初中数学
深度学习

八年级
下册

深度学习就是为迁移而学习的过程，能够让学生将从一个情境中习得的知识应用到其他情境中。

——美国国家研究理事会《面对生活和工作的教育：培养21世纪可迁移的知识与技能》

如果我们的教学还只是让学生浅层学习、机械学习，把人变成机器，人类势必面临被机器取代的危险。因此，时代对人才培养的需求更要求人类进行深度学习。

——教育部基础教育课程教材发展中心 副主任 刘月霞

深度学习是全新教育理念与学习方式变革的标志。

——北京师范大学未来教育高精尖创新中心博士生导师 何克抗

ISBN 978-7-5539-5007-5
9 787553 950075 >
定价：30.00元

初中数学深度学习 八年级 下册

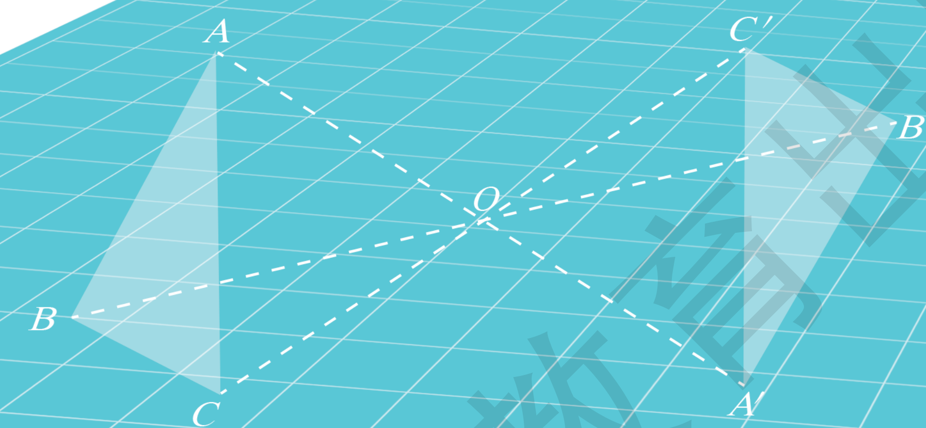
湖南教育出版社

湘教版初中数学教科书配套使用

初中数学
深度学习

丛书主编 / 赵雄辉　本册主编 / 谢宗其

八年级
下册



深度学习帮你：
夯实基础学新课，举一反三会迁移，
提高效率增信心，领悟数学精气神！

湖南教育出版社

湖南省教育科学“十三五”规划立项课题“初中数学‘自主·深度’教学的实践研究”阶段性成果

湘教版初中数学教科书配套使用

初中数学
深度学习

八年级
下册

丛书主编 赵雄辉

本册主编 谢宗其

编　　者 谢宗其　李献军　石　峰

陈　焕　王珍辉　王凤蓉

姜　兴　谢友良　廖红波

杨　军　欧阳雪子

湖南教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

初中数学深度学习．八年级．下册/赵雄辉等编写．—长沙：湖南教育出版社，2020.1
ISBN 978－7－5539－5007－5

Ⅰ．①初…　Ⅱ．①赵…　Ⅲ．①中学数学课－初中—教学参考资料　Ⅳ．①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2019）第 292032 号

初中数学深度学习　八年级下册

CHUZHONG SHUXUE SHENDU XUEXI

赵雄辉等编写

责任编辑： 李漫溢
责任校对： 崔俊辉
出版发行： 湖南教育出版社（长沙市韶山北路 443 号）
网　　址： www.bakclass.com
微 信 号： 贝壳导学
电子邮箱： hnjycbs@sina.com
客服电话： 0731－85486979
经　　销： 湖南省新华书店
印　　刷： 湖南雅嘉彩色印刷有限公司
开　　本： 787 mm×1092 mm　16 开
印　　张： 13.5
字　　数： 290 000
版　　次： 2020 年 1 月第 1 版
印　　次： 2020 年 1 月第 1 次印刷
书　　号： ISBN 978－7－5539－5007－5
定　　价： 30.00 元

使用说明

本章学习指南 1

简明扼要地从“为何学”“学什么”“怎么学”三个角度，介绍本章知识的来龙去脉、学习的意义、学习的内容及学习方法。目的是让你“学前”对本章知识有所了解，“学中”能回顾总结学法，“学后”梳理本章知识体系。因此，学习新课前可以初读，学习新课时宜常看看，学完新课后可适当回头对照。

2 前置夯实

为每课时学习新课做好准备，一定要在课前完成。“前置诊断”让你自查是不是具备了学习新课的基础，激活你学习新课的经验和方法。如果你不能全部做对，一定要按照“前置巩固”查漏补缺。

深度理解 3

从三个途径让你深度学习本课时内容，建议在课后完成。

追根溯源 为你揭示新知识的产生过程，提炼隐含的思想方法，帮你全面理解数学知识，领会“数学精气神”，因此要慢慢精读，细细思考，不要急于去做题目。

变式训练 着力于知识和方法的灵活运用，要先试着做，再核对答案。要想想题目中变了哪些条件、情境或数据，解题的要领有什么相通之处，学会举一反三，由此实现“解一题得一法而通一串”。

反思迁移 帮你归纳重点知识，总结解题规律和方法，理顺本课时知识的内在联系，实现“少刷题得高分”的目标。要细细读，用心体会。

使用说明

4 效果检测

全方位覆盖本课时内容。做题过程中如果碰到困难，可回头看看“深度理解”。要全部做完再去对答案，并及时纠正错误，补齐学习短板。

5 本章整理提升

“知识框架”助你梳理本章知识，“融会贯通”对重点难点作进一步理解提升，让你学会综合运用不同的知识，或从不同解法中找到最优的方法。

6 达标测试

每章末的“本章达标测试”，全书末的“八年级下册达标测试”，帮你检测每一阶段的学习效果。一定要在规定时间内认真完成，并对照书后答案自己评分，及时纠错总结。

contents 目 录

第 1 章 直角三角形

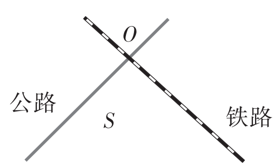
本章学习指南

为何学

数学知识的学习通常经历从特殊到一般，又从一般到特殊的过程. 我们已经学习了一般三角形的一些性质，以及如何判定两个三角形全等，也知道直角三角形是一种特殊三角形. 这促使我们不禁要思考以下问题：直角三角形是否具有一般三角形的性质外的一些特殊性质呢？有没有其他方法来判定直角三角形全等呢？这些就是我们本章将要探索的主要问题.

另外，在日常生活中，我们有时会碰到以下类似问题：

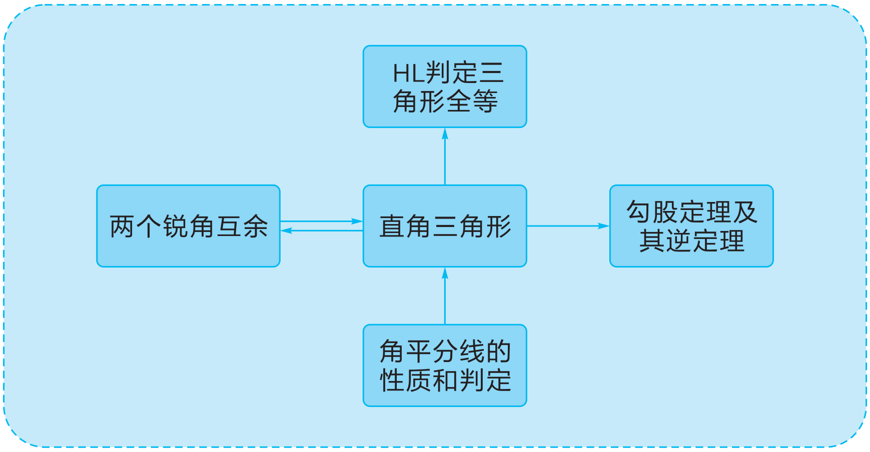
如图，要在 S 区建一个集贸市场，使它到公路、铁路的距离相等，且离公路与铁路的交叉处 500 m，应建在何处（在图上标出它的位置，比例尺 1∶20 000）?



学了本章知识，上述问题就会迎刃而解.

学什么

本章将学习直角三角形的一些知识，比如直角三角形中两个锐角互余，有两个角互余的三角形是直角三角形，直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半，勾股定理及其逆定理，直角三角形全等的特殊判定方法，角平分线的性质和判定等.



怎么学

1. 回顾三角形的知识

学习新知，理应先复习旧知. 直角三角形作为一种特殊三角形，三角形的所有性质及判定两个三角形全等的条件一定都完全适合. 因此认真回顾三角形的有关知识是学习本章的基础. 角分线的性质与判定也是将其转化到一个三角形内，要想灵活运用这些新知，当然也要对三角形的知识非常熟悉.

2. 注重图形和数的转化

华罗庚先生说过：数缺形时少直观，形少数时难入微，数形结合百般好，隔离分家万事休. 这就明确告诉我们，应该把抽象的数学语言、数量关系与直观的几何图形、位置关系结合起来. 例如，由直角三角形想到三边关系式，体现了由形到数；由三边关系式想到直角三角形，体现了由数到形，这样通过代数与图形的相互结合、相互转化，就会使复杂问题简单化，抽象问题具体化，使知识的理解更加深刻明了，同时也发展了自己的数学直观等素养.

3. 注重数学文化、数学知识与实际生活的联系及应用

本章有着丰富的数学史知识，如勾股定理的证明方法，学习过程中，可以主动去收集有关资料，感受勾股定理的丰富文化内涵，激发自己的学习兴趣. 另外，通过一些实际应用，能更好地感受几何图形和代数知识的结合，更好地理解“观察抽象—归纳猜想—演绎推理—得到法则—应用法则”这一数学思维方式，用数学的思维方式来思考、解决实际生活中的一些问题.

1.1 直角三角形的性质和判定(Ⅰ)(1)

一、前置夯实

〖前置诊断〗检测你的基础,助力新课学习.

1. 在△ABC中,∠A=105°,∠B=45°,则∠C的度数是 ( )

A. 35° B. 60° C. 45° D. 30°

2. 在△ABC中,如果∠A+∠B=90°,则△ABC是 ( )

A. 锐角三角形 B. 直角三角形 C. 钝角三角形 D. 不能确定

〖前置巩固〗如果你没有全部正确,务必回顾复习.

1. 如果两个角的和是90°,那么这两个角互余;如果两个角的和是180°,那么这两个角互补.

2. 三角形内角和定理:三角形内角和为180°.

3. 由直角三角形的定义可知,若判定一个三角形为直角三角形,只要三角形中有一个角是直角即可.

你可以开始今天的新课学习了!

前面我们已学过了三角形的一些性质,以及等腰三角形这种特殊三角形的性质和判定,那么直角三角形作为另外一种特殊三角形,又有哪些特定性质和判定方法呢?

二、深度理解

〖追根溯源〗

1. 直角三角形的性质1:直角三角形的两个锐角互余

这一性质是三角形内角和定理的推论,反映了直角三角形中两个锐角的数量关系.

2. 直角三角形的判定1:有两个角互余的三角形是直角三角形

在一个三角形中,如果两个角的和等于90°,则由三角形内角和定理可知,第三个角是直角,因而可以判定这个三角形是直角三角形. 这一判定与性质1互为逆定理.

3. 直角三角形的性质2:直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半

这一性质成立的条件有两个:直角三角形和斜边上的中线,两个条件必须同时满足.

由直角的特殊性推出直角三角形斜边上的中线与斜边的特殊关系,即由角的关系推出线段之间的关系. 直角三角形斜边上的中线把直角三角形分成两个等腰三角形,为证

明线段相等提供了新的思路和方法. 另外,证明直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半还有很多其他方法,大家不妨试试.

