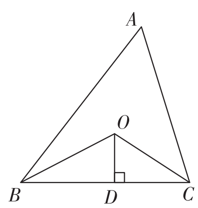
6. **(2018 广安)** 如图，$\angle AOE=\angle BOE=15°$，$EF\parallel OB$，$EC\perp OB$ 于点 C. 若 $EC=1$，则 $OF=$________.



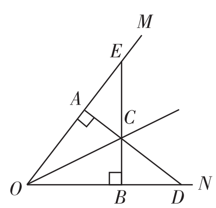
7. **(2017 丹东)** 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AB=5$，AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线. 若 $CD=\sqrt{3}$，则 $\triangle ABD$ 的面积为________.



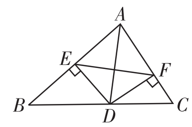
8. **(2018 襄城区模拟)** 如图，已知 $\triangle ABC$ 的周长是 32，OB，OC 分别平分 $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$，$OD\perp BC$ 于点 D，且 $OD=6$，$\triangle ABC$ 的面积是________.



9. 如图，OC 平分 $\angle MON$，过点 C 作 $CA\perp OM$，交 OM 于点 A，过点 C 作 $CB\perp ON$，交 ON 于点 B，求证：$CE=CD$.

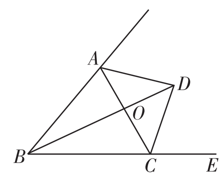


10. 已知：如图，AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，$DE\perp AB$，$DF\perp AC$，E，F 分别为垂足. 求证：AD 垂直平分 EF.



【能力提升】

11. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=50°$，$\angle ACB=60°$，点 E 在 BC 的延长线上，$\angle ABC$ 的平分线 BD 与 $\angle ACE$ 的平分线 CD 相交于点 D，连接 AD，下列结论中不正确的是(　　)

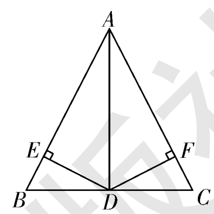


(A)$\angle BAC=70°$　　(B)$\angle DOC=90°$
(C)$\angle BDC=35°$　　(D)$\angle DAC=55°$

12. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，AD 平分 $\angle BAC$，且 $BD=CD$，$DE\perp AB$ 于点 E，$DF\perp AC$ 于点 F.

(1)求证：$AB=AC$；

(2)若 $AD=2\sqrt{3}$，$\angle DAC=30°$，求 AC 的长.

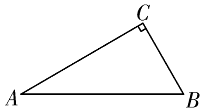


第 1 章　基础巩固与训练

扫码观看
本节精彩微课

一、选择题

1. 如图，$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\angle A=30°$，$AB=12$，则 $BC=$(　　)



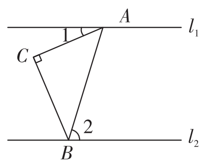
(A)6　(B)$6\sqrt{2}$　(C)$6\sqrt{3}$　(D)12

2. 以下四组数中，不是勾股数的是(　　)

(A)3，4，5　(B)5，12，13

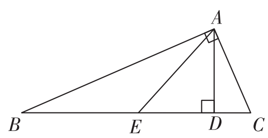
(C)$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$　(D)8，15，17

3. **(2018 荆州)** 如图，直线 $l_1 /\!/ l_2$，在 Rt$\triangle ACB$ 中，$\angle C=90°$，$AC=BC$，顶点 A，B 分别在 l_1 和 l_2 上．若$\angle 1=20°$，则$\angle 2$ 的度数是(　　)



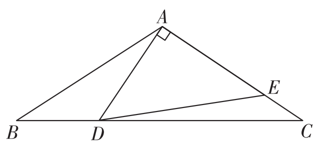
(A)45°　(B)55°　(C)65°　(D)75°

4. **(2018 贺州)** 如图，在$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90°$，$AD\perp BC$，垂足为 D，E 是 BC 边的中点，$AD=ED=3$，则 BC 的长为(　　)



(A)$3\sqrt{2}$　(B)$3\sqrt{3}$　(C)6　(D)$6\sqrt{2}$

5. **(2018 包头)** 如图，在$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$\triangle ADE$ 的顶点 D，E 分别在 BC，AC 上，且$\angle DAE=90°$，$AD=AE$．若$\angle C+\angle BAC=145°$，则$\angle EDC$ 的度数为(　　)



(A)17.5°　(B)12.5°　(C)12°　(D)10°

6. 已知直角三角形纸片的两条直角边长分别为 m 和 $n(m<n)$，过其中一个锐角顶点把该纸片剪成两个三角形，若这两个三角形都为等腰三角形，则(　　)

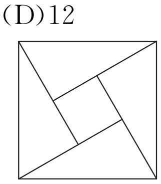
(A)$m^2+2mn+n^2=0$　(B)$m^2-2mn+n^2=0$

(C)$m^2+2mn-n^2=0$　(D)$m^2-2mn-n^2=0$

7. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，AD 平分$\angle BAC$ 交 BC 于点 D，若 $BC=32$，且 $BD:CD=9:7$，则点 D 到 AB 的距离为(　　)

(A)18　(B)16　(C)14　(D)12

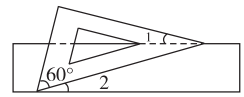
8. **(2017 襄阳)** 如图所示的“赵爽弦图”是由 4 个全等的直角三角形和 1 个小正方形拼成的大正方形．设直角三角形较长的直角边长为 a，较短的直角边长为 b．若$(a+b)^2=21$，大正方形的面积为 13，则小正方形的面积为(　　)



(A)3　(B)4　(C)5　(D)6

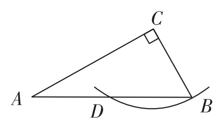
二、填空题

9. 如图，有一块含有 60°角的直角三角板的两个顶点放在矩形的对边上．如果$\angle 1=18°$，那么$\angle 2$ 的度数是________．

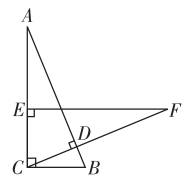


10. 等腰$\triangle ABC$ 中，$AB=AC=10$ cm，$BC=12$ cm，则 BC 边上的高是________cm.

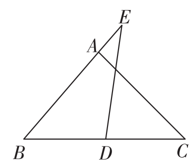
11. **(2018 长春一模)** 如图，在$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$\angle A=30°$，以点 C 为圆心，CB 长为半径作圆弧，交 AB 于点 D．若 $CB=4$，则 BD 的长为________．



第 11 题图



第 12 题图

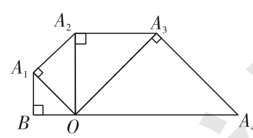


第 13 题图

12. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$BC=2$ cm，$CD\perp AB$，在 AC 上取一点 E，使 $EC=BC$，过点 E 作 $EF\perp AC$ 交 CD 的延长线于点 F，若 $EF=5$ cm，则 $AE=$________ cm.

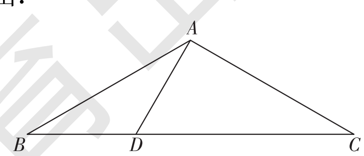
13. **(2018 太原一模)** 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90°$，$AB=AC=4$，D 是 BC 的中点，点 E 在 BA 的延长线上，连接 ED．若 $AE=2$，则 DE 的长为________．

14. **(2017 徐州)** 如图，已知 $OB=1$，以 OB 为直角边作等腰直角三角形 A_1BO，再以 OA_1 为直角边作等腰直角三角形 A_2A_1O，如此下去，则线段 OA_n 的长度为________．



三、解答题

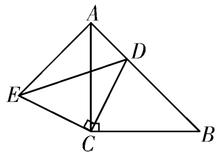
15. 如图，在$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，点 D 在 BC 上，$\angle BAD=30°$，$\angle ADC=60°$．请完整说明 $AD=BD$ 与 $CD=2BD$ 的理由．



16. 如图，$\triangle ACB$ 与 $\triangle ECD$ 都是等腰直角三角形，$\angle ACB=\angle ECD=90^{\circ}$，点 D 为 AB 边上的一点.

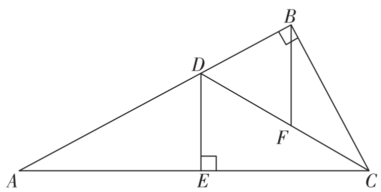
(1)求证：$\triangle ACE\cong\triangle BCD$；

(2)若 $DE=13$，$BD=12$，求线段 AB 的长.

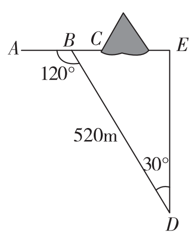


17. **(2017 西城区二模)**如图，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=90^{\circ}$，CD 平分 $\angle ACB$ 交 AB 于点 D，$DE\perp AC$ 于点 E，$BF/\!/DE$ 交 CD 于点 F.

求证：$DE=BF$.



18. **(2018 南通)**如图，沿 AC 方向开山修路. 为了加快施工进度，要在小山的另一边同时施工，从 AC 上的一点 B 取 $\angle ABD=120^{\circ}$，$BD=520$ m，$\angle D=30^{\circ}$. 那么另一边开挖点 E 离 D 多远正好使 A，C，E 三点在一直线上？($\sqrt{3}$取 1.732，结果取整数)

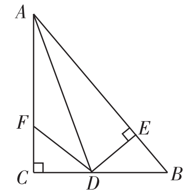


19. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^{\circ}$，AD 是 $\angle BAC$ 的平分线，$DE\perp AB$ 于点 E，点 F 在 AC 上，$BD=DF$.

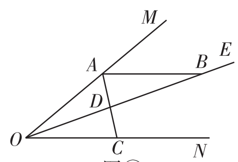
求证：

(1)$CF=EB$；

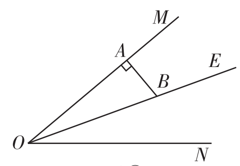
(2)$AB=AF+2EB$.



20. 已知 $\angle MON=40^{\circ}$，OE 平分 $\angle MON$，点 A，B，C 分别是射线 OM，OE，ON 上的动点(A，B，C 不与点 O 重合)，连接 AC 交射线 OE 于点 D，设 $\angle OAC=x$.



图①



图②

(1)如图①，若 $AB/\!/ON$，则

①$\angle ABO=$________.

②当 $\angle BAD=\angle ABD$ 时，$x=$________；

当 $\angle BAD=\angle BDA$ 时，$x=$________.

(2)如图②，若 $AB\perp OM$，则是否存在这样的 x 的值，使得 $\triangle ADB$ 中有两个相等的角？若存在，求出 x 的值；若不存在，说明理由.

2.1　多边形

扫码观看 本节精彩微课

课前预习

1. 了解多边形的有关概念

(1)多边形:在平面内,由一些线段____________相接组成的封闭图形.

(2)正多边形:在平面内,________相等、________也都相等的多边形.

(3)从 n 边形的一个顶点可以引____________条对角线,这些对角线把 n 边形分成____________个三角形,n 边形共有__________条对角线.

2. 掌握多边形的有关性质

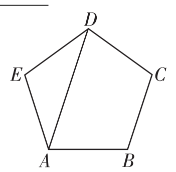
(1)n 边形的内角和等于______________,任意多边形的外角和等于________.

(2)三角形具有______性,四边形具有________性.

课堂探究

探究一:多边形的内角和公式的应用

【例1】如图,AD 是正五边形 $ABCDE$ 的一条对角线,则$\angle BAD=$________.



【思路导引】

1. 正五边形的内角和为________,每一个内角都等于________.

2. $EA=ED$,$\angle EAD=\angle EDA=$________.

规律总结　多边形的内角和的两个注意点

(1)一个多边形的内角和取决于它的边数,内角和随着边数的增加而增加,并且每增加一条边,内角和就增加 $180°$.

(2)因为正 n 边形的每个内角都相等,所以正 n 边形的每个内角的度数可以用$\dfrac{(n-2)\cdot 180°}{n}$计算.

变式训练 1-1:(**2018 南通**)若一个凸多边形的内角和为 $720°$,则这个多边形的边数为(　　)

(A)4　(B)5　(C)6　(D)7

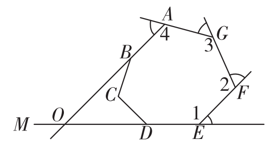
变式训练 1-2:(**2016 凉山州**)一个多边形切去一个角后,形成的另一个多边形的内角和为 $1\ 080°$,那么原多边形的边数为(　　)

(A)7　(B)7 或 8

(C)8 或 9　(D)7 或 8 或 9

探究二:多边形外角和的应用

【例2】如图所示的七边形 $ABCDEFG$ 中,AB,ED 的延长线相交于点 O. 若图中$\angle 1$,$\angle 2$,$\angle 3$,$\angle 4$ 的外角的度数和为 $220°$,则$\angle BOD$ 的度数为何?(　　)



(A)$40°$　(B)$45°$　(C)$50°$　(D)$60°$

【思路导引】

1. 由多边形的外角和为________,得$\angle BOM=$________.

2. 由邻补角的定义,得$\angle BOD=$________.

变式训练 2-1:(**2016 临沂**)一个正多边形的内角和为 $540°$,则这个正多边形的每一个外角等于(　　)

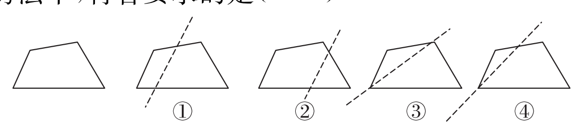
(A)$108°$　(B)$90°$　(C)$72°$　(D)$60°$

变式训练 2-2:(**2018 北京**)若正多边形的一个外角是 $60°$,则该正多边形的内角和为(　　)

(A)$360°$　(B)$540°$　(C)$720°$　(D)$900°$

课堂达标

1. (**2017 宜昌**)如图,将一张四边形纸片沿直线剪开,如果剪开后的两个图形的内角和相等,则下列四种剪法中,符合要求的是(　　)



(A)①②　(B)①③　(C)②④　(D)③④

2. (**2018 云南**)一个五边形的内角和为(　　)

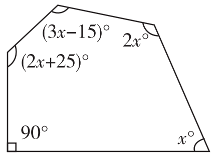
(A)$540°$　(B)$450°$　(C)$360°$　(D)$180°$

3. (**2018 湖北**)若一个多边形的每个外角都等于 $30°$,则这个多边形的边数为________.

4. (**2017 临淄区校级期中**)如果从一个多边形的一个顶点出发,连接这个顶点和其余各顶点,可将这个多边形分割成 2 017 个三角形,那么此多边形的边数为________.

5. 某多边形的内角和与外角和的总和为 $1\ 800°$,求此多边形的边数.

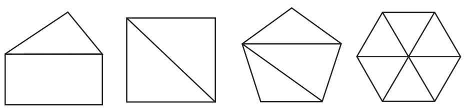
6. 如图所示，请你根据图中信息求出 x 的值.



课后提升

【基础达标】

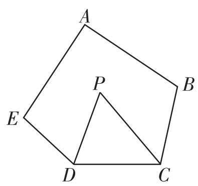
1. 下列图形不具有稳定性的是(　　)



(A)　(B)　(C)　(D)

2. (**2018 曲靖**)若一个正多边形的内角和为 720°，则这个正多边形的每一个内角是(　　)
(A)60°　(B)90°　(C)108°　(D)120°

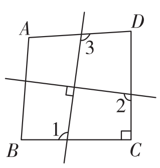
3. (**2018 济宁**)如图，在五边形 $ABCDE$ 中，$\angle A+\angle B+\angle E=300°$，$DP$，$CP$ 分别平分$\angle EDC$，$\angle BCD$，则$\angle P$ 的度数是(　　)



(A)50°　(B)55°
(C)60°　(D)65°

4. (**2018 铜仁**)如果一个多边形的内角和是外角和的 3 倍，则这个多边形的边数是(　　)
(A)8　(B)9　(C)10　(D)11

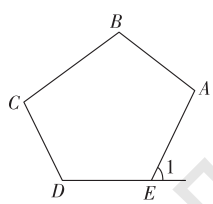
5. (**2017 台湾**)如图所示为互相垂直的两条直线将四边形 $ABCD$ 分成四个区域的情形，若$\angle A=100°$，$\angle B=\angle D=85°$，$\angle C=90°$，则根据图中标示的角，判断下列$\angle 1$，$\angle 2$，$\angle 3$ 的大小关系，何者正确？(　　)



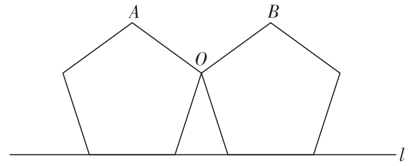
(A)$\angle 1=\angle 2>\angle 3$　(B)$\angle 1=\angle 3>\angle 2$
(C)$\angle 2>\angle 1=\angle 3$　(D)$\angle 3>\angle 1=\angle 2$

6. (**2017 莱芜**)一个多边形的内角和比其外角和的 2 倍多 180°，则该多边形的对角线的条数是(　　)
(A)12　(B)13　(C)14　(D)15

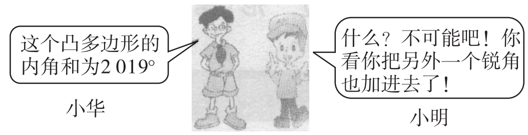
7. (**2017 南京**)如图，$\angle 1$ 是五边形 $ABCDE$ 的一个外角. 若$\angle 1=65°$，则$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=$________°.



8. (**2017 福建**)两个完全相同的正五边形都有一边在直线 l 上，且有一个公共顶点 O，其摆放方式如图所示，则$\angle AOB=$________.

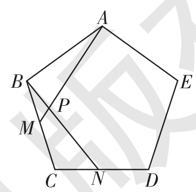


9. 看图回答问题：



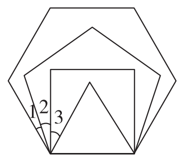
(1)内角和为 2 019°，小明为什么说不可能？
(2)小华求的是几边形的内角和？
(3)错加的锐角的度数你能求出吗？是多少度呢？

10. 如图，点 M，N 分别是正五边形 $ABCDE$ 的边 BC，CD 上的点，且 $BM=CN$，AM 交 BN 于点 P.
(1)求证：$\triangle ABM\cong\triangle BCN$；
(2)求$\angle APN$ 的度数.



【能力提升】

11. (2017 青海)如图，在一个平面上，将边长相等的正三角形、正方形、正五边形、正六边形的一边重合并叠在一起，则∠3＋∠1－∠2＝________.



12. 探索归纳：

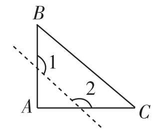
(1)如图①，已知△ABC 为直角三角形，∠A＝90°，若沿图中虚线剪去∠A，则∠1＋∠2 等于(　　)

(A)90°　(B)135°　(C)270°　(D)315°

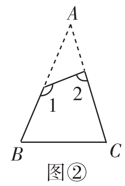
(2)如图②，已知△ABC 中，∠A＝40°，剪去∠A 后成四边形，则∠1＋∠2＝______.

(3)如图②，根据(1)与(2)的求解过程，请你归纳猜想∠1＋∠2 与∠A 的关系是______________.

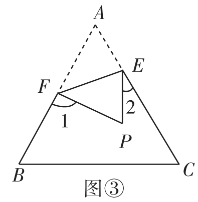
(4)如图③，对于△ABC 中的∠A，若没有剪掉，而是把它折成如图所示的形状，试探究∠1＋∠2 与∠A 的关系，并说明理由.



图①



图②



图③

2.2　平行四边形

2.2.1　平行四边形的性质

第 1 课时　平行四边形边、角的性质

扫码观看
本节精彩微课

课前预习

1. 理解平行四边形的定义及表示方法

(1)定义：两组对边分别________的四边形叫作平行四边形.

(2)表示方法：平行四边形 $ABCD$ 记作“________”.

2. 掌握平行四边形边、角的性质

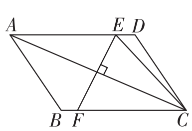
(1)平行四边形的对边________.

(2)平行四边形的对角相等.

课堂探究

探究一：平行四边形边的性质

【例1】(2017 贵阳)如图，在▱$ABCD$ 中，对角线 AC 的垂直平分线分别交 AD，BC 于点 E，F，连接 CE. 若△CED 的周长为 6，则▱$ABCD$ 的周长为(　　)



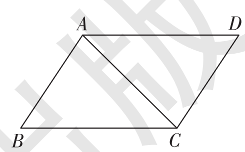
(A)6　(B)12　(C)18　(D)24

【思路导引】

1. 由▱$ABCD$ 可得 CD＝________，AD＝________.

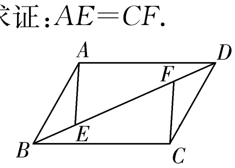
2. 由线段垂直平分线的性质可得 CE＝________，故△CED 的周长＝CE＋DE＋CD＝________＋CD＝6.

变式训练 1－1：(2018 黔西南州)如图，在▱$ABCD$ 中，已知 AC＝4 cm，若△ACD 的周长为 13 cm，则▱$ABCD$ 的周长为(　　)



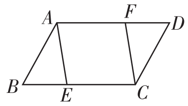
(A)26 cm　(B)24 cm　(C)20 cm　(D)18 cm

变式训练 1－2：如图所示，点 E，F 是平行四边形 $ABCD$ 对角线 BD 上的点，BF＝DE，求证：AE＝CF.



探究二：平行四边形角的性质

【例2】 如图所示，在▱$ABCD$ 中，E，F 分别是 BC，AD 上的点，且 $BE=DF$.



求证：$AE=CF$.

【思路导引】

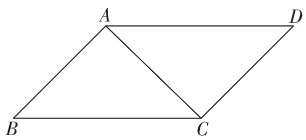
根据平行四边形的性质可得 $AB=$________，$\angle B=$________. 由条件 $BE=DF$ 易证△$ABE\cong$________.

变式训练 2－1：(2018 宜宾) 在▱$ABCD$ 中，若$\angle BAD$ 与$\angle CDA$ 的角平分线交于点 E，则△AED 的形状是(　　)

(A)锐角三角形　　(B)直角三角形

(C)钝角三角形　　(D)不能确定

变式训练 2－2：(2017 丽水)

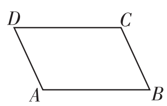


如图，在▱$ABCD$ 中，连接 AC，$\angle ABC=\angle CAD=45°$，$AB=2$，则 BC 的长是(　　)

(A)$\sqrt{2}$　　(B)2　　(C)$2\sqrt{2}$　　(D)4

课堂达标

1. 如图，在▱$ABCD$ 中，下列结论一定正确的是(　　)



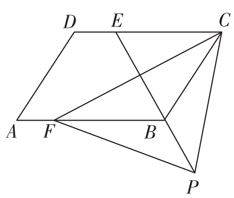
(A)$AC\perp BD$

(B)$\angle A+\angle B=180°$

(C)$AB=AD$

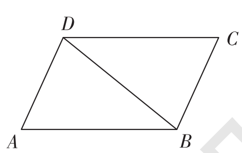
(D)$\angle A\neq\angle C$

2. **(2017 泰安)** 如图，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，点 E 是边 CD 上的一点，且 $BC=EC$，$CF\perp BE$ 交 AB 于点 F，P 是 EB 延长线上的一点，有下列结论：①BE 平分$\angle CBF$；②CF 平分$\angle DCB$；③$BC=FB$；④$PF=PC$. 其中正确结论的个数为(　　)



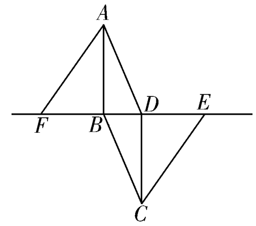
(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

3. **(2018 常州)** 如图，在▱$ABCD$ 中，$\angle A=70°$，$DC=DB$，则$\angle CDB=$________.

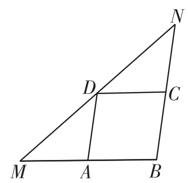


4. **(2017 黑龙江)** 在▱$ABCD$ 中，$\angle A$ 的平分线把 BC 边分成长度是 3 和 4 的两部分，则▱$ABCD$ 的周长是________.

5. 如图，在▱$ABCD$ 中，连接 BD，在 BD 的延长线上取一点 E，在 DB 的延长线上取一点 F，使 $BF=DE$，连接 AF，CE. 求证：$AF/\!/CE$.



6. 如图，在△MNB 中，$BN=6$，点 A，C，D 分别在 MB，NB，MN 上，四边形 $ABCD$ 为平行四边形，且$\angle NDC=\angle MDA$，求四边形 $ABCD$ 的周长.



课后提升

【基础达标】

1. 已知平行四边形 $ABCD$ 中，$\angle B=4\angle A$，则$\angle C$ 等于(　　)

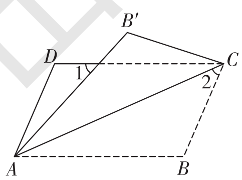
(A)18°　　(B)36°　　(C)72°　　(D)144°

2. 如果平行四边形的周长为 120 cm，相邻两边的长度之比为 5∶7，那么较长的边为(　　)

(A)35 cm　　(B)28 cm

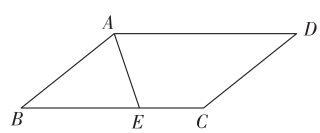
(C)42 cm　　(D)25 cm

3. 如图，将▱$ABCD$ 沿对角线 AC 折叠，使点 B 落在点 B' 处. 若$\angle 1=\angle 2=44°$，则$\angle B$ 为(　　)



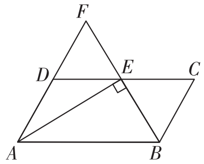
(A)66°　　(B)104°　　(C)114°　　(D)124°

4. **(2018 河南四模)** 如图，在▱$ABCD$ 中，$AB=6$，$AD=8$，AE 平分$\angle BAD$，则 CE 的长为(　　)



(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

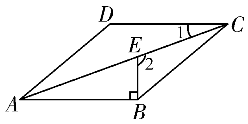
5. (2018 海口模拟)如图，在▱$ABCD$ 中，$AB=5$，$\angle BAD$ 的平分线与 DC 交于点 E，$BF\perp AE$，BF 与 AD 的延长线交于点 F，则 BC 等于(　　)



(A)2　　(B)2.5　　(C)3　　(D)3.5

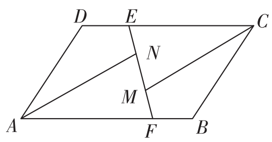
6. (2017 扬州)在▱$ABCD$ 中，$\angle B+\angle D=200°$，则 $\angle A=$________.

7. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，$BE\perp AB$ 交对角线 AC 于点 E，若 $\angle 1=20°$，则 $\angle 2$ 的度数为________.



8. (2018 曲靖)如图，在▱$ABCD$ 的边 AB，CD 上截取 AF，CE，使得 $AF=CE$，连接 EF，点 M，N 是线段 EF 上的两点，且 $EM=FN$，连接 AN，CM.

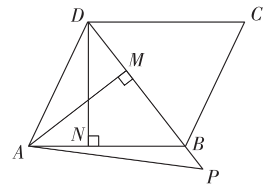
(1)求证：$\triangle AFN\cong\triangle CEM$；



(2)若 $\angle CMF=107°$，$\angle CEM=72°$，求 $\angle NAF$ 的度数.

【能力提升】

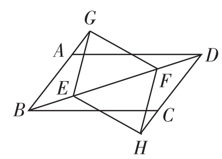
9. (2018 株洲)如图，在▱$ABCD$ 中，连接 BD，且 $BD=CD$，过点 A 作 $AM\perp BD$ 于点 M，过点 D 作 $DN\perp AB$ 于点 N，且 $DN=3\sqrt{2}$，在 DB 的延长线上取一点 P，满足 $\angle ABD=\angle MAP+\angle PAB$，则 $AP=$________.



10. 如图，已知在▱$ABCD$ 中，E，F 是对角线 BD 上的两点，$BE=DF$，$EH\parallel FG$，FG，EH 分别交 BA 和 DC 的延长线于点 G，H，连接 EG，FH. 求证：

(1)$\triangle BFG\cong\triangle DEH$；

(2)$GE=HF$.



第 2 课时　平行四边形对角线的性质

扫码观看
本节精彩微课

课前预习

掌握平行四边形对角线的性质

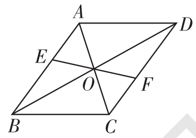
(1)平行四边形的对角线____________.

(2)平行四边形的一条对角线把平行四边形分成两个全等的三角形，两条对角线把平行四边形分成四个面积相等的三角形.

课堂探究

探究一：平行四边形对角线的性质

【例 1】如图，▱$ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，EF 过点 O 且与 AB，CD 分别交于点 E，F，求证：$\triangle AOE\cong\triangle COF$.

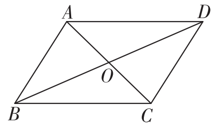


【思路导引】

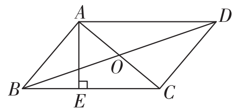
1. 由▱$ABCD$ 得 $OA=$________，$\angle EAO=$________，$\angle AEO=$________.

2. 证 $\triangle AOE\cong\triangle COF$ 时有一个隐藏的已知条件________________.

变式训练 1－1:(2018 泰州)如图,在▱$ABCD$ 中,对角线 AC,BD 相交于点 O. 若 $AD=6$,$AC+BD=16$,则△BOC 的周长为________.

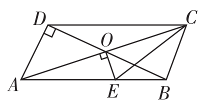


变式训练 1－2:(2017 青岛)如图,▱$ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O,$AE\perp BC$,垂足为点 E,$AB=\sqrt{3}$,$AC=2$,$BD=4$,求 AE 的长.



探究二:平行四边形性质的综合应用

【例 2】如图,在▱$ABCD$ 中,已知 $\angle ADB=90°$,$OA=5$ cm,$DB=6$ cm,$OE\perp AC$ 交 AB 于点 E,连接 CE,求△CBE 的周长.



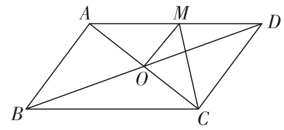
【思路导引】

1. 由平行四边形的性质得 $OA=OC$,由 $OE\perp AC$ 可知,OE 是 AC 的______________,得出 $CE=$________.

2. △CBE 的周长等于 BC 与________的和.

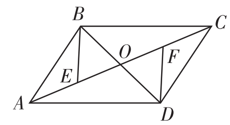
规律总结 研究平行四边形的性质往往从边、角、对角线三个方面考虑.(1)边:平行四边形的对边平行且相等.(2)角:平行四边形的对角相等、邻角互补.(3)对角线:平行四边形的对角线互相平分.

变式训练 2－1:(2018 衡阳)如图,▱$ABCD$ 的对角线相交于点 O,且 $AD\neq CD$,过点 O 作 $OM\perp AC$,交 AD 于点 M. 若△CDM 的周长为 8,则▱$ABCD$ 的周长为________.