4. 三角形一条边上的中线等于这条边的一半,则这个三角形是直角三角形

课本中例 1 实际上提供了直角三角形的一种判定方法. 要注意是“一条边上的中线”,而不是“斜边上的中线”.

〖变式训练〗

1. 在直角三角形中,有一个角为 $52°$,那么另一个锐角的度数是________.

2. 一个三角形三个内角的度数之比为 $3:4:7$,则这个三角形一定是 （　　）

A. 直角三角形　　B. 等腰三角形　　C. 钝角三角形　　D. 锐角三角形

3. 如图 1.1-1-1,在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle ABC=90°$,BD 是 AC 边上的中线.

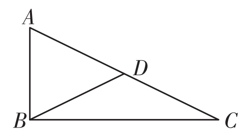


图 1.1-1-1

(1)一定与 CD 相等的线段有________;

(2)一定与 $\angle A$ 相等的角有________;

(3)若 $\angle A=55°$,那么 $\angle DCB=$________.

〖反思迁移〗

1. 如果一个三角形是直角三角形,则一定有两个角互余.

2. 直角三角形的性质比一般三角形的性质更加特殊,由直角的特殊性推出直角三角形中线段的特殊关系:直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半. 由角的关系推出线段之间的关系,是几何中的常见思路.

3. 其中一条边上的中线等于这条边的一半的三角形是直角三角形,可以用来判定一个三角形是不是直角三角形.

三、效果检测

1. 在$\triangle ABC$ 中,若 $\angle A=51°$,$\angle B=39°$,则$\triangle ABC$ 是 （　　）

A. 锐角三角形　　B. 直角三角形　　C. 钝角三角形　　D. 等腰三角形

2. 如图 1.1-1-2,在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle BAC=90°$,$AD\perp BC$,则与 $\angle BAD$ 互余的角为 （　　）

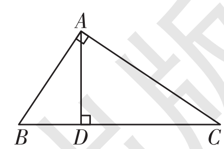


图 1.1-1-2

A. $\angle B$　　B. $\angle C$

C. $\angle CAD$ 和 $\angle B$　　D. $\angle CAD$

3. 在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$,$\angle A-\angle B=10°$,那么 $\angle A=$________,$\angle B=$________.

4. 若直角三角形斜边上的中线长为 5,则斜边长为________.

5. 如图 1.1-1-3,在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$,如果 $\angle A=30°$,那么直角边 BC 与斜边 AB 有什么关系呢? 为什么?

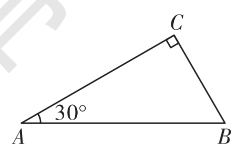


图 1.1-1-3

1.1 直角三角形的性质和判定(Ⅰ)(2)

一、前置夯实

〖前置诊断〗检测你的基础，助力新课学习.

1. 在$\triangle ABC$中，$\angle B=45^\circ$，$AB=AC$，$\triangle ABC$是 ( )

A. 锐角三角形　　B. 等边三角形

C. 直角三角形　　D. 钝角三角形

2. 如图1.1－2－1，在$Rt\triangle ABC$中，$\angle ACB=90^\circ$，ED是AC的垂直平分线，交AB于点F. 若$\angle A=50^\circ$，则$\angle FCB$的度数为 ( )

A. 30°

B. 40°

C. 50°

D. 60°

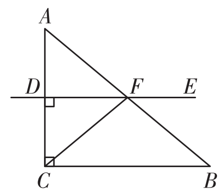


图1.1－2－1

3. 轮船A在灯塔B的北偏东30°处，则灯塔B在轮船A的 ( )

A. 南偏西30°　　B. 北偏东30°

C. 南偏西60°　　D. 北偏东60°

〖前置巩固〗如果你没有全部正确，务必回顾复习.

1. 直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

2. 方位角是一个重要的概念，先画出东南西北方位，再看清楚是哪个方向偏哪个方向.

你可以开始今天的新课学习了!

我们知道直角三角形中一定有两个角是锐角，假设有一个锐角等于30°，那这个角所对的直角边与斜边有何关系呢? 反过来，如果直角三角形中一条直角边和斜边之间满足上述关系，那么可以断定这条直角边所对的角是30°吗?

二、深度理解

〖追根溯源〗

1. 在直角三角形中，如果一个锐角等于30°，那么它所对的直角边等于斜边的一半

要想运用这一性质，则一定要同时满足两个条件：①直角三角形；②有一个锐角是

30°. 若只满足其中一个条件，则不能用这条性质.

利用这一性质可以进行一些有关线段的计算和证明. 如：已知 30°角的对边，求斜边长；已知斜边，求 30°角所对的边.

这条性质把角度关系与线段长度关系进行了相互转化，体现了“形”“数”之间相互化归与转化的数学思想.

2. 在直角三角形中，如果一条直角边等于斜边的一半，那么这条直角边所对的角等于 30°

利用这一性质时，一定要同时满足两个条件：①直角三角形；②一条直角边等于斜边的一半. 这条性质与上条性质是互逆命题，都是化归与转化思想运用的体现. 要注意的是，它们的共同前提条件都是：在直角三角形中.

〖变式训练〗

1. 如图 1.1－2－2，在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$CD\perp AB$，$\angle A=30°$，$AB=4$，则 BD 的长度为　　(　　)

A. 3　　B. 2

C. 1　　D. 4

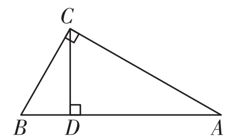


图 1.1－2－2

2. 一个等腰三角形一腰上的高等于腰长的一半，则这个等腰三角形顶角的度数是________.

3. 一艘轮船由南向北航行，如图 1.1－2－3，在 A 处测得小岛 P 在北偏西 15°方向上. 两个小时后，轮船在 B 处测得小岛 P 在北偏西 30°方向上. 现知道在小岛 P 周围 18 海里内有暗礁，若该轮船按 15 海里/h 的速度向前航行，是否有触礁的危险？

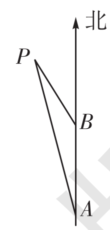


图 1.1－2－3

〖反思迁移〗

1. 发现 30°角，我们就要想办法将其转化到某直角三角形中，然后找到 30°角所对的直角边，就会得出这条边等于斜边的一半.

2. 在解决有关方位角的问题时，要根据题意理清图中各角的关系. 有时所给的方位角不一定在直角三角形中，需要正确作出辅助线，构造出直角三角形来求解.

三、效果检测

1. 如图 1.1－2－4，在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90^\circ$，$CD\perp AB$，$\angle B=60^\circ$，$BD=2$，则 AB 的长为　　（　　）

A. 2　　B. 4

C. 8　　D. 12

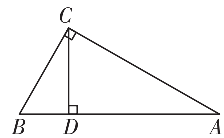


图 1.1－2－4

2. 等腰三角形的一腰长为 $4a$，底角为 15°，则另一腰上的高为　　（　　）

A. a　　B. $2a$　　C. $3a$　　D. $4a$

3. 在 Rt△ABC 中，$\angle B=90^\circ$，$\angle C=30^\circ$，$AC=6$ cm，那么 $AB=$________.

4. 如图 1.1－2－5，在△ABC 中，若 $\angle BAC=120^\circ$，$AB=AC$，$AD\perp AC$ 于点 A，$BD=3$ cm，则 $BC=$________.

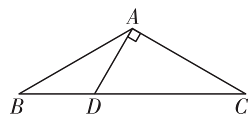


图 1.1－2－5

5. 如图 1.1－2－6，在△ABC 中，$\angle C=30^\circ$，$\angle BAC=105^\circ$，$AD\perp BC$，垂足为 D，$AC=2$ cm，求 BD 的长.

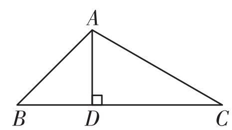


图 1.1－2－6

6. 如图 1.1－2－7，在 A 岛周围 20 海里水域有暗礁，一轮船由西向东航行到 O 处时，发现 A 岛在北偏东 60°的方向，且与轮船相距 $20\sqrt{3}$ 海里，该轮船如果不改变航向，有触礁的危险吗？（$\sqrt{3}\approx1.73$）

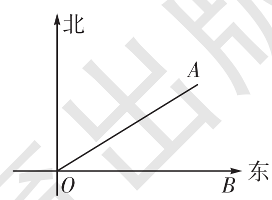


图 1.1－2－7

1.2 直角三角形的性质和判定(Ⅱ)(1)

一、前置夯实

〖前置诊断〗检测你的基础,助力新课学习.

1. 若$(x+4)^2=x^2+8x+b$,则b的值为 ( )

A. 8　　B. ± 16　　C. -8　　D. 16

2. 已知一个正方形的面积为12,则它的边长为 ( )

A. 6　　B. $2\sqrt{3}$　　C. $3\sqrt{2}$　　D. 4

3. 已知直角三角形的两条直角边长分别为3和4,则这个三角形的面积为 ( )

A. 6　　B. 3.5　　C. 12　　D. 7

〖前置巩固〗如果你没有全部正确,务必回顾复习.

1. 完全平方公式:$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$.
2. 正数有一个正的平方根,这个平方根叫做算术平方根.
3. 直角三角形的面积等于两条直角边的积的一半.

你可以开始今天的新课学习了!

直角三角形中,三边之间有特殊的数量关系吗?今天我们来探究直角三角形三边之间的数量关系.

二、深度理解

〖追根溯源〗

1. 勾股定理:直角三角形两直角边a,b的平方和,等于斜边c的平方

(1)这一定理只对直角三角形适用,对锐角三角形和钝角三角形不适用.利用公式时,要分清是直角边还是斜边.

(2)直角三角形中,已知任意两边,可以求出第三边.$a^2+b^2=c^2$,可化为:$a^2=c^2-b^2$,$b^2=c^2-a^2$(a,b为直角边,c为斜边).

(3)这一定理把角度关系转化为数量关系,是转化思想的一个典范.

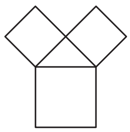
2. 勾股定理可以用图形的面积证明

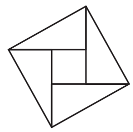
体现了数形结合的数学思想,把直角三角形这个“形”与三边关系这一“数”结合起来.教科书中给出了勾股定理的一种证明方法,历史上有许多人对勾股定理进行了研究,

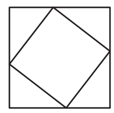
给出了勾股定理的一些证明方法，感兴趣的同学可以自行查阅有关资料.

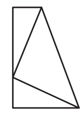
3. 勾股定理又称商高定理、毕达哥拉斯定理、百牛定理

例 1 勾股定理是“人类最伟大的十个科学发现之一”. 我国对勾股定理的证明是由汉代的赵爽在注解《周髀算经》时给出的，他用来证明勾股定理的图案被称为“赵爽弦图”. 2002 年在北京召开的国际数学大会就是选它作为会徽. 下列图案中是“赵爽弦图”的是 ( )


A


B


C


D

解：“赵爽弦图”是由 4 个全等的直角三角形和中间的小正方形拼成的一个大正方形，故选 B.

例 2 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，a，b，c 分别表示$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的对边.

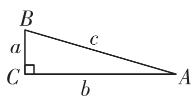


图 1.2－1－1

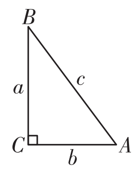


图 1.2－1－2

(1)如图 1.2－1－1，已知：$a=7$，$c=25$，求 b；

(2)如图 1.2－1－2，已知：$c=25$，$a:b=4:3$，求 a，b.

解：(1)$b=\sqrt{25^2-7^2}=24$.

(2)设 $a=4x$，$b=3x$.

由题意可得 $c=\sqrt{(4x)^2+(3x)^2}=5x=25$.

解得 $x=5$.

所以 $a=20$，$b=15$.

注意：本题考查的是勾股定理，如果直角三角形的三边长分别为 a，b，c，则满足 $a^2+b^2=c^2$.

〖变式训练〗

1. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，有两边的长分别为 3 和 4，则第三边的长为 ( )

A. 5　　B. $\sqrt{7}$　　C. 5 或$\sqrt{7}$　　D. 5 或$\sqrt{11}$

2. 已知$\triangle ABC$ 的三边长为 a，b，c，且满足 $a+b=10$，$ab=18$，$c=8$，则此三角形为________三角形.

3. 如图 1.2－1－3，在等腰$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，AD 是底边 BC 上的高，若 $AB=5$ cm，$BC=6$ cm，求 AD 的长.

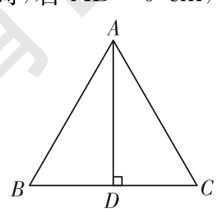


图 1.2－1－3

〖反思迁移〗

1. 勾股定理是刻画直角三角形三边关系的重要定理，一定要熟记. 在直角三角形中，已知任意两边，可以求出第三边.

2. 利用勾股定理解题时，要分清直角边和斜边，题目没有指明斜边时，要分类讨论.

三、效果检测

1. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，若 $AB=13$，$BC=5$，则 AC 的长为 ( )

A. 5　　B. 8　　C. 12　　D. 18

2. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，有两边的长分别 5 和 12，则第三边长为________.

3. 直角三角形的斜边长为 5 cm，两直角边长之比为 3∶4，那么这个直角三角形的周长为________.

4. 如图 1.2-1-4，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，以它的各边为边向外作三个正方形，面积分别为 S_1，S_2，S_3，已知 $S_1=6$，$S_2=8$，则 $S_3=$________.

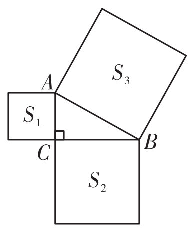


图 1.2-1-4

5. 如图 1.2-1-5，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$BC=6$，$AC=8$，AB 的垂直平分线 DE 交 AB 于点 D，交 AC 于点 E，连接 BE.

(1)求 AD 的长；

(2)求 AE 的长.

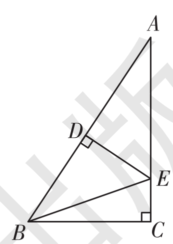


图 1.2-1-5

1.2 直角三角形的性质和判定(Ⅱ)(2)

一、前置夯实

〖前置诊断〗检测你的基础,助力新课学习.

1. 在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle C=90^\circ$,$AB=10$ cm,$AC=8$ cm,则 BC 长为 (　　)

A. 6 cm　　B. 14 cm　　C. 12 cm　　D. 18 cm

2. 在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle B=90^\circ$,$AB=5$,$BC=12$,则 AC 的长为 (　　)

A. 7　　B. $\sqrt{119}$　　C. 13　　D. 18

3. 在 Rt$\triangle ABC$ 中,有两边的长分别为 3 和 5,则第三边的长为 (　　)

A. 4　　B. $\sqrt{29}$　　C. 4 或 $\sqrt{29}$　　D. 4 或 $\sqrt{34}$

〖前置巩固〗如果你没有全部正确,务必回顾复习.

1. 勾股定理:直角三角形的两条直角边的平方和,等于斜边的平方.
2. 全等三角形的性质:全等三角形的对应边相等,对应角相等.

你可以开始今天的新课学习了!

我们已经学习了勾股定理,运用勾股定理可以解决一些几何问题和实际问题.

二、深度理解

〖追根溯源〗

1. 利用勾股定理解决实际问题,要善于从实际问题中抽象出几何模型,再画出几何图形,从而把实际问题转化为数学问题.

2. 构造直角三角形模型后,确定斜边、直角边;不是直角三角形的要通过作垂线(或平行线)构造出直角三角形.

3. 在实际问题中,常常默认电线杆、旗杆、大树、建筑物等垂直于地面.

4. 求解方位角的问题时,东西方向和南北方向在平面中恰好垂直,因而常利用这一垂直关系来建立直角三角形.

5. 要注意用转化、数形结合、方程等思想来解决相关问题.

例 1　数学综合实验课上，同学们在测量学校旗杆的高度时发现：将旗杆顶端升旗用的绳子垂到地面还多 2 m；当把绳子的下端拉开 8 m 后，下端刚好接触地面，如图 1.2-2-1. 根据以上数据，同学们准确求出了旗杆的高度，你知道他们是如何计算出来的吗？

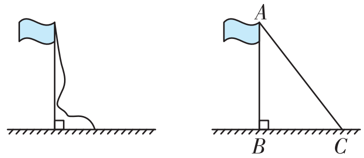


图 1.2-2-1

解：设旗杆高 x m，则绳子长为$(x+2)$ m.

∵旗杆垂直于地面，

∴旗杆、绳子与地面构成直角三角形.

由题意列式为 $x^2+8^2=(x+2)^2$，解得 $x=15$.

∴旗杆的高度为 15 m.

注意：由题可知，旗杆、绳子与地面构成直角三角形，根据题中数据，用勾股定理即可求解. 本题考查的是勾股定理的应用，根据题意找出直角三角形是解答此题的关键.

例 2　如图 1.2-2-2，甲乙两船从港口 A 同时出发，甲船以 16 海里/h 的速度向北偏东 40°方向航行，乙船向南偏东 50°方向航行，3 h 后，甲船到达 C 岛，乙船到达 B 岛. 若 C，B 两岛相距 102 海里，问乙船的航速是多少？

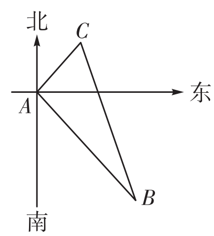


图 1.2-2-2

解：∵$\angle BAC=180°-40°-50°=90°$，

∴$\triangle ABC$ 是直角三角形，

∴$AC^2+AB^2=BC^2$.

∵$AC=16\times3=48$(海里)，$BC=102$ 海里，

∴$AB=\sqrt{BC^2-AC^2}=\sqrt{102^2-48^2}=90$(海里).

∵乙船航行时间为 3 h，

∴乙船的航速为 $90\div3=30$(海里/h).

答：乙船的航速是 30 海里/h.

注意：先根据方位角的定义证得$\triangle ABC$ 是直角三角形，再求出 AC 的长度，根据勾股定理求得 AB 的长，然后根据乙船的航行时间即可解题. 本题考查了方位角问题及勾股定理的应用，理解方位角的定义证得$\triangle ABC$ 是直角三角形是解答本题的关键.

〖变式训练〗

1. 一云梯 AB 长 25 m，如图 1.2-2-3 所示斜靠在一面墙上，云梯底端离墙 7 m，如果云梯的顶端下滑了 4 m，那么它的底端在水平方向滑动 BB' 的长是　（　　）

A. 10 m

B. 8 m

C. 6 m

D. 4 m

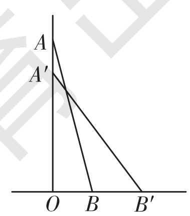


图 1.2-2-3

2. 老师要求同学们设计一个测量某池塘两端 A,B 距离的方案，王兵设计的方案如下：如图1.2-2-4，在池塘外选一点 C，测得 $\angle CAB=90^\circ$，$\angle C=30^\circ$，$AC=36$ m，则可知 AB 的距离为 (　　)

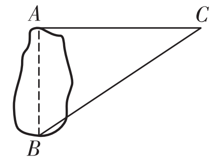


图1.2-2-4

A. $19\sqrt{3}$ m　　B. 19 m

C. $12\sqrt{3}$ m　　D. $12\sqrt{2}$ m

3. 如图1.2-2-5是一株美丽的勾股树，其中所有的四边形都是正方形，所有的三角形都是直角三角形. 若正方形 A,B,C,D 的边长分别是3,5,2,3，则最大正方形 E 的面积是 (　　)

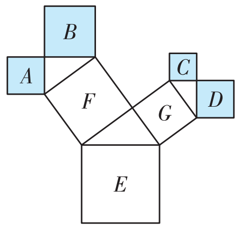


图1.2-2-5

A. 13　　B. 26　　C. 34　　D. 47

4. 如图1.2-2-6，甲轮船以24海里/h的速度离开港口 O 向东南方向航行，乙轮船在同时同地向西南方向航行，已知它们离开港口 O 半小时后分别到达 B,A 两点，且相距15海里，问乙轮船每小时航行多少海里？

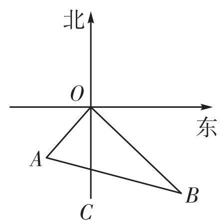


图1.2-2-6

〖反思迁移〗

1. 利用勾股定理解决实际问题，要抽象出几何图形，找到直角三角形，同时注意问题中变与不变的线段长度.

2. 还可利用勾股定理求由几个正方形或圆构成的图形的面积.

三、效果检测

1. 如图1.2-2-7，一棵大树在离地面6 m高的 B 处断裂，树顶 A 落在离树底部 C 的8 m处，则大树断裂之前的高度为 (　　)

A. 16 m　　B. 15 m

C. 24 m　　D. 21 m

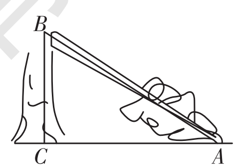


图1.2-2-7

2. 如图 1.2－2－8，公路 AC，BC 互相垂直，公路 AB 的中点 M 与点 C 被湖隔开，若测得 $AC=12$ km，$BC=16$ km，则 M，C 两点之间的距离为　（　　）

A. 13 km　　B. 12 km　　C. 11 km　　D. 10 km

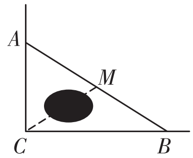


图 1.2－2－8

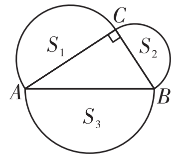


图 1.2－2－9

3. 如图 1.2－2－9，在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，则三个半圆的面积关系是　（　　）

A. $S_1+S_2>S_3$　　B. $S_1+S_2=S_3$　　C. $S_1+S_2<S_3$　　D. $S_1^2+S_2^2=S_3^2$

4. 如图 1.2－2－10，一艘船由 A 港沿北偏东 60°方向航行 10 km 至 B 港，然后再沿北偏西 30°方向航行 10 km 至 C 港.

(1)求 A，C 两港之间的距离(结果精确到 0.1 km，参考数据：$\sqrt{2}\approx1.414$，$\sqrt{3}\approx1.732$)；

(2)确定 C 港在 A 港的什么方向.

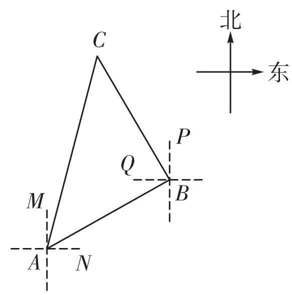


图 1.2－2－10

5. 甲同学在拼图探索活动中发现，用 4 个形状大小完全相同的直角三角形(直角边长分别为 a，b，斜边长为 c)，可以拼成如图 1.2－2－11 所示的正方形，并由此得出了关于 a^2，b^2，c^2 的一个等式.

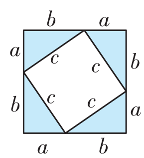


图 1.2－2－11

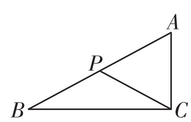


图 1.2－2－12

(1)请你写出这一结论：________，并给出验证过程；

(2)试用上述结论解决问题：如图 1.2－2－12，P 是 Rt△ABC 斜边 AB 上的一个动点，已知 $AC=5$，$AB=13$，求 PC 的最小值.