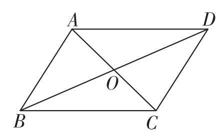
变式训练 2－2:如图,▱$ABCD$ 的对角线 AC,BD 相交于点 O,$AE=CF$.

求证:△BOE≌△DOF.



课堂达标

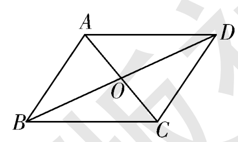
1. **(2017 亭湖区二模)**如图,在▱$ABCD$ 中,$AB=3$,$BC=5$,对角线 AC,BD 相交于点 O,则 OA 的取值范围是(　　)



(A)$2<OA<5$　　(B)$2<OA<8$

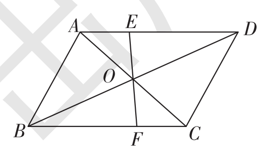
(C)$1<OA<4$　　(D)$3<OA<8$

2. **(2016 丽水)**如图,▱$ABCD$ 的对角线 AC,BD 交于点 O,已知 $AD=8$,$BD=12$,$AC=6$,则△OBC 的周长为(　　)



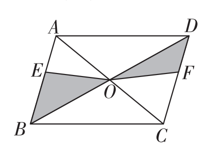
(A)13　　(B)17　　(C)20　　(D)26

3. **(2018 游仙区三模)**如图,EF 过▱$ABCD$ 对角线的交点 O,交 AD 于点 E,交 BC 于点 F. 若▱$ABCD$ 的周长为 18,$OE=2$,则四边形 $EFCD$ 的周长为(　　)

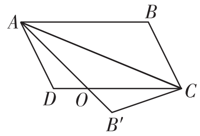


(A)14　　(B)13　　(C)12　　(D)10

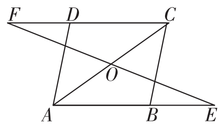
4. **(2017 马龙县校级模拟)**如图,▱$ABCD$ 的面积为 20,对角线 AC,BD 相交于点 O,点 E,F 分别是 AB,CD 上的点,且 $AE=DF$,则图中阴影部分的面积为________.



5. 在平行四边形 $ABCD$ 中，将△ABC 沿 AC 对折，使点 B 落在点 B' 处，AB' 和 CD 相交于点 O. 求证：$OA=OC$.



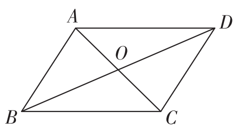
6. (2017 山西) 如图，在▱$ABCD$ 中，延长 AB 至点 E，延长 CD 至点 F，使得 $BE=DF$. 连接 EF，与对角线 AC 交于点 O.
求证：$OE=OF$.



课后提升

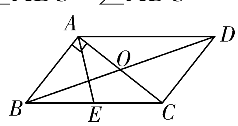
【基础达标】

1. (2018 滦南县二模) 如图所示，在▱$ABCD$ 中，AC，BD 相交于点 O，则下列结论中错误的是(　　)



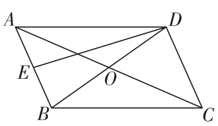
(A) $OA=OC$　　(B) $AB=CD$
(C) $AC=BD$　　(D) $\angle ABC=\angle ADC$

2. (2016 绵阳) 如图，平行四边形 $ABCD$ 的周长是 26 cm，对角线 AC 与 BD 交于点 O，$AC\perp AB$，E 是 BC 的中点，△AOD 的周长比△AOB 的周长多 3 cm，则 AE 的长度为(　　)



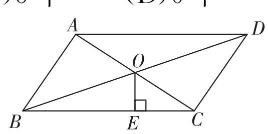
(A) 3 cm　　(B) 4 cm
(C) 5 cm　　(D) 8 cm

3. (2017 鄞城区期末) 如图，平行四边形 $ABCD$ 的两条对角线相交于点 O，点 E 是 AB 边的中点，图中已有的三角形中，与△ADE 面积相等的三角形(不包括△ADE)的个数为(　　)



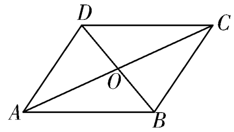
(A) 3 个　　(B) 4 个　　(C) 5 个　　(D) 6 个

4. (2018 南沙区一模) 如图，▱$ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O，$OE\perp BC$，垂足为 E，$AB=\sqrt{5}$，$AC=4$，$BD=6$，则 OE 的长为(　　)

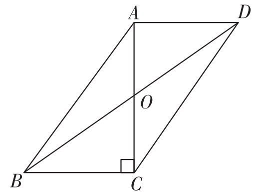


(A) $\frac{3}{2}$　　(B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
(C) $\frac{2\sqrt{105}}{21}$　　(D) $\frac{4\sqrt{105}}{21}$

5. 如图，▱$ABCD$ 中，$AC=8$，$BD=6$，$AD=a$，则 a 的取值范围是__________.



第 5 题图

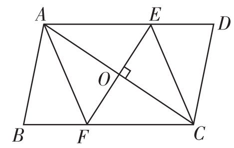


第 6 题图

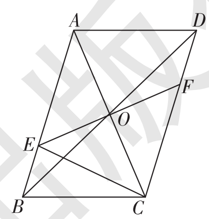
6. (2018 临沂) 如图，在▱$ABCD$ 中，$AB=10$，$AD=6$，$AC\perp BC$，则 $BD=$________.

7. (2018 邹城市期中) 如果一个平行四边形的两邻边的长分别为 6 和 $2\sqrt{7}$，一条对角线的长为 8，则这个平行四边形的面积为________.

8. 如图，在▱$ABCD$ 中，线段 EF 分别交 AD，AC，BC 于点 E，O，F，$EF\perp AC$，$AO=CO$.
(1) 求证：△ABF≌△CDE；
(2) 在本题的已知条件中，有一个条件如果去掉，并不影响(1)的证明，你认为这个多余的条件是__________(直接写出这个条件).

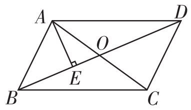


9. 如图，▱$ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，EF 过点 O 且与 AB，CD 分别相交于点 E，F，连接 EC.
(1) 求证：$OE=OF$；
(2) 若 $EF\perp AC$，△BEC 的周长是 10，求▱$ABCD$ 的周长.



【能力提升】

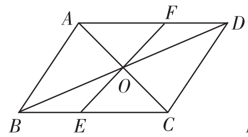
10. 如图，▱$ABCD$ 中，$AE\perp BD$ 于点 E，$\angle EAC=30^\circ$，$AE=\sqrt{3}$，则 AC 的长等于________.



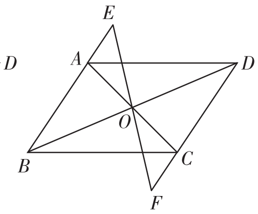
11. 如图①，▱$ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，直线 EF 过点 O 与 AD，BC 相交于点 F，E.

(1)求证：$OE=OF$.

(2)如图②，若直线 EF 与 DC，BA 的延长线分别相交于点 F，E，上述结论还成立吗？如成立，请说明理由.



图①



图②

2.2.2　平行四边形的判定

第 1 课时　用边判定平行四边形

扫码观看 本节精彩微课

课前预习

掌握用边判定平行四边形的方法

(1)两组对边分别平行的四边形是平行四边形；

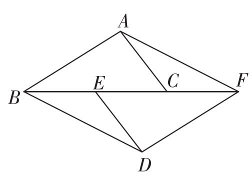
(2)一组对边____________的四边形是平行四边形；

(3)两组对边分别________的四边形是平行四边形.

课堂探究

探究一：一组对边平行且相等的四边形是平行四边形

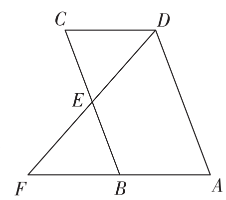
【例1】(2017 咸宁)如图，点 B，E，C，F 在一条直线上，$AB=DF$，$AC=DE$，$BE=FC$. 连接 AF，BD，求证：四边形 $ABDF$ 是平行四边形.



【思路导引】

可证明$\triangle ABC\cong$________，再证 $AB/\!/$________，于是由 $AB=$________可得四边形 $ABDF$ 是平行四边形.

变式训练 1－1：(2018 东营)如图，在四边形 $ABCD$ 中，E 是 BC 边的中点，连接 DE 并延长，交 AB 的延长线于点 F，$AB=BF$. 添加一个条件使四边形 $ABCD$ 是平行四边形，你认为下面四个条件中可选择的是(　　)

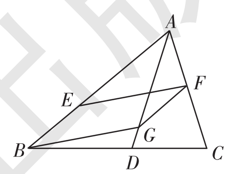


(A)$AD=BC$　　　(B)$CD=BF$

(C)$\angle A=\angle C$　　　(D)$\angle F=\angle CDF$

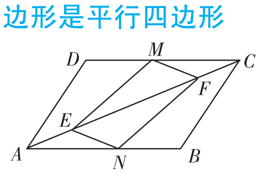
变式训练 1－2：如图，在$\triangle ABC$ 中，AD 平分$\angle BAC$ 交 BC 于点 D. 点 E，F 分别在边 AB，AC 上，且 $BE=AF$，$FG/\!/AB$ 交线段 AD 于点 G，连接 BG，EF.

求证：四边形 $BGFE$ 是平行四边形.



探究二：两组对边分别相等的四边形是平行四边形

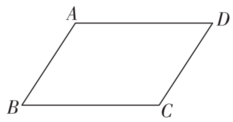
【例2】如图，已知平行四边形 $ABCD$ 中，M，N 分别是 CD，AB 上的点，E，F 是 AC 上的两点，若 $CM=AN$，$AE=CF$. 求证：四边形 $MENF$ 是平行四边形.



【思路导引】

先证 $\triangle ANE \cong \triangle CMF$，得 $MF=NE$. 再证 $\triangle EMF \cong \triangle FNE$，得 $EM=$______. 最后证四边形 $MENF$ 是平行四边形.

变式训练 2-1：(2018 绥化) 如图，下列选项中，不能判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形的是(　　)



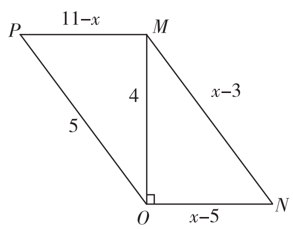
(A) $AD /\!/ BC$，$AB /\!/ CD$

(B) $AB /\!/ CD$，$AB=CD$

(C) $AD /\!/ BC$，$AB=DC$

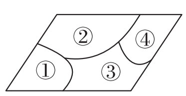
(D) $AB=DC$，$AD=BC$

变式训练 2-2： 如图，在四边形 $PONM$ 中，$MO \perp ON$ 于点 O，各边的长在图中已标出，求证：四边形 $PONM$ 是平行四边形.



课堂达标

1. 小敏不慎将一块平行四边形玻璃打碎成如图所示的四块，为了能在商店配到一块与原来相同的平行四边形玻璃，她带了两块碎玻璃，其编号应该是(　　)

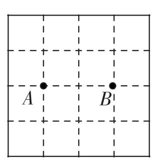


(A)①②　(B)①④　(C)③④　(D)②③

2. **(2018 玉林)** 在四边形 $ABCD$ 中：① $AB /\!/ CD$，② $AD /\!/ BC$，③ $AB=CD$，④ $AD=BC$，从以上选择两个条件使四边形 $ABCD$ 为平行四边形的选法共有(　　)

(A)3 种　(B)4 种　(C)5 种　(D)6 种

3. **(2018 旺苍县期末)** 如图，4×4 的正方形网格中每个小正方形的边长为 1，每个小正方形的顶点叫格点，点 A，B(均在格点上)的位置如图. 若以 A，B 为顶点画面积为 2 的格点平行四边形，则符合条件的平行四边形的个数为(　　)

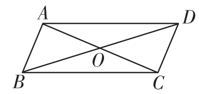


(A)6　(B)7　(C)9　(D)11

4. 一个四边形的边长依次是 a，b，c，d，且 $a^2+b^2+c^2+d^2=2ac+2bd$，则这个四边形是__________，依据是______________________________.

5. 已知：如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB /\!/ CD$，对角线 AC，BD 相交于点 O，$BO=DO$.

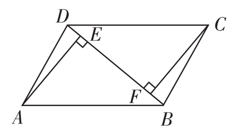
求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形.



6. 如图，四边形 $ABCD$ 为平行四边形，$AE \perp BD$ 于点 E，$CF \perp BD$ 于点 F，垂足分别为 E，F.

(1)求证：$BF=DE$；

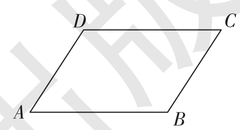
(2)连接 CE，AF，证明四边形 $CEAF$ 是平行四边形.



课后提升

【基础达标】

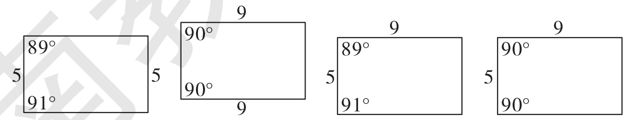
1. **(2017 衡阳)** 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB /\!/ CD$，要使四边形 $ABCD$ 是平行四边形，可添加的条件不正确的是(　　)



(A) $AB=CD$　　(B) $BC /\!/ AD$

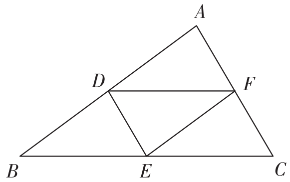
(C) $\angle A=\angle C$　　(D) $BC=AD$

2. **(2017 路南区三模)** 根据下面各图中所给的边长及角度，判断下列选项中的四边形是平行四边形的为(　　)



(A)　(B)　(C)　(D)

3.（**2018 渠县期末**）如图，在△*ABC* 中，点 *D*，*E*，*F* 分别是 *AB*，*BC*，*AC* 的中点，连接 *DE*，*EF*，*DF*，则下列说法不正确的是（　　）



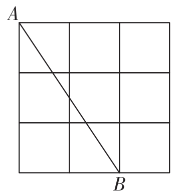
（A）$S_{\triangle DEF}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$

（B）$\triangle DEF\cong\triangle FAD\cong\triangle EDB\cong\triangle CFE$

（C）四边形 *ADEF*，四边形 *DBEF*，四边形 *DECF* 都是平行四边形

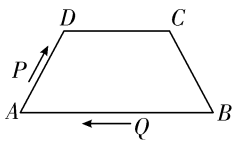
（D）四边形 *ADEF* 的周长＝四边形 *DBEF* 的周长＝四边形 *DECF* 的周长

4.（**2018 苍南县期末**）如图，在 3×3 的正方形网格中，以线段 *AB* 为对角线作平行四边形，使另两个顶点也在格点上，则这样的平行四边形最多可以画（　　）



（A）2 个　（B）3 个　（C）4 个　（D）5 个

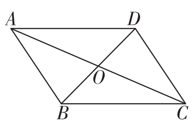
5. 如图，在四边形 *ABCD* 中，*AB*∥*DC*，*AD*＝*BC*＝5，*DC*＝7，*AB*＝13，点 *P* 从点 *A* 出发以 3 个单位/s 的速度沿 *AD*→*DC* 向终点 *C* 运动，同时点 *Q* 从点 *B* 出发，以 1 个单位/s 的速度沿 *BA* 向终点 *A* 运动. 当四边形 *PQBC* 为平行四边形时，运动时间为（　　）



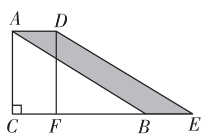
（A）4 s　（B）3 s

（C）2 s　（D）1 s

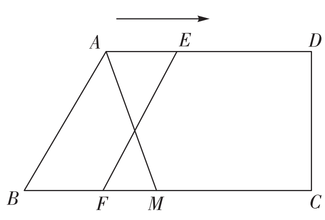
6. 如图所示，四边形 *ABCD* 的对角线相交于点 *O*，若 *AB*∥*CD*，请添加一个条件：________________（写一个即可），使四边形 *ABCD* 是平行四边形.



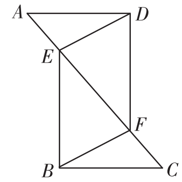
7. 如图，在 Rt△*ABC* 中，∠*C*＝90°，*AC*＝4，将△*ABC* 沿 *CB* 向右平移得到△*DEF*，若平移距离为 2，则四边形 *ABED* 的面积等于________.



8.（**2018 长丰县二模**）如图，在四边形 *ABCD* 中，*AD*∥*BC*，*AD*＝8 cm，*BC*＝12 cm，*M* 是 *BC* 上的一点，且 *BM*＝9 cm，点 *E* 从点 *A* 出发以 1 cm/s 的速度向点 *D* 运动，点 *F* 从点 *C* 出发，以 3 cm/s 的速度向点 *B* 运动，当其中一点到达终点时，另一点也随之停止. 设运动时间为 *t* s，则当以 *A*，*M*，*E*，*F* 为顶点的四边形是平行四边形时，*t*＝________s.



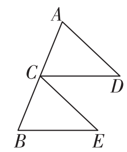
9. 如图，已知 *BE*∥*DF*，∠*ADF*＝∠*CBE*，*AF*＝*CE*，求证：四边形 *DEBF* 是平行四边形.



10.（**2017 新疆**）如图，点 *C* 是 *AB* 的中点，*AD*＝*CE*，*CD*＝*BE*.

（1）求证：△*ACD*≌△*CBE*；

（2）连接 *DE*，求证：四边形 *CBED* 是平行四边形.

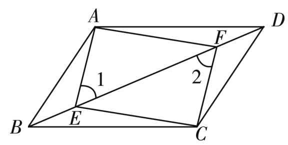


【能力提升】

11. 如图，四边形 *ABCD* 是平行四边形，*E*，*F* 是对角线 *BD* 上的点，∠1＝∠2.

（1）求证：*BE*＝*DF*；

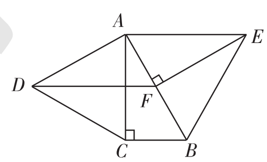
（2）求证：*AF*∥*CE*.



12. 如图，分别以 Rt△*ABC* 的直角边 *AC* 及斜边 *AB* 为边向外作等边△*ACD*，等边△*ABE*. 已知∠*BAC*＝30°，*EF*⊥*AB*，垂足为 *F*，连接 *DF*.

求证：（1）*AC*＝*EF*；

（2）四边形 *ADFE* 是平行四边形.



第 2 课时　用对角线判定平行四边形

扫码观看
本节精彩微课

课前预习

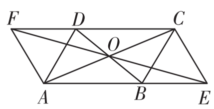
掌握用对角线判定平行四边形的方法

对角线____________的四边形是平行四边形.

课堂探究

探究一:对角线互相平分的四边形是平行四边形

【例 1】 如图所示,平行四边形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O,直线 EF 经过点 O,分别与 AB,CD 的延长线交于点 E,F.



求证:四边形 $AECF$ 是平行四边形.

【思路导引】

可证明$\triangle FDO\cong$_________,则 $OF=$_________. 从而应用对角线互相平分的四边形是平行四边形,得出结论.

方法技巧　判定平行四边形的方法选择

已知条件	证明思路
一组对边相等	1. 另一组对边也相等
	2. 相等的边也平行
一组对边平行	1. 另一组对边也平行
	2. 平行的边也相等
一组对角相等	另一组对角也相等
对角线相交	对角线互相平分

变式训练 1-1:(2018 无棣县期末) 下列条件中,能判定四边形是平行四边形的是(　　)

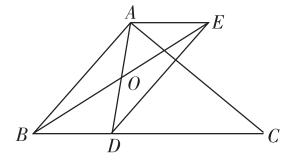
(A)一组对角相等

(B)对角线互相平分

(C)一组对边相等

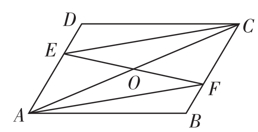
(D)对角线互相垂直

变式训练 1-2: 如图,在$\triangle ABC$中,D 是 BC 上的点,O 是 AD 的中点,过点 A 作 BC 的平行线交 BO 的延长线于点 E,则四边形 $ABDE$ 是什么四边形?并说明理由.



探究二:平行四边形性质和判定的综合应用

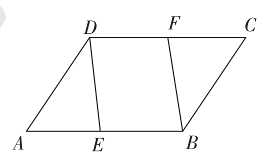
【例 2】 如图,在平行四边形 $ABCD$ 中,O 是 AC 的中点,EF 过点 O,分别与边 AD,BC 交于点 E,F,求证:$EC/\!/AF$.



【思路导引】

先证四边形 $AECF$ 是__________,再证 $EC/\!/AF$.

变式训练 2-1:(2018 市南区期末) 如图,在▱$ABCD$ 中,点 E,F 分别在边 AB 和 CD 上.下列条件不能判定四边形 $DEBF$ 一定是平行四边形的是(　　)

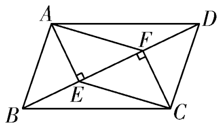


(A)$AE=CF$　　(B)$DE=BF$

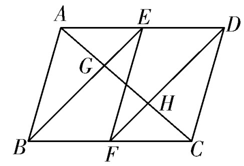
(C)$\angle ADE=\angle CBF$　　(D)$\angle AED=\angle CFB$

变式训练 2－2：如图，在▱$ABCD$ 中，$AE\perp BD$ 于点 E，$CF\perp BD$ 于点 F，连接 AF，CE.

求证：$AF=CE$.

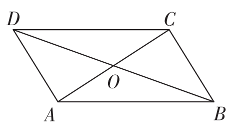


5. 如图，在▱$ABCD$ 中，E，F 分别为边 AD，BC 的中点，对角线 AC 分别交 BE，DF 于点 G，H. 求证：$AG=CH$.



课堂达标

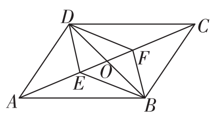
1. **(2018 海珠区期末)** 如图，在四边形 $ABCD$ 中，点 O 是对角线的交点且 $AB/\!/CD$，添加下列哪个条件，不能判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形（　　）



(A) $AB=CD$　　(B) $AO=CO$

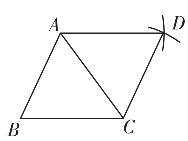
(C) $AD=BC$　　(D) $AD/\!/BC$

2. **(2017 南雄市校级模拟)** 如图，在▱$ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，E，F 是对角线 AC 上的两点，给出下列四个条件：①$AE=CF$；②$DE=BF$；③$\angle ADE=\angle CBF$；④$\angle ABE=\angle CDF$. 其中不能判定四边形 $DEBF$ 是平行四边形的有（　　）

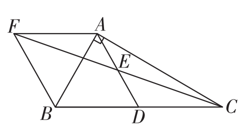


(A) 0 个　(B) 1 个　(C) 2 个　(D) 3 个

3. 如图，以△ABC 的顶点 A 为圆心，以 BC 长为半径作弧，再以顶点 C 为圆心，以 AB 长为半径作弧，两弧相交于点 D，连接 AD，CD. 若 $\angle B=65^\circ$，则 $\angle ADC$ 的大小为________.



4. **(2017 凉山州)** 如图，在△ABC 中，$\angle BAC=90^\circ$，$AB=4$，$AC=6$，点 D，E 分别是 BC，AD 的中点，$AF/\!/BC$ 交 CE 的延长线于点 F，则四边形 $AFBD$ 的面积为________.



课后提升

【基础达标】

1. **(2018 曲阳县期末)** 能够判定一个四边形是平行四边形的条件是（　　）

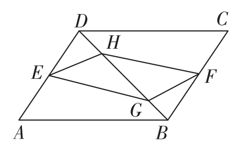
(A) 一组对角相等

(B) 两条对角线互相平分

(C) 两条对角线互相垂直

(D) 一对邻角的和为 180°

2. **(2018 李沧区期末)** 如图，在▱$ABCD$ 中，E，F 分别是 AD，BC 边的中点，G，H 是对角线 BD 上的两点，且 $BG=DH$，则下列结论中不正确的是（　　）



(A) $GF\perp FH$

(B) $GF=EH$

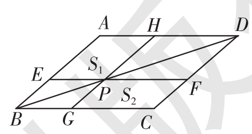
(C) EF 与 AC 互相平分

(D) $EG=FH$

3. **(2016 乐陵市期末)** 给定平面上不在同一直线上的三点，以这三点为顶点的平行四边形有（　　）

(A) 4 个　(B) 3 个　(C) 2 个　(D) 1 个

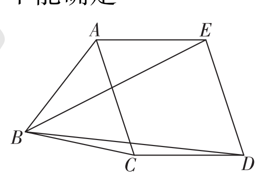
4. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，过对角线 BD 上的一点 P，作 $EF/\!/BC$，$HG/\!/AB$，若四边形 $AEPH$ 和四边形 $CFPG$ 的面积分别为 S_1 和 S_2，则 S_1 与 S_2 的大小关系为（　　）



(A) $S_1=S_2$　　(B) $S_1>S_2$

(C) $S_1<S_2$　　(D) 不能确定

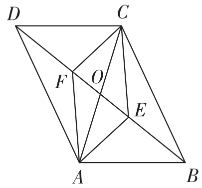
5. **(2017 黄石)** 如图，已知五边形 $ABCDE$ 的边长均相等，且 $\angle DBE=\angle ABE+\angle CBD$，$AC=1$，则 BD 必定满足（　　）



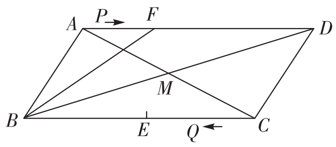
(A) $BD<2$　　(B) $BD=2$

(C) $BD>2$　　(D) 以上情况均有可能

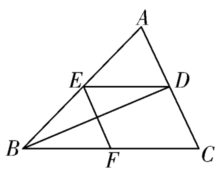
6. (2018 奈曼旗期末)如图,在四边形 $ABCD$ 中,$AB=CD$,对角线 AC,BD 相交于点 O,$AE\perp BD$ 于点 E,$CF\perp BD$ 于点 F,连接 AF,CE,且 $DE=BF$. 有下列结论:①$CF=AE$;②$OE=OF$;③四边形 $ABCD$ 是平行四边形;④图中共有 4 对全等三角形. 其中正确结论是________(填序号).



7. (2018 洪山区二模)如图,在 ▱$ABCD$ 中,AC 与 BD 交于点 M,点 F 在 AD 上,$AF=6$ cm,$BF=12$ cm,$\angle FBM=\angle CBM$,点 E 是 BC 的中点. 若点 P 以 1 cm/s 的速度从点 A 出发,沿 AD 向点 F 运动;点 Q 同时以 2 cm/s 的速度从点 C 出发,沿 CB 向点 B 运动,点 P 运动到点 F 时停止,点 Q 也同时停止运动. 当点 P 运动________ s 时,以 P,Q,E,F 为顶点的四边形是平行四边形.



8. 如图,已知 BD 是△ABC 的角平分线,点 E,F 分别在边 AB,BC 上,$ED\parallel BC$,$EF\parallel AC$. 求证:$BE=CF$.

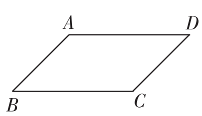


9. 如图,已知四边形 $ABCD$ 是平行四边形,若点 E,F 分别在边 BC,AD 上,连接 AE,CF,请再从下列三个备选条件中,选择添加一个恰当的条件,使四边形 $AECF$ 是平行四边形,并予以证明.

备选条件:$AE=CF$,$BE=DF$,$\angle AEB=\angle CFD$.

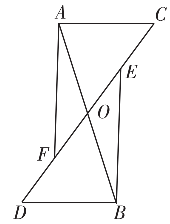
选择添加的条件是____________________.

(注意:请根据所选择的条件,画出符合要求的示意图,并加以证明)



【能力提升】

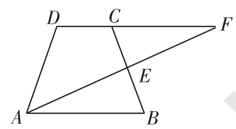
10. 如图,AB,CD 相交于点 O,$AC\parallel DB$,$AO=BO$,E,F 分别为 OC,OD 的中点,连接 AF,BE,求证:$AF\parallel BE$.



11. 如图,已知 $AB\parallel DC$,E 是 BC 的中点,AE,DC 的延长线交于点 F.

(1)求证:△ABE≌△FCE.

(2)连接 AC,BF,则四边形 $ABFC$ 是什么特殊的四边形?请说明理由.



2.3　中心对称和中心对称图形

课前预习

1. 掌握中心对称的定义及其性质

(1)定义:在平面内,把一个图形上的每一个点 P 对应到它在绕点 O 旋转________下的像 P',这个变换称为关于点 O 中心对称,称原图形与新图形关于点 O____________,点 O 叫作对称中心.

(2)性质:成中心对称的两个图形中,对应点的连线经过____________,且被对称中心________.

2. 掌握中心对称图形的概念

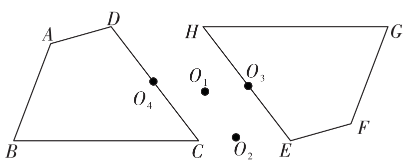
(1)中心对称图形:在平面内,如果一个图形绕一个点 O 旋转________,所得到的像与原来的图形互相________,那么这个图形叫中心对称图形,这个点 O 叫作它的对称中心.

(2)平行四边形是中心对称图形,_______________是它的对称中心.

课堂探究

探究一:中心对称的概念及性质

【例1】 如图,四边形 $ABCD$ 与四边形 $FGHE$ 关于一个点成中心对称,则这个点是(　　)



(A)O_1　　(B)O_2

(C)O_3　　(D)O_4

【思路导引】

成中心对称的两个图形的对应点的连线经过对称中心,故若连接 DE 和 CH,它们的________即为对称中心.

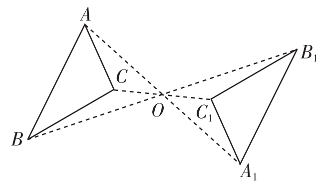
规律总结　中心对称的性质

(1)成中心对称的图形上的每一对对应点连成的线段都被对称中心平分.

(2)任意两个中心对称图形以任意方式组合成一个图形后,过这两个对称中心的直线平分这个组合图形的面积.

(3)对称点的连线必过对称中心.

变式训练 1-1: 如图,$\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 关于点 O 成中心对称,有下列说法:

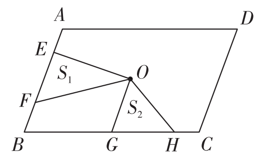


①$\angle BAC=\angle B_1A_1C_1$;

②$AC=A_1C_1$;③$OA=OA_1$;④$\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 的面积相等. 其中正确的有(　　)

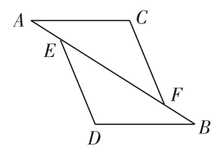
(A)1 个　(B)2 个　(C)3 个　(D)4 个

变式训练 1-2:(2018 陕西) 如图,点 O 是▱$ABCD$ 的对称中心,$AD>AB$. E,F 是 AB 边上的点,且 $EF=\frac{1}{2}AB$;G,H 是 BC 边上的点,且 $GH=\frac{1}{3}BC$. 若 S_1,S_2 分别表示$\triangle EOF$ 和$\triangle GOH$ 的面积,则 S_1 与 S_2 之间的等量关系是________.