1.2 直角三角形的性质和判定(Ⅱ)(3)

一、前置夯实

〖前置诊断〗检测你的基础,助力新课学习.

1. 若等腰三角形的腰长为13,底边长为10,则底边上的高为 ( )

A. 6　　B. 7　　C. 9　　D. 12

2. 下列命题的逆命题是假命题的是 ( )

A. 直角三角形中的两个锐角互余

B. 直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半

C. 两个全等三角形的对应角相等

D. 两个全等三角形的对应边相等

3. 请写出"直角三角形的两条直角边 a、b 和斜边 c 满足关系式:$a^2+b^2=c^2$"的逆命题:____________________.

〖前置巩固〗如果你没有全部正确,务必回顾复习.

1. 勾股定理:直角三角形的两条直角边 a,b 的平方和,等于斜边 c 的平方.

2. 互逆命题:对于两个命题,如果一个命题的条件和结论分别是另一个命题的结论和条件,我们把这样的两个命题称为互逆命题,其中一个叫作原命题,另一个叫作逆命题.

你可以开始今天的新课学习了!

我们知道"直角三角形两直角边的平方和,等于斜边的平方",那么反过来,已知一个三角形有两边的平方和等于第三边的平方,能判定这个三角形是直角三角形吗?

二、深度理解

〖追根溯源〗

1. 勾股定理的逆定理:如果三角形的三条边长 a,b,c 满足关系式:$a^2+b^2=c^2$,那么这个三角形是直角三角形.

勾股定理的逆定理是判定一个三角形为直角三角形的方法,不能叙述为"斜边的平方等于两条直角边的平方和".在判定一个三角形为直角三角形之前,不能说哪条边为斜边,哪条边为直角边.

这一定理把线段长度关系转化为角度关系,是由"数"到"形",体现了数形结合的转化思想.

2. 勾股数:满足 $a^2+b^2=c^2$ 的三个正整数称为勾股数.

勾股数是一组正整数.以一组勾股数的长度为三边的三角形,是一个直角三角形.

常见的勾股数有：3，4，5；5，12，13；7，24，25；8，15，17；9，40，41 等. 对于任何一组勾股数，将各数乘相同整数，则能得到另一组勾股数. 如：由 3，4，5 是一组勾股数，可得到 18，24，30 也是勾股数.

例 1 如图 1.2－3－1，正方形网格中每个小方格的边长为 1，且点 A，B，C 均为格点，通过计算判断△ABC 的形状.

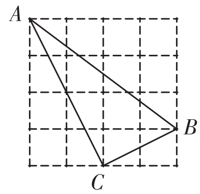


图 1.2－3－1

解：由勾股定理得 $AC^2=4^2+2^2=20$，$BC^2=2^2+1^2=5$，$AB^2=3^2+4^2=25$，

∴$AC^2+BC^2=AB^2$，

∴△ABC 是直角三角形.

例 2 如图 1.2－3－2，在△ABC 中，$BD\perp AC$，$AB=20$，$BC=15$，$CD=9$.

(1)求 AC 的长；

(2)判断△ABC 的形状并证明.

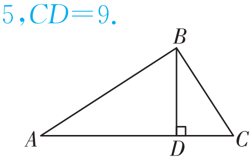


图 1.2－3－2

解：(1)在△ABC 中，∵$BD\perp AC$，$AB=20$，$BC=15$，$DC=9$，

∴$BD=\sqrt{15^2-9^2}=12$，

∴$AD=\sqrt{20^2-12^2}=16$.

∴$AC=AD+DC=16+9=25$.

(2)∵$AC=25$，$BC=15$，$AB=20$，$20^2+15^2=25^2$，

∴△ABC 是直角三角形.

〖变式训练〗

1. 下列四组线段，可以构成直角三角形的是 (　　)

A. 4，5，6　　B. 5，12，13　　C. 2，3，4　　D. 1，$\sqrt{2}$，3

2. 适合下列条件的△ABC 中，直角三角形的个数为 (　　)

(1)$a=b$，$\angle A=45°$；　　(2)$\angle A=32°$，$\angle B=58°$；

(3)$a=6$，$b=8$，$c=10$；　　(4)$a=6^2$，$b=8^2$，$c=10^2$.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

3. 已知 a，b，c 是△ABC 的三边长，且满足关系式 $\sqrt{c^2-a^2-b^2}+|a-b|=0$，则△$ABC$ 的形状为____________.

4. 如图 1.2－3－3，在△ABC 中，已知 $AB=AC=13$ cm，D 是 AB 上一点，且 $CD=12$ cm，$BD=8$ cm.

(1)求证：△ADC 是直角三角形；

(2)求 BC 的长.

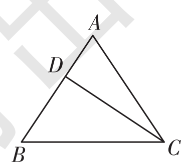


图 1.2－3－3

〖反思迁移〗

1. 用勾股定理的逆定理判定直角三角形的步骤：

(1)先找出最长的一条边 c，算出 c^2.

(2)计算两条较短边 a，b 的平方和.

(3)如有 $a^2+b^2=c^2$，则可判定这个三角形是直角三角形；否则不能判定. 如果不能确定最长的边，则需分类讨论.

2. 应用勾股定理及其逆定理时应分清条件和结论.

三、效果检测

1. 在△ABC 中，$AB=12$ cm，$AC=9$ cm，$BC=15$ cm，则△ABC 的面积 $S_{\triangle ABC}$ 是 (　　)

A. 108 cm^2　　B. 54 cm^2　　C. 180 cm^2　　D. 90 cm^2

2. 已知 $\sqrt{a-12}+(b-5)^2+|c-13|=0$，则以 a，b，c 为三边的三角形的形状是______________.

3. 如图 1.2－3－4，在 4×3 的正方形网格中，每个小正方形的边长都为 1.

(1)线段 AB 的长为________；

(2)在图中作出线段 EF，使得 EF 的长为 $\sqrt{13}$，判断 AB，CD，EF 三条线段能否构成直角三角形，并说明理由.

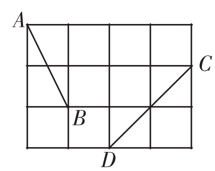


图 1.2－3－4

4. 如图 1.2－3－5 所示有一块铁皮(图中阴影部分)，测得 $AB=3$，$BC=4$，$CD=12$，$AD=13$，$\angle B=90°$. 求阴影部分的面积.

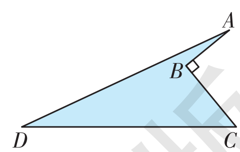


图 1.2－3－5

5. 如图 1.2－3－6，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=BC=CD=AD=4$，$\angle DAB=\angle B=\angle C=\angle D=90°$，$E$，$F$ 分别是 BC 和 CD 边上的点，且 $CE=\frac{1}{4}BC$，F 为 CD 的中点，问△AEF 是什么三角形？并说明理由.

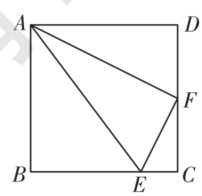


图 1.2－3－6

1.3 直角三角形全等的判定

一、前置夯实

〖前置诊断〗检测你的基础，助力新课学习.

1. 如图 1.3－1，已知$\angle B=\angle D$，$\angle 1=\angle 2$，则可以直接判定$\triangle ABC\cong\triangle ADC$的理由是（　　）

A. AAS　　B. SSS

C. ASA　　D. SAS

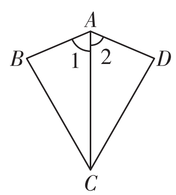


图 1.3－1

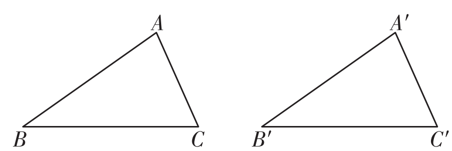


图 1.3－2

2. 如图 1.3－2，$AB=A'B'$，$\angle A=\angle A'$，若$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$，则还需添加的一个条件有（　　）

A. 1 种　　B. 2 种

C. 3 种　　D. 4 种

3. 如图 1.3－3，在$\triangle ABD$和$\triangle ACE$中，$AB=AC$，$AD=AE$，要证$\triangle ABD\cong\triangle ACE$，需补充的条件是（　　）

A. $\angle B=\angle C$　　B. $\angle D=\angle E$

C. $\angle DAE=\angle BAC$　　D. $\angle CAD=\angle DAC$

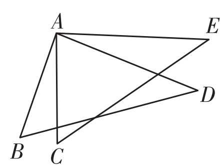


图 1.3－3

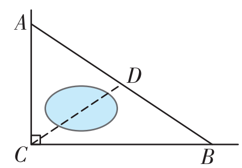


图 1.3－4

4. 如图 1.3－4，笔直的公路 AB，AC，BC 中 AC，BC 互相垂直，AB 的中点 D 与点 C 被建筑物隔开，若测得 AC 的长为 3 km，BC 的长为 4 km，则 C，D 之间的距离为________km.

〖前置巩固〗如果你没有全部正确，务必回顾复习.

1. 全等三角形的判定方法有：SSS，SAS，ASA，AAS. 全等三角形对应边相等，全等三角形对应角相等.

2. 直角三角形的性质及其判定.

你可以开始今天的新课学习了！

两个三角形全等的判定方法有：SSS，SAS，ASA，AAS. 那么判定两个特殊三角形——直角三角形全等是否还有其他特殊的方法呢？

二、深度理解

〖追根溯源〗

1. 以前学的判定两个三角形全等的方法，对于直角三角形同样适用.

2. 直角三角形全等的判定，除了 SAS，ASA，AAS 外，还可以根据 HL 来判定. HL 是判定直角三角形全等特有的方法.

3. 在用 HL 判定两个直角三角形全等时，一定要强调是“在直角三角形中”这个条件，同时要保证斜边和一条直角边分别对应相等.

例 如图 1.3－5，$\angle A=\angle D=90°$，$AB=DE$，$BF=EC$.

求证：$Rt\triangle ABC\cong Rt\triangle DEF$.

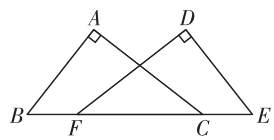


图 1.3－5

分析： 先由 $BF=EC$ 得到 $BC=EF$，再根据“HL”判定 $Rt\triangle ABC\cong Rt\triangle DEF$.

证明： $\because BF=EC$，

$\therefore BF+FC=EC+FC$，即 $BC=EF$.

$\because \angle A=\angle D=90°$，

$\therefore \triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 都是直角三角形.

在 $Rt\triangle ABC$ 和 $Rt\triangle DEF$ 中，

$\because AB=DE$，$BC=EF$，

$\therefore Rt\triangle ABC\cong Rt\triangle DEF$（HL）.

〖变式训练〗

1. 如图 1.3－6，$\angle A=\angle D=90°$，$AC=DB$，则 $Rt\triangle ABC\cong Rt\triangle DCB$ 的理由是 （　　）

A. HL

B. ASA

C. AAS

D. SAS

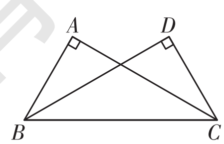


图 1.3－6

2. 如图 1.3－7，在$\triangle ABC$中，$AD\perp BC$于点D，再添加一个条件使$\mathrm{Rt}\triangle ABD\cong\mathrm{Rt}\triangle ACD$.

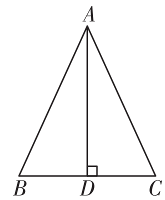


图 1.3－7

3. 如图 1.3－8，$AD\perp BE$，垂足C是BE的中点，$AB=DE$，求证：$AB/\!/ED$.

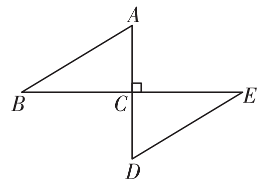


图 1.3－8

〖反思迁移〗

1. 判定两个直角三角形全等，总共有 HL，SAS，ASA，AAS 四种方法. 具体证明时应根据已知条件，选择恰当的方法.

2. 根据 HL 判定直角三角形全等，注意书写格式. 首先要强调“在 Rt△中”，摆出两个条件斜边直角边相等.

3. 证明直角三角形全等，不管用什么方法，也应至少有一条边对应相等.

三、效果检测

1. 如图 1.3－9，用$\angle A=\angle B=90^\circ$，$AC=BC$，直接判定$\mathrm{Rt}\triangle ACO\cong\mathrm{Rt}\triangle BCO$的理由是（　　）

A. AAS　　B. HL

C. ASA　　D. SAS

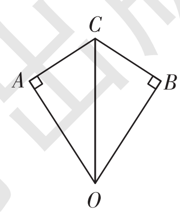


图 1.3－9

2. 下列判定两个直角三角形全等的方法中，不正确的是（　　）

A. 两条直角边分别对应相等

B. 斜边和一锐角分别对应相等

C. 斜边和一条直角边分别对应相等

D. 两个锐角对应相等

3. 如图 1.3－10，在 Rt△ABC 和 Rt△DEF 中，$\angle C=\angle F=90°$.

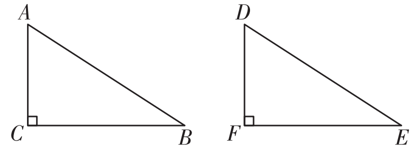


图 1.3－10

(1)若 $AC=DF$，$AB=DE$，则 Rt△ABC≌Rt△DEF 的依据是________；

(2)若 $AC=DF$，$CB=FE$，则 Rt△ABC≌Rt△DEF 的依据是________.

4. 如图 1.3－11，$\angle A=\angle B=90°$，E 是 AB 上的一点，且 $AD=BE$，$\angle 1=\angle 2$.
求证：Rt△ADE≌Rt△BEC.

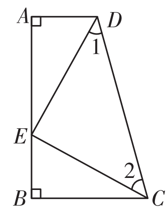


图 1.3－11

5. 如图 1.3－12，小亮和小红以相同的速度分别同时从 A，B 出发，小亮沿 AC 行走，小红沿 BD 行走，并同时到达 C，D. 若 $CB\perp AB$，$DA\perp AB$，那么 CB 与 DA 相等吗？为什么？

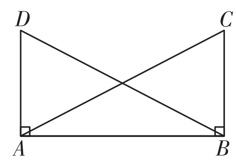


图 1.3－12

6. 如图 1.3－13，在△ABC 中，D 是 BC 边上的中点，$DE\perp AB$，$DF\perp AC$，垂足分别为 E，F，且 $DE=DF$. 试判断△ABC 是什么三角形，并说明理由.

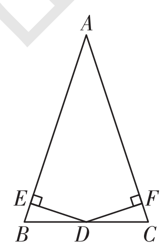


图 1.3－13

1.4 角平分线的性质(1)

一、前置夯实

〖前置诊断〗检测你的基础,助力新课学习.

1. 如图 1.4-1-1,在$\triangle ABC$中,CD平分$\angle ACB$,E是BC延长线上的一点,$CF\perp CD$. 如果$\angle ACB=70°$,那么下列说法中错误的是 ( )

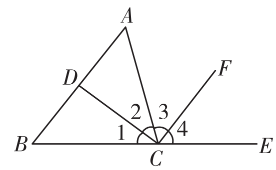


图 1.4-1-1

A. $\angle 1+\angle 3=90°$

B. $\angle 1+\angle 4=90°$

C. $\angle 2=\angle 4$

D. $\angle 3=\angle 4$

2. 如图 1.4-1-2,在 Rt$\triangle ABE$ 中,$\angle E=90°$,$AE=\frac{1}{2}AB=2$,AC,AD分别是$\angle BAE$和$\angle BAC$的平分线,则$\angle BAC$的度数和BD的长分别为 ( )

A. $30°,2\sqrt{3}-2$

B. $30°,2\sqrt{3}-1$

C. $45°,2\sqrt{3}-2$

D. $45°,2\sqrt{3}-1$

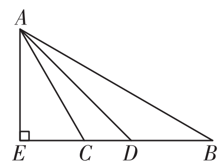


图 1.4-1-2

〖前置巩固〗如果你没有全部正确,务必回顾复习.

1. 角平分线把一个角分成两个相等的角.

2. 直角三角形的性质:

(1)直角三角形中,若某直角边等于斜边的一半,则这条直角边所对的角等于 30°;

(2)勾股定理.

3. 直角三角形全等的判定方法:SAS,ASA,AAS,HL.

你可以开始今天的新课学习了!

角平分线有什么性质?怎样判定一个角的角平分线?怎样利用角平分线的性质解决几何问题和实际应用问题?通过本节课的学习,我们将解决这些问题.

二、深度理解

〖追根溯源〗

1. 角平分线上的点到角的两边的距离，是指点到线的距离，是指两条垂线段的长度. 要分清“两点间的距离”“点到直线的距离”.

2. 要弄清角平分线性质定理的条件和结论. 条件为“角平分线上的点”和“到角的两边的距离”两个条件，结论为“距离相等”.

3. 角平分线的性质定理的逆定理，即角平分线的判定定理. 要判定一条射线是否为角平分线，首先要保证射线在角的内部，然后只需在这条射线上任取一点，如果这点到角两边的距离相等，则这条射线是角平分线.

4. 角平分线的性质定理是证明角相等、线段相等的新途径. 角平分线的性质定理的逆定理是证明点在直线上（或直线经过某一点）的根据之一.

例 1 如图 1.4－1－3，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle A=90^\circ$，BD 平分 $\angle ABC$. 若$\triangle BCD$ 的面积 $S_{\triangle BCD}=26$，$BC=13$，求 AD 的长.

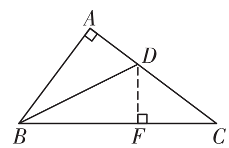


图 1.4－1－3

解： 如图 1.4－1－3，过点 D 作 $DF\perp BC$ 于点 F.

$\because \angle A=90^\circ$，$BD$ 平分 $\angle ABC$，

$\therefore AD=FD$.

$\because \triangle BCD$ 的面积 $S_{\triangle BCD}=26$，$BC=13$，

$\therefore \dfrac{1}{2}\times 13\times DF=26$，

$\therefore DF=4$，

$\therefore AD=4$.

例 2 如图 1.4－1－4，$BE=CF$，$DE\perp AB$ 的延长线于点 E，$DF\perp AC$ 于点 F，且 $DB=DC$. 求证：AD 是 $\angle BAC$ 的平分线.

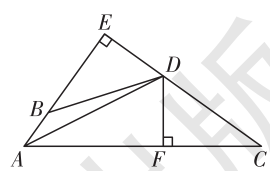


图 1.4－1－4

证明： $\because DE\perp AB$ 的延长线于点 E，$DF\perp AC$ 于点 F，

$\therefore \angle E=\angle CFD=90^\circ$.

在 Rt$\triangle BDE$ 和 Rt$\triangle CDF$ 中，

$\because BE=CF$，$BD=CD$，

$\therefore$ Rt$\triangle BDE\cong$Rt$\triangle CDF$（HL）.

$\therefore DE=DF$，

$\therefore AD$ 是 $\angle BAC$ 的平分线.

注意： 熟知到角的两边的距离相等的点在角的平分线上是解答此题的关键.

〖变式训练〗

1. 如图 1.4－1－5，OP 为$\angle AOB$ 的平分线，$PC\perp OA$，$PD\perp OB$，垂足分别是 C，D，$PC=6$，则 PD 的长是（　　）

A. 3　　B. 5　　C. 6　　D. 8

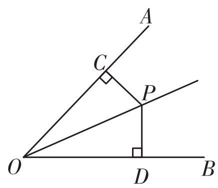


图 1.4－1－5

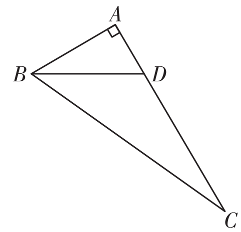


图 1.4－1－6

2. 如图 1.4－1－6，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle A=90^\circ$，BD 平分$\angle ABC$，交 AC 于点 D，且 $AB=8$，$BD=10$，则点 D 到 BC 的距离是________.

3 如图 1.4－1－7，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$AC=BC$，AD 平分$\angle BAC$ 交 BC 于 D，$DE\perp AB$，垂足为 E，且 $AB=10$ cm，求$\triangle DEB$ 的周长.

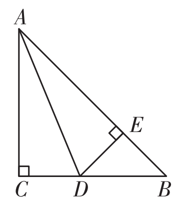


图 1.4－1－7

〖反思迁移〗

1. 角平分线的性质定理为证明角相等、线段相等提供了新方法和新思路. 角平分线的性质定理的逆定理是证明点在直线上(或直线经过某一点)的根据之一.

2. 角平分线的性质定理把角的相等关系转化为线段的相等关系；角平分线的性质定理的逆定理把线段的相等关系转化成了角的相等关系.

三、效果检测

1. 如图 1.4－1－8，已知点 P 到 AE，AD，BC 的距离相等，有下列说法：①点 P 在$\angle A$ 的平分线上；②点 P 在$\angle CBE$ 的平分线上；③点 P 在$\angle BCD$ 的平分线上；④点 P 在$\angle A$，$\angle CBE$，$\angle BCD$ 的平分线的交点上. 其中正确的是（　　）

A. ①②③④　　B. ①②③

C. ④　　D. ②③

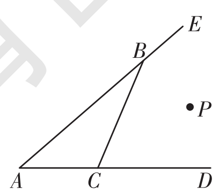


图 1.4－1－8

2. 如图 1.4－1－9，$\angle AOB=82^{\circ}$，$QC\perp OA$ 于点 C，$QD\perp OB$ 于点 D，若 $QC=QD$，则 $\angle AOQ=$________.

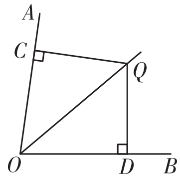


图 1.4－1－9

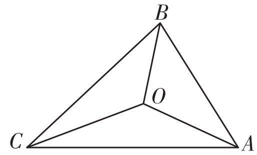


图 1.4－1－10

3. 如图 1.4－1－10，$\triangle ABC$ 三边 AB，BC，CA 的长分别是 20，30，40，其三条角平分线将 $\triangle ABC$ 分成三个三角形，则 $S_{\triangle ABO}:S_{\triangle BCO}:S_{\triangle CAO}$ 等于________.

4. 如图 1.4－1－11，BD 是 $\angle ABC$ 的平分线，$DE\perp AB$ 于 E，$DF\perp BC$ 于 F，$AB=12$，$BC=15$，$\triangle ABD$ 的面积 $S_{\triangle ABD}=36$，求 $\triangle BCD$ 的面积.

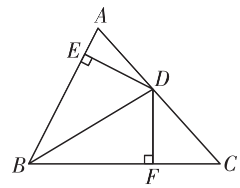


图 1.4－1－11

5. 已知：如图 1.4－1－12，BD 是 $\angle ABC$ 的平分线，$AB=BC$，点 P 在 BD 上，$PM\perp AD$，$PN\perp CD$，垂足分别是 M，N. 试说明：$PM=PN$.