探究二:中心对称图形的判定

【例2】 如图,$AC=BD$,$\angle A=\angle B$,点 E,F 在 AB 上,且 $DE\parallel CF$,试说明这是中心对称图形.



【思路导引】

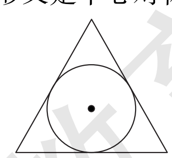
连接 CD 交 AB 于点 O,通过证明 $OA=OB$,$OC=OD$,$OE=$________,就可说明此图形是中心对称图形.

方法技巧　中心对称图形的判定方法

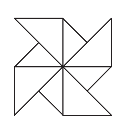
(1)常见的中心对称图形有:线段、平行四边形、圆、正 n 边形(n 为偶数)等.

(2)将图形绕对称中心旋转 180°后,没有任何变化,和原图形一样的为中心对称图形.

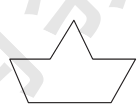
变式训练 2-1:(2018 甘孜州) 下列图形中,既是轴对称图形又是中心对称图形的是(　　)



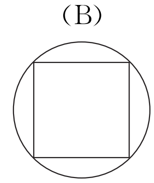
(A)



(B)



(C)



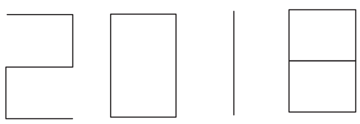
(D)

变式训练 2-2：**(2017 白银)**下面四个手机应用图标中，属于中心对称图形的是(　　)

(A)　　(B)　　(C)　　(D)

课堂达标

1. **(2018 齐齐哈尔)**下列“数字图形”中，既是轴对称图形，又是中心对称图形的有(　　)



(A)1 个　　(B)2 个　　(C)3 个　　(D)4 个

2. **(2017 河北)**图 1 和图 2 中所有的小正方形都全等，将图 1 的正方形放在图 2 的①②③④中的某一位置，使它与原来的 7 个小正方形组成的图形是中心对称图形，这个位置是(　　)

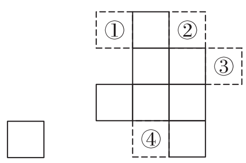
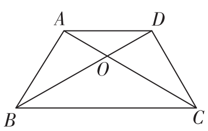


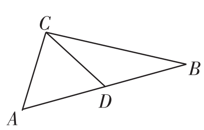
图1　　图2

(A)①　　(B)②　　(C)③　　(D)④

3. **(2018 诸城市一模)**如图，已知梯形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$AB=CD=AD$，AC，BD 相交于点 O，$\angle BCD=60°$，有下列 4 个结论：①梯形 $ABCD$ 是轴对称图形；②$BC=2AD$；③梯形 $ABCD$ 是中心对称图形；④AC 平分$\angle DCB$. 其中正确的是________.

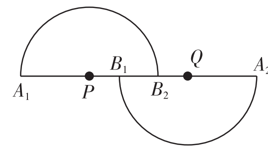


4. 如图，在△ABC 中，点 D 是 AB 边的中点，已知 $AC=4$，$BC=6$.



(1)画出△BCD 关于点 D 成中心对称的图形；
(2)根据图形说明线段 CD 的长的取值范围.

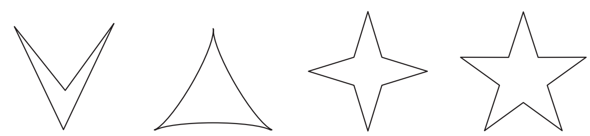
5. 如图，两个半圆分别以 P，Q 为圆心，它们的半径相等，A_1，P，B_1，B_2，Q，A_2 在同一条直线上. 这个图形中的两个半圆是否成中心对称？如果是，请找出对称中心 O.



课后提升

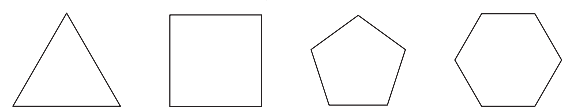
【基础达标】

1. **(2018 青岛)**观察下列四个图形，其中中心对称图形是(　　)



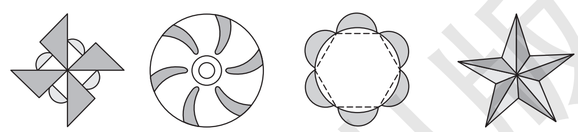
(A)　　(B)　　(C)　　(D)

2. **(2018 牡丹江)**下列图形中，既是轴对称图形又是中心对称图形的图形个数是(　　)



(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3

3. **(2018 黑龙江)**下列图形中，既是轴对称图形又是中心对称图形的是(　　)



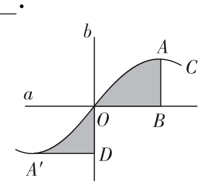
(A)　　(B)　　(C)　　(D)

4. 下列英语单词中，可以看成中心对称图形的是(　　)

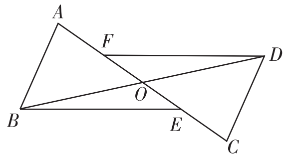
(A)SOS　　(B)CEO　　(C)MBA　　(D)SARS

5. 已知六边形 $ABCDEF$ 是中心对称图形，$AB=1$，$BC=2$，$CD=3$，那么 $EF=$________.

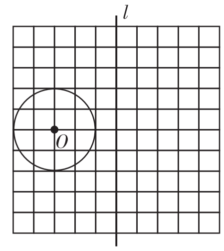
6. **(2017 乐山)**如图，直线 a，b 垂直相交于点 O，曲线 C 关于点 O 成中心对称，点 A 的对称点是点 A'，$AB\perp a$ 于点 B，$A'D\perp b$ 于点 D. 若 $OB=3$，$OD=2$，则阴影部分的面积之和为________.



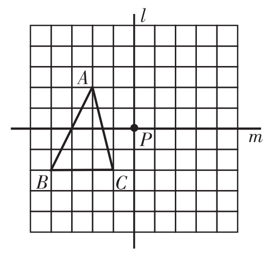
7. 如图，△ABO与△CDO关于点O成中心对称，点E，F在线段AC上，且$AF=CE$.
求证：$FD=BE$.



8. 分别按下列要求解答：
(1)在图①中，作出⊙O关于直线l成轴对称的图形；
(2)在图②中，作出△ABC关于点P成中心对称的图形.



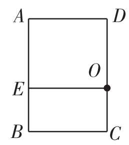
图①



图②

【能力提升】

9. 如图，请你作出此图关于点O成中心对称的图形(保留作图痕迹，不写作法).



2.4　三角形的中位线

扫码观看
本节精彩微课

课前预习

理解三角形中位线的定义，掌握三角形中位线定理

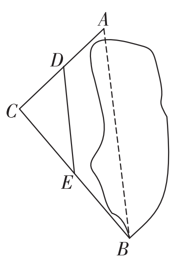
(1)定义：连接三角形两边________的线段叫作三角形的中位线.

(2)定理：三角形的中位线________于第三边，并且等于第三边的________.

课堂探究

探究一：三角形的中位线定理

【例1】(2017 宜昌)如图，要测定被池塘隔开的A，B两点间的距离，可以在直线AB外选一点C，连接AC，BC，并分别找出它们的中点D，E，连接DE. 现测得$AC=30$ m，$BC=40$ m，$DE=24$ m，则$AB=$(　　)



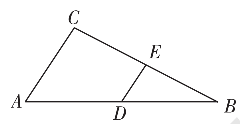
(A)50 m　(B)48 m　(C)45 m　(D)35 m

【思路导引】

由题意得，____________是△ABC的中位线，故________$=\frac{1}{2}$________.

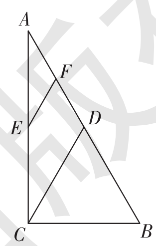
规律总结　三角形的中位线定理包含两层含义：
(1)中位线与第三边的位置关系；
(2)中位线与第三边的数量关系.

变式训练 1－1：如图，在△ABC中，点D，E分别是边AB，BC的中点. 若△DBE的周长是6，则△ABC的周长是(　　)



(A)8　(B)10　(C)12　(D)14

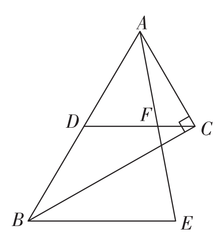
变式训练 1－2：(2018 南充)如图，在Rt△ABC中，∠$ACB=90°$，∠$A=30°$，D，E，F分别为AB，AC，AD的中点. 若$BC=2$，则EF的长为(　　)



(A)$\frac{1}{2}$　(B)1
(C)$\frac{3}{2}$　(D)$\sqrt{3}$

探究二：三角形中位线的综合应用

【例2】(2017 毕节)如图，在Rt△ABC中，∠$ACB=90°$，斜边$AB=9$，D为AB的中点，F为CD上的一点，且$CF=\frac{1}{3}CD$，过点B作BE∥CD交AF的延长线于点E，则BE的长为(　　)



(A)6　(B)4　(C)7　(D)12

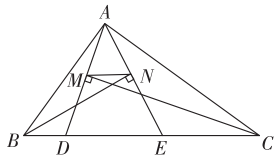
【思路导引】

1. 由直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半，可得 $CD=$________.

2. 由 $CF=\frac{1}{3}CD$，得 $DF=$________$CD=$________.

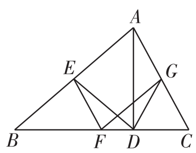
3. 根据三角形的中位线定理，可以得到 $BE=$________$DF=$________.

变式训练 2－1：(2018 达州) 如图，$\triangle ABC$ 的周长为 19，点 D,E 在边 BC 上，$\angle ABC$ 的平分线垂直于 AE，垂足为 N，$\angle ACB$ 的平分线垂直于 AD，垂足为 M. 若 $BC=7$，则 MN 的长为(　　)



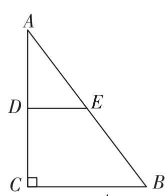
(A)$\frac{3}{2}$　　(B)2　　(C)$\frac{5}{2}$　　(D)3

变式训练 2－2： 如图，在$\triangle ABC$ 中，AB,BC,CA 的中点分别是 E,F,G，AD 是高. 求证：$\angle EDG=\angle EFG$.



课堂达标

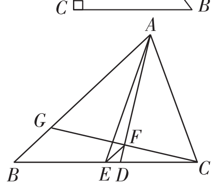
1. 如图，在$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$AC=8$，$AB=10$，DE 垂直平分 AC 交 AB 于点 E，则 DE 的长为(　　)



(A)6　　(B)5

(C)4　　(D)3

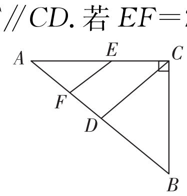
2. 如图，AD,AE 分别是$\triangle ABC$ 的角平分线和中线，$CG\perp AD$ 于 F，交 AB 于点 G，若 $AB=8$，$AC=6$，则 EF 的长为(　　)



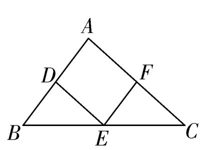
(A)2　　(B)$\frac{3}{2}$

(C)1　　(D)$\frac{1}{2}$

3. (2018 巴中) 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，D,E 分别是边 AB,AC 的中点，点 F 在 AB 上，且 $EF/\!/CD$. 若 $EF=2$，则 $AB=$________.



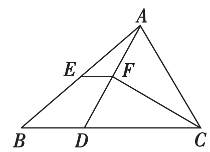
第 3 题图



第 4 题图

4. (2016 张家界) 如图，在$\triangle ABC$ 中，点 D,E,F 分别是边 AB,BC,CA 的中点，且 $AB=6$ cm，$AC=8$ cm，则四边形 $ADEF$ 的周长等于________cm.

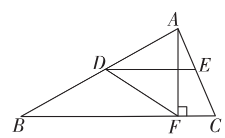
5. 如图，在$\triangle ABC$ 中，CF 平分$\angle ACB$，$CA=CD$，$AE=EB$，求证：$EF=\frac{1}{2}BD$.



课后提升

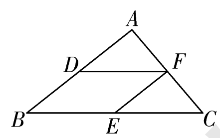
【基础达标】

1. 如图，在$\triangle ABC$ 中，点 D,E 分别是边 AB,AC 的中点，$AF\perp BC$，垂足为 F，$\angle ADE=30°$，$DF=4$，则 BF 的长为(　　)



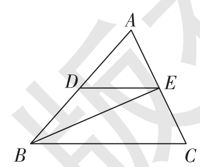
(A)4　　(B)8　　(C)$2\sqrt{3}$　　(D)$4\sqrt{3}$

2. 如图，在$\triangle ABC$ 中，$AB=3$，$BC=4$，$AC=2$，D,E,F 分别为 AB,BC,AC 的中点，连接 DF，FE，则四边形 $DBEF$ 的周长是(　　)



(A)5　　(B)7　　(C)9　　(D)11

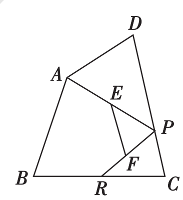
3. (2018 藁城区模拟) 如图，点 D，E 分别是 AB,AC 的中点，BE 是$\angle ABC$ 的平分线，有下列结论：①$BC=2DE$；②$DE/\!/BC$；③$BD=DE$；④$BE\perp AC$. 其中正确的是(　　)



(A)①②　　(B)①②③

(C)①②④　　(D)①②③④

4. 如图，已知四边形 $ABCD$ 中，R,P 分别是 BC,CD 上的点，E,F 分别是 AP,RP 的中点，当点 P 在 CD 上从 C 向 D 移动而点 R 不动时，下列结论成立的是(　　)



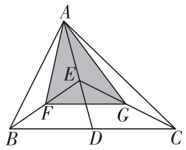
(A)线段 EF 的长逐渐增大

(B)线段 EF 的长逐渐减小

(C)线段 EF 的长不变

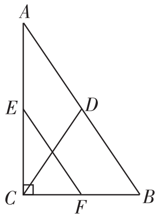
(D)线段 EF 的长与点 P 的位置有关

5. (2017 遵义)如图，$\triangle ABC$ 的面积是 12，点 D,E,F,G 分别是 BC,AD,BE,CE 的中点，则 $\triangle AFG$ 的面积是(　　)

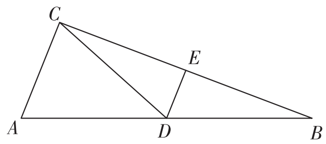


(A)4.5　　(B)5　　(C)5.5　　(D)6

6. 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，点 D,E,F 分别为 AB,AC,BC 的中点. 若 $CD=5$，则 EF 的长为______.



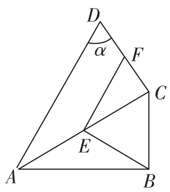
第 6 题图



第 7 题图

7. (2018 曲靖)如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=13,BC=12$，D,E 分别是 AB,BC 的中点，连接 DE,CD. 若 $DE=2.5$，则 $\triangle ACD$ 的周长是________.

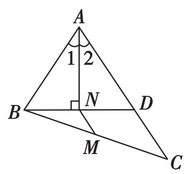
8. (2018 泰州)如图，在四边形 $ABCD$ 中，AC 平分 $\angle BAD$，$\angle ACD=\angle ABC=90°$，$E,F$ 分别为 AC,CD 的中点. 若 $\angle D=\alpha$，则 $\angle BEF$ 的度数为_______(用含 α 的式子表示).



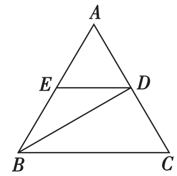
9. 如图，M 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 的中点，AN 平分 $\angle BAC$，$BN\perp AN$ 于点 N，延长 BN 交 AC 于点 D，已知 $AB=10,BC=15,MN=3$.

(1)求证：$BN=DN$.

(2)求 $\triangle ABC$ 的周长.

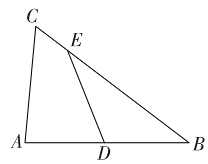


10. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，D,E 分别是边 AC,AB 的中点，连接 BD，若 BD 平分 $\angle ABC$，求证：$BD\perp AC$.



【能力提升】

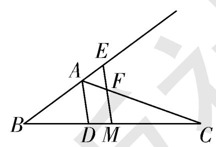
11. (2018 武汉)如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=60°$，$AC=1$，D 是边 AB 的中点，E 是边 BC 上的一点. 若 DE 平分 $\triangle ABC$ 的周长，则 DE 的长是________.



12. (2016 淄博)如图，已知 $\triangle ABC$，AD 平分 $\angle BAC$ 交 BC 于点 D，BC 的中点为 M，$ME/\!/AD$，交 BA 的延长线于点 E，交 AC 于点 F.

(1)求证：$AE=AF$；

(2)求证：$BE=\frac{1}{2}(AB+AC)$.



2.5　矩　形

2.5.1　矩形的性质

扫码观看
本节精彩微课

课前预习

掌握矩形的定义和性质

(1)定义

有一个角是________的平行四边形叫作矩形.

(2)性质

①矩形的四个角都是________,对边________,对角线互相________.

②矩形的对角线________.

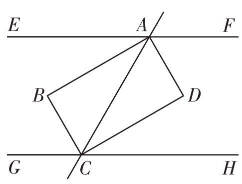
③矩形是中心对称图形,________________是它的对称中心.

④矩形是轴对称图形,过________________的直线都是矩形的对称轴.

课堂探究

探究一:矩形的定义

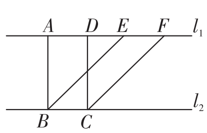
【例1】如图,$EF\parallel GH$,且 AB,BC,AD,CD 分别是两组内错角的平分线,你认为四边形 $ABCD$ 是什么样的四边形?试说明理由.



【思路导引】

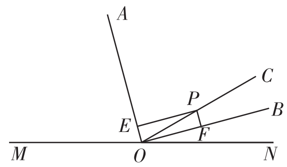
先证明四边形 $ABCD$ 是平行四边形,再证明有一个角是________.

变式训练 1-1:(2018 蒙阴县期中)如图,$l_1\parallel l_2$,$BE\parallel CF$,$BA\perp l_1$,$DC\perp l_2$,下面给出四个结论:①$BE=CF$;②$AB=DC$;③$S_{\triangle ABE}=S_{\triangle DCF}$;④四边形 $ABCD$ 是矩形.其中说法正确的有(　　)



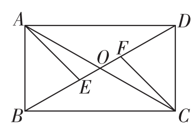
(A)1 个　　(B)2 个　　(C)3 个　　(D)4 个

变式训练 1-2:如图,O 为直线 MN 上一点,P 为射线 OC 上一点,OA,OB 分别是$\angle MOC$,$\angle NOC$ 的平分线,$PE\parallel OB$,$PF\parallel OA$,那么四边形 $PEOF$ 是矩形吗?说说你的理由.



探究二:矩形的性质

【例2】(2017 南宁)如图,矩形 $ABCD$ 的对角线 AC,BD 相交于点 O,点 E,F 在 BD 上,$BE=DF$.



(1)求证:$AE=CF$;

(2)若 $AB=6$,$\angle COD=60^\circ$,求矩形 $ABCD$ 的面积.

【思路导引】

1. 由矩形的性质,得 $OA=$________,$OB=$______,再加上 $BE=DF$,可得 $OE=$________.

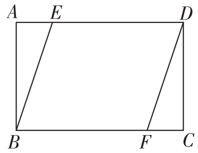
2. 由矩形的对角线______且互相平分,可得 $OA=OB$,从而易知$\triangle AOB$ 是________三角形.

规律总结　矩形的性质的应用

(1)证明线段平行、相等或倍分的关系.

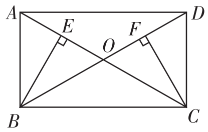
(2)证明角相等或求角的度数.

变式训练 2－1：(**2018 兰州**)如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=3$，$BC=4$，$EB/\!/DF$ 且 BE 与 DF 之间的距离为 3，则 AE 的长是(　　)



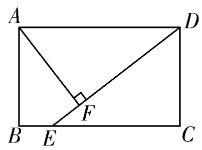
(A)$\sqrt{7}$　　(B)$\frac{3}{8}$　　(C)$\frac{7}{8}$　　(D)$\frac{5}{8}$

变式训练 2－2：如图，矩形 $ABCD$ 中，AC 与 BD 交于点 O，$BE\perp AC$，$CF\perp BD$，垂足分别为 E，F. 求证：$BE=CF$.



课堂达标

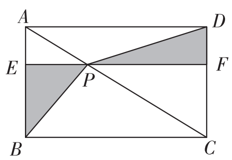
1. 如图，在矩形 $ABCD$ 中($AD>AB$)，点 E 是 BC 上一点，且 $DE=DA$，$AF\perp DE$，垂足为 E. 在下列结论中，不一定正确的是(　　)



(A)$\triangle AFD\cong\triangle DCE$　　(B)$AF=\frac{1}{2}AD$

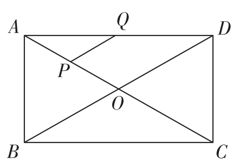
(C)$AB=AF$　　(D)$BE=AD-DF$

2. (**2018 遵义**)如图，点 P 是矩形 $ABCD$ 对角线 AC 上的一点，过点 P 作 $EF/\!/BC$，分别交 AB，CD 于点 E，F，连接 PB，PD，若 $AE=2$，$PF=8$，则图中阴影部分的面积为(　　)

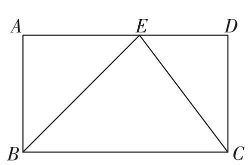


(A)10　　(B)12　　(C)16　　(D)18

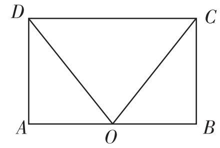
3. (**2018 株洲**)如图，矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O，$AC=10$，P，Q 分别为 AO，AD 的中点，则 PQ 的长度为________.



4. (**2017 辽阳**)如图，在矩形 $ABCD$ 中，$\angle ABC$ 的平分线交 AD 于点 E，连接 CE. 若 $BC=7$，$AE=4$，则 $CE=$________.



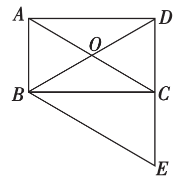
5. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，点 O 在边 AB 上，$\angle AOC=\angle BOD$. 求证：$AO=BO$.



6. 如图，四边形 $ABCD$ 是矩形，对角线 AC，BD 相交于点 O，$BE/\!/AC$ 交 DC 的延长线于点 E.

(1)求证：$BD=BE$；

(2)若$\angle DBC=30°$，$OB=4$，求 AB 的长.



课后提升

【基础达标】

1. (**2018 丹江口市模拟**)矩形具有下列哪条性质(　　)

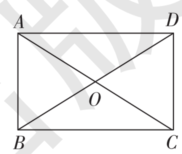
(A)对角线相互垂直

(B)对角线相等

(C)一条对角线平分一组对角

(D)面积等于两条对角线乘积的一半

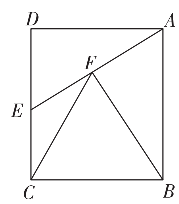
2. (**2018 西山区一模**)如图，在矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，$\angle AOB=60°$，$AC=4$ cm，则矩形 $ABCD$ 的面积为(　　)



(A)12 cm^2　　(B)$4\sqrt{3}$ cm^2

(C)8 cm^2　　(D)$6\sqrt{3}$ cm^2

3. (**2018 乐清市模拟**)如图，在矩形 $ABCD$ 中，点 E 是 CD 边的中点，连接 AE，取 AE 的中点 F，连接 FC，FB. 若 $\triangle FCB$ 是等边三角形，则 $CD:CF=$(　　)



(A)$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　(B)$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　(C)1　　(D)2

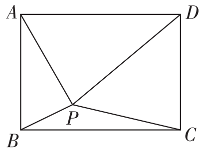
4. (2018 杭州)如图,已知点 P 是矩形 $ABCD$ 内一点(不含边界),设 $\angle PAD=\theta_1$,$\angle PBA=\theta_2$,$\angle PCB=\theta_3$,$\angle PDC=\theta_4$.若 $\angle APB=80°$,$\angle CPD=50°$,则(　　)

(A)$(\theta_1+\theta_4)-(\theta_2+\theta_3)=30°$

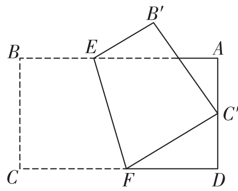
(B)$(\theta_2+\theta_4)-(\theta_1+\theta_3)=40°$

(C)$(\theta_1+\theta_2)-(\theta_3+\theta_4)=70°$

(D)$(\theta_1+\theta_2)+(\theta_3+\theta_4)=180°$

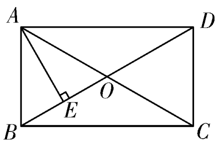


5. (2017 葫芦岛)如图,将矩形纸片 $ABCD$ 沿直线 EF 折叠,使点 C 落在 AD 边的中点 C' 处,点 B 落在点 B' 处,其中 $AB=9$,$BC=6$,则 FC' 的长为(　　)

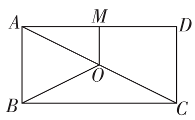


(A)$\frac{10}{3}$　　(B)4　　(C)4.5　　(D)5

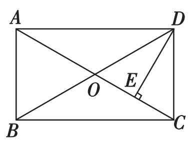
6. 如图,在矩形 $ABCD$ 中,$AB=3$,对角线 AC,BD 相交于点 O,AE 垂直平分 OB 于点 E,则 AD 的长为______________.



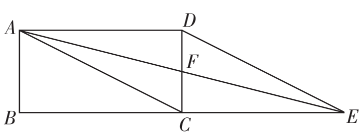
7. (2017 西宁)如图,点 O 是矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 的中点,$OM/\!/AB$交 AD 于点.若 $OM=3$,$BC=10$,则 OB 的长为________.



8. 如图,在矩形 $ABCD$ 中,对角线 AC,BD 相交于点 O,$DE\perp AC$ 于点 E,$\angle EDC:\angle EDA=1:2$,且 $AC=10$,则 DE 的长度是________.



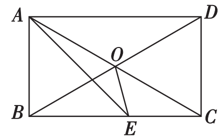
9. 如图,在矩形 $ABCD$ 中,点 F 是 CD 的中点,连接 AF 并延长交 BC 的延长线于点 E,连接 AC,DE.



(1)求证:$\triangle ADF\cong\triangle ECF$;

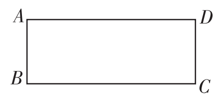
(2)若 $AB=1$,$BC=2$,求四边形 $ACED$ 的面积.

10. 如图,矩形 $ABCD$ 中,AC,BD 相交于点 O,AE 平分 $\angle BAD$,若 $\angle EAO=15°$,求 $\angle BOE$ 的度数.



【能力提升】

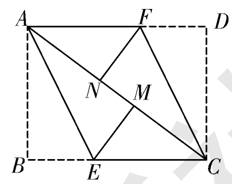
11. 如图,有一矩形纸片 $ABCD$,$AB=8$,$AD=17$,将此矩形纸片折叠,使顶点 A 落在 BC 边的 A' 处,折痕所在直线同时经过边 AB,AD(包括端点).设 $BA'=x$,则 x 的取值范围是____________.



12. 如图,AC 为矩形 $ABCD$ 的对角线,将边 AB 沿 AE 折叠,使点 B 落在 AC 上的点 M 处,将边 CD 沿 CF 折叠,使点 D 落在 AC 上的点 N 处.

(1)求证:四边形 $AECF$ 是平行四边形;

(2)若 $AB=6$,$AC=10$,求四边形 $AECF$ 的面积.



2.5.2　矩形的判定

扫码观看
本节精彩微课

课前预习

掌握矩形的判定方法

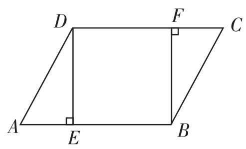
(1)三个角是________的四边形是矩形.

(2)对角线________的平行四边形是矩形.

课堂探究

探究一:用角判定矩形

【例1】如图,在▱$ABCD$中,$DE\perp AB$,$BF\perp CD$,垂足分别为E,F.



(1)求证:$\triangle ADE\cong\triangle CBF$;

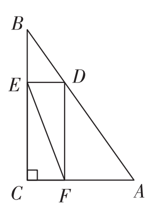
(2)求证:四边形$BFDE$为矩形.

【思路导引】

1. 由$BF\perp CD$,$DE\perp AB$,得$\angle AED=$______$=90°$,再由平行四边形推得$AD=$______,$\angle A=$________.

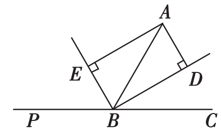
2. 由平行四边形推得$DC\parallel AB$,证得$\angle CDE=$________.

变式训练1-1:(2018莲池区一模)如图,在Rt$\triangle ABC$中,$AC=3$,$BC=4$,D为斜边AB上的一动点,$DE\perp BC$,$DF\perp AC$,垂足分别为E,F,则线段EF的最小值为(　　)



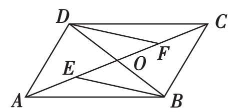
(A)$\frac{4}{5}$　(B)$\frac{3}{5}$　(C)$\frac{5}{2}$　(D)$\frac{12}{5}$

变式训练1-2:如图所示,BD,BE分别是$\angle ABC$与它的邻补角$\angle ABP$的平分线,$AE\perp BE$,$AD\perp BD$,E,D为垂足,试证明四边形$AEBD$是矩形.



探究二:用对角线判定矩形

【例2】如图,四边形$ABCD$的对角线AC,BD交于点O,已知O是AC的中点,$AE=CF$,$DF\parallel BE$.



(1)求证:$\triangle BOE\cong\triangle DOF$.

(2)若$OD=\frac{1}{2}AC$,则四边形$ABCD$是什么特殊四边形?请证明你的结论.

【思路导引】

1. O是AC的中点,$AE=CF$,可得$OE=$________.

2. 由$OD=\frac{1}{2}AC$可得$OD=OA=$_______$=$_______,所以四边形$ABCD$是_______.

方法技巧　矩形的判定思路

(1)若给出的图形是一般的四边形.

思路一:证明其三个角都是直角;

思路二:先证明其为平行四边形,再证明其有一个角是直角或证明其对角线相等.

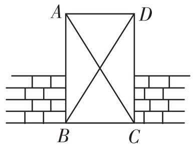
(2)若给出的四边形是平行四边形,则直接证明其有一个角是直角或证明其对角线相等.