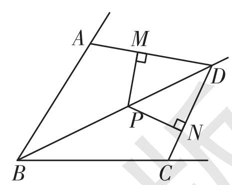


图 1.4－1－12

1.4 角平分线的性质(2)

一、前置夯实

〖前置诊断〗检测你的基础,助力新课学习.

1. 如图 1.4-2-1,在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle ACB=90^\circ$,AD 平分$\angle BAC$ 交 BC 于 D,$DE\perp AB$ 于 E,若 $DE=1.5$ cm,$BD=3$ cm,则 BC 的长是 (　　)

A. 3 cm　　　　B. 7.5 cm

C. 6 cm　　　　D. 4.5 cm

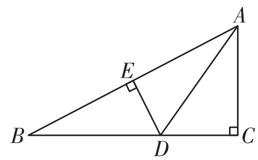


图 1.4-2-1

2. 如图 1.4-2-2,$PC\perp OA$,$PD\perp OB$,垂足分别是 C,D,$PC=5$,$PD=5$,$\angle AOP=25^\circ$,则$\angle AOB$ 的度数是 (　　)

A. 25°

B. 35°

C. 50°

D. 60°

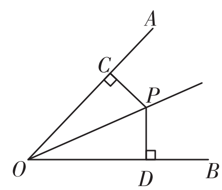


图 1.4-2-2

〖前置巩固〗如果你没有全部正确,务必回顾复习.

角平分线的性质定理及其逆定理.

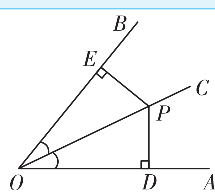
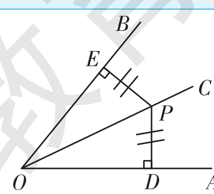
你可以开始今天的新课学习了!

我们已经学习了角平分线的性质和判定,怎样综合利用角平分线性质和判定以及其他几何定理解决一些几何问题和实际应用问题呢?

二、深度理解

〖追根溯源〗

1. 弄清角平分线的性质定理及其逆定理的条件和结论.

项目	角平分线的性质	角平分线的判定
图形		

续表

项目	角平分线的性质	角平分线的判定
已知条件	OP 平分$\angle AOB$ $PD\perp OA$ 于 D $PE\perp OB$ 于 E	$PD=PE$ $PD\perp OA$ 于 D $PE\perp OB$ 于 E
结论	$PD=PE$	OP 平分$\angle AOB$

2. 角平分线有关问题，通常结合其他已知条件，证明线段相等或求线段的长.

3. 角平分线的应用，经常需要作辅助线. 比如，过角平分线上的一点作角两边的垂线，可以构造相等线段；在角的一边截取一条线段等于另一条线段，构造出全等三角形.

例 如图 1.4－2－3，在四边形 $ABDC$ 中，$\angle D=\angle B=90°$，O 为 BD 的中点，且 AO 平分$\angle BAC$. 求证：

(1)CO 平分$\angle ACD$；

(2)$OA\perp OC$；

(3)$AB+CD=AC$.

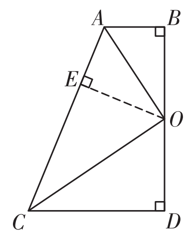


图 1.4－2－3

分析：题中出现了角平分线、90°角，可以考虑角平分线的性质和判定.

证明：(1)过点 O 作 $OE\perp AC$ 于点 E，

$\because \angle B=90°$，AO 平分$\angle BAC$，

$\therefore OB=OE$.

$\because$点 O 为 BD 的中点，

$\therefore OB=OD$.

$\therefore OE=OD$.

又$\because \angle D=90°$，$\angle OEC=90°$，

$\therefore CO$ 平分$\angle ACD$.

(2)在 $\mathrm{Rt}\triangle ABO$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle AEO$ 中，

$\because AO=AO$，$OB=OE$，

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ABO\cong \mathrm{Rt}\triangle AEO(\mathrm{HL})$.

$\therefore \angle AOB=\angle AOE=\dfrac{1}{2}\angle BOE$.

同理$\angle COD=\angle COE=\dfrac{1}{2}\angle DOE$.

$\therefore \angle AOC=\angle AOE+\angle COE=\dfrac{1}{2}\angle BOE+\dfrac{1}{2}\angle DOE=\dfrac{1}{2}\times 180°=90°$，

$\therefore OA\perp OC$.

(3)$\because \mathrm{Rt}\triangle ABO\cong \mathrm{Rt}\triangle AEO$，

$\therefore AB=AE$.

同理可得 $CD=CE$.

$\because AC=AE+CE$，

$\therefore AB+CD=AC$.

〖变式训练〗

1. 到三角形三条边距离相等的点是三角形的　　（　　）

A. 三条中线的交点　　B. 三条角平分线的交点

C. 三条高的交点　　D. 以上均不对

2. 如图 1.4－2－4，在△ABC 中，$AB=4$，$BC=6$，BD 是△ABC 的角平分线，$DE\perp AB$ 于点 E，$AF\perp BC$ 于点 F，若 $DE=2$，则 AF 的长为　　（　　）

A. 3　　B. $\frac{10}{3}$　　C. $\frac{7}{2}$　　D. $\frac{15}{4}$

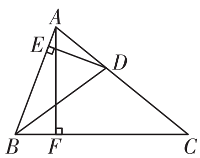


图 1.4－2－4

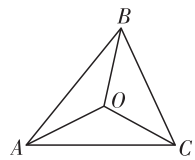


图 1.4－2－5

3. 如图 1.4－2－5，在△ABC 中，$AB=9$，$BC=7$，$AC=8$，点 O 是△ABC 的三个内角的角平分线的交点，$S_{\triangle AOB}$，$S_{\triangle BOC}$，$S_{\triangle AOC}$ 分别表示△AOB，△BOC，△AOC 的面积，则 $S_{\triangle AOB}:S_{\triangle BOC}:S_{\triangle AOC}=$__________.

〖反思迁移〗

1. 有角平分线的题目首先应考虑运用角平分线的性质定理来证明线段相等，从而避免证明三角形全等.

2. 运用角平分线性质和判定定理解决实际问题，关键是要将实际问题转化为数学问题. 将实际问题中的物抽象成线、角、点等，再运用角平分线性质和判定定理与垂直平分线、三角形三边关系等几何定理解答.

三、效果检测

1. 如图 1.4－2－6，在△ABC 中，AD 是∠BAC 的平分线，且 $BD>DC$，下列说法正确的是　　（　　）

A. 点 D 到 AB 边的距离大于点 D 到 AC 边的距离

B. 点 D 到 AB 边的距离等于点 D 到 AC 边的距离

C. 点 D 到 AB 边的距离小于点 D 到 AC 边的距离

D. 点 D 到 AB 边的距离与点 D 到 AC 边的距离大小关系不确定

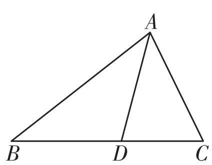


图 1.4－2－6

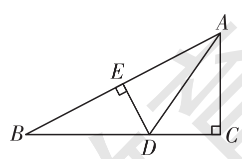


图 1.4－2－7

2. 如图 1.4－2－7，在△ABC 中，∠$ACB=90°$，AD 平分∠BAC 交 BC 于 D，$DE\perp AB$ 于 E. 若 $DE=2$ cm，$BD=4$ cm，则 BC 的长度是　　（　　）

A. 2 cm　　B. 4 cm　　C. 6 cm　　D. 8 cm

3. 如图 1.4－2－8，OC 是$\angle AOB$ 内部的一条射线，P 是射线 OC 上任意点，$PD\perp OA$，$PE\perp OB$. 下列条件：①$\angle AOC=\angle BOC$；②$PD=PE$；③$OD=OE$；④$\angle DPO=\angle EPO$ 中，能判定 OC 是$\angle AOB$ 的平分线的有________个.

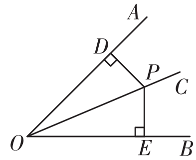


图 1.4－2－8

4. 如图 1.4－2－9，两条公路 OA 和 OB 相交于 O 点，在$\angle AOB$ 的内部有工厂 C 和 D，现要修建一个货站 P，使货站 P 到两条公路 OA，OB 的距离相等，且到两工厂 C，D 的距离相等，用尺规作出货站 P 的位置（要求：不写作法，保留作图痕迹，写出结论）.

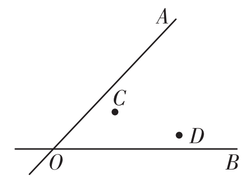


图 1.4－2－9

5. 如图 1.4－2－10，D 是$\angle MAN$ 内一点，点 B 是射线 AM 上一点，$DE\perp AM$ 于 E，$DF\perp AN$ 于 F，且 $DE=DF$，连接 AD.

(1)求证：AD 平分$\angle MAN$；

(2) 在射线 AN 上取一点 C，使得 $DC=DB$，若 $AB=6$，$BE=2$，则 AC 长为________.

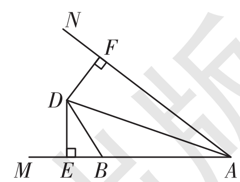
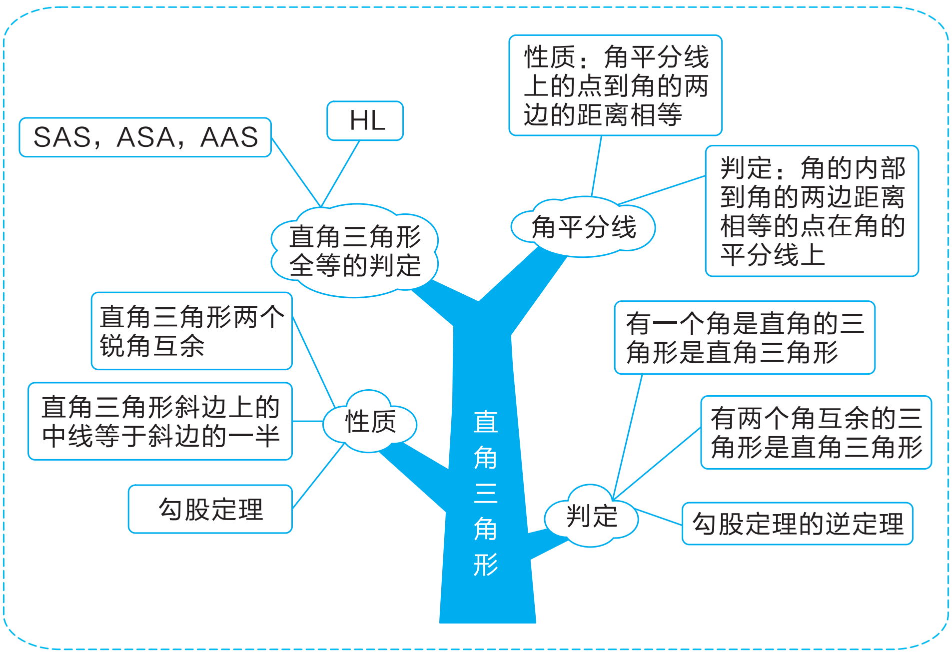


图 1.4－2－10

本章整理提升

知识框架



融会贯通

1. 直角三角形的性质与判定

	从角考虑	从边考虑
性质	有一个角为直角 两锐角互余	斜边上的中线等于斜边的一半； 直角三角形两直角边的平方和等于斜边的平方
判定	性质的逆定理	一条边上的中线等于这条边的一半的三角形是直角三角形. 勾股定理的逆定理

例 1　如图 1 - 1，A 城市气象台测得台风中心在 A 城正西方向 300 km 的 B 处，正向北偏东 60°的 BF 方向移动，距台风中心 200 km 的范围内是受台风影响的区域，那么 A 城是否会受到这次台风的影响？为什么？

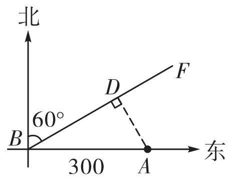


图 1 - 1

分析：根据“垂线段最短”，只需求出点 A 到 BF 的距离，与 200 km 比较即可.