变式训练2-1:(2018上海)已知四边形$ABCD$为平行四边形,下列条件中,不能判定这个平行四边形为矩形的是(　　)

(A)$\angle A=\angle B$　　(B)$\angle A=\angle C$

(C)$AC=BD$　　(D)$AB\perp BC$

变式训练 2－2:如图,工人师傅砌门时,要想检验门框 $ABCD$ 是否符合设计要求(即门框是否为矩形),在确保两组对边分别平行的前提下,只要测量出对角线 AC,BD 的长度,然后看它们是否相等就可判断了.



(1)当 AC ________(填“等于”或“不等于”)BD 时,门框符合要求;

(2)这种做法的根据是________________________.

课堂达标

1. (2018 竹溪县模拟) 下列命题中正确的是(　　)

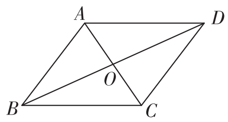
(A)对角线相等的四边形是矩形

(B)对角线互相垂直的四边形是矩形

(C)对角线相等的平行四边形是矩形

(D)对角线互相垂直的平行四边形是矩形

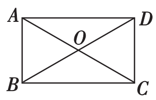
2. (2018 河北模拟) 如图,▱$ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O,要使它成为矩形,需再添加的条件是(　　)



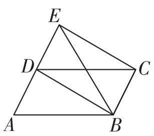
(A)$AO=OC$　　(B)$AC=BD$

(C)$AC\perp BD$　　(D)BD 平分$\angle ABC$

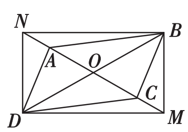
3. 如图所示,▱$ABCD$ 中,$AB=2$ cm,$\triangle AOB$ 为等边三角形,则 $BC=$ ________cm.



4. 如图,在平行四边形 $ABCD$ 中,延长 AD 到点 E,使 $DE=AD$,连接 EB,EC,DB. 请你添加一个条件:________________,使四边形 $DBCE$ 是矩形.



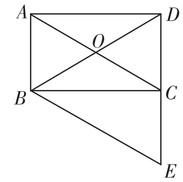
5. 如图所示,在▱$ABCD$ 中,对角线 AC,BD 相交于点 O,延长 OA 到点 N,使 $ON=OB$,再延长 OC 到点 M,使 $CM=AN$. 求证:四边形 $NDMB$ 为矩形.



6. 如图,平行四边形 $ABCD$ 中,对角线 AC,BD 相交于点 O,$BE\parallel AC$ 交 DC 的延长线于点 E,$BD=BE$.

(1)求证:四边形 $ABCD$ 是矩形;

(2)若$\angle AOB=60^\circ$,$AB=4$,求四边形 $ABED$ 的面积.



课后提升

【基础达标】

1. (2018 丹江口市模拟) 下列识别图形不正确的是(　　)

(A)有一个角是直角的平行四边形是矩形

(B)有三个角是直角的四边形是矩形

(C)对角线相等的四边形是矩形

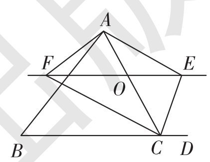
(D)对角线互相平分且相等的四边形是矩形

2. (2018 邵阳县模拟) 在$\triangle ABC$ 中,CO 为 AB 边上的中线,且 $OC=\frac{1}{2}AB$,以点 O 为圆心,OC 长为半径画圆,延长 CO 交⊙O 于点 D,连接 AD,BD,则四边形 $ADBC$ 是(　　)

(A)正方形　　(B)矩形

(C)菱形　　(D)邻边相等的四边形

3. (2018 微山县二模) 如图,点 D 在$\triangle ABC$ 边 BC 的延长线上,点 O 是边 AC 上的一个动点,过点 O 作直线 $EF\parallel BC$,交$\angle BCA$ 的平分线于点 F,交$\angle BCA$ 的外角平分线于点 E. 当点 O 在线段 AC 上移动(不与点 A,C 重合)时,下列结论不一定成立的是(　　)



(A)$2\angle ACE=\angle BAC+\angle B$

(B)$EF=2OC$

(C)$\angle FCE=90^\circ$

(D)四边形 $AFCE$ 是矩形

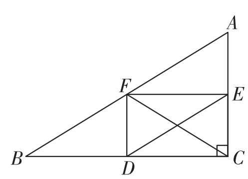
4. (2017 滦县期末) 如图,在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle ACB=90^\circ$,BC,AC,AB 边的中点分别是点 D,E,F,则下列说法可能不正确的为(　　)

(A)四边形 $CDFE$ 是矩形

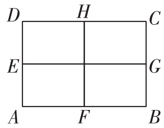
(B)$DE=CF=\frac{1}{2}AB$

(C)$S_{\triangle ABC}=4S_{\triangle AEF}$

(D)$\angle B=30^\circ$



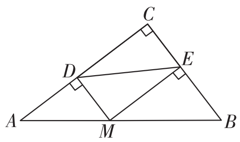
5. (2017 玉林)如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB>BC$，点 E,F,G,H 分别是边 AD,AB,BC,CD 的中点，连接 EG，HF，则图中矩形的个数为(　　)



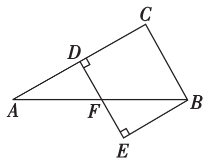
(A)5　　(B)8　　(C)9　　(D)11

6. 木工做一个矩形桌面，量得桌面的长为 45 cm，宽为 28 cm，对角线为 53 cm，这个桌面________.(填“合格”或“不合格”)

7. 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$BC=3$，$AC=4$，M 为斜边 AB 上的一动点，过点 M 作 $MD\perp AC$ 于点 D，过点 M 作 $ME\perp BC$ 于点 E，则线段 DE 的长的最小值为________.



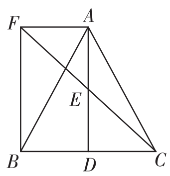
8. 如图，在$\triangle ABC$ 中，AC 的垂直平分线分别交 AC,AB 于点 D,F，$BE\perp DF$ 交 DF 的延长线于点 E，已知$\angle A=30°$，$BC=2$，$AF=BF$，则四边形 $BCDE$ 的面积是________.



9. 如图，在$\triangle ABC$ 中，D 是 BC 边上的一点，E 是 AD 的中点，过点 A 作 BC 的平行线交 CE 的延长线于点 F，且 $AF=BD$，连接 BF.

(1)求证：D 是 BC 的中点.

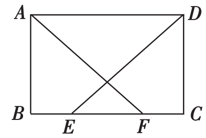
(2)如果 $AB=AC$，试判断四边形 $AFBD$ 的形状，并证明你的结论.



10. 如图所示，在▱$ABCD$ 中，E,F 为 BC 边上的两点，且 $BE=CF$，$AF=DE$.

求证：(1)$\triangle ABF\cong\triangle DCE$；

(2)四边形 $ABCD$ 是矩形.

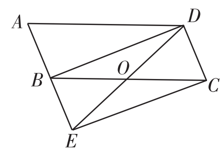


【能力提升】

11. 如图，将▱$ABCD$ 的边 AB 延长至点 E，使 $AB=BE$，连接 DE,EC,BD，且 DE 交 BC 于点 O.

(1)求证：$\triangle ABD\cong\triangle BEC$；

(2)若$\angle BOD=2\angle A$，求证：四边形 $BECD$ 是矩形.



2.6 菱 形

2.6.1　菱形的性质

扫码观看
本节精彩微课

课前预习

1. 理解菱形的定义

一组________相等的平行四边形叫作菱形.

2. 掌握菱形的性质

(1)菱形的四条边都________，对角________，对角线互相____________.

(2)菱形是中心对称图形，__________________是它的对称中心.

(3)菱形是轴对称图形，____________________都是它的对称轴.

3. 熟记菱形的周长与面积公式

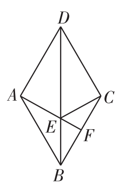
(1)周长=边长×________.

(2)面积=底×高=两条对角线长度乘积的________.

课堂探究

探究一：菱形的定义和性质

【例1】 如图，在菱形 $ABCD$ 中，F 是 BC 上任意一点，连接 AF 交对角线 BD 于点 E，连接 EC.



(1)求证：$AE=CE$；

(2)当$\angle ABC=60°$，$AE=BE=1$ 时，求菱形的边长.

【思路导引】

1. 利用菱形的性质证$\triangle ABE\cong$________.

2. 由 $AE=BE$，可得$\angle EAB=$__________$=$__________，$\triangle AED$ 为__________三角形，$DE=$________.

变式训练 1－1：(2017 益阳) 下列性质中菱形不一定具有的性质是(　　)

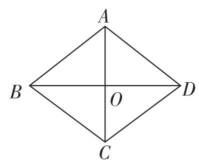
(A)对角线互相平分

(B)对角线互相垂直

(C)对角线相等

(D)既是轴对称图形又是中心对称图形

变式训练 1－2：(2018 大连) 如图，在菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O. 若 $AB=5$，$AC=6$，则 BD 的长是(　　)

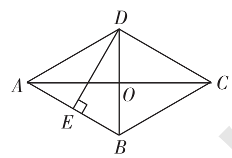


(A)8　　(B)7　　(C)4　　(D)3

规律总结 菱形的两条对角线把菱形分成 4 个全等的直角三角形、两对全等的等腰三角形. 故常结合勾股定理或等腰三角形的性质进行与菱形有关的证明、计算，有时也与角平分线的性质结合解题.

探究二：菱形的周长和面积

【例2】 如图，四边形 $ABCD$ 是菱形，对角线 AC 与 BD 相交于 O，菱形 $ABCD$ 的周长是 20，$BD=6$.



(1)求 AC 的长.

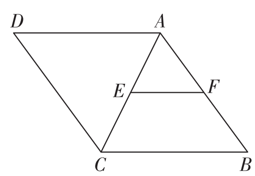
(2)求菱形 $ABCD$ 的高 DE 的长.

【思路导引】

1. 先由勾股定理求 AC 的一半，再求 AC 的长.

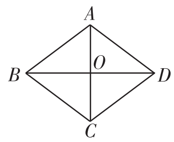
2. $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AO\cdot BD=\frac{1}{2}AB\cdot$________.

变式训练 2－1：(2018 贵阳) 如图，在菱形 $ABCD$ 中，E 是 AC 的中点，$EF\parallel CB$，交 AB 于点 F. 若 $EF=3$，则菱形 $ABCD$ 的周长为(　　)

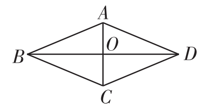


(A)24　　(B)18　　(C)12　　(D)9

变式训练 2－2:如图所示,菱形 $ABCD$ 的两条对角线交于点 O. 若菱形的周长为 40 cm,$AC=12$ cm. 求菱形 $ABCD$ 的面积.



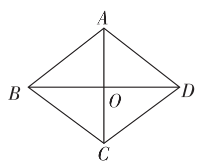
6. 如图,已知菱形的周长为 52 cm,两条对角线的长度之比 $AC:BD=5:12$,对角线 AC 与 BD 交于点 O. 求菱形 $ABCD$ 的面积.



课堂达标

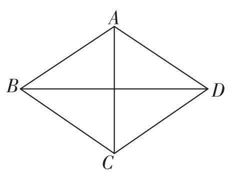
1. **(2018 十堰)** 菱形不具备的性质是(　　)
(A)四条边都相等　(B)对角线一定相等
(C)是轴对称图形　(D)是中心对称图形

2. **(2018 淮安)** 如图,菱形 $ABCD$ 的对角线 AC,BD 的长分别为 6 和 8,则这个菱形的周长是(　　)

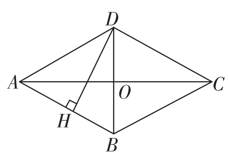


(A)20　(B)24
(C)40　(D)48

3. **(2017 宜宾)** 如图,在菱形 $ABCD$ 中,若 $AC=6$,$BD=8$,则菱形 $ABCD$ 的面积是________.



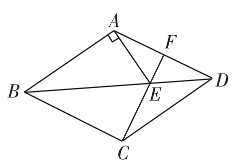
第 3 题图



第 4 题图

4. **(2017 孝感)** 如图,四边形 $ABCD$ 是菱形,$AC=24$,$BD=10$,$DH\perp AB$ 于点 H,则线段 BH 的长为________.

5. 如图,在菱形 $ABCD$ 中,$AE\perp AB$,AE 交对角线 BD 于点 E,CE 的延长线交 AD 于点 F,求证:$CF\perp AD$.

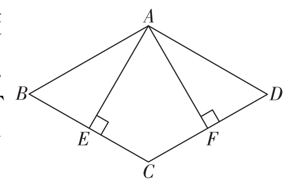


课后提升

【基础达标】

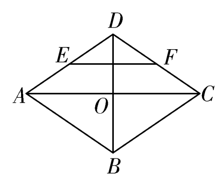
1. **(2017 衡阳)** 菱形的两条对角线分别是 12 和 16,则此菱形的边长是(　　)
(A)10　(B)8　(C)6　(D)5

2. **(2017 湘潭模拟)** 如图,在菱形 $ABCD$ 中,$AE\perp BC$ 于点 E,$AF\perp CD$ 于点 F,且 E,F 分别为 BC,CD 的中点,则 $\angle EAF$ 等于(　　)



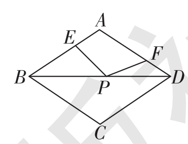
(A)75°　(B)45°　(C)60°　(D)30°

3. 如图,菱形 $ABCD$ 的对角线 AC,BD 相交于点 O,E,F 分别是 AD,CD 边的中点,连接 EF. 若 $EF=\sqrt{2}$,$BD=2$,则菱形 $ABCD$ 的面积为(　　)



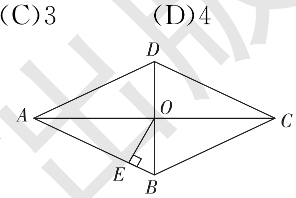
(A)$2\sqrt{2}$　(B)$\sqrt{2}$　(C)$6\sqrt{2}$　(D)$8\sqrt{2}$

4. **(2017 三亚模拟)** 如图,在周长为 12 的菱形 $ABCD$ 中,$AE=1$,$AF=2$,若 P 为对角线 BD 上的一个动点,则 $EP+FP$ 的最小值为(　　)



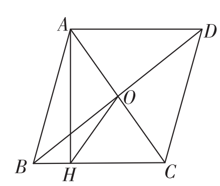
(A)1　(B)2　(C)3　(D)4

5. **(2018 历城区二模)** 如图,菱形 $ABCD$ 的周长为 16,对角线 AC 与 BD 相交于点 O,$OE\perp AB$,垂足为 E. 若 $\angle ADC=120°$,则 OE 的长为(　　)

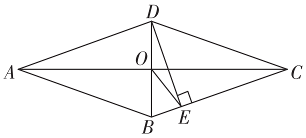


(A)$\frac{\sqrt{3}}{3}$　(B)1　(C)$\sqrt{3}$　(D)$2\sqrt{3}$

6. **(2018 锦州)** 如图,菱形 $ABCD$ 的对角线 AC,BD 相交于点 O,过点 A 作 $AH\perp BC$ 于点 H,连接 OH. 若 $OB=4$,$S_{菱形ABCD}=24$,则 OH 的长为________.

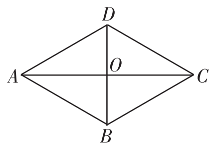


7. (2017 十堰)如图,在菱形 $ABCD$ 中,AC 交 BD 于点 O,$DE\perp BC$ 于点 E,连接 OE.若$\angle ABC=140°$,则$\angle OED=$________.

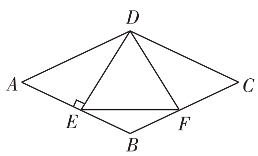


8. (2018 黔西南州)已知一个菱形的边长为 2,较长的对角线的长为 $2\sqrt{3}$,则这个菱形的面积是________.

9. 如图,在菱形 $ABCD$ 中,$\angle DAB$ 与$\angle ABC$ 的度数之比为 1∶2,周长为 48 cm,求两条对角线的长度.

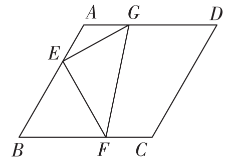


10. 如图,在菱形 $ABCD$ 中,E 是 AB 的中点,且 $DE\perp AB$ 于点 E,设 $AB=a$,求:
(1)$\angle ABC$ 的度数;
(2)对角线 AC 的长.

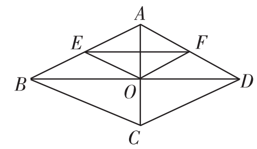


【能力提升】

11. (2018 镇江)如图,点 E,F,G 分别在菱形 $ABCD$ 的边 AB,BC,AD 上,$AE=\frac{1}{3}AB$,$CF=\frac{1}{3}CB$,$AG=\frac{1}{3}AD$.已知$\triangle EFG$ 的面积等于 6,则菱形 $ABCD$ 的面积等于________.



12. 如图,菱形$ABCD$的对角线 AC,BD 相交于点 O,点 E,F 分别是边 AB,AD 的中点.
(1)请判断$\triangle OEF$ 的形状,并证明你的结论;
(2)若 $AB=13$,$AC=10$,请求出线段 EF 的长.



2.6.2　菱形的判定

扫码观看
本节精彩微课

课前预习

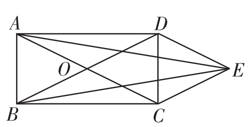
会用菱形的性质和判定定理进行计算或证明

(1)四条边________的四边形是菱形.
(2)对角线____________的平行四边形是菱形.

课堂探究

探究一:菱形的判定

【例1】如图,矩形 $ABCD$ 的对角线 AC,BD 相交于点 O,$DE/\!/AC$,$CE/\!/BD$.



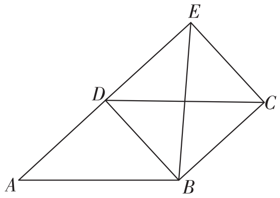
(1)求证:四边形 $OCED$ 为菱形.
(2)连接 AE,BE,AE 与 BE 相等吗?请说明理由.

【思路导引】
1. 由矩形对角线的性质得 $OC=$________.
2. 探究 AE 与 BE 是否相等,需要证$\triangle ADE\cong$________.

方法技巧　菱形的常用判定方法

已有条件	需要条件
平行四边形	邻边相等
	对角线互相垂直
一般四边形	四条边都相等
	对角线互相垂直平分

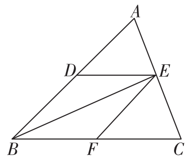
变式训练 1－1：**(2018 双桥区模拟)**如图，四边形 $ABCD$ 为平行四边形，延长 AD 到点 E，使 $DE=AD$，连接 EB,EC,DB，添加一个条件能使四边形 $DBCE$ 成为菱形的是(　　)



(A)$AB=BE$　　(B)$AB\perp BE$

(C)$\angle ADB=90^{\circ}$　　(D)$CE\perp DE$

变式训练 1－2：**(2017 聊城)**如图，在 $\triangle ABC$ 中，$DE\parallel BC$，$EF\parallel AB$，要判定四边形 $DBFE$ 是菱形，还需要添加的条件是(　　)

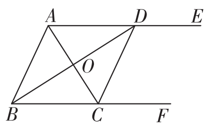


(A)$AB=AC$　　(B)$AD=BD$

(C)$BE\perp AC$　　(D)BE 平分$\angle ABC$

探究二：菱形的判定与性质的综合应用

【例2】(2017 襄阳)如图，$AE\parallel BF$，AC 平分$\angle BAE$，且交 BF 于点 C，BD 平分$\angle ABF$，且交 AE 于点 D，连接 CD.



(1)求证：四边形 $ABCD$ 是菱形；

(2)若$\angle ADB=30^{\circ}$，$BD=6$，求 AD 的长.

【思路导引】

1. 由 $AE\parallel BF$，可得$\angle ADB=$________，由 BD 平分$\angle ABF$，可得$\angle ABD=$________，所以________$=$________，从而得到 $AB=$________.

2. 同理可证 $AB=$________，于是易证四边形 $ABCD$ 为________，从而证得菱形.

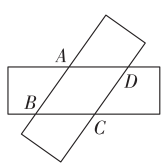
3. $OD=$________，$AO=$________，$AD=$________.

变式训练 2－1：对于①对角线垂直的四边形，②矩形，③菱形，④对角线相等的四边形，分别连接它们各边的中点所构成的四边形中，为菱形的是(　　)

(A)①　　(B)②

(C)①②③　　(D)②④

变式训练 2－2：**(2018 河南一模)**如图，剪两张对边平行且宽度相同的纸条随意交叉叠放在一起，转动其中一张，重合部分构成一个四边形，则下列结论中不一定成立的是(　　)



(A)$\angle ABC=\angle ADC$，$\angle BAD=\angle BCD$

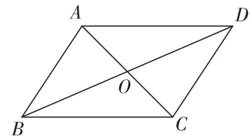
(B)$AB=BC$

(C)$AB=CD$，$AD=BC$

(D)$\angle DAB+\angle BCD=180^{\circ}$

课堂达标

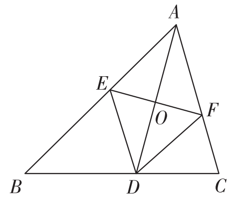
1. **(2018 日照)**如图，在四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC,BD 相交于点 O，$AO=CO$，$BO=DO$. 添加下列条件，不能判定四边形 $ABCD$ 是菱形的是(　　)



(A)$AB=AD$　　(B)$AC=BD$

(C)$AC\perp BD$　　(D)$\angle ABO=\angle CBO$

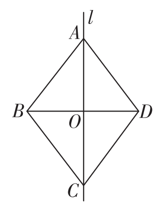
2. **(2018 汶上县期中)**如图，AD 是$\triangle ABC$ 的角平分线，$DE\parallel AC$ 交 AB 于点 E，$DF\parallel AB$ 交 AC 于点 F，且 AD 交 EF 于点 O，则$\angle AOF$ 为(　　)



(A)60°　　(B)90°　　(C)100°　　(D)110°

3. 已知▱$ABCD$，对角线 AC,BD 相交于点 O，请你添加一个适当的条件，使▱$ABCD$ 成为菱形，你添加的条件是________________.

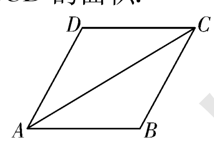
4. 如图，四边形 $ABCD$ 是轴对称图形，且直线 AC 是对称轴，$AB\parallel CD$. 有下列结论：①$AC\perp BD$；②$AD\parallel BC$；③四边形 $ABCD$ 是菱形；④$\triangle ABD\cong\triangle CDB$. 其中正确的是____________(填序号).



5. 如图，AC 是▱$ABCD$ 的对角线，$\angle BAC=\angle DAC$.

(1)求证：$AB=BC$；

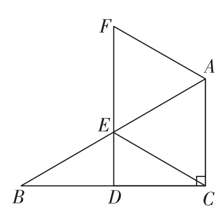
(2)若 $AB=2$，$AC=2\sqrt{3}$，求▱$ABCD$ 的面积.



6. **(2017 贵阳)**如图，在$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^{\circ}$，点 D,E 分别是边 BC,AB 的中点，连接 DE 并延长至点 F，使 $EF=2DE$，连接 CE,AF.

(1)求证：$AF=CE$；

(2)当$\angle B=30^{\circ}$时，试判断四边形 $ACEF$ 的形状，并说明理由.



课后提升

【基础达标】

1. (2018 龙岗区期中)已知四边形 $ABCD$ 是平行四边形,下列结论不正确的是(　　)

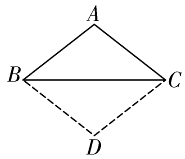
(A)当 $AB=BC$ 时,它是菱形

(B)当 $AC\perp BD$ 时,它是菱形

(C)当 $\angle ABC=90°$时,它是矩形

(D)当 $AC=BD$ 时,它是菱形

2. 如图,已知△ABC,$AB=AC$,将△ABC 沿边 BC 翻折,得到的△DBC 与原△ABC 拼成四边形 $ABDC$,则能直接判定四边形 $ABDC$ 是菱形的依据是(　　)



(A)一组邻边相等的平行四边形是菱形

(B)四条边相等的四边形是菱形

(C)对角线互相垂直的平行四边形是菱形

(D)对角线互相平分的平行四边形是菱形

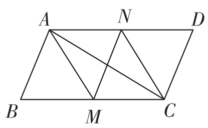
3. (2018 洛阳二模)如图,在▱$ABCD$ 中,AM,CN 分别是$\angle BAD$ 和$\angle BCD$ 的平分线,添加一个条件,仍无法判断四边形 $AMCN$ 为菱形的是(　　)

(A)$AM=AN$

(B)$MN\perp AC$

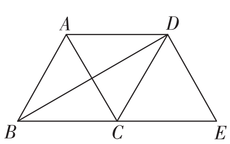
(C)MN 是$\angle AMC$ 的平分线

(D)$\angle BAD=120°$

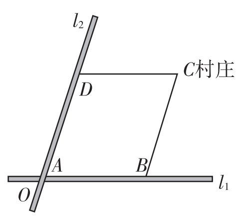


4. (2018 诸城市期末)如图,等边△ABC 沿射线 BC 向右平移到△DCE 的位置,连接 AD,BD,有下列结论:①$AD=BC$;②BD,AC 互相平分;③四边形 $ACED$ 是菱形;④$\angle ACD=\angle DCE$. 其中正确的个数是(　　)

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4



第 4 题图

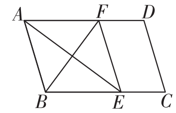


第 5 题图

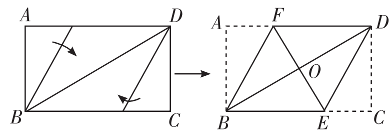
5. 如图所示,两条笔直的公路 l_1,l_2 相交于点 O,村庄 C 的村民在公路的旁边建三个加工厂 A,B,D,已知 $AB=BC=CD=DA=5$ km,村庄 C 到公路 l_1 的距离为 4 km,则村庄 C 到公路 l_2 的距离是(　　)

(A)3 km　(B)4 km　(C)5 km　(D)6 km

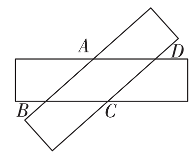
6. (2017 蒙阴县期末)如图,在平行四边形 $ABCD$ 中,$\angle BAD$ 的平分线交 BC 于点 E,$\angle ABC$ 的平分线交 AD 于点 F. 若 $BF=12$,$AB=10$,则 AE 的长为________.



7. 将矩形纸片 $ABCD$ 按如图所示的方式折叠,点 A、点 C 恰好落在对角线 BD 上的点 O 处,得到的四边形 $BEDF$ 为__________形,若 $BC=6$,则 AB 的长为________.



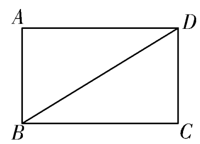
8. (2017 平湖市校级期末)如图,两个长为 9,宽为 3 的全等矩形叠合(不完全重合)而得到四边形 $ABCD$,则四边形 $ABCD$ 面积的最大值为________.



9. 如图,已知 BD 是矩形 $ABCD$ 的对角线.

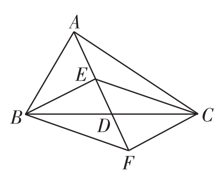
(1)用直尺和圆规作线段 BD 的垂直平分线,分别交 AD,BC 于 E,F(保留作图痕迹,不写作法和证明).

(2)连接 BE,DF,问四边形 $BEDF$ 是什么四边形?请说明理由.



【能力提升】

10. 如图,在△ABC 中,点 D 是 BC 的中点,点 E,F 分别在线段 AD 及其延长线上,且 $DE=DF$. 给出下列条件:

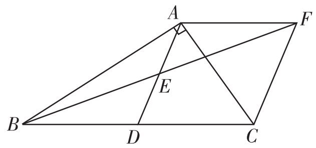


①$BE\perp EC$;②$BF\parallel CE$;③$AB=AC$.

从中选择一个条件使四边形 $BECF$ 是菱形,你认为这个条件是________(只填写序号).

11. 如图，在 Rt△ABC 中，$\angle BAC=90°$，D 是 BC 的中点，E 是 AD 的中点，过点 A 作 $AF\parallel BC$ 交 BE 的延长线于点 F.

(1)求证：$\triangle AEF\cong\triangle DEB$；



(2)证明四边形 $ADCF$ 是菱形；

(3)若 $AC=4$，$AB=5$，求菱形 $ADCF$ 的面积.

2.7　正方形

扫码观看
本节精彩微课

课前预习

1. 理解正方形的定义

有一组邻边相等且有一个角是直角的平行四边形是正方形.

2. 掌握正方形的性质与判定

(1)正方形具有平行四边形的所有性质，还具有以下性质：

①四条边都________.

四个角都是________.

对角线________________________________.

②正方形是中心对称图形，对角线的________是它的对称中心.

③正方形是轴对称图形，两条对角线所在直线，以及过每一组对边________的直线都是它的对称轴.

(2)判定

①先判定四边形是矩形，再判定这个矩形有一组________相等；

②先判定四边形是菱形，再判定这个菱形有________________________.

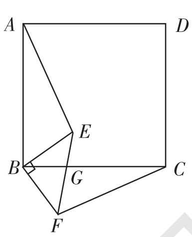
课堂探究

探究一：正方形的性质

【例1】如图，四边形 $ABCD$ 是正方形，$BE\perp BF$，$BE=BF$，EF 与 BC 交于点 G.

(1)求证：$AE=CF$；

(2)若 $\angle ABE=55°$，求 $\angle EGC$ 的大小.



【思路导引】

1. 由正方形的性质得 $AB=CB$，$\angle ABC=$________，由 $BE\perp BF$ 可得 $\angle ABE=$________.

2. 由 $\angle ABE=55°$，得 $\angle GBE=$________，由 $BE\perp BF$，$BE=BF$ 得 $\angle BEF=$________，$\angle EGC=\angle GBE+$________.

规律总结　正方形的性质

(1)边：四条边都相等且每组对边平行.

(2)角：四个角都是直角.

(3)对角线：两条对角线相等且相互垂直平分，把正方形分成四个全等的等腰直角三角形；每条对角线平分一组对角，把正方形分成两个全等的等腰直角三角形.

变式训练 1-1：(2017 阳谷县二模)矩形、菱形、正方形都一定具有的性质是(　　)

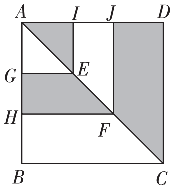
(A)邻边相等

(B)四个角都是直角

(C)对角线相等

(D)对角线互相平分

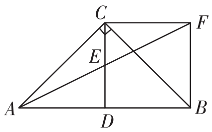
变式训练 1-2:**(2018 宜昌)**如图,正方形 $ABCD$ 的边长为 1,点 E,F 分别是对角线 AC 上的两点,$EG\perp AB,EI\perp AD,FH\perp AB,FJ\perp AD$,垂足分别为 G,I,H,J,则图中阴影部分的面积等于(　　)



(A)1　　(B)$\frac{1}{2}$　　(C)$\frac{1}{3}$　　(D)$\frac{1}{4}$

探究二:正方形的判定

【例 2】如图,在△ABC 中,$AC=BC,AC\perp BC$,D 是 AB 的中点,E 是 CD 的中点,过点 C 作 $CF\parallel AB$ 交 AE 的延长线于点 F,连接 BF.试判断四边形 $BDCF$ 的形状,并证明你的结论.



【思路导引】

先证明△AED≌△FEC,得 $AD=$____,再证明四边形 $BDCF$ 是平行四边形,最后证明∠$CDB=90°$,$CD=BD$ 即可.

规律总结　正方形的判定

(1)有一个角是直角的菱形是正方形.

(2)有一组邻边相等的矩形是正方形.

(3)对角线相等的菱形是正方形.

(4)对角线垂直的矩形是正方形.

变式训练 2-1:**(2018 湘西州)**下列说法中,正确说法的个数有(　　)

①对顶角相等;

②两直线平行,同旁内角相等;

③对角线互相垂直的四边形为菱形;

④对角线互相垂直平分且相等的四边形为正方形.

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

变式训练 2-2:**(2016 兰州)**平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O,且 $AC\perp BD$,请添加一个条件:______________,使得平行四边形 $ABCD$ 为正方形.

课堂达标

1. **(2016 河北)**关于▱$ABCD$ 的叙述,正确的是(　　)

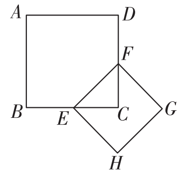
(A)若 $AB\perp BC$,则▱$ABCD$ 是菱形

(B)若 $AC\perp BD$,则▱$ABCD$ 是正方形

(C)若 $AC=BD$,则▱$ABCD$ 是矩形

(D)若 $AB=AD$,则▱$ABCD$ 是正方形

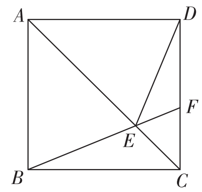
2. **(2016 广东)**如图,正方形 $ABCD$ 的面积为 1,则以相邻两边中点的连线 EF 为边的正方形 $EFGH$ 的周长为(　　)



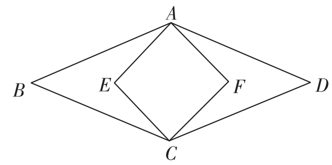
(A)$\sqrt{2}$　　(B)$2\sqrt{2}$

(C)$\sqrt{2}+1$　　(D)$2\sqrt{2}+1$

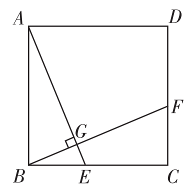
3. **(2018 兴庆区校级三模)**如图,在正方形 $ABCD$ 中,点 F 为 CD 上的一点,BF 与 AC 交于点 E.若∠$CBF=20°$,则∠$DEF=$______°.



4. **(2018 巴彦淖尔)**如图,菱形 $ABCD$ 的面积为 120 cm^2,正方形 $AECF$ 的面积为 72 cm^2,则菱形的边长为______.



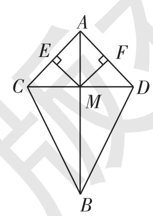
5. 如图,在正方形 $ABCD$ 中,E,F 分别为 BC,CD 上的点,$AE\perp BF$,垂足为 G.求证:$AE=BF$.



6. 如图,AB 是 CD 的垂直平分线,垂足为 M,过点 M 作 $ME\perp AC,MF\perp AD$,垂足分别为 E,F.

(1)求证:∠$CAB=$∠DAB;

(2)若∠$CAD=90°$,求证:四边形 $AEMF$ 是正方形.



课后提升

【基础达标】

1. **(2018 郧阳区三模)**满足下列条件的四边形是正方形的是(　　)

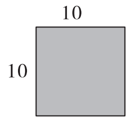
(A)对角线互相垂直平分的平行四边形

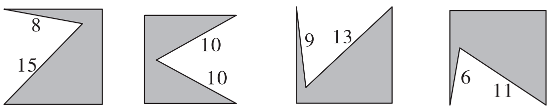
(B)对角线互相平分且相等的矩形

(C)对角线互相垂直平分的菱形

(D)对角线互相垂直平分且相等的四边形

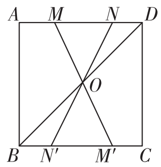
2. (**2017 河北**)如图是边长为 10 cm 的正方形铁片,过两个顶点剪掉一个三角形,以下四种剪法中,裁剪线的长度所标的数据(单位:cm)不正确的是(　　)





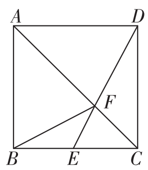
(A)　　(B)　　(C)　　(D)

3. 如图,在正方形 $ABCD$ 中,连接 BD,点 O 是 BD 的中点,若 M,N 是 AD 上的两点,连接 MO,NO,并分别延长交边 BC 于点 M',N',则图中的全等三角形共有(　　)



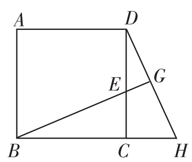
(A)2 对　　(B)3 对
(C)4 对　　(D)5 对

4. (**2017 广东**)如图,已知正方形$ABCD$,点 E 是 BC 的中点,DE 与 AC 相交于点 F,连接 BF. 有下列结论:①$S_{\triangle ABF}=S_{\triangle ADF}$;②$S_{\triangle CDF}=4S_{\triangle CEF}$;③$S_{\triangle ADF}=2S_{\triangle CEF}$;④$S_{\triangle ADF}=2S_{\triangle CDF}$. 其中正确的是(　　)



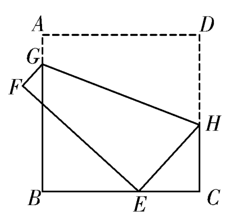
(A)①③　　(B)②③
(C)①④　　(D)②④

5. 如图,在正方形 $ABCD$ 中,H 是 BC 延长线上一点,使 $CE=CH$,连接 DH,延长 BE 交 DH 于点 G,则下面结论错误的是(　　)



(A)$BE=DH$
(B)$\angle H+\angle BEC=90°$
(C)$BG\perp DH$
(D)$\angle HDC+\angle ABE=90°$

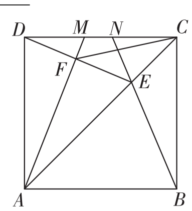
6. 如图,正方形$ABCD$的边长为 9,将正方形折叠,使顶点 D 落在 BC 边上的点 E 处,折痕为 GH. 若 $BE:EC=2:1$,则线段 CH 的长是(　　)



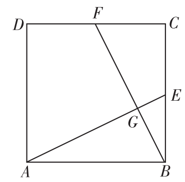
(A)3　　(B)4　　(C)5　　(D)6

7. (**2018 武汉**)以正方形 $ABCD$ 的边 AD 作等边$\triangle ADE$,则$\angle BEC$ 的度数是________.

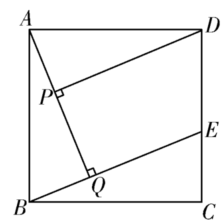
8. (**2018 兰州**)如图,M,N 是正方形 $ABCD$ 的边 CD 上的两个动点,满足 $AM=BN$,连接 AC 交 BN 于点 E,连接 DE 交 AM 于点 F,连接 CF. 若正方形的边长为 6,则线段 CF 的最小值是________.



9. 如图,在正方形 $ABCD$ 中,E,F 分别为 BC,CD 的中点,连接 AE,BF,交点为 G.
求证:$AE\perp BF$.

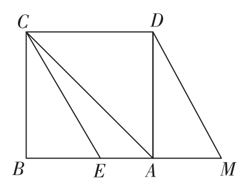


10. 如图,在正方形 $ABCD$ 中,点 E 在边 CD 上,$AQ\perp BE$ 于点 Q,$DP\perp AQ$ 于点 P.
(1)求证:$AP=BQ$;
(2)在不添加任何辅助线的情况下,请直接写出图中四对线段,使每对中较长线段与较短线段长度的差等于 PQ 的长.

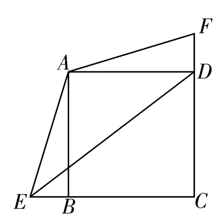


【能力提升】

11. (**2018 呼和浩特**)如图,已知正方形 $ABCD$,点 M 是边 BA 延长线上的动点(不与点 A 重合),且 $AM<AB$,$\triangle CBE$ 由$\triangle DAM$ 平移得到. 若过点 E 作 $EH\perp AC$,H 为垂足,则有以下结论:①点 M 位置变化,使得$\angle DHC=60°$时,$2BE=DM$;②无论点 M 运动到何处,都有 $DM=\sqrt{2}HM$;③无论点 M 运动到何处,$\angle CHM$ 一定大于 $135°$. 其中正确结论的序号为________.



12. 如图,已知正方形 $ABCD$ 中,$BC=3$,点 E,F 分别是 CB,CD 延长线上的点,$DF=BE$,连接 AE,AF.
(1)求证:$\triangle ADF\cong\triangle ABE$;
(2)若 $BE=1$,求 $\tan\angle AED$ 的值. (提示:$\tan\angle AED=\dfrac{AH}{EH}$)



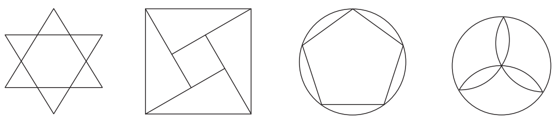
第 2 章　基础巩固与训练

一、选择题

1. (2018 大庆)一个正 n 边形的每一个外角都是 $36°$，则 n=(　　)

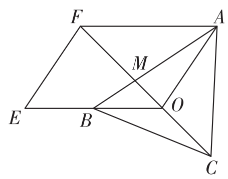
(A)7　　(B)8　　(C)9　　(D)10

2. (2018 徐州)下列图形中，既是轴对称图形，又是中心对称图形的是(　　)



(A)　　(B)　　(C)　　(D)

3. (2018 德阳)如图，四边形 $AOEF$ 是平行四边形，点 B 为 OE 的中点，延长 FO 至点 C，使 $FO=3OC$，连接 AB，AC，BC，则在 $\triangle ABC$ 中，$S_{\triangle ABO}:S_{\triangle AOC}:S_{\triangle BOC}$=(　　)



(A)$6:2:1$　　(B)$3:2:1$

(C)$6:3:2$　　(D)$4:3:2$

4. (2018 遂宁)下列说法正确的是(　　)

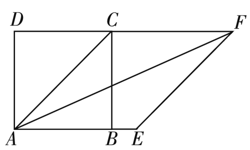
(A)有两条边和一个角对应相等的两个三角形全等

(B)正方形既是轴对称图形又是中心对称图形

(C)矩形的对角线互相垂直平分

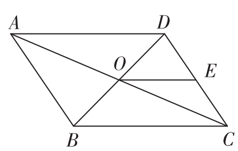
(D)六边形的内角和是 $540°$

5. 如图所示，以正方形 $ABCD$ 的对角线 AC 为一边作菱形 $AEFC$，则 $\angle FAE$ 的大小是(　　)



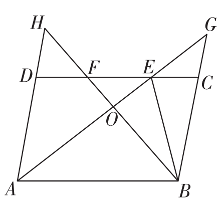
(A)$30°$　　(B)$45°$　　(C)$22.5°$　　(D)$60°$

6. (2018 海南)如图，▱$ABCD$ 的周长为 36，对角线 AC，BD 相交于点 O，点 E 是 CD 的中点，$BD=12$，则 $\triangle DOE$ 的周长为(　　)



(A)15　　(B)18　　(C)21　　(D)24

7. (2017 威海)如图，在▱$ABCD$ 中，$\angle DAB$ 的平分线交 CD 于点 E，交 BC 的延长线于点 G，$\angle ABC$ 的平分线交 CD 于点 F，交 AD 的延长线于点 H，AG 与 BH 交于点 O，连接 BE. 下列结论错误的是(　　)



(A)$BO=OH$　　(B)$DF=CE$

(C)$DH=CG$　　(D)$AB=AE$

8. 在▱$ABCD$ 中，$AD=8$，AE 平分 $\angle BAD$ 交 BC 于点 E，DF 平分 $\angle ADC$ 交 BC 于点 F，且 $EF=2$，则 AB 的长为(　　)

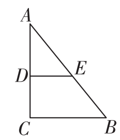
(A)3　　(B)5

(C)2 或 3　　(D)3 或 5

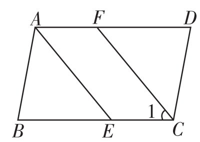
二、填空题

9. (2018 济南)正多边形的一个内角等于 $108°$，则它的边数是________.

10. (2017 广安)如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$BC=6$，$AC=8$，D，E 分别为 AC，AB 的中点，连接 DE，则 $\triangle ADE$ 的面积是________.

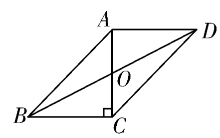


11. 如图所示，在平行四边形 $ABCD$ 中，$\angle B=80°$，AE 平分 $\angle BAD$ 交 BC 于点 E，$DF=BE$，则 $\angle 1$=________.

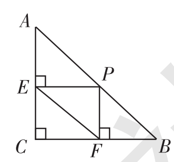


12. 菱形的周长为 20 cm，两个相邻的内角的度数之比为 $1:2$，则较长的对角线的长度是________cm.

13. 如图，在▱$ABCD$ 中，$AB=2\sqrt{13}$ cm，$AD=4$ cm，$AC\perp BC$，则 $\triangle DBC$ 比 $\triangle ABC$ 的周长长______ cm.



14. 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=3$，$BC=4$，P 为 AB 边上不与 A，B 重合的一动点，过点 P 分别作 $PE\perp AC$ 于点 E，$PF\perp BC$ 于点 F，则线段 EF 的最小值是________.



三、解答题

15. 已知 n 边形的内角和 $\theta=(n-2)\cdot 180°$.

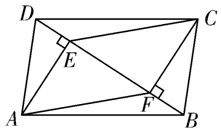
(1)甲同学说，θ 能取 $360°$；而乙同学说，θ 也能取 $630°$. 甲、乙的说法对吗？若对，求出边数 n；若不对，说明理由.

(2)若 n 边形变为 $(n+x)$ 边形，发现内角和增加了 $360°$，用列方程的方法确定 x 的值.

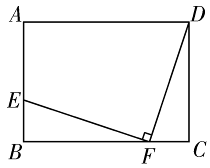
16. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AD=BC$，$BE=DF$，$AE\perp BD$，$CF\perp BD$，垂足分别为 E，F.

(1)求证：$\triangle ADE\cong\triangle CBF$；

(2)若 AC 与 BD 相交于点 O，求证：$AO=CO$.



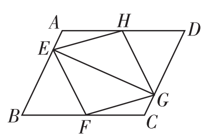
17. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，点 E 在边 AB 上，点 F 在边 BC 上，且 $BE=CF$，$EF\perp DF$，求证：$BF=CD$.



18. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，点 E，F，G，H 分别在边 AB，BC，CD，DA 上，$AE=CG$，$AH=CF$，且 EG 平分$\angle HEF$. 求证：

(1)$\triangle AEH\cong\triangle CGF$；

(2)四边形 $EFGH$ 是菱形.



19. P_n 表示 n 边形的对角线的交点个数(指落在其内部的交点)，如果这些交点都不重合，那么 P_n 与 n 的关系式是：$P_n=\dfrac{n(n-1)}{24}\cdot(n^2-an+b)$(其中 a，b 是常数，$n\geqslant 4$).

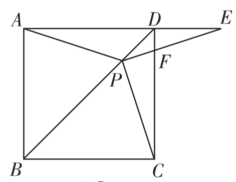
(1)通过画图，可得

n 边形为四边形时，$P_4=$________(填数字)；

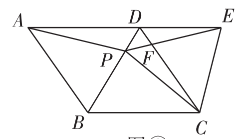
n 边形为五边形时，$P_5=$________(填数字).

(2)请根据四边形和五边形对角线交点的个数，结合关系式，求 a，b 的值.

20. 如图①，在正方形 $ABCD$ 中，P 是对角线 BD 上的一点，点 E 在 AD 的延长线上，且 $PA=PE$，PE 交 CD 于点 F.



图①



图②

(1)证明：$PC=PE$；

(2)求$\angle CPE$ 的度数；

(3)如图②，把正方形 $ABCD$ 改为菱形 $ABCD$，其他条件不变，当$\angle ABC=120^\circ$时，连接 CE，试探究线段 AP 与线段 CE 的数量关系，并说明理由.

参考答案

（课前预习、课堂探究、课堂达标、课后提升）

第 1 章　直角三角形

1.1　直角三角形的性质和判定（Ⅰ）

课前预习

1.（1）互余　（2）一半

2.（1）互余　（2）中线　（3）斜边　（4）30°

课堂探究

【例1】思路导引：1. A　55°　2. 35°　3. $CA'D$　B　20°　**C**

变式训练 1-1：**D**

变式训练 1-2：**C**

【例2】思路导引：1. DE　2. 垂直平分　DE

证明：$\because AD$ 是高，CE 是中线，

$\therefore DE$ 是 $Rt\triangle ABD$ 斜边 AB 上的中线，

$\therefore DE=\frac{1}{2}AB=BE$.

$\because$点 G 是 CE 的中点，$DG\perp CE$，

$\therefore DG$ 是 CE 的垂直平分线，

$\therefore DC=DE$.

$\therefore DC=BE$.

变式训练 2-1：**C**

变式训练 2-2：24

【例3】思路导引：1. 90°　30°　2. 30°　BD　2　2

（1）**解**：$\because AD\perp AC$，$\therefore\angle DAC=90^{\circ}$.

$\because\angle BAC=120^{\circ}$，

$\therefore\angle BAD=\angle BAC-\angle DAC=120^{\circ}-90^{\circ}=30^{\circ}$.

（2）**证明**：$\because AB=AC$，$\angle BAC=120^{\circ}$，

$\therefore\angle B=\angle C=30^{\circ}$.

$\because\angle DAC=90^{\circ}$，$\therefore DC=2AD$.

$\because\angle BAD=\angle B=30^{\circ}$，

$\therefore AD=BD$，$\therefore DC=2BD$.

变式训练 3-1：**B**

变式训练 3-2：**B**

课堂达标

1. **B**　2. **B**　3. 35　4. 40

5. **解**：（1）$\because\angle C=90^{\circ}$，$AC=BC$，$\therefore\angle CAB=\angle B=45^{\circ}$.

$\because\angle BAD=15^{\circ}$，

$\therefore\angle CAD=\angle CAB-\angle BAD=30^{\circ}$.

（2）在$\triangle ACD$ 中，$\angle C=90^{\circ}$，$\angle CAD=30^{\circ}$，

$\therefore CD=\frac{1}{2}AD$，$\therefore AD=2CD$.

$\because AC=BC=5$，$BD=2$，

$\therefore CD=BC-BD=5-2=3$，

$\therefore AD=2CD=2\times3=6$.

6. **证明**：$\because$在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90^{\circ}$，

$\therefore\angle B+\angle C=90^{\circ}$，

又$\angle BAD=2\angle C$，

$\therefore\angle BAD+\angle DAC=2\angle C+\angle DAC=\angle B+\angle C$，

即$\angle B=\angle C+\angle DAC$.

$\because\angle ADB=\angle C+\angle DAC$，

$\therefore\angle B=\angle ADB$.

课后提升

【基础达标】

1. **B**　2. **C**　3. **A**　4. **B**　5. **D**　6. 3　7. ①②③　8. 30°

9. **解**：$\angle 1=\angle B$，$\angle 2=\angle A$.

理由如下：$\because\angle ACB=90^{\circ}$，$CD$ 是 AB 边上的高，

$\therefore\angle 1+\angle 2=90^{\circ}$，$\angle 1+\angle A=90^{\circ}$，$\angle 2+\angle B=90^{\circ}$，

$\therefore\angle 1=\angle B$，$\angle 2=\angle A$.

10. **解**：（1）$\because\angle C=90^{\circ}$，$\therefore\angle ABC+\angle BAC=90^{\circ}$，

$\therefore\frac{1}{2}(\angle BAC+\angle ABC)=45^{\circ}$.

$\because BD$ 平分$\angle ABC$，AP 平分$\angle BAC$，

$$\therefore\angle BAP+\angle ABP=\frac{1}{2}\angle BAC+\frac{1}{2}\angle ABC=\frac{1}{2}(\angle BAC+\angle ABC)=45^{\circ}.$$

$\therefore\angle APD=\angle BAP+\angle ABP=45^{\circ}$.

（2）$\because\angle BDC=58^{\circ}$，$\therefore\angle DBC=90^{\circ}-\angle BDC=32^{\circ}$.

$\because BD$ 平分$\angle ABC$，$\therefore\angle ABD=\angle DBC=32^{\circ}$，

$\therefore\angle BAP=\angle APD-\angle ABD=45^{\circ}-32^{\circ}=13^{\circ}$.

【能力提升】

11. 30°或 150°或 90°

12. **解**：（1）$\angle ACD=\angle B$. 理由如下：

$\because$在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^{\circ}$，$CD\perp AB$，

$\therefore\angle ACD+\angle DCB=\angle B+\angle DCB=90^{\circ}$，

$\therefore\angle ACD=\angle B$.

（2）$\triangle ADE$ 是直角三角形. 理由如下：

$\because$在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^{\circ}$，

$\therefore\angle A+\angle B=90^{\circ}$.

$\because\angle B=\angle ADE$，$\therefore\angle A+\angle ADE=90^{\circ}$，

$\therefore\angle AED=90^{\circ}$，$\therefore\triangle ADE$ 是直角三角形.

（3）$\angle A+\angle D=90^{\circ}$. 理由如下：

$\because AB\perp BD$，$\therefore\angle ABD=90^{\circ}$，

$\therefore\angle ABC+\angle DBE=90^{\circ}$.

$\because\angle C=90^{\circ}$，$\therefore\angle ABC+\angle A=90^{\circ}$，

$\therefore\angle A=\angle DBE$.

$\because\angle E=90^{\circ}$，$\therefore\angle DBE+\angle D=90^{\circ}$，

$\therefore\angle A+\angle D=90^{\circ}$.

1.2　直角三角形的性质和判定（Ⅱ）

第 1 课时　勾股定理

课前预习

b^2　c^2

课堂探究

【例1】思路导引：1. $\angle DCE$　2. 三角形 ACE 的面积

证明：（1）$\because\triangle ABC\cong\triangle CDE$，

$\therefore\angle BAC=\angle DCE$，

$\therefore\angle ACB+\angle DCE=\angle ACB+\angle BAC=90^{\circ}$.

$\because B$，C，D 三点共线，

$$\therefore\angle ACE=180^{\circ}-(\angle ACB+\angle DCE)=180^{\circ}-90^{\circ}=90^{\circ}.$$

（2）梯形 $ABDE$ 的面积为

$\frac{1}{2}(AB+ED)\cdot BD=\frac{1}{2}(a+b)(a+b)=\frac{1}{2}(a+b)^2$；

另一方面，梯形 $ABDE$ 可分成三个直角三角形，其面积又可以表示成$\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}c^2$.

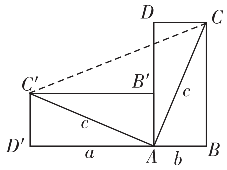
$\therefore \frac{1}{2}(a+b)^2=\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}c^2$,

整理,得 $a^2+b^2=c^2$.

变式训练 1－1:**D**

变式训练 1－2:**证明**:如图,连接 CC',则由题意知,梯形 $BCC'D'$ 是直角梯形,$\triangle ACC'$ 是等腰直角三角形.

梯形 $BCC'D'$ 的面积有以下两种求法:



①$S_{梯形BCC'D'}=\frac{1}{2}(a+b)(a+b)$

$=\frac{1}{2}(a+b)^2$

$=\frac{1}{2}(a^2+2ab+b^2)$;

②$S_{梯形BCC'D'}=S_{\triangle AC'D'}+S_{\triangle ACC'}+S_{\triangle ABC}$

$=\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}c^2+\frac{1}{2}ab$

$=ab+\frac{1}{2}c^2$.

$\therefore \frac{1}{2}(a^2+2ab+b^2)=ab+\frac{1}{2}c^2$,

$\therefore a^2+b^2=c^2$.

【例2】思路导引:1.5　2.3　90°

1.5

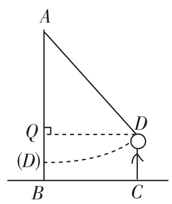
变式训练 2－1:**B**

变式训练 2－2:2.9

课堂达标

1.**D**　2.**C**　3.9 或 1

4.**解**:如图,作 $DQ\perp AB$ 于点 Q,设 $AD=x$ m,



则 $AQ=x+1-1.6=(x-0.6)$m.

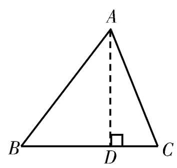
$QD=0.6\times7=4.2$(m),

由勾股定理得$(x-0.6)^2+4.2^2=x^2$,

解得 $x=15$.

$\therefore$旗杆 AB 的长为 $15+1=16$(m).

5.**解**:如图,在$\triangle ABC$ 中,



$AB=15,BC=14,AC=13$.

设 $BD=x$,$\therefore CD=14-x$.

由勾股定理得:

$AD^2=AB^2-BD^2=15^2-x^2$,

$AD^2=AC^2-CD^2=13^2-(14-x)^2$,

$\therefore 15^2-x^2=13^2-(14-x)^2$,解得 $x=9$.

$\therefore AD=12$.

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{1}{2}\times14\times12=84$.

课后提升

【基础达标】

1.**B**　2.**A**　3.**B**　4.**D**　5.**C**

6.6　7.$\sqrt{3}-1$　8.$>$

9.**解**:甲艇半小时行驶 $40\times\frac{1}{2}=20$(海里),乙艇半小时行驶 $30\times\frac{1}{2}=15$(海里),根据题意可得$\angle MBP=90°$,

$\therefore PM=\sqrt{20^2+15^2}=25$(海里).

答:M 岛与 P 岛之间的距离是 25 海里.

10.(1)**证明**:由题意得,$AC=BC$,$\angle ACB=90°$,$AD\perp DE$,$BE\perp DE$,

$\therefore \angle ADC=\angle CEB=90°$,

$\therefore \angle ACD+\angle BCE=90°$,$\angle ACD+\angle DAC=90°$,

$\therefore \angle BCE=\angle DAC$.

在$\triangle ADC$ 和$\triangle CEB$ 中,$\begin{cases}\angle ADC=\angle CEB,\\ \angle DAC=\angle ECB,\\ AC=CB,\end{cases}$

$\therefore \triangle ADC\cong\triangle CEB$(AAS).

(2)**解**:设砌墙砖块的厚度为 a cm.

由图得:$AD=4a$ cm,$BE=3a$ cm.

由(1)得$\triangle ADC\cong\triangle CEB$,

$\therefore CD=BE=3a$ cm.

在 Rt$\triangle ACD$ 中,$AD^2+CD^2=AC^2$,

$\therefore (4a)^2+(3a)^2=25^2$,

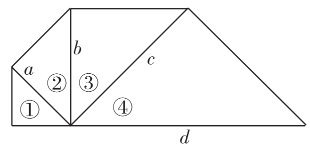
解得 $a=5$(负值舍去).

答:砌墙砖块的厚度为 5 cm.

【能力提升】

11.20

12.**解**:(1)如图,根据勾股定理,



②的直角边为

$a=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$;

③的直角边为

$b=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=2$;

④的直角边为 $c=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$;

$\therefore$第 4 个直角三角形的直角边长为 $2\sqrt{2}$.

(2)根据(1)猜想第 n 个直角三角形的直角边长为$(\sqrt{2})^{n-1}$.

第 2 课时　勾股定理的逆定理

课前预习

直角三角形

课堂探究

【例1】思路导引:c^2　b^2

(1)**证明**:$\because a=m-n(m>n>0)$,$b=m+n$,$c=2\sqrt{mn}$,

$\therefore a^2+c^2$

$=(m-n)^2+(2\sqrt{mn})^2$

$=m^2-2mn+n^2+4mn$

$=m^2+2mn+n^2$

$=(m+n)^2$

$=b^2$,

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形.

(2)**解**:(答案不唯一)当 $m=4$,$n=1$ 时,三角形的三边长为 3,4,5;当 $m=9$,$n=4$ 时,三角形的三边长为 5,12,13.

变式训练 1－1:**A**

变式训练 1－2:(1)**解**:$\because BC\perp BD$,$\therefore \angle CBD=90°$.

在 Rt$\triangle BCD$ 中,$BC=12$,$CD=13$,

根据勾股定理,得 $BD=\sqrt{CD^2-BC^2}=5$.

(2)**证明**:$\because AB=4$,$AD=3$,$\therefore AB^2+AD^2=25$.

又 $BD^2=25$,$\therefore AB^2+AD^2=BD^2$,

$\therefore \angle A=90°$,$\therefore AB\perp AD$.

【例2】思路导引:1.＝　直角三角形

2.＝　直角三角形

解:$\because AD=12$,$AB=9$,$DC=17$,$BC=8$,$BD=15$,

$\therefore AB^2+AD^2=BD^2$,$BD^2+BC^2=DC^2$,

$\therefore \triangle ABD$,$\triangle BDC$ 是直角三角形.

$\therefore \angle A=90°$,$\angle DBC=90°$.

故这个零件符合要求.

变式训练 2－1:6.5

变式训练 2－2:**C**

课堂达标

1.**D**　2.**C**　3.**A**　4.2.5

5.**解**:$\because AD$ 是 BC 边上的中线,

$\therefore BD=CD=5$ cm.

又$\because AB=13$ cm,$AD=12$ cm,

$\therefore AD^2+BD^2=AB^2$,$\therefore AD\perp BC$,

$\therefore \triangle ABC$ 的面积为$\frac{12\times10}{2}=60(\text{cm}^2)$.

课后提升

【基础达标】

1. **D** 2. **C** 3. **D** 4. **C**

5. 直角 6. 5 7. $2\sqrt{5}$ 8. 北偏西 60°或南偏东 60°

9. **解**：由题意得

$OB=12\times1.5=18$(海里)，

$OA=16\times1.5=24$(海里)，

$AB=30$ 海里.

$\because 18^2+24^2=30^2$，即 $OB^2+OA^2=AB^2$，

$\therefore \angle AOB=90°$.

$\because \angle DOA=40°$，$\therefore \angle BOD=50°$.

∴另一艘舰艇的航行方向是北偏西 50°.

10. **解**：$\because AC=\sqrt{AD^2-CD^2}=\sqrt{13^2-12^2}=5$，

$\therefore AB^2+BC^2=3^2+4^2=5^2=AC^2$，

$\therefore \angle B=90°$，

$\therefore S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD}$

$=\frac{1}{2}\times3\times4+\frac{1}{2}\times5\times12$

$=6+30=36$.