解：过点 A 作 $AD\perp BF$.

由题意得$\angle FBA=30^\circ$，

$\therefore AD=\dfrac{1}{2}AB=150$ km.

由于 AD 长小于 200 km，所以 A 城会受到台风的影响.

2. 勾股定理及其逆定理的应用

运用勾股定理的逆定理判断一个三角形是否是直角三角形的一般步骤：①先判断哪条边最大. ②分别用代数方法计算出 a^2+b^2 和 c^2 的值（c 边最大）. ③判断 a^2+b^2 和 c^2 是否相等，若相等，则是直角三角形；若不相等，则不是直角三角形.

例 2　如图 1 - 2，在$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，D 是 AB 上一点，且 $BC=25$，$CD=20$，$BD=15$，求$\triangle ABC$ 的面积.

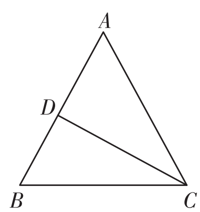


图 1 - 2

解：$\because BC=25$，$CD=20$，$BD=15$，

$\therefore BC^2=CD^2+BD^2$.

$\therefore\triangle BCD$ 是直角三角形.

则$\triangle ACD$ 也是直角三角形.

设 $AD=x$，则 $AB=x+15$.

$\because AB=AC$，$\therefore AC=x+15$.

由勾股定理得$(x+15)^2=x^2+20^2$，

解得 $x=\dfrac{35}{6}$.

$\therefore AB=\dfrac{35}{6}+15=\dfrac{125}{6}$.

$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{125}{6}\times20\div2=\dfrac{625}{3}$.

3. 角平分线的性质及其判定

角平分线的性质是证明线段相等的常用方法，应用时要借助全等三角形发挥作用. 作辅助线有两种思路，一种是作垂线段构造角平分线的基本图形，另一种是构造轴对称图形.

例 3 如图 1－3，P 为 $\angle ABC$ 的平分线上一点，$\angle PCB+\angle BAP=180°$.

求证：$PA=PC$.

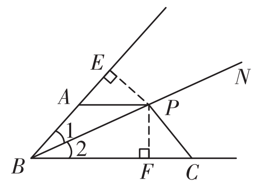


图 1－3

分析：由角平分线的性质易想到过点 P 向 $\angle ABC$ 的两边作垂线段，构造角平分线的基本图形.

证明：过点 P 作 $PE\perp BA$，$PF\perp BC$，垂足分别为点 E，F.

由题意知 $\angle 1=\angle 2$，又 $PE\perp BA$，$PF\perp BC$，

$\therefore PE=PF$，$\angle PEA=\angle PFC=90°$.

$\because \angle PCB+\angle BAP=180°$，$\angle BAP+\angle EAP=180°$，

$\therefore \angle EAP=\angle PCB$.

在 $\triangle APE$ 和 $\triangle CPF$ 中，

$$\begin{cases}\angle PEA=\angle FPC=90°,\\ \angle EAP=\angle FCP,\\ PE=PF,\end{cases}$$

$\therefore \triangle APE\cong\triangle CPF$(AAS).

$\therefore PA=PC$.

本章达标测试

（时间 60 分钟，满分 100 分）

一、选择题（每小题 4 分，共 40 分）

1. 在△ABC 中，若∠A=31°，∠B=59°，则△ABC 是（　　）

A. 锐角三角形　　B. 直角三角形　　C. 钝角三角形　　D. 等腰三角形

2. 下列各组线段中，能构成直角三角形的一组是（　　）

A. 30，40，50　　B. 7，12，13　　C. 5，9，12　　D. 3，4，6

3. 三角形三边长分别为 6，8，10，那么最长边上的高为（　　）

A. 6　　B. 4. 5　　C. 4. 8　　D. 8

4. 适合下列条件的△ABC 中，直角三角形的个数为（　　）

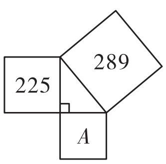
①$a=\frac{1}{3}$，$b=\frac{1}{4}$，$c=\frac{1}{5}$；②$a=6$，∠A=45°；③∠A=32°，∠B=58°；

④$a=7$，$b=24$，$c=25$；⑤$a=2$，$b=3$，$c=4$.

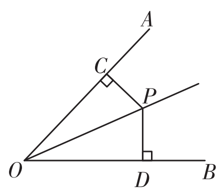
A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

5. 图中字母 A 所代表的正方形的面积为（　　）

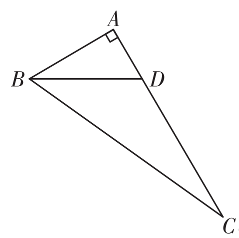
A. 4　　B. 8　　C. 16　　D. 64



第 5 题图



第 6 题图



第 8 题图

6. 如图，OP 为∠AOB 的平分线，$PC \perp OA$，$PD \perp OB$，垂足分别是 C，D，则下列结论错误的是（　　）

A. $PC=PD$　　B. ∠CPD=∠DOP　　C. ∠CPO=∠DPO　　D. $OC=OD$

7. 一直角三角形的一条直角边长是 7 cm，另一条直角边与斜边长的和是 49 cm，则斜边的长是（　　）

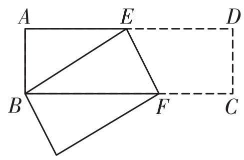
A. 18 cm　　B. 20 cm　　C. 24 cm　　D. 25 cm

8. 如图所示，在 Rt△ABC 中，∠A=90°，BD 平分∠ABC，交 AC 于点 D，且 $AB=4$，$BD=5$，则点 D 到 BC 的距离是（　　）

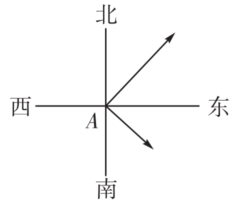
A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

9. 如图，在长方形 $ABCD$ 中，$AB=3$ cm，$AD=9$ cm，将此长方形折叠，使点 B 与点 D 重合，折痕为 EF，则△ABE 的面积为（　　）

A. 3 cm^2　　B. 4 cm^2　　C. 6 cm^2　　D. 12 cm^2



第 9 题图



第 10 题图

10. 如图，一轮船以 16 海里/h 的速度从港口 A 出发向东北方向航行，另一轮船以 12 海里/h 的速度同时从港口 A 出发向东南方向航行，离开港口 2 h 后，两船相距（　　）

A. 25 海里　　B. 30 海里　　C. 35 海里　　D. 40 海里

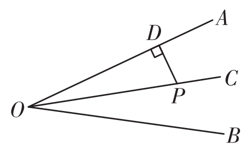
二、填空题（每小题 4 分，共 24 分）

11. 在 Rt△ABC 中，$\angle C=30°$，斜边 AC 的长为 12 cm，则 AB 的长为________.

12. 在 Rt△ABC 中，已知其中两边的长分别是 3，5，则第三边的长为________.

13. 如图所示，有两棵树，一棵高 10 m，另一棵高 4 m，两树相距 8 m. 一只小鸟从一棵树的树梢飞到另一棵树的树梢，问小鸟至少飞行________.

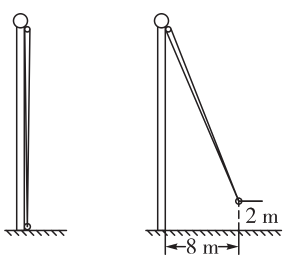

第 13 题图



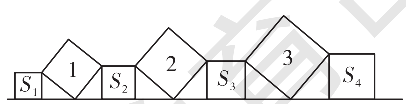
第 14 题图

14. 如图，OC 是∠AOB 的平分线，P 是 OC 上一点，$PD\perp OA$ 于点 D，$PD=6$，则点 P 到边 OB 的距离为________.

15. 如图，小亮将升旗的绳子拉到旗杆底端，绳子末端刚好接触到地面，然后将绳子末端拉到距离旗杆 8 m 处，发现此时绳子末端距离地面 2 m，则旗杆的高度为________（滑轮上方的部分忽略不计）.



第 15 题图



第 16 题图

16. 在直线上依次摆着 7 个正方形（如图），已知倾斜放置的 3 个正方形的面积分别为 1，2，3，水平放置的 4 个正方形的面积分别是 S_1，S_2，S_3，S_4，则 $S_1+S_2+S_3+S_4=$________.

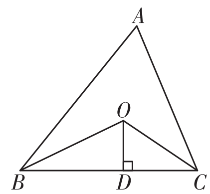
三、解答题(每小题 9 分,共 36 分)

17. 若$\triangle ABC$的三边满足下列条件,判断$\triangle ABC$是不是直角三角形,并说明哪个角是直角.

(1)$BC=\frac{3}{4}$,$AB=\frac{5}{4}$,$AC=1$;

(2)$a=n^2-1$,$b=2n$,$c=n^2+1(n>1)$.

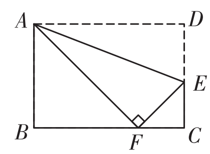
18. 如图,已知$\triangle ABC$的周长是 28 cm,BO,CO分别平分$\angle ABC$和$\angle ACB$,$OD\perp BC$于点D,若$OD=3$ cm,求$\triangle ABC$的面积.



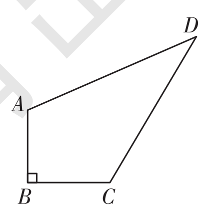
19. 如图,折叠长方形的一边AD,使点D落在BC边上的点F处,$BC=10$ cm,$AB=8$ cm.

(1)求FC的长;

(2)求EF的长.



20. 如图,某住宅小区在施工过程中留下了一块空地(图中的四边形$ABCD$),经测量,在四边形$ABCD$中,$AB=3$ m,$BC=4$ m,$CD=12$ m,$DA=13$ m,$\angle B=90°$.小区为美化环境,欲在空地上铺草坪,已知草坪每平方米 100 元,试问铺满这块空地需花费多少钱?



第 2 章　四边形

本章学习指南

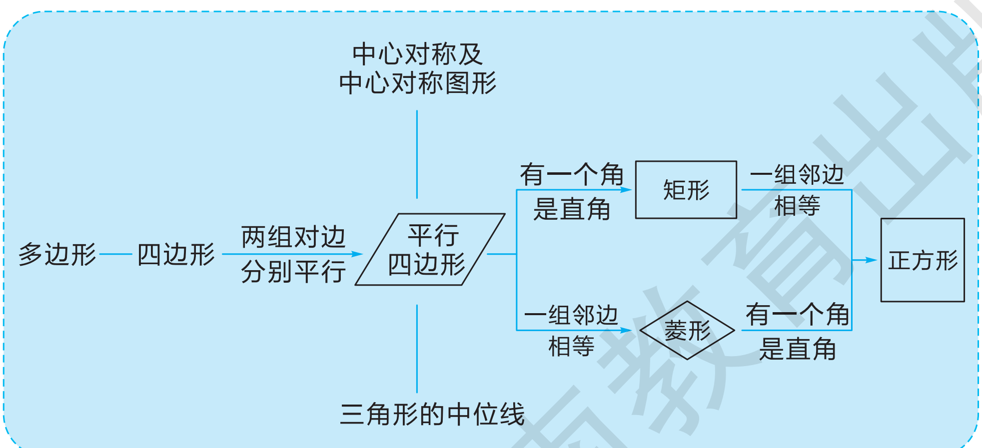
为何学

四边形在生活中有着广泛的应用.在日常生活中,四边形随处可见,可以找到许多四边形的图案,四边形的性质在生产、生活领域也有大量的实际应用.