【能力提升】

11. **解**：$\because S_{\triangle ABD}=60$，$DH=12$，$DH\perp AB$，

$\therefore \frac{1}{2}AB\times12=60$，$\therefore AB=10$.

$\because AC=6$，$BC=8$，$\therefore AB^2=AC^2+BC^2$，

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形，且 $\angle C=90°$.

12. **解**：根据阅读材料，当 $n=1$ 时，

$$\begin{cases} a=\frac{1}{2}(m^2-1), & ① \\ b=m, & ② \\ c=\frac{1}{2}(m^2+1). & ③ \end{cases}$$

∵直角三角形有一边的长为 5，

∴分以下三种情况讨论：

(1)当 $a=5$ 时，$\frac{1}{2}(m^2-1)=5$，

解得 $m=\pm\sqrt{11}$(不合题意，舍去)；

(2)当 $b=5$ 时，$m=5$，

代入①③，得 $a=12$，$c=13$；

(3)当 $c=5$ 时，$\frac{1}{2}(m^2+1)=5$，

解得 $m=\pm3$(负值舍去)，

$\therefore m=3$. $\therefore a=4$，$b=3$.

综上所述，直角三角形的另外两条边的长分别为 12，13 或 3，4.

1.3 直角三角形全等的判定

课前预习

HL

课堂探究

【例1】**思路导引**：1. $Rt\triangle BED$ 2. $\angle CAB$ 90°

解：$\because AB\perp BE$，$DE\perp BE$，

$\therefore \angle ABC=\angle BED=90°$.

在 $Rt\triangle ABC$ 和 $Rt\triangle BED$ 中，

$$\begin{cases} AC=BD, \\ AB=BE, \end{cases}$$

$\therefore Rt\triangle ABC\cong Rt\triangle BED(HL)$，

$\therefore \angle CAB=\angle DBE$.

$\because \angle ABC=90°$，

$\therefore \angle CAB+\angle ACB=90°$.

$\therefore \angle DBE+\angle ACB=90°$.

∴在 $\triangle BFC$ 中，$\angle BFC=90°$.

变式训练 1-1：**D**

变式训练 1-2：**证明**：$\because BE=CF$，

$\therefore BE+EF=CF+EF$，即 $BF=CE$.

$\because AE\perp BC$，$DF\perp BC$，$\therefore \angle AEC=\angle DFB=90°$.

在 $Rt\triangle AEC$ 和 $Rt\triangle DFB$ 中，

$$\begin{cases} AC=DB, \\ CE=BF, \end{cases}$$

$\therefore Rt\triangle AEC\cong Rt\triangle DFB(HL)$，

$\therefore \angle ACE=\angle DBF$，

$\therefore AC/\!/BD$.

【例2】**思路导引**：1. AAS FD 2. HL FC

解：$BE=FC$. 理由如下：

$\because AD$ 为 $\angle BAC$ 的平分线，$\therefore \angle BAD=\angle CAD$.

$\because DF\perp AC$，$\therefore \angle AFD=90°$.

又 $\angle B=90°$，$\therefore \angle B=\angle AFD$.

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle AFD$ 中，$\begin{cases} \angle BAD=\angle FAD, \\ \angle B=\angle AFD, \\ AD=AD, \end{cases}$

$\therefore \triangle ABD\cong\triangle AFD(AAS)$，

$\therefore BD=FD$.

在 $Rt\triangle BDE$ 和 $Rt\triangle FDC$ 中，

$$\begin{cases} DE=DC, \\ BD=FD. \end{cases}$$

$\therefore Rt\triangle BDE\cong Rt\triangle FDC(HL)$，

$\therefore BE=FC$.

变式训练 2-1：**D**

变式训练 2-2：**证明**：$\because AD/\!/BC$，

$\therefore \angle ADB=\angle EBC$.

$\because \angle A=90°$，$CE\perp BD$，

$\therefore \angle A=\angle BEC=90°$.

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ECB$ 中，

$$\begin{cases} \angle ADB=\angle EBC, \\ \angle A=\angle BEC, \\ BD=CB, \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABD\cong\triangle ECB$，

$\therefore AD=EB$.

课堂达标

1. **C** 2. **B** 3. **D** 4. $AC=DE$

5. **证明**：在 $Rt\triangle ABC$ 中，

$\because \angle ABC=90°$，$\therefore \angle ABE+\angle DBE=90°$.

$\because BE\perp AC$，$\therefore \angle ABE+\angle A=90°$.

$\therefore \angle A=\angle DBE$.

$\because DE$ 是 BD 的垂线，$\therefore \angle D=90°$.

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle BDE$ 中，

$\because \angle A=\angle DBE$，$AB=BD$，$\angle ABC=\angle D$，

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle BDE(ASA)$.

6. (1)**证明**：$\because \angle A=\angle D=90°$，

∴在 $Rt\triangle ABC$ 和 $Rt\triangle DCB$ 中，

$$\begin{cases} AC=DB, \\ BC=CB, \end{cases}$$

$\therefore Rt\triangle ABC\cong Rt\triangle DCB(HL)$.

(2)**解**：$\triangle OBC$ 是等腰三角形.

证明：$\because Rt\triangle ABC\cong Rt\triangle DCB$，

$\therefore \angle ACB=\angle DBC$，

$\therefore OB=OC$，

$\therefore \triangle OBC$ 是等腰三角形.

课后提升

【基础达标】

1. **A** 2. **D** 3. **B** 4. **C** 5. **B**

6. 7 7. 10 8. 4

9. (1)**证明**：$\because \angle ABC=90°$，

$\therefore\triangle ABE$ 和 $\triangle CBF$ 均为直角三角形.

在 $Rt\triangle ABE$ 和 $Rt\triangle CBF$ 中，$\begin{cases}AE=CF,\\AB=CB,\end{cases}$

$\therefore Rt\triangle ABE\cong Rt\triangle CBF(HL)$.

(2)**解**：$\because Rt\triangle ABE\cong Rt\triangle CBF$，

$\therefore\angle BAE=\angle BCF$.

又$\because\angle CAE=30^\circ$，$\angle BAC=45^\circ$，

$\therefore\angle BAE=15^\circ$，$\therefore\angle BCF=15^\circ$.

又$\angle ABC=90^\circ$，$AB=CB$，

$\therefore\angle ACB=45^\circ$，

$\therefore\angle ACF=45^\circ+15^\circ=60^\circ$.

10. **证明**：$\because DE\perp AC$，$BF\perp AC$，

$\therefore\angle DEG=\angle BFG=90^\circ$.

$\because AE=CF$，$\therefore AE+EF=CF+EF$，即 $AF=CE$.

在 $Rt\triangle ABF$ 和 $Rt\triangle CDE$ 中，$\begin{cases}AB=CD,\\AF=CE,\end{cases}$

$\therefore Rt\triangle ABF\cong Rt\triangle CDE(HL)$，

$\therefore BF=DE$.

在 $\triangle BFG$ 和 $\triangle DEG$ 中，

$\begin{cases}\angle BFG=\angle DEG,\\\angle BGF=\angle DGE,\\BF=DE,\end{cases}$

$\therefore\triangle BFG\cong\triangle DEG(AAS)$，

$\therefore FG=EG$，即 BD 平分 EF.

【能力提升】

11. **A**

12. (1)**证明**：$\because BD\perp DE$，$CE\perp DE$，

$\therefore\angle ADB=\angle CEA=90^\circ$.

在 $Rt\triangle ABD$ 和 $Rt\triangle CAE$ 中，$\begin{cases}AB=CA,\\AD=CE,\end{cases}$

$\therefore Rt\triangle ABD\cong Rt\triangle CAE(HL)$，

$\therefore\angle DAB=\angle ECA$.

$\because\angle EAC+\angle ECA=90^\circ$，

$\therefore\angle DAB+\angle EAC=90^\circ$，

$\therefore\angle BAC=90^\circ$，$\therefore AB\perp AC$.

(2)**解**：$AB\perp AC$. 证明如下：

$\because BD\perp DE$，$CE\perp DE$，

$\therefore\angle ADB=\angle CEA=90^\circ$.

在 $Rt\triangle ABD$ 和 $Rt\triangle CAE$ 中，$\begin{cases}AB=CA,\\AD=CE,\end{cases}$

$\therefore Rt\triangle ABD\cong Rt\triangle CAE(HL)$，

$\therefore\angle BAD=\angle ACE$.

$\because\angle EAC+\angle ACE=90^\circ$，

$\therefore\angle BAD+\angle EAC=90^\circ$，

$\therefore\angle BAC=90^\circ$，$\therefore AB\perp AC$.

1.4　角平分线的性质

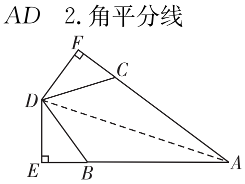
课前预习

(1)相等　(2)平分线

课堂探究

【例1】思路导引：1. $\triangle ABD$　$\triangle ACD$　AD　2. 角平分线

证明：如图，连接 AD.



在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle ABD$ 中，

$\begin{cases}AC=AB,\\CD=BD,\\AD=AD,\end{cases}$

$\therefore\triangle ACD\cong\triangle ABD(SSS)$，

$\therefore\angle FAD=\angle EAD$，即 AD 平分 $\angle EAF$.

$\because DE\perp AE$，$DF\perp AF$，

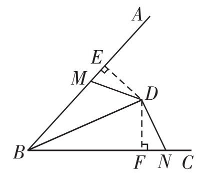
$\therefore DE=DF$.

变式训练 1－1：**D**

变式训练 1－2：**B**

【例2】思路导引：1. 相等　2. $\angle DNF$　DFN

证明：如图，作 $DE\perp AB$ 于点 E，$DF\perp BC$ 于点 F，



$\therefore\angle DEM=\angle DFN=90^\circ$.

$\because\angle BMD+\angle BND=180^\circ$，

$\angle BMD+\angle DME=180^\circ$，

$\therefore\angle DME=\angle BND$，

即 $\angle DME=\angle DNF$.

在 $\triangle DEM$ 和 $\triangle DFN$ 中，$\begin{cases}\angle DEM=\angle DFN,\\\angle DME=\angle DNF,\\DM=DN,\end{cases}$

$\therefore\triangle DEM\cong\triangle DFN(AAS)$，

$\therefore DE=DF$，

$\therefore BD$ 平分 $\angle ABC$.

变式训练 2－1：**B**

变式训练 2－2：**证明**：在 $\triangle BDF$ 和 $\triangle CDE$ 中，

$\begin{cases}\angle BFD=\angle CED=90^\circ,\\\angle BDF=\angle CDE,\\BD=CD,\end{cases}$

$\therefore\triangle BDF\cong\triangle CDE(AAS)$，

$\therefore DF=DE$.

又$\because DF\perp AB$，$DE\perp AC$，

$\therefore$点 D 在 $\angle BAC$ 的平分线上，即 AD 平分 $\angle BAC$.

课堂达标

1. **B**　2. **D**　3. 3　4. 1

5. **证明**：$\because AE$，OB，OC 分别平分 $\angle BAC$，$\angle ABC$，$\angle ACB$，

$\therefore\angle 1=\frac{1}{2}\angle BAC+\frac{1}{2}\angle ABC$.

$\because OD\perp BC$，

$$\begin{aligned}\therefore\angle 2&=90^\circ-\frac{1}{2}\angle ACB\\&=90^\circ-\frac{1}{2}(180^\circ-\angle BAC-\angle ABC)\\&=90^\circ-90^\circ+\frac{1}{2}\angle BAC+\frac{1}{2}\angle ABC\\&=\frac{1}{2}\angle BAC+\frac{1}{2}\angle ABC,\end{aligned}$$

$\therefore\angle 1=\angle 2$.

6. **解**：(1)$\because AD$ 平分 $\angle CAB$，$DE\perp AB$，$\angle C=90^\circ$，

$\therefore DE=CD=3$.

(2)在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$AC=6$，$BC=8$，

$\therefore AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$.

$\therefore S_{\triangle ADB}=\frac{1}{2}AB\cdot DE=\frac{1}{2}\times10\times3=15$.

课后提升

【基础达标】

1. **C**　2. **B**　3. **C**　4. **C**　5. **B**　6. 2　7. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$　8. 96

9. **证明**：$\because OC$ 平分 $\angle MON$，$CA\perp OM$，$CB\perp ON$，

$\therefore CA=CB$，$\angle EAC=\angle DBC=90^\circ$.

在 $\triangle ACE$ 和 $\triangle BCD$ 中，$\begin{cases}\angle CAE=\angle CBD,\\CA=CB,\\\angle ACE=\angle BCD,\end{cases}$

$\therefore\triangle ACE\cong\triangle BCD(ASA)$，

$\therefore CE=CD$.

10. **证明**：$\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，$DE\perp AB$，$DF\perp AC$，

$\therefore DE=DF$，

$\therefore$点 D 在线段 EF 的垂直平分线上.

在 $Rt\triangle ADE$ 和 $Rt\triangle ADF$ 中，$\begin{cases}AD=AD,\\DE=DF,\end{cases}$

∴Rt△ADE≌Rt△ADF(HL),
∴$AE=AF$.
∴点 A 在线段 EF 的垂直平分线上,
∴AD 垂直平分 EF.

【能力提升】

11. **B**

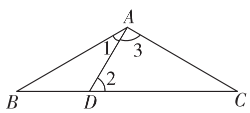
12. (1)**证明:**∵AD 平分∠BAC,$DE\perp AB$ 于点 E,
$DF\perp AC$ 于点 F,
∴$DE=DF$,∠DEB=∠$DFC=90°$.
在 Rt△DEB 和 Rt△DFC 中,
$\begin{cases}BD=CD,\\DE=DF,\end{cases}$
∴△DEB≌△DFC,∴∠B=∠C,
∴$AB=AC$.
(2)**解:**∵$AB=AC$,$BD=CD$,∴$AD\perp BC$.
在 Rt△ADC 中,
∵∠$ADC=90°$,$AD=2\sqrt{3}$,∠$DAC=30°$,
∴$AC=2CD$,设 $CD=a$,则 $AC=2a$.
∵$AC^2=AD^2+CD^2$,∴$4a^2=(2\sqrt{3})^2+a^2$,
∴$a=2$(负值舍去),∴$AC=2a=4$.

第 1 章　基础巩固与训练

1. **A**　2. **C**　3. **C**　4. **D**　5. **D**　6. **C**　7. **C**　8. **C**

9. $12°$　10. 8　11. 4　12. 3　13. $2\sqrt{5}$　14. $(\sqrt{2})^n$

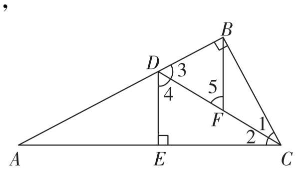
15. **证明:**如图,由题意得,∠1=30°,∠2=60°,



∴∠B=∠2−∠1=30°=∠1,
∴$AD=BD$.
∵$AB=AC$,∠$B=30°$,
∴∠C=∠$B=30°$,
∴∠3=180°−∠2−∠$C=90°$,
∴在 Rt△ADC 中,$CD=2AD$.
∵$AD=BD$,∴$CD=2BD$.

16. (1)**证明:**∵△ACB 与△ECD 都是等腰直角三角形,
∴$CE=CD$,$AC=BC$,∠ACB=∠$ECD=90°$,
∠B=∠$BAC=45°$,
∴∠ACE=∠$BCD=90°$−∠ACD.
在△ACE 和△BCD 中,
$\begin{cases}CE=CD,\\ \angle ACE=\angle BCD,\\ AC=BC,\end{cases}$
∴△ACE≌△BCD.
(2)**解:**∵△ACE≌△BCD,
∴$AE=BD$,∠EAC=∠$B=45°$,
∴∠$EAD=45°+45°=90°$,$AE=12$.
在 Rt△EAD 中,∠$EAD=90°$,$DE=13$,$AE=12$,
由勾股定理得:$AD=5$,
∴$AB=BD+AD=12+5=17$.

17. **证明:**如图,∵CD 平分∠ACB,



∴∠1=∠2.
∵$DE\perp AC$,∠$ABC=90°$,
∴$DE=BD$,∠3=∠4.
∵BF//DE,
∴∠4=∠5,
∴∠3=∠5,
∴$BD=BF$,
∴$DE=BF$.

18. **解:**∵∠$ABD=120°$,∠$D=30°$,
∴∠$AED=120°-30°=90°$.
在 Rt△BDE 中,$BD=520$ m,∠$D=30°$,
∴$BE=\frac{1}{2}BD=260$ m,
∴$DE=\sqrt{BD^2-BE^2}=260\sqrt{3}\approx450$ m.
答:另一边开挖点 E 离 D 的距离为 450 m 时,正好使 A,C,E 三点在一直线上.

19. **证明:**(1)∵AD 是∠BAC 的平分线,$DE\perp AB$,$DC\perp AC$,
∴$DE=DC$.
在 Rt△DCF 和 Rt△DEB 中,
$\begin{cases}DB=DF,\\DC=DE,\end{cases}$
∴Rt△DCF≌Rt△DEB(HL).
∴$CF=EB$.
(2)由(1)知 $DC=DE$.
在△ADC 与△ADE 中,
$\begin{cases}DC=DE,\\AD=AD,\end{cases}$
∴△ADC≌△ADE(HL),
∴$AC=AE$,
∴$AB=AE+BE=AC+EB=AF+CF+EB=AF+2EB$.

20. **解:**(1)①20°　②120°　60°
(2)①当点 D 在线段 OB 上时,
若∠BAD=∠ABD,则 $x=20°$,
若∠BAD=∠BDA,则 $x=35°$,
若∠ADB=∠ABD,则 $x=50°$.
②当点 D 在射线 BE 上时,因为∠$ABE=110°$,且三角形的内角和为 180°,所以只有∠BAD=∠BDA,此时 $x=125°$.
综上可知,存在这样的 x 的值,使得△ADB 中有两个相等的角,x 的值是 20°或 35°或 50°或 125°.

第 2 章　四边形

2.1　多边形

课前预习

1. (1)首尾顺次　(2)边　角
(3)$(n-3)$　$(n-2)$　$\frac{n(n-3)}{2}$

2. (1)$(n-2)\cdot180°$　360°
(2)稳定　不稳定

课堂探究

【例1】思路导引:1. 540°　108°　2. 36°　72°

变式训练 1-1:**C**

变式训练 1-2:**D**

【例2】思路导引:1. 360°　140°　2. 40°
A

变式训练 2-1:**C**

变式训练 2-2:**C**

课堂达标

1. **B**　2. **A**　3. 12　4. 2 019

5. **解:**设多边形的边数为 n,
根据题意得$(n-2)\times180°+360°=1\ 800°$,
解得 $n=10$.

6. **解:**由题意可得
$90°+(2x+25)°+(3x-15)°+2x°+x°=(5-2)\times180°$,
解得 $x=55$.

课后提升

【基础达标】

1. **A**　2. **D**　3. **C**　4. **A**　5. **D**　6. **C**　7. 425　8. 108°

9. **解:**(1)因为 2 019°不是 180°的整数倍,所以小明说不可能.
(2)依题意有$(x-2)\cdot180°=2\ 019°$,
解得 $x\approx13.2$.
因而多边形的边数是 13,该多边形为十三边形.

(3)十三边形的内角和是$(13-2)\times180^\circ=1\,980^\circ$，
则错加的锐角的度数是$2\,019^\circ-1\,980^\circ=39^\circ$.

10.(1)**证明**：$\because$五边形$ABCDE$是正五边形，
$\therefore AB=BC,\angle ABM=\angle C$.
在$\triangle ABM$和$\triangle BCN$中，$\begin{cases}AB=BC,\\ \angle ABM=\angle C,\\ BM=CN,\end{cases}$
$\therefore\triangle ABM\cong\triangle BCN$(SAS).
(2)**解**：$\because\triangle ABM\cong\triangle BCN$，$\therefore\angle BAM=\angle CBN$.
$\because\angle BAM+\angle ABP=\angle APN$，
$\therefore\angle CBN+\angle ABP=\angle APN$
$=\angle ABC$
$=\dfrac{(5-2)\times180^\circ}{5}$
$=108^\circ$，
即$\angle APN$的度数为108°.

【能力提升】

11.24°

12.**解**：(1)$\because$四边形的内角和为360°，直角三角形中两个锐角和为90°，
$\therefore\angle1+\angle2=360^\circ-(\angle C+\angle B)=360^\circ-90^\circ=270^\circ$.
故选C.
(2)$\angle1+\angle2=360^\circ-(180^\circ-40^\circ)=220^\circ$.
(3)$\angle1+\angle2=180^\circ+\angle A$.
(4)$\because\triangle EFP$是由$\triangle EFA$折叠得到的，
$\therefore\angle AFE=\angle PFE,\angle AEF=\angle PEF$，
$\therefore\angle1=180^\circ-2\angle AFE,\angle2=180^\circ-2\angle AEF$，
$\therefore\angle1+\angle2=360^\circ-2(\angle AFE+\angle AEF)$.
又$\because\angle AFE+\angle AEF=180^\circ-\angle A$，
$\therefore\angle1+\angle2=360^\circ-2(180^\circ-\angle A)=2\angle A$.

2.2　平行四边形

2.2.1　平行四边形的性质

第1课时　平行四边形边、角的性质

课前预习

1.(1)平行　(2)$\square ABCD$　2.(1)相等

课堂探究

【例1】思路导引：1.AB　BC　2.AE　AD
B

变式训练1-1：**D**

变式训练1-2：**证明**：$\because$四边形$ABCD$是平行四边形，
$\therefore AD\parallel BC,AD=BC$，
$\therefore\angle EDA=\angle FBC$.
在$\triangle AED$与$\triangle CFB$中，$\begin{cases}AD=CB,\\ \angle ADE=\angle CBF,\\ BF=DE,\end{cases}$
$\therefore\triangle AED\cong\triangle CFB$(SAS)，
$\therefore AE=CF$.

【例2】思路导引：CD　$\angle D$　$\triangle CDF$
证明：$\because$四边形$ABCD$是平行四边形，
$\therefore AB=CD,\angle B=\angle D$.
在$\triangle ABE$和$\triangle CDF$中，$\begin{cases}AB=CD,\\ \angle B=\angle D,\\ BE=DF,\end{cases}$
$\therefore\triangle ABE\cong\triangle CDF$，
$\therefore AE=CF$.

变式训练2-1：**B**

变式训练2-2：**C**

课堂达标

1.**B**　2.**D**　3.40°　4.20或22

5.**证明**：$\because$四边形$ABCD$是平行四边形，
$\therefore AD\parallel BC,AD=BC$，
$\therefore\angle ADB=\angle CBD$.
$\because BF=DE$，$\therefore BF+BD=DE+BD$，
即$DF=BE$.
在$\triangle ADF$与$\triangle CBE$中，$\begin{cases}AD=CB,\\ \angle ADF=\angle CBE,\\ DF=BE,\end{cases}$
$\therefore\triangle ADF\cong\triangle CBE$(SAS)，
$\therefore\angle AFD=\angle CEB$，$\therefore AF\parallel CE$.

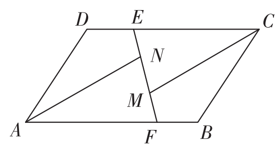
6.**解**：在平行四边形$ABCD$中，$CD\parallel AB,AD\parallel BC$，
$\therefore\angle M=\angle NDC,\angle N=\angle MDA$.
$\because\angle NDC=\angle MDA$，
$\therefore\angle M=\angle N=\angle NDC=\angle MDA$，
$\therefore MB=BN=6,CD=CN,AD=MA$，
$\therefore$四边形$ABCD$的周长$=AB+BC+CD+AD$
$=MA+AB+BC+CN$
$=MB+BN$
$=6+6$
$=12$.

课后提升

【基础达标】

1.**B**　2.**A**　3.**C**　4.**B**　5.**B**　6.80°　7.110°

8.(1)**证明**：$\because$四边形$ABCD$是平行四边形，



$\therefore CD\parallel AB$，
$\therefore\angle AFN=\angle CEM$.
$\because FN=EM,AF=CE$，
$\therefore\triangle AFN\cong\triangle CEM$(SAS).
(2)**解**：$\because\triangle AFN\cong\triangle CEM$，
$\therefore\angle NAF=\angle MCE$.
$\because\angle CMF=\angle CEM+\angle MCE$，
$\therefore$即$\angle MCE=107^\circ-72^\circ=35^\circ$，
$\therefore\angle NAF=35^\circ$.

【能力提升】

9.6

10.**证明**：(1)$\because$四边形$ABCD$是平行四边形，
$\therefore AB\parallel CD$，$\therefore\angle EBG=\angle FDH$.
$\because EH\parallel FG$，$\therefore\angle BFG=\angle DEH$.
$\because BE=DF$，$\therefore BF=DE$.
在$\triangle BFG$和$\triangle DEH$中，$\begin{cases}\angle FBG=\angle EDH,\\ BF=DE,\\ \angle BFG=\angle DEH,\end{cases}$
$\therefore\triangle BFG\cong\triangle DEH$(ASA).
(2)由(1)得$\triangle BFG\cong\triangle DEH$，$\therefore BG=DH$.
$\because AB\parallel CD$，$\therefore\angle EBG=\angle FDH$.
在$\triangle GBE$和$\triangle HDF$中，$\begin{cases}BG=DH,\\ \angle EBG=\angle FDH,\\ BE=DF,\end{cases}$
$\therefore\triangle GBE\cong\triangle HDF$(SAS)，
$\therefore GE=HF$.

第2课时　平行四边形对角线的性质

课前预习

(1)互相平分

课堂探究

【例1】思路导引：1.OC　$\angle FCO$　$\angle CFO$
2.$\angle AOE=\angle COF$

证明: 在▱$ABCD$ 中,$AB/\!/CD$,$AO=CO$,

$\therefore \angle EAO=\angle FCO$,$\angle AEO=\angle CFO$.

$\therefore \triangle AOE\cong\triangle COF$(AAS).

变式训练 1-1:14

变式训练 1-2:**解:** $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,$AC=2$,$BD=4$,

$\therefore AO=\frac{1}{2}AC=1$,$BO=\frac{1}{2}BD=2$.

$\because AB=\sqrt{3}$,

$\therefore AO^2+AB^2=BO^2$,

$\therefore \angle BAO=90°$.

在 Rt$\triangle ABC$ 中,$BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{7}$.

$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AE=\frac{1}{2}AB\cdot AC$,

$\therefore AE=\frac{AB\cdot AC}{BC}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{21}}{7}$.

【例2】思路导引: 1. 垂直平分线　AE　2. AB

解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形,

$\therefore OA=OC$,$AD=BC$.

又 $\because OE\perp AC$,$\therefore AE=CE$.

$\therefore \triangle CBE$ 的周长 $=AB+BC$.

在 Rt$\triangle AOD$ 中,$OD=\frac{1}{2}BD=3$ cm,

$\therefore AD=\sqrt{OA^2-OD^2}=4$ cm.

$\therefore BC=AD=4$ cm.

在 Rt$\triangle ABD$ 中,$AB=\sqrt{AD^2+BD^2}=2\sqrt{13}$ cm.

$\therefore \triangle CBE$ 的周长为 $(4+2\sqrt{13})$ cm.

变式训练 2-1:16

变式训练 2-2:**证明:** $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore OA=OC$,$OB=OD$.

$\because AE=CF$,$\therefore OE=OF$.

在 $\triangle BOE$ 和 $\triangle DOF$ 中,$\begin{cases}OB=OD,\\ \angle BOE=\angle DOF,\\ OE=OF,\end{cases}$

$\therefore \triangle BOE\cong\triangle DOF$(SAS).

课堂达标

1. **C**　2. **B**　3. **B**　4. 5

5. **证明:** $\because \triangle AB'C$ 是由 $\triangle ABC$ 沿 AC 对折得到的,

$\therefore \angle BAC=\angle B'AC$.

$\because$ 在▱$ABCD$ 中,$AB/\!/CD$,

$\therefore \angle BAC=\angle DCA$,

$\therefore \angle DCA=\angle B'AC$,

$\therefore OA=OC$.

6. **证明:** $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AB/\!/CD$,$AB=CD$,$OA=OC$.

$\because BE=DF$,

$\therefore AB+BE=CD+DF$,即 $AE=CF$.

$\because AB/\!/CD$,

$\therefore \angle OAE=\angle OCF$.

在 $\triangle AOE$ 和 $\triangle COF$ 中,

$\begin{cases}OA=OC,\\ \angle OAE=\angle OCF,\\ AE=CF,\end{cases}$

$\therefore \triangle AOE\cong\triangle COF$,

$\therefore OE=OF$.

课后提升

【基础达标】

1. **C**　2. **B**　3. **C**　4. **C**　5. $1<a<7$　6. $4\sqrt{13}$　7. $12\sqrt{7}$

8. (1) **证明:** $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AB=CD$,$\angle B=\angle D$,$AD=BC$,$AD/\!/BC$,

$\therefore \angle EAO=\angle FCO$.

在 $\triangle AOE$ 和 $\triangle COF$ 中,$\begin{cases}\angle EAO=\angle FCO,\\ AO=CO,\\ \angle AOE=\angle COF,\end{cases}$

$\therefore \triangle AOE\cong\triangle COF$(ASA),

$\therefore CF=AE$,$\therefore AD-AE=BC-CF$,

即 $DE=BF$.

在 $\triangle ABF$ 和 $\triangle CDE$ 中,$\begin{cases}AB=CD,\\ \angle B=\angle D,\\ BF=DE,\end{cases}$

$\therefore \triangle ABF\cong\triangle CDE$(SAS).

(2) $EF\perp AC$

9. (1) **证明:** $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore OB=OD$,$AB/\!/CD$,

$\therefore \angle EBO=\angle FDO$.

在 $\triangle BOE$ 和 $\triangle DOF$ 中,

$\begin{cases}\angle EBO=\angle FDO,\\ OB=OD,\\ \angle BOE=\angle DOF,\end{cases}$

$\therefore \triangle BOE\cong\triangle DOF$(ASA),

$\therefore OE=OF$.

(2) **解:** $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AB=CD$,$AD=BC$,$OA=OC$.

$\because EF\perp AC$,

$\therefore AE=CE$.

$\because \triangle BEC$ 的周长是 10,

$\therefore BC+BE+CE=BC+BE+AE=BC+AB=10$,

$\therefore$ ▱$ABCD$ 的周长 $=2(BC+AB)=20$.

【能力提升】

10. 4

11. (1) **证明:** $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore OA=OC$,$AD/\!/BC$,

$\therefore \angle OAF=\angle OCE$.

在 $\triangle OAF$ 和 $\triangle OCE$ 中,$\begin{cases}\angle OAF=\angle OCE,\\ OA=OC,\\ \angle AOF=\angle COE,\end{cases}$

$\therefore \triangle OAF\cong\triangle OCE$(ASA),

$\therefore OE=OF$.

(2) **解:** 成立. 理由如下:

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore OA=OC$,$AB/\!/CD$,$\therefore \angle E=\angle F$.

在 $\triangle OAE$ 和 $\triangle OCF$ 中,$\begin{cases}\angle E=\angle F,\\ \angle AOE=\angle COF,\\ OA=OC,\end{cases}$

$\therefore \triangle OAE\cong\triangle OCF$(AAS),$\therefore OE=OF$.

2.2.2　平行四边形的判定

第 1 课时　用边判定平行四边形

课前预习

(2) 平行且相等　(3) 相等

课堂探究

【例1】思路导引: $\triangle DFE$　DF　DF

证明: $\because BE=FC$,$\therefore BC=FE$.

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DFE$ 中,

$\begin{cases}BC=FE,\\ AB=DF,\\ AC=DE,\end{cases}$

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle DFE$(SSS),

$\therefore \angle ABC=\angle DFE$,

$\therefore AB /\!/ DF$.

又$\because AB=DF$，$\therefore$四边形 $ABDF$ 是平行四边形.

变式训练 1－1：**D**

变式训练 1－2：**证明：**$\because FG /\!/ AB$，$\therefore \angle BAD=\angle AGF$.

$\because AD$ 平分$\angle BAC$，$\therefore \angle BAD=\angle DAC$，

$\therefore \angle AGF=\angle DAC$，$\therefore AF=GF$.

$\because BE=AF$，$\therefore FG=BE$.

又$\because FG /\!/ BE$，$\therefore$四边形 $BGFE$ 为平行四边形.

【例2】思路导引：FN

证明：$\because$四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AB /\!/ CD$，$\therefore \angle BAC=\angle DCA$.

在$\triangle ANE$ 和$\triangle CMF$ 中，$\begin{cases} AE=CF, \\ \angle BAC=\angle DCA, \\ AN=CM, \end{cases}$

$\therefore \triangle ANE \cong \triangle CMF$，

$\therefore NE=MF$，$\angle AEN=\angle CFM$，

$\therefore \angle FEN=\angle EFM$.

在$\triangle EMF$ 和$\triangle FNE$ 中，$\begin{cases} MF=NE, \\ \angle EFM=\angle FEN, \\ EF=FE, \end{cases}$

$\therefore \triangle EMF \cong \triangle FNE$，

$\therefore EM=FN$.

$\therefore$四边形 $MENF$ 是平行四边形.

变式训练 2－1：**C**

变式训练 2－2：**证明：**$\because OM \perp ON$，

$\therefore \angle MON=90°$.

$\therefore$在 Rt$\triangle MON$ 中，$16+(x-5)^2=(x-3)^2$，$\therefore x=8$，

$\therefore PM=11-8=3$，$ON=8-5=3$，$MN=8-3=5$.

又$\because PO=5$，$\therefore PM=ON$，$MN=PO$，

$\therefore$四边形 $PONM$ 是平行四边形.

课堂达标

1. **D**　2. **B**　3. **B**

4. 平行四边形　两组对边分别相等的四边形是平行四边形

5. **证明：**$\because AB /\!/ CD$，

$\therefore \angle ABO=\angle CDO$，$\angle BAO=\angle DCO$.

又$\because BO=DO$，

$\therefore \triangle AOB \cong \triangle COD$，

$\therefore AB=CD$，

$\therefore$四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

6. **证明：**(1)$\because$四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

$\therefore AD=BC$，$AD /\!/ BC$，

$\therefore \angle ADE=\angle CBF$.

又$\because AE \perp BD$，$CF \perp BD$，

$\therefore \angle AED=\angle CFB=90°$.

在$\triangle ADE$ 和$\triangle CBF$ 中，

$\begin{cases} \angle AED=\angle CFB=90°, \\ \angle ADE=\angle CBF, \\ AD=CB. \end{cases}$

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CBF$(AAS)，

$\therefore BF=DE$.

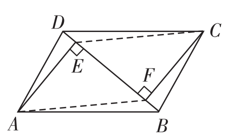
(2)由(1)知，$\triangle ADE \cong \triangle CBF$，

则 $AE=CF$.

如图，$\because AE \perp BD$，$CF \perp BD$，

$\therefore AE /\!/ CF$，

$\therefore$四边形 $CEAF$ 是平行四边形.



课后提升

【基础达标】

1. **D**　2. **B**　3. **D**　4. **D**　5. **B**　6. $AD /\!/ BC$ 或 $AB=CD$

7. 8　8. $\frac{3}{4}$或$\frac{3}{2}$

9. **证明：**$\because BE /\!/ DF$，$\therefore \angle BEC=\angle DFA$.

在$\triangle ADF$ 和$\triangle CBE$ 中，

$\begin{cases} \angle ADF=\angle CBE, \\ \angle AFD=\angle CEB, \\ AF=CE, \end{cases}$

$\therefore \triangle ADF \cong \triangle CBE$，

$\therefore DF=BE$.

又$\because BE /\!/ DF$，$\therefore$四边形 $DEBF$ 是平行四边形.

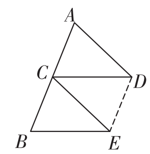
10. **证明：**(1)$\because$点 C 是 AB 的中点，$\therefore AC=CB$.

在$\triangle ACD$ 和$\triangle CBE$ 中，

$\begin{cases} AC=CB, \\ AD=CE, \\ CD=BE, \end{cases}$

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle CBE$(SSS).

(2)连接 DE，如图所示.



$\because \triangle ACD \cong \triangle CBE$，

$\therefore \angle ACD=\angle CBE$，

$\therefore CD /\!/ BE$.

又$\because CD=BE$，

$\therefore$四边形 $CBED$ 是平行四边形.

【能力提升】

11. **证明：**(1)如图，$\because$四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AB=CD$，$AB /\!/ CD$，

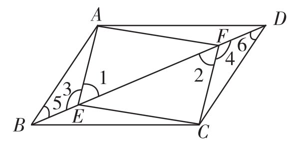
$\therefore \angle 5=\angle 6$.

$\because \angle 1=\angle 2$，

$\therefore \angle 3=\angle 4$，

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CDF$，

$\therefore BE=DF$.



(2)由(1)得$\triangle ABE \cong \triangle CDF$，

$\therefore AE=CF$.

$\because \angle 1=\angle 2$，$\therefore AE /\!/ CF$，

$\therefore$四边形 $AECF$ 是平行四边形，

$\therefore AF /\!/ CE$.

12. **证明：**(1)$\because$Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=30°$，

$\therefore AB=2BC$.

又$\because \triangle ABE$ 是等边三角形，$EF \perp AB$，

$\therefore AB=2AF$，

$\therefore AF=BC$.

在 Rt$\triangle AFE$ 和 Rt$\triangle BCA$ 中，$\begin{cases} AF=BC, \\ AE=BA, \end{cases}$

$\therefore$Rt$\triangle AFE \cong$Rt$\triangle BCA$(HL)，

$\therefore AC=EF$.

(2)由(1)知 $AC=EF$，

而$\triangle ACD$ 是等边三角形，

$\therefore \angle DAC=60°$，$AC=AD$，

$\therefore EF=AD$.

$\because \angle BAC=30°$，

$\therefore \angle DAB=90°$，

$\therefore AD \perp AB$.

$\because EF \perp AB$，

$\therefore AD /\!/ EF$.

$\therefore$四边形 $ADFE$ 是平行四边形.

第 2 课时　用对角线判定平行四边形

课前预习

互相平分

课堂探究

【例1】思路导引：$\triangle EBO$　OE

证明：$\because$四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore OD=OB$，$OA=OC$，$AB /\!/ CD$，

$\therefore \angle DFO=\angle BEO$，$\angle FDO=\angle EBO$，

∴$\triangle FDO \cong \triangle EBO$，

∴$OF=OE$，

∴四边形 $AECF$ 是平行四边形.

变式训练 1－1:**B**

变式训练 1－2:**解**:四边形 $ABDE$ 是平行四边形.理由如下：

∵$AE /\!/ BC$，

∴$\angle EAO=\angle BDO$，$\angle AEO=\angle DBO$.

∵O 是 AD 的中点，∴$AO=DO$.

在$\triangle AOE$ 和$\triangle DOB$ 中，

$\begin{cases}\angle EAO=\angle BDO,\\ \angle AEO=\angle DBO,\\ AO=DO,\end{cases}$

∴$\triangle AOE \cong \triangle DOB$，

∴$OB=OE$.

又 $AO=DO$，

∴四边形 $ABDE$ 是平行四边形.

【例2】思路导引:平行四边形

证明:∵四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

∴$AD /\!/ BC$，

∴$\angle DAC=\angle BCA$.

∵O 为 AC 的中点，

∴$AO=CO$.

在$\triangle AOE$ 和$\triangle COF$ 中，$\begin{cases}\angle DAC=\angle BCA,\\ OA=OC,\\ \angle AOE=\angle COF,\end{cases}$

∴$\triangle AOE \cong \triangle COF$(ASA)，

∴$EO=FO$，∴四边形 $AECF$ 为平行四边形，

∴$EC /\!/ AF$.

变式训练 2－1:**B**

变式训练 2－2:**证明**:∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$AD=CB$，$\angle ADE=\angle CBF$.

又∵$AE \perp BD$，$CF \perp BD$，

∴$\angle AED=\angle CFB$，$AE /\!/ CF$，

∴$\triangle AED \cong \triangle CFB$，

∴$AE=CF$，

∴四边形 $AECF$ 是平行四边形，

∴$AF=CE$.

课堂达标

1.**C** 2.**B** 3.65° 4.12

5.**证明**:∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$AD /\!/ BC$，

∴$\angle ADF=\angle CFH$，$\angle EAG=\angle FCH$.

∵E，F 分别为 AD，BC 边的中点，

∴$AE=DE=\frac{1}{2}AD$，$CF=BF=\frac{1}{2}BC$，

∴$DE \underline{/\!/} BF$，$AE=CF$，

∴四边形 $BFDE$ 是平行四边形，

∴$BE /\!/ DF$，

∴$\angle AEG=\angle ADF$，

∴$\angle AEG=\angle CFH$.

在$\triangle AEG$ 和$\triangle CFH$ 中，

$\begin{cases}\angle EAG=\angle FCH,\\ AE=CF,\\ \angle AEG=\angle CFH,\end{cases}$

∴$\triangle AEG \cong \triangle CFH$(ASA)，

∴$AG=CH$.

课后提升

【基础达标】

1.**B** 2.**A** 3.**B** 4.**A** 5.**A**

6.①②③ 7.3 或 5

8.**证明**:∵$ED /\!/ BC$，$EF /\!/ AC$，

∴四边形 $EFCD$ 是平行四边形，∴$DE=CF$.

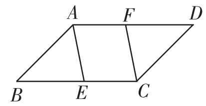
∵BD 平分$\angle ABC$，∴$\angle EBD=\angle DBC$.

∵$DE /\!/ BC$，∴$\angle EDB=\angle DBC$，

∴$\angle EBD=\angle EDB$，∴$EB=ED$，

∴$EB=CF$.

9.**解**:(答案不唯一)选 $BE=DF$，如图.



证明:∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$AD=BC$，$AD /\!/ BC$.

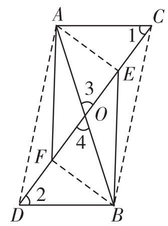
∵$BE=DF$，

∴$AF=CE$，

∴四边形 $AECF$ 是平行四边形.

【能力提升】

10.**证明**:如图所示，连接 AD，CB，AE，BF.



∵$AC /\!/ DB$，∴$\angle 1=\angle 2$.

又∵$AO=BO$，$\angle 3=\angle 4$，

∴$\triangle ACO \cong \triangle BDO$(AAS)，

∴$AC=BD$.

∴四边形 $ADBC$ 是平行四边形.

∴$OA=OB$，$OC=OD$.

∵点 E，F 分别为 OC，OD 的中点，

∴$OE=\frac{1}{2}OC$，$OF=\frac{1}{2}OD$，

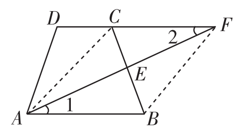
∴$OE=OF$.

∵$OA=OB$，

∴四边形 $AFBE$ 是平行四边形.

∴$AF /\!/ BE$.

11.(1)**证明**:如图所示，∵$AB /\!/ DC$，



∴$\angle 1=\angle 2$，$\angle FCE=\angle ABE$.

∵E 为 BC 的中点，

∴$CE=BE$.

在$\triangle ABE$ 和$\triangle FCE$ 中，

$\begin{cases}\angle 1=\angle 2,\\ \angle ABE=\angle FCE,\\ BE=CE,\end{cases}$

∴$\triangle ABE \cong \triangle FCE$.

(2)**解**:四边形 $ABFC$ 是平行四边形.理由如下：

由(1)知$\triangle ABE \cong \triangle FCE$，∴$EF=EA$.

又∵$CE=BE$，

∴四边形 $ABFC$ 是平行四边形.

2.3 中心对称和中心对称图形

课前预习

1.(1)180° 中心对称 (2)对称中心 平分

2.(1)180° 重合 (2)对角线的交点

课堂探究

【例1】思路导引:交点

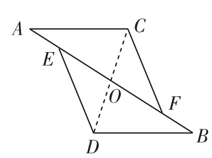
A

变式训练 1－1:**D**

变式训练 1－2:$\frac{S_1}{S_2}=\frac{3}{2}$

【例2】思路导引:OF

解:如图，连接 CD，交 AB 于点 O.



在$\triangle ACO$ 和$\triangle BDO$ 中，

$\begin{cases}\angle COA=\angle DOB,\\ \angle A=\angle B,\\ AC=BD,\end{cases}$

∴$\triangle ACO \cong \triangle BDO$(AAS)，

∴$OA=OB$，$OC=OD$.

∵$DE /\!/ CF$，∴$\angle DEO=\angle CFO$.

在$\triangle ODE$ 和$\triangle OCF$ 中，

$\begin{cases}\angle DEO=\angle CFO,\\ \angle DOE=\angle COF,\\ OD=OC,\end{cases}$

∴$\triangle ODE\cong\triangle OCF$(AAS)，

∴$OE=OF$，∴此图形是中心对称图形.

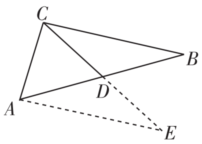
变式训练 2-1：**D**

变式训练 2-2：**B**

课堂达标

1. **C**　2. **C**　3. ①②④

4. **解**：(1)所画图形如图所示，$\triangle ADE$就是所求作的图形.



(2)由(1)知$\triangle ADE\cong\triangle BDC$，则$CD=ED$，$AE=BC$，

∴$AE-AC<2CD<AE+AC$，

即$BC-AC<2CD<BC+AC$，

∴$2<2CD<10$，解得$1<CD<5$.

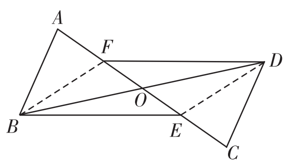
5. **解**：两个半圆成中心对称，因为B_1B_2的中点也是A_1A_2的中点，所以它们的中点就是对称中心O.

课后提升

【基础达标】

1. **C**　2. **C**　3. **C**　4. **A**　5. 2　6. 6

7. **证明**：如图，连接BF，DE.



∵$\triangle ABO$与$\triangle CDO$关于O点中心对称，

∴$OA=OC$，$OB=OD$.

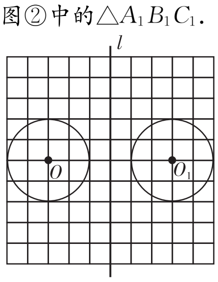
∵$AF=CE$，∴$OF=OE$，

∴四边形$FBED$是平行四边形，

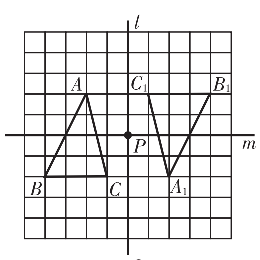
∴$FD=BE$.

8. **解**：(1)如图①中的$\odot O_1$.

(2)如图②中的$\triangle A_1B_1C_1$.



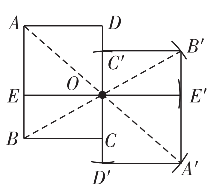
图①



图②

【能力提升】

9. **解**：如图所示.



2.4　三角形的中位线

课前预习

(1)中点　(2)平行　一半

课堂探究

【例1】思路导引：DE　DE　AB

B

变式训练 1-1：**C**

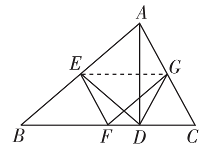
变式训练 1-2：**B**

【例2】思路导引：1. $\frac{9}{2}$　2. $\frac{2}{3}$　3　3. 2　6

A

变式训练 2-1：**C**

变式训练 2-2：**证明**：如图，连接EG.



∵E，F，G分别是AB，BC，CA的中点，

∴EF为$\triangle ABC$的中位线，$EF=\frac{1}{2}AC$.

又∵AD是高，

∴$\angle ADC=90°$，DG为Rt$\triangle ADC$斜边上的中线，

∴$DG=\frac{1}{2}AC$，

∴$DG=EF$.

同理$DE=FG$，又$EG=GE$，

∴$\triangle EFG\cong\triangle GDE$，

∴$\angle EDG=\angle EFG$.

课堂达标

1. **D**　2. **C**　3. 8　4. 14

5. **证明**：∵$CA=CD$，CF平分$\angle ACB$，

∴$AF=DF$. 又∵$AE=EB$，

∴EF为$\triangle ABD$的中位线，

∴$EF=\frac{1}{2}BD$.

课后提升

【基础达标】

1. **D**　2. **B**　3. **D**　4. **C**　5. **A**　6. 5　7. 18　8. $270°-3\alpha$

9. (1)**证明**：∵AN平分$\angle BAC$，∴$\angle 1=\angle 2$.

又$AN\perp BD$，

∴$AB=AD=10$，$BN=DN$.

(2)**解**：∵M为BC的中点，$BN=DN$，

∴MN为$\triangle BCD$的中位线，∴$CD=2MN=6$，

∴$\triangle ABC$的周长为

$AB+BC+CD+AD=10+15+6+10=41$.

10. **证明**：∵D，E分别是边AC，AB的中点，

∴$DE/\!/BC$，且$DE=\frac{1}{2}BC$.

∵BD平分$\angle ABC$，∴$\angle ABD=\angle DBC$.

又∵$DE/\!/BC$，∴$\angle EDB=\angle DBC$，

∴$\angle ABD=\angle EDB$，∴$EB=ED$.

∴$BC=2BE$.

又∵$AB=2BE$，∴$AB=BC$，

∴$BD\perp AC$.

【能力提升】

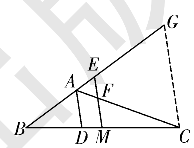
11. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

12. **证明**：(1)∵AD平分$\angle BAC$，∴$\angle BAD=\angle CAD$.

∵$AD/\!/EM$，∴$\angle BAD=\angle AEF$，$\angle CAD=\angle AFE$，

∴$\angle AEF=\angle AFE$，∴$AE=AF$.

(2)如图，作$CG/\!/EM$，交BA的延长线于点G.



∵$EF/\!/CG$，

∴$\angle G=\angle AEF$，$\angle ACG=\angle AFE$.

∵$\angle AEF=\angle AFE$，

∴$\angle G=\angle ACG$，∴$AG=AC$.

∵$BM=CM$，$EM/\!/CG$，∴$BE=EG$，

∴$BE=\frac{1}{2}BG=\frac{1}{2}(BA+AG)=\frac{1}{2}(AB+AC)$.

2.5　矩　形

2.5.1　矩形的性质

课前预习

(1)直角　(2)①直角　相等　平分　②相等　③对角线的交点　④每一组对边中点

课堂探究

【例1】思路导引：直角

解：四边形 $ABCD$ 是矩形.

理由如下：

$\because EF/\!/GH$，

$\therefore \angle FAC+\angle ACH=180^\circ$，$\angle EAC=\angle ACH$.

$\because AD$，CD 分别平分 $\angle FAC$，$\angle ACH$，

$\therefore \angle DAC+\angle ACD=\frac{1}{2}(\angle FAC+\angle ACH)$

$=\frac{1}{2}\times 180^\circ=90^\circ$，

$\therefore \angle D=90^\circ$.

又 $\because AB$，CD 分别平分 $\angle EAC$，$\angle ACH$，

$\therefore \angle BAC=\frac{1}{2}\angle EAC=\frac{1}{2}\angle ACH=\angle ACD$，

$\therefore AB/\!/CD$，同理 $AD/\!/BC$，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

$\because \angle D=90^\circ$，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形.

变式训练 1-1：**D**

变式训练 1-2：**解：**四边形 $PEOF$ 是矩形.

理由如下：$\because PE/\!/OB$，$PF/\!/OA$，

$\therefore$ 四边形 $PEOF$ 是平行四边形.

$\because OA$，OB 分别平分 $\angle COM$，$\angle CON$，

$\therefore \angle AOC=\frac{1}{2}\angle COM$，$\angle COB=\frac{1}{2}\angle CON$，

$\therefore \angle AOC+\angle COB=\frac{1}{2}(\angle COM+\angle CON)$

$=\frac{1}{2}\times 180^\circ=90^\circ$.

$\therefore \angle AOB=90^\circ$，$\therefore$ 四边形 $PEOF$ 是矩形.

【例2】思路导引：1. OC　OD　OF　2. 相等　等边

(1)**证明：**$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore OA=OC$，$OB=OD$.

$\because BE=DF$，

$\therefore OE=OF$.

在 $\triangle AOE$ 和 $\triangle COF$ 中，

$\begin{cases} OA=OC, \\ \angle AOE=\angle COF, \\ OE=OF, \end{cases}$

$\therefore \triangle AOE\cong\triangle COF(\text{SAS})$，

$\therefore AE=CF$.

(2)**解：**$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore \angle ABC=90^\circ$，$OA=OC$，$OB=OD$，$AC=BD$，

$\therefore OA=OB$.

$\because \angle AOB=\angle COD=60^\circ$，

$\therefore \triangle AOB$ 是等边三角形，

$\therefore OA=AB=6$，

$\therefore AC=2OA=12$.

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，$BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=6\sqrt{3}$，

$\therefore S_{\text{矩形}ABCD}=AB\cdot BC=6\times 6\sqrt{3}=36\sqrt{3}$.

变式训练 2-1：**C**

变式训练 2-2：**证明：**$\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形，

$\therefore AC=BD$，$\therefore BO=CO$.

$\because BE\perp AC$，$CF\perp BD$，

$\therefore \angle BEO=\angle CFO=90^\circ$.

在 $\triangle BOE$ 和 $\triangle COF$ 中，

$\begin{cases} \angle BEO=\angle CFO, \\ \angle BOE=\angle COF, \\ OB=OC, \end{cases}$

$\therefore \triangle BOE\cong\triangle COF$.

$\therefore BE=CF$.

课堂达标

1. **B**　2. **C**　3. 2.5　4. 5

5. **证明：**$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore \angle A=\angle B=90^\circ$，$AD=BC$.

$\because \angle AOC=\angle BOD$，

$\therefore \angle AOC-\angle DOC=\angle BOD-\angle DOC$，

即 $\angle AOD=\angle BOC$.

在 $\triangle AOD$ 和 $\triangle BOC$ 中，

$\begin{cases} \angle A=\angle B, \\ \angle AOD=\angle BOC, \\ AD=BC, \end{cases}$

$\therefore \triangle AOD\cong\triangle BOC$，

$\therefore AO=BO$.

6. (1)**证明：**$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore AC=BD$，$AB/\!/CD$.

又 $\because BE/\!/AC$，

$\therefore$ 四边形 $ABEC$ 为平行四边形，

$\therefore BE=AC$. $\therefore BD=BE$.

(2)**解：**$\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形，

$\therefore OA=OB=4$.

又 $\because \angle DBC=30^\circ$，

$\therefore \angle ABO=60^\circ$，

$\therefore \triangle ABO$ 为等边三角形，

$\therefore AB=OB=4$.

课后提升

【基础达标】

1. **B**　2. **B**　3. **B**　4. **A**　5. **D**　6. $3\sqrt{3}$　7. $\sqrt{34}$　8. $\frac{5}{2}\sqrt{3}$

9. (1)**证明：**$\because F$ 是 CD 的中点，

$\therefore DF=CF$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore AD/\!/BC$，即 $AD/\!/CE$，

$\therefore \angle ADF=\angle ECF$.

在 $\triangle ADF$ 和 $\triangle ECF$ 中，

$\begin{cases} \angle ADF=\angle ECF, \\ DF=CF, \\ \angle AFD=\angle EFC, \end{cases}$

$\therefore \triangle ADF\cong\triangle ECF$.

(2)**解：**$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore AD=BC=2$，$AB=CD=1$，$CD\perp AD$.

由(1)知，$\triangle ADF\cong\triangle ECF$，

$\therefore AD=CE$.

$\because AD/\!/CE$，

$\therefore$ 四边形 $ACED$ 是平行四边形，

$\therefore$ 四边形 $ACED$ 的面积 $=AD\cdot DC=2$.

10. **解：**$\because AE$ 平分 $\angle BAD$，

$\therefore \angle BAE=\angle EAD=45^\circ$.

$\because \angle EAO=15^\circ$，

$\therefore \angle OAB=60^\circ$，$\angle OAD=30^\circ$.

$\because OA=OB$，$\therefore \triangle OAB$ 为等边三角形，

$\angle BAE=\angle BEA=45^\circ$，

$\therefore BE=AB=OB$.

又 $\angle OBE=\angle ADO=\angle OAD=30^\circ$，

$\therefore \angle BOE=\frac{180^\circ-30^\circ}{2}=75^\circ$.

【能力提升】

11. $2\leqslant x\leqslant 8$

12. (1)**证明：**$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore AD/\!/BC$，$AB/\!/CD$，

$\therefore \angle FAC=\angle ECA$，$\angle BAC=\angle DCA$.

由折叠可得 $\angle BAE=\angle EAC=\frac{1}{2}\angle BAC$，

$\angle DCF=\angle FCA=\frac{1}{2}\angle DCA$，
∴$\angle EAC=\angle FCA$.
又∵$AC=CA$，∴$\triangle CAE\cong\triangle ACF$，
∴$CE=AF$，∴四边形 $AECF$ 是平行四边形.
(2)**解**：∵$AB=6$，$AC=10$，
∴由勾股定理，得 $BC=8$.
设 $EM=x$，那么 $BE=EM=x$，
∴$CE=BC-BE=8-x$，
$CM=AC-AM=AC-AB=10-6=4$.
在 Rt$\triangle CEM$ 中，由勾股定理，得
$EM^2+CM^2=CE^2$，
∴$x^2+4^2=(8-x)^2$，解得 $x=3$.
∴$S_{四边形AECF}=2S_{\triangle ACE}=2\times\frac{1}{2}AC\cdot EM=30$.

2.5.2　矩形的判定

课前预习

(1)直角　(2)相等

课堂探究

【例1】思路导引：1. $\angle CFB$　CB　$\angle C$　2. $90°$
证明：(1)∵$DE\perp AB$，$BF\perp CD$，
∴$\angle AED=\angle CFB=90°$.
∵四边形 $ABCD$ 为平行四边形，
∴$AD=CB$，$\angle A=\angle C$.
在$\triangle ADE$ 和$\triangle CBF$ 中，
$\begin{cases}\angle AED=\angle CFB,\\ \angle A=\angle C,\\ AD=CB,\end{cases}$
∴$\triangle ADE\cong\triangle CBF$.
(2)∵四边形 $ABCD$ 为平行四边形，
∴$CD/\!/AB$，
∴$\angle CDE=\angle AED=90°$，
∴$\angle CDE=\angle DEB=\angle BFD=90°$，
∴四边形 $BFDE$ 为矩形.

变式训练 1－1：**D**

变式训练 1－2：**证明**：∵BD，BE 分别平分$\angle ABC$，$\angle ABP$，
$$\therefore\angle ABD+\angle ABE=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ABP)=\frac{1}{2}\times180°=90°,$$
即$\angle DBE=90°$.
又∵$AE\perp BE$，$AD\perp BD$，
∴$\angle AEB=\angle ADB=90°$，
∴四边形 $AEBD$ 是矩形.

【例2】思路导引：1. OF　2. OB　OC　矩形
(1)**证明**：∵点 O 是 AC 的中点，
∴$OA=OC$.
又∵$AE=CF$，
∴$OE=OF$.
∵$BE/\!/DF$，
∴$\angle OEB=\angle OFD$.
在$\triangle BOE$ 和$\triangle DOF$ 中，
$\begin{cases}\angle OEB=\angle OFD,\\ OE=OF,\\ \angle BOE=\angle DOF,\end{cases}$
∴$\triangle BOE\cong\triangle DOF$.
(2)**解**：四边形 $ABCD$ 是矩形. 证明如下：
∵$\triangle BOE\cong\triangle DOF$，∴$OB=OD$.
∵点 O 是 AC 的中点，∴$OA=OC$.
∵$OD=\frac{1}{2}AC$，
∴$OA=OB=OC=OD$，
∴四边形 $ABCD$ 是矩形.

变式训练 2－1：**B**

变式训练 2－2：(1)等于
(2)对角线相等的平行四边形是矩形

课堂达标

1. **C**　2. **B**　3. $2\sqrt{3}$
4. $EB=DC$(答案不唯一)
5. **证明**：∵四边形 $ABCD$ 为平行四边形，
∴$OA=OC$，$OB=OD$.
又∵$AN=CM$，$ON=OB$，
∴$OM=ON=OB=OD$，
∴四边形 $NDMB$ 为平行四边形，且 $MN=BD$，
∴四边形 $NDMB$ 为矩形.
6. (1)**证明**：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，
∴$AB/\!/CD$，
∴$AB/\!/CE$.
又∵$BE/\!/AC$，
∴四边形 $ABEC$ 是平行四边形，
∴$AC=BE$.
又 $BD=BE$，
∴$AC=BD$，
∴平行四边形 $ABCD$ 是矩形.
(2)**解**：∵在矩形 $ABCD$ 中，
$\angle AOB=60°$，$OA=OB$，
∴$\triangle AOB$ 是等边三角形，
∴$BO=AB=4$，
∴$BD=2BO=2\times4=8$.
又∵四边形 $ABEC$ 是平行四边形，
∴$CE=AB=4$，
∴$DE=CD+CE=8$.
在 Rt$\triangle BCD$ 中，
$BC=\sqrt{BD^2-CD^2}=\sqrt{8^2-4^2}=4\sqrt{3}$，
∴四边形 $ABED$ 的面积$=\frac{1}{2}\times(4+8)\times4\sqrt{3}=24\sqrt{3}$.