本章是在小学的四边形知识和初中的平行线、三角形知识的基础上,对已有知识作进一步系统的整理,是平行线和三角形全等内容的应用和深化.学习本章有助于培养和发展我们的观察能力和推理能力,进一步掌握几何证明的格式,学会几何语言表述,所以本章是推理证明训练非常重要的一章,对后面的几何学习十分重要.

学什么

在小学,我们已经接触了矩形(长方形)、菱形、正方形和梯形,初步了解了它们的形状和对称性,本章将对这些特殊的四边形进行更加深入的探索.内容结构如下:



本章在多边形的概念、内角和与外角和公式、四边形的不稳定性的基础上研究特殊四边形，先讨论平行四边形的概念、性质和判定方法，再进一步特殊化，研究特殊的平行四边形，即矩形、菱形和正方形的概念、性质与判定方法.

怎么学

1. 在旧知识上建构新知识

四边形与三角形相比，多了一些内容，有对边、对角、对角线. 要研究其中对边、对角的位置关系和数量关系，邻边、邻角的数量关系，对角线可能存在的位置关系，这些都是前面已经学过的相交线、平行线、三角形知识的应用，要复习前面的几何知识，才能学会本章新的知识.

2. 直观操作和逻辑推理结合

在发现有关性质的时候，可以先尝试通过度量，归纳出平行四边形对边相等、对角相等的性质；利用平行四边形的旋转，探究发现平行四边形对角线互相平分的性质；通过扭动平行四边形框架，探究发现矩形的四个角都是直角、对角线相等的性质；利用菱形的轴对称性，探究发现菱形四条边都相等、对角线互相垂直、对角线平分对角的性质；通过制作一些框架，探究发现平行四边形、矩形、菱形的一些判定方法等. 通过观察、操作、变换，探究出图形的性质后，必须进行证明，利用逻辑推理得出，要直观操作和逻辑推理一起想，最后要进行推理论证，不能停留在观察、实验层次.

3. 掌握平行四边形与各种特殊平行四边形之间的联系与区别

掌握平行四边形的概念、性质和判定，并能应用这些知识解决问题，是学好本章的关键. 学习平行四边形以后，不难得出菱形、矩形、正方形的有关结论，但要慢慢搞清楚它们的关系，分清这些四边形的从属关系，梳理它们的性质和判定方法.

4. 多联系生活实际

四边形在生活中有很多应用，学习特殊四边形的性质与判定，可以多找找生活中的实际例子，促进我们对图形的性质的理解，感受数学知识的力量.

2.1 多边形(1)

一、前置夯实

〖前置诊断〗检测你的基础,助力新课学习.

1. 四边形的内角和是 ( )

A. 180°　　B. 200°　　C. 360°　　D. 540°

2. 如图 2.1-1-1,在$\triangle ABC$中,$\angle A=50^\circ$,$\angle B=65^\circ$,则$\angle ACD$的度数为 ( )

A. 65°　　B. 85°　　C. 115°　　D. 135°

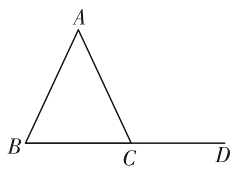


图 2.1-1-1

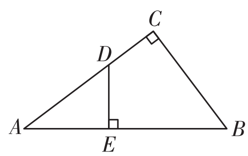


图 2.1-1-2

3. 如图 2.1-1-2,在 Rt$\triangle ABC$中,$\angle C=90^\circ$,$DE\perp AB$于E,交AC于D.若$\angle B=53^\circ$,则$\angle CDE$的度数为 ( )

A. 53°　　B. 127°　　C. 143°　　D. 147°

〖前置巩固〗如果你没有全部正确,务必回顾复习.

1. 三角形内角和为 180°,而四边形内角和可以转化为两个三角形的内角和,所以四边形的内角和为 360°.

2. 三角形的一个外角等于与它不相邻的两内角和.

你可以开始今天的新课学习了!

前面我们已学过了三角形、四边形的内角和,并且知道四边形的内角和就是将它转化为两个三角形的内角和,那么五边形、六边形、n边形的内角和怎么求呢?

二、深度理解

〖追根溯源〗

1. 多边形的对角线

连接不相邻的两个顶点的线段,叫作多边形的对角线.

从 n 边形的一个顶点出发有$(n-3)$条对角线，从而 n 边形被分成了$(n-2)$个三角形.

2. 多边形内角和定理

将一个 n 边形沿一个顶点的对角线分成$(n-2)$个三角形，从而得到了 n 边形的内角和公式：$(n-2)\cdot 180°$，其中运用了三角形内角和定理. 除利用对角线把多边形分成几个三角形外，还有其他方法也可以得到 n 边形的内角和公式.

如图 2.1-1-3，在 n 边形内任取一点 O，与多边形各顶点连接，把 n 边形分成 n 个三角形，用 n 个三角形的内角和 $n\cdot 180°$减去中心的周角 360°，得 n 边形的内角和为$(n-2)\cdot 180°$.

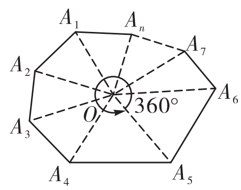


图 2.1-1-3

综上可得，推导多边形的内角和公式，都是利用转化思想，即把多边形分成若干个三角形，从而将多边形问题转化为三角形问题来解决.

〖变式训练〗

1. 若一个多边形的内角和是 2 160°，则这个多边形的边数是多少？

2. 2018 年世界杯在莫斯科召开，绘制一个内角和为 2 018°的多边形图案有可能吗？

3. 已知一个多边形除了一个内角外，其余各内角的和是 2 016°，它是几边形？

〖反思迁移〗

1. 从 n 边形一个顶点出发可以引出 $(n-3)$ 条对角线，从而可知 n 边形的对角线一共有 $\frac{n(n-3)}{2}$ 条.

2. 从 n 边形一个顶点出发的所有对角线将 n 边形分成 $(n-2)$ 个三角形，进而得到 n 边形的内角和为 $(n-2)\cdot180°$.

3. 将多边形的内角和转化为多个三角形的内角和，这是将未学过的知识转化为已经学过的知识，这就是转化思想的运用.

4. 在解决数学问题时，可以通过设元寻找已知与未知之间的等量关系，构造方程或不等式，然后求解方程或不等式完成未知向已知的转化.

三、效果检测

1. 已知两个多边形的内角和为 1 800°，且两多边形的边数之比为 2∶5，则这两个多边形的边数分别为____________.

2. 一个凸 n 边形除了一个内角之外，其余各内角之和是 1 780°，则这个多边形的边数 $n=$________，这个内角的度数为________.

3. 如图 2.1-1-4，求 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F$ 的度数.

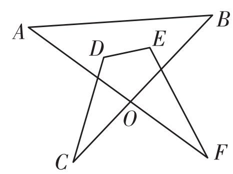


图 2.1-1-4

4. 如图 2.1-1-5，求 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F+\angle G$ 的度数.

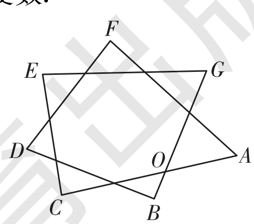


图 2.1-1-5

2.1 多边形(2)

一、前置夯实

〖前置诊断〗检测你的基础,助力新课学习.

1. 一个多边形的内角和是 720°,这个多边形是(　　)边形.

A. 四　　B. 五　　C. 六　　D. 七

2. 如图 2.1-2-1,在△ABC 中,$CD\perp AB$,CE 平分∠ACB,∠B=50°,∠A=20°,则∠DCE 的度数为　　(　　)

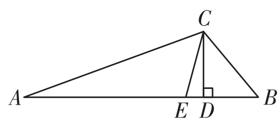


图 2.1-2-1

A. 70°　　B. 50°　　C. 30°　　D. 15°

〖前置巩固〗如果你没有全部正确,务必回顾复习.

1. n 边形的内角和等于$(n-2)\cdot 180°$.

2. 三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角之和.

你可以开始今天的新课学习了!

我们知道三角形的外角和是 360°,四边形的外角和是 360°,那么 n 边形的外角和是 360°吗? n 边形的外角和与边数是什么关系呢?

二、深度理解

〖追根溯源〗

1. 多边形的外角的概念

多边形的内角的一边与另一边的反向延长线组成的角,叫作多边形的一个外角.

多边形每个顶点处有两个外角,这两个外角互为对顶角.

2. 多边形的外角和

在多边形的每个顶点处取一个外角,它们的和叫作这个多边形的外角和.

3. 多边形的外角和等于 360°

对于一个 n 边形，因为任一外角与它相邻的内角之和为 180°，n 边形的内角和等于 $(n-2)\cdot 180°$，故外角和等于 $n\cdot 180°-(n-2)\cdot 180°$.

由此得出：任意多边形的外角和等于 360°.

n 边形的外角和与边数没有关系，是一个定值.

〖变式训练〗

1. 一个正多边形每个外角都是 60°，求这个多边形的边数.

2. 一个正多边形每个内角都是 135°，求这个多边形的边数.

3. 一个正多边形的每一个内角都比相邻的外角大 36°，求这个正多边形的边数.

4. 如图 2.1-2-2，求$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F$ 的度数.

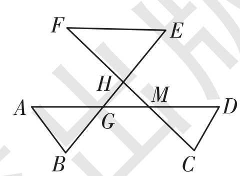


图 2.1-2-2

〖反思迁移〗

1. 任意多边形的外角和等于 360°.
2. 三角形的一个外角等于与它不相邻的两内角和,和与它相邻的内角互补.
3. 有时可以将多边形的内角转化为与它相邻的外角,然后再利用外角和进行计算.

三、效果检测

1. 一个十边形所有内角都相等,求它的外角大小.

2. 一个多边形的每一个外角都是 72°,求这个多边形的内角和.

3. 如图 2.1-2-3,求$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F+\angle G+\angle H$ 的度数.

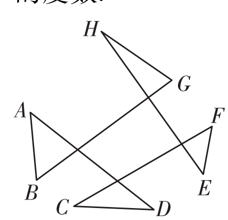


图 2.1-2-3

4. 如图 2.1-2-4,若$\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=\angle E$,求$\angle A$.

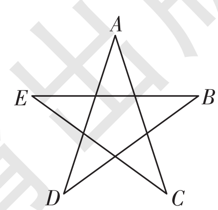


图 2.1-2-4

2.2 平行四边形(1)

一、前置夯实

〖前置诊断〗检测你的基础,助力新课学习.

1. 已知平行四边形的面积是 144,相邻两边上的高分别为 8 和 9,则它的周长是 ( )

A. 17 B. 34 C. 68 D. 72

2. 用 20 m 长的一铁丝围成一个平行四边形,使长边与短边的比为 3∶2,则短边长为 ( )

A. 12 m B. 8 m C. 6 m D. 4 m

〖前置巩固〗如果你没有全部正确,务必回顾复习.

平行四边形的周长为两邻边和的两倍.

你可以开始今天的新课学习了!

在小学,我们已初步认识了平行四边形,平行四边形究竟具有什么样的性质呢?通过本节课的学习,我们将更加深入地认识平行四边形.

二、深度理解

〖追根溯源〗

1. 平行四边形的定义

两组对边分别平行的四边形叫作平行四边形.

2. 根据定义画一个平行四边形,测量平行四边形四条边的长度、四个角的大小,你能做出什么猜测?

(1)猜想:通过观察和测量,发现平行四边形对边相等,对角相等;

(2)验证猜想.

如图 2.2-1-1,连接 AC.

∵