课后提升

【基础达标】

1. **C**　2. **B**　3. **D**　4. **D**　5. **C**　6. 合格　7. $\frac{12}{5}$　8. $2\sqrt{3}$
9. (1)**证明**：∵$AF/\!/BC$，∴$\angle AFE=\angle DCE$.
∵E 是 AD 的中点，∴$AE=DE$.
∵$\angle AEF=\angle DEC$，∴$\triangle AEF\cong\triangle DEC$，
∴$AF=DC$.
∵$AF=BD$，∴$BD=CD$，
∴D 是 BC 的中点.
(2)**解**：四边形 $AFBD$ 是矩形.
证明：∵$AF=BD$，$AF/\!/BC$，
∴四边形 $AFBD$ 是平行四边形.
∵$AB=AC$，D 是 BC 的中点，
∴$AD\perp BC$，
∴$\angle ADB=90°$，
∴平行四边形 $AFBD$ 是矩形.
10. **证明**：(1)∵$BE=CF$，$BF=BE+EF$，$CE=CF+EF$，
∴$BF=CE$.
∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，∴$AB=DC$.
在$\triangle ABF$ 和$\triangle DCE$ 中，
∵$AB=DC$，$BF=CE$，$AF=DE$，
∴$\triangle ABF\cong\triangle DCE$.
(2)∵$\triangle ABF\cong\triangle DCE$，

$\therefore \angle B=\angle C$.
$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,
$\therefore AB /\!/ CD$,
$\therefore \angle B+\angle C=180°$.
$\therefore \angle B=\angle C=90°$.
$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形.

【能力提升】

11. **证明:**(1)在 $\square ABCD$ 中,$AD=BC$,$AB=CD$,$AB /\!/ CD$,则 $BE /\!/ CD$.
又 $\because AB=BE$,
$\therefore BE=DC$,
$\therefore$ 四边形 $BECD$ 为平行四边形,
$\therefore BD=EC$.
在 $\triangle ABD$ 与 $\triangle BEC$ 中,$\begin{cases} AB=BE, \\ BD=EC, \\ AD=BC, \end{cases}$
$\therefore \triangle ABD \cong \triangle BEC$.
(2)由(1)知,四边形 $BECD$ 为平行四边形,
则 $OD=OE$,$OC=OB$.
$\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形,
$\therefore \angle A=\angle BCD$,
即 $\angle A=\angle OCD$.
又 $\because \angle BOD=2\angle A$,$\angle BOD=\angle OCD+\angle ODC$,
$\therefore \angle OCD=\angle ODC$,
$\therefore OC=OD$,
$\therefore OC+OB=OD+OE$,即 $BC=ED$,
$\therefore$ 平行四边形 $BECD$ 为矩形.

2.6 菱　形

2.6.1 菱形的性质

课前预习

1. 邻边
2. (1)相等　相等　垂直平分　(2)对角线的交点
(3)两条对角线所在直线
3. (1)4　(2)一半

课堂探究

【例1】思路导引:1. $\triangle CBE$　2. $\angle EBA$　30°　直角　2
(1)**证明:**在菱形 $ABCD$ 中,$AB=CB$,$\angle ABE=\angle CBE$.
又 $\because BE=BE$,
$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CBE$,
$\therefore AE=CE$.
(2)**解:**在菱形 $ABCD$ 中,
$\angle ABE=\angle CBE=\frac{1}{2}\angle ABC=\frac{1}{2}\times 60°=30°$.
$\because AE=BE=1$,
$\therefore \angle EAB=\angle EBA=30°$,
$\therefore \angle AED=60°$.
$\because AD /\!/ BC$,
$\therefore \angle ADE=\angle CBE=30°$,$\therefore \angle DAE=90°$,
$\therefore DE=2AE=2$,$AD=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$.
$\therefore$ 菱形的边长是 $\sqrt{3}$.

变式训练 1 - 1:**C**
变式训练 1 - 2:**A**

【例2】思路导引:2. DE
解:(1)$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,
$\therefore AB=BC=CD=AD$,
$AC \perp BD$,$BO=OD$,$AO=OC$.
$\because$ 菱形的周长是 20,
$\therefore DC=\frac{1}{4}\times 20=5$.
$\because BD=6$,$\therefore OD=3$.
在 $Rt\triangle DOC$ 中,
$OC=\sqrt{DC^2-OD^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$,
$\therefore AC=2OC=8$.
(2)$\because S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AB\cdot DE=\frac{1}{2}BD\cdot OA$,
$\therefore 5DE=6\times 4$,
$\therefore DE=\frac{24}{5}$.

变式训练 2 - 1:**A**
变式训练 2 - 2:**解:**菱形的边长 $AB=10$ cm.
在 $Rt\triangle AOB$ 中,$OA=\frac{1}{2}AC=6$ cm,
$\therefore OB=\sqrt{AB^2-OA^2}=8$ cm,
$\therefore BD=2OB=16$ cm.
$S_{菱形ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}\times 12\times 16=96\ (cm^2)$.

课堂达标

1. **B**　2. **A**　3. 24　4. $\frac{50}{13}$
5. **证明:**$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,
$\therefore AB=CB$,$\angle ABE=\angle CBE$,$AD /\!/ BC$.
在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CBE$ 中,
$\begin{cases} AB=CB, \\ \angle ABE=\angle CBE, \\ BE=BE, \end{cases}$
$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CBE$,
$\therefore \angle BCE=\angle BAE$.
$\because AE \perp AB$,
$\therefore \angle BAE=90°$,
$\therefore \angle BCE=90°$,
$\therefore CF \perp BC$.
又 $\because AD /\!/ BC$,
$\therefore CF \perp AD$.
6. **解:**菱形的周长为 52 cm,
则边长 $AB=13$ cm.
由题意设两条对角线的长度分别为
$AC=10x$ cm,$BD=24x$ cm,
则在 $Rt\triangle AOB$ 中,
由勾股定理得 $(5x)^2+(12x)^2=13^2$,
解得 $x=1$(负值舍去).
$\therefore AC=10$ cm,$BD=24$ cm,
$\therefore S_{菱形ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}\times 10\times 24=120\ (cm^2)$.

课后提升

【基础达标】

1. **A**　2. **C**　3. **A**　4. **C**　5. **C**　6. 3　7. 20°　8. $2\sqrt{3}$
9. **解:**在菱形 $ABCD$ 中,
$\because \angle DAB+\angle ABC=180°$,$\angle DAB:\angle ABC=1:2$,
$\therefore \angle DAB+2\angle DAB=180°$,
得 $\angle DAB=60°$.
又 $\because AB=AD$,
$\therefore \triangle ABD$ 为等边三角形.
$\therefore BD=AB=48\times\frac{1}{4}=12$(cm),$OB=6$ cm.
$\because BD \perp AC$,
$\therefore$ 在 $Rt\triangle AOB$ 中,
$AO=\sqrt{AB^2-BO^2}=\sqrt{12^2-6^2}=6\sqrt{3}$(cm),
$\therefore AC=12\sqrt{3}$ cm.
$\therefore$ 两条对角线的长度分别为 12 cm,$12\sqrt{3}$ cm.

10. **解**:(1)连接 BD.

∵四边形 $ABCD$ 是菱形,

∴$AD=AB$.

∵E 是 AB 的中点,且 $DE\perp AB$,

∴$AD=BD$,

∴$AD=AB=BD$,

∴$\triangle ABD$ 是等边三角形,

∴$\angle ABD=60°$,

∴$\angle ABC=2\angle ABD=120°$.

(2)连接 AC,交 BD 于点 O.

∵$\triangle ABD$ 是等边三角形,

∴$BD=AB=a$.

∵四边形 $ABCD$ 是菱形,

∴$AC\perp BD$,$OB=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}a$,

∴$OA=\sqrt{AB^2-OB^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$,

∴$AC=2OA=\sqrt{3}a$.

【能力提升】

11. 27

12. **解**:(1)$\triangle OEF$ 是等腰三角形.

证明:∵四边形 $ABCD$ 是菱形,

∴$AB=AD$,$AC\perp BD$.

∵点 E,F 分别是边 AB,AD 的中点,

∴$EO=\frac{1}{2}AB$,$FO=\frac{1}{2}AD$,

∴$EO=FO$,

∴$\triangle OEF$ 是等腰三角形.

(2)∵四边形 $ABCD$ 是菱形,$AC=10$,

∴$AO=5$,$\angle AOB=90°$,

∴$BO=\sqrt{AB^2-AO^2}=\sqrt{13^2-5^2}=12$,

∴$BD=24$.

∵点 E,F 分别是边 AB,AD 的中点,

∴$EF=\frac{1}{2}BD=12$.

2.6.2　菱形的判定

课前预习

(1)都相等　(2)互相垂直

课堂探究

【例1】思路导引:1. OD　2. $\triangle BCE$

(1)**证明**:∵$DE/\!/AC$,$CE/\!/BD$,

∴四边形 $OCED$ 是平行四边形.

在矩形 $ABCD$ 中,$AC=BD$,且 AC,BD 互相平分,

∴$OC=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}BD=OD$,

∴四边形 $OCED$ 是菱形.

(2)**解**:相等.理由如下:

在菱形 $OCED$ 中,$ED=EC$,

∴$\angle EDC=\angle ECD$.

又∵在矩形 $ABCD$ 中,

$AD=BC$,$\angle ADC=\angle BCD=90°$,

∴$\angle ADC+\angle EDC=\angle BCD+\angle ECD$,

即 $\angle ADE=\angle BCE$.

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle BCE$ 中,

$\begin{cases}AD=BC,\\ \angle ADE=\angle BCE,\\ DE=CE,\end{cases}$

∴$\triangle ADE\cong\triangle BCE$(SAS),

∴$AE=BE$.

变式训练 1-1:**B**

变式训练 1-2:**D**

【例2】思路导引:1. $\angle CBD$　$\angle CBD$　$\angle ADB$　$\angle ABD$　AD

2. BC　平行四边形

3. 3　$\sqrt{3}$　$2\sqrt{3}$

(1)**证明**:∵$AE/\!/BF$,

∴$\angle ADB=\angle CBD$.

又∵BD 平分 $\angle ABF$,

∴$\angle ABD=\angle CBD$,

∴$\angle ABD=\angle ADB$,

∴$AB=AD$.

同理可证 $AB=BC$,

∴$AD=BC$.

又∵$AD/\!/BC$,

∴四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

又∵$AB=AD$,

∴四边形 $ABCD$ 是菱形.

(2)**解**:∵四边形 $ABCD$ 是菱形,$BD=6$,

∴$AC\perp BD$,$OD=\frac{1}{2}BD=3$.

∵$\angle ADB=30°$,$\angle AOD=90°$,

∴$AD=2AO$,

∴$AO^2+3^2=(2AO)^2$,

解得 $AO=\sqrt{3}$,

∴$AD=2\sqrt{3}$.

变式训练 2-1:**D**

变式训练 2-2:**D**

课堂达标

1. **B**　2. **B**　3. $AB=AD$(或 $AC\perp BD$,答案不唯一)

4. ①②③④

5. (1)**证明**:∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴$AD/\!/BC$,

∴$\angle DAC=\angle BCA$.

∵$\angle BAC=\angle DAC$,

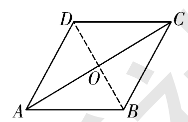
∴$\angle BAC=\angle BCA$,

∴$AB=BC$.

(2)**解**:如图,连接 BD 交 AC 于点 O.

∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形,$AB=BC$,

∴四边形 $ABCD$ 是菱形,



∴$AC\perp BD$,$OA=OC=\frac{1}{2}AC=\sqrt{3}$,

$OB=OD=\frac{1}{2}BD$,

∴$OB=\sqrt{AB^2-OA^2}=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$,

∴$BD=2OB=2$,

∴$S_{\square ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 2=2\sqrt{3}$.

6. (1)**证明**:∵点 D,E 分别是边 BC,AB 的中点,

∴$DE/\!/AC$,$AC=2DE$.

∵$EF=2DE$,

∴$EF/\!/AC$,$EF=AC$,

∴四边形 $ACEF$ 是平行四边形,

∴$AF=CE$.

(2)**解**:当 $\angle B=30°$时,四边形 $ACEF$ 是菱形.理由如下:

∵$\angle ACB=90°$,$\angle B=30°$,

∴$\angle BAC=60°$,$AC=\frac{1}{2}AB=AE$,

∴$\triangle ACE$ 是等边三角形,

∴$AC=CE$.

又∵四边形 $ACEF$ 是平行四边形,

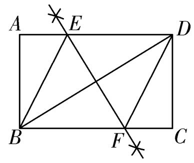
∴四边形 $ACEF$ 是菱形.

课后提升

【基础达标】

1. **D** 2. **B** 3. **D** 4. **D** 5. **B** 6. 16 7. 菱 $2\sqrt{3}$ 8. 15

9. **解**:(1)如图所示.



(2)四边形 $BEDF$ 是菱形.

理由:∵EF 垂直平分 BD,

∴$BE=DE$,$\angle DEF=\angle BEF$.

∵$AD/\!/BC$,∴$\angle DEF=\angle BFE$,

∴$\angle BEF=\angle BFE$,∴$BE=BF$.

又∵$BF=DF$,

∴$BE=ED=DF=BF$,

∴四边形 $BEDF$ 是菱形.

【能力提升】

10. ③

11. (1)**证明**:∵$AF/\!/BC$,

∴$\angle AFE=\angle DBE$.

∵E 是 AD 的中点,

∴$AE=DE$.

在$\triangle AEF$ 和$\triangle DEB$ 中,$\begin{cases}\angle AFE=\angle DBE,\\ \angle FEA=\angle BED,\\ AE=DE,\end{cases}$

∴$\triangle AEF\cong\triangle DEB$(AAS).

(2)**证明**:由(1)知,$\triangle AEF\cong\triangle DEB$,则 $AF=DB$.

∵D 是 BC 的中点,∴$DB=DC$,

∴$AF=DC$.

∵$AF/\!/BC$,

∴四边形 $ADCF$ 是平行四边形.

∵$\angle BAC=90°$,D 是 BC 的中点,

∴$AD=\frac{1}{2}BC=DC$,

∴平行四边形 $ADCF$ 是菱形.

(3)**解**:∵D 是 BC 的中点,

∴$S_{\triangle ABC}=2S_{\triangle ADC}$.

∵$S_{菱形ADCF}=2S_{\triangle ADC}$,

∴$S_{菱形ADCF}=S_{\triangle ABC}$

$=\frac{1}{2}AB\cdot AC$

$=\frac{1}{2}\times5\times4=10$.

2.7 正方形

课前预习

2. (1)①相等 直角 相等且互相垂直平分 ②交点 ③中点

(2)①邻边 ②一个角是直角

课堂探究

【例1】**思路导引**:1. 90° $\angle CBF$ 2. 35° 45° $\angle BEF$

(1)**证明**:∵四边形 $ABCD$ 是正方形,

∴$AB=CB$,$\angle ABC=90°$.

∵$BE\perp BF$,

∴$\angle EBF=90°$,

∴$\angle ABE=\angle CBF$.

∵$AB=CB$,$\angle ABE=\angle CBF$,$BE=BF$,

∴$\triangle ABE\cong\triangle CBF$,

∴$AE=CF$.

(2)**解**:∵$BE=BF$,$\angle EBF=90°$,

∴$\angle BEF=45°$.

∵$\angle ABC=90°$,$\angle ABE=55°$,

∴$\angle GBE=35°$,

∴$\angle EGC=45°+35°=80°$.

变式训练 1-1:**D**

变式训练 1-2:**B**

【例2】**思路导引**:FC

解:四边形 $BDCF$ 是正方形.

证明:∵E 为 DC 的中点,

∴$CE=DE$.

∵$CF/\!/AB$,

∴$\angle DAE=\angle AFC$.

在$\triangle AED$ 和$\triangle FEC$ 中,

$\begin{cases}\angle EFC=\angle EAD,\\ \angle CEF=\angle DEA,\\ CE=DE,\end{cases}$

∴$\triangle AED\cong\triangle FEC$,

∴$AD=CF$.

∵D 是 AB 的中点,即 $DB=AD$,

∴$DB=CF$,

∴四边形 $BDCF$ 是平行四边形.

∵$AC=BC$,D 是 AB 的中点,

∴$CD\perp AB$,

∴$\angle CDB=90°$,

∴平行四边形 $BDCF$ 是矩形.

∵$AC=BC$,$AC\perp BC$,D 是 AB 的中点,

∴$CD=\frac{1}{2}AB=BD$.

∴矩形 $BDCF$ 是正方形.

变式训练 2-1:**B**

变式训练 2-2:$AC=BD$(答案不唯一)

课堂达标

1. **C** 2. **B** 3. 50 4. $2\sqrt{34}$

5. **证明**:∵四边形 $ABCD$ 是正方形,

∴$AB=BC$,$\angle ABC=\angle C=90°$.

∵$AE\perp BF$,

∴$\angle ABG+\angle BAE=90°$,$\angle ABG+\angle CBF=90°$,

∴$\angle BAE=\angle CBF$,

∴$\triangle ABE\cong\triangle BCF$,

∴$AE=BF$.

6. **证明**:(1)∵AB 是 CD 的垂直平分线,

∴$AC=AD$,∴$\angle ACM=\angle ADM$.

又∵$AB\perp CD$,

∴$\angle CAB=\angle DAB$.

(2)∵$ME\perp AC$,$MF\perp AD$,$\angle CAD=90°$,

即$\angle AEM=\angle EAF=\angle AFM=90°$,

∴四边形 $AEMF$ 是矩形.

又∵$\angle CAB=\angle DAB$,$ME\perp AC$,$MF\perp AD$,

∴$ME=MF$,

∴矩形 $AEMF$ 是正方形.

课后提升

【基础达标】

1. **D** 2. **A** 3. **C** 4. **C** 5. **B** 6. **B**

7. 30°或 150° 8. $3\sqrt{5}-3$

9. **证明**:∵E,F 分别是正方形$ABCD$边 BC,CD 的中点,

∴$CF=BE$,

∴Rt$\triangle ABE\cong$Rt$\triangle BCF$,

∴$\angle BAE=\angle CBF$.

又∵$\angle BAE+\angle BEA=90°$,

∴$\angle CBF+\angle BEA=90°$,

∴$\angle BGE=90°$,

∴$AE\perp BF$.

10. (1)**证明：**$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，
$\therefore AD=BA, \angle BAD=90^\circ$，
即 $\angle BAQ+\angle DAP=90^\circ$.
$\because DP\perp AQ, \therefore \angle ADP+\angle DAP=90^\circ$，
$\therefore \angle BAQ=\angle ADP$.
$\because AQ\perp BE$ 于点 Q，$DP\perp AQ$ 于点 P.
$\therefore \angle AQB=\angle DPA=90^\circ$，
$\therefore \triangle AQB\cong\triangle DPA(\text{AAS}), \therefore AP=BQ$.
(2)**解：**①$AQ-AP=PQ$；②$AQ-BQ=PQ$；③$DP-AP=PQ$；④$DP-BQ=PQ$.

【能力提升】

11. ①②③

12. (1)**证明：**在正方形 $ABCD$ 中，
$AD=AB, \angle ADC=\angle ABC=90^\circ$，
$\therefore \angle ADF=\angle ABE=90^\circ$.
在 $\triangle ADF$ 与 $\triangle ABE$ 中，
$AD=AB, \angle ADF=\angle ABE, DF=BE$，
$\therefore \triangle ADF\cong\triangle ABE(\text{SAS})$.
(2)**解：**过点 A 作 $AH\perp ED$，垂足为 H.
在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中，
$\because AB=BC=3, BE=1$，
$\therefore AE=\sqrt{10}, ED=\sqrt{CD^2+CE^2}=5$.
$\because S_{\triangle AED}=\frac{1}{2}AD\cdot BA=\frac{9}{2}$，
$\therefore S_{\triangle AED}=\frac{1}{2}ED\cdot AH=\frac{9}{2}$，得 $AH=\frac{9}{5}$.
$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle AHE$ 中，$EH=\frac{13}{5}$，
$\therefore \tan\angle AED=\frac{AH}{EH}=\frac{9}{13}$.

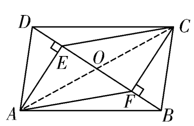
第 2 章　基础巩固与训练

1. **D**　2. **A**　3. **B**　4. **B**　5. **C**　6. **A**　7. **D**　8. **D**

9. 5　10. 6　11. 50°　12. $5\sqrt{3}$　13. 4　14. $\frac{12}{5}$

15. **解：**(1)$\because 360^\circ\div180^\circ=2$，
$630^\circ\div180^\circ=3\cdots\cdots90^\circ$，
$\therefore$ 甲的说法对，乙的说法不对.
$360^\circ\div180^\circ+2$
$=2+2$
$=4$.
$\therefore$ 甲同学说的边数 n 是 4.
(2)依题意有
$(n+x-2)\times180^\circ-(n-2)\times180^\circ=360^\circ$，
解得 $x=2$. 故 x 的值是 2.

16. **证明：**(1)$\because BE=DF, \therefore BE-EF=DF-EF$，
即 $BF=DE$.
$\because AE\perp BD, CF\perp BD$，
$\therefore \angle AED=\angle CFB=90^\circ$.
在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 与 $\text{Rt}\triangle CBF$ 中，
$\begin{cases}AD=BC,\\DE=BF,\end{cases}$
$\therefore \text{Rt}\triangle ADE\cong\text{Rt}\triangle CBF$.
(2)如图，连接 AC 交 BD 于点 O.

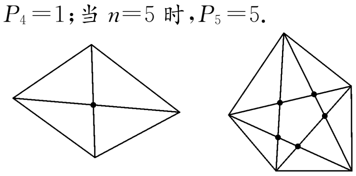


$\because \text{Rt}\triangle ADE\cong\text{Rt}\triangle CBF$，
$\therefore \angle ADE=\angle CBF$，
$\therefore AD/\!/BC$，
$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，
$\therefore AO=CO$.

17. **证明：**$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，
$\therefore \angle B=\angle C=90^\circ$.
$\because EF\perp DF, \therefore \angle EFD=90^\circ$，
$\therefore \angle EFB+\angle CFD=90^\circ$.
$\because \angle EFB+\angle BEF=90^\circ, \therefore \angle BEF=\angle CFD$.
在 $\triangle BEF$ 和 $\triangle CFD$ 中，
$\begin{cases}\angle BEF=\angle CFD,\\BE=CF,\\\angle B=\angle C,\end{cases}$
$\therefore \triangle BEF\cong\triangle CFD(\text{ASA}), \therefore BF=CD$.

18. **证明：**(1)$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，
$\therefore \angle A=\angle C$.
在 $\triangle AEH$ 与 $\triangle CGF$ 中，
$\begin{cases}AE=CG,\\\angle A=\angle C,\\AH=CF,\end{cases}$
$\therefore \triangle AEH\cong\triangle CGF$.
(2)$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，
$\therefore AB=CD, AD=BC, \angle B=\angle D$.
又 $\because AE=CG, AH=CF$，
$\therefore BE=DG, BF=DH$.
在 $\triangle BEF$ 与 $\triangle DGH$ 中，
$\begin{cases}BE=DG,\\\angle B=\angle D,\\BF=DH,\end{cases}$
$\therefore \triangle BEF\cong\triangle DGH$，
$\therefore EF=GH$.
又由(1)知，$\triangle AEH\cong\triangle CGF$，
$\therefore EH=GF$，
$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形，
$\therefore HG/\!/EF$，
$\therefore \angle HGE=\angle FEG$.
$\because EG$ 平分 $\angle HEF$，
$\therefore \angle HEG=\angle FEG$，
$\therefore \angle HEG=\angle HGE$，
$\therefore HE=HG$，
$\therefore$ 平行四边形 $EFGH$ 是菱形.

19. **解：**(1)通过画图，可得
当 $n=4$ 时，$P_4=1$；当 $n=5$ 时，$P_5=5$.



(2)将上述数值代入公式，得
$\begin{cases}\frac{4\times(4-1)}{24}\cdot(16-4a+b)=1,\\\frac{5\times(5-1)}{24}\cdot(25-5a+b)=5,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=5,\\b=6.\end{cases}$

20. (1)**证明：**在正方形 $ABCD$ 中，$BA=BC$，
$\angle ABP=\angle CBP=45^\circ$.
在 $\triangle ABP$ 和 $\triangle CBP$ 中，
$\begin{cases}BA=BC,\\\angle ABP=\angle CBP,\\PB=PB,\end{cases}$
$\therefore \triangle ABP\cong\triangle CBP$，
$\therefore PA=PC$.
$\because PA=PE$，
$\therefore PC=PE$.
(2)**解：**由(1)知，$\triangle ABP\cong\triangle CBP$，
$\therefore \angle BAP=\angle BCP, \therefore \angle DAP=\angle DCP$.
$\because PA=PE, \therefore \angle DAP=\angle E$，
$\therefore \angle DCP=\angle E$.
$\because \angle CFP=\angle EFD$，
$\therefore \angle CPE=\angle EDF=90^\circ$.

(3)**解**:$AP=CE$.理由如下:
在菱形 $ABCD$ 中,
$BA=BC$,$\angle ABP=\angle CBP=60°$,$\angle ADC=\angle ABC=120°$.
在$\triangle ABP$ 和$\triangle CBP$ 中,$\begin{cases}BA=BC,\\ \angle ABP=\angle CBP,\\ PB=PB,\end{cases}$
$\therefore\triangle ABP\cong\triangle CBP$,
$\therefore PA=PC$,$\angle BAP=\angle BCP$.
$\because PA=PE$,
$\therefore PC=PE$.
$\because\angle BAD=\angle BCD$,
$\therefore\angle DAP=\angle DCP$.
$\because PA=PE$,
$\therefore\angle DAP=\angle AEP$,
$\therefore\angle DCP=\angle AEP$.
$\because\angle CFP=\angle EFD$,
$\therefore\angle CPF=\angle EDF=180°-\angle ADC=180°-120°=60°$,
$\therefore\triangle EPC$ 是等边三角形,
$\therefore PC=CE$,
$\therefore AP=CE$.

第 3 章　图形与坐标

3.1　平面直角坐标系

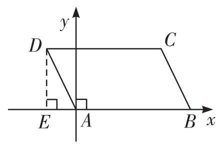
课前预习

1. 互相垂直　x　y　原点　右　上
2. 一一对应　3. 方位角

课堂探究

【例1】思路导引:1　$\sqrt{3}$

解:如图,点 B 的坐标为(5,0).
过点 D 作 $DE\perp x$ 轴于点 E.



在 Rt$\triangle ADE$ 中,$\angle DAE=60°$,$AD=2$,
$\therefore AE=1$,$DE=\sqrt{3}$,
故可得点 D 的坐标为$(-1,\sqrt{3})$.
又$\because$四边形 $ABCD$ 是平行四边形,
$CD=AB=5$,
$\therefore$点 C 的坐标为$(4,\sqrt{3})$.
综上可得,$B(5,0)$,$C(4,\sqrt{3})$,$D(-1,\sqrt{3})$.

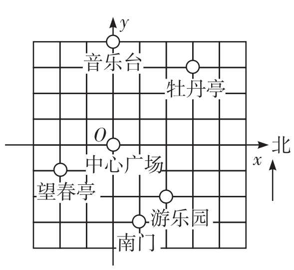
变式训练 1-1:**C**
变式训练 1-2:**A**

【例2】思路导引:1. 45°　2. 圆
北偏东 30°方向

变式训练 2-1:**B**
变式训练 2-2:**解**:$B(4,30°)$,$C(4,240°)$,$D(3,300°)$,$E(6,120°)$.

课堂达标

1. **A**　2. **D**　3. **D**　4. **A**
5. **解**:(1)张明是以中心广场为原点,正东方向为 x 轴正方向,正北方向为 y 轴正方向,建立如图所示的平面直角坐标系的.



(2)李华是用方向和距离来描述牡丹亭的位置.
(3)中心广场(0,0),南门(100,-300),望春亭(-200,-100),游乐园(200,-200),音乐台(0,400).

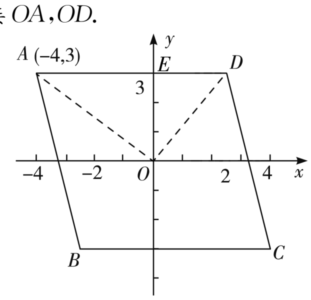
课后提升

【基础达标】

1. **A**　2. **C**　3. **D**　4. **C**
5. (-2,3)
6. 东北方向,距点 O 1 000$\sqrt{2}$ m　7. (2,0)
8. **解**:(1)$\because$点 P 在第三象限的角平分线上,
$\therefore$点 P 到两坐标轴的距离相等,且 $4x=x-3$,
解得 $x=-1$.
(2)$\because$点 P 在第四象限,
$\therefore$点 P 到 x 轴的距离为$-(x-3)=3-x$,到 y 轴的距离为 $4x$,
$\therefore 4x+(3-x)=9$,解得 $x=2$.
9. **解**:(1)正东方向上有超市和艺术中心,要明确这些设施相对于学校的位置还需要距离;
(2)离学校最近的设施是儿童公园,它在学校南偏西 30°方向上,这一方向上还有农贸市场,它们距学校的距离不同;
(3)要确定电视塔相对于学校的位置,需要方位角和距离.

【能力提升】

10. **解**:如图,连接 OA,OD.



$\because$菱形 $ABCD$ 的对称中心为坐标原点,
$\therefore OA\perp OD$.
设 AD 与 y 轴的交点为 E,$DE=x$,
则 $AD=4+x$.
在 Rt$\triangle ODE$ 中,$OD^2=OE^2+DE^2=3^2+x^2$,
在 Rt$\triangle AOE$ 中,$OA^2=OE^2+AE^2=3^2+4^2=25$,
在 Rt$\triangle AOD$ 中,$OA^2+OD^2=AD^2$,
即 $25+3^2+x^2=(x+4)^2$,解得 $x=\dfrac{9}{4}$,
$\therefore B\left(-\dfrac{9}{4},-3\right)$,$C(4,-3)$,$D\left(\dfrac{9}{4},3\right)$.

3.2　简单图形的坐标表示

课前预习

不同

课堂探究

【例1】思路导引:1. 1　2　2. (-1,1)
B

变式训练 1-1:**C**
变式训练 1-2:**A**

【例2】思路导引:1. 4　2. $S_{\triangle BCE}$

解:(1)$AB=OB-OA=5-1=4$.
(2)如图,作 $CE\perp x$ 轴于点 E,$DF\perp x$ 轴于点 F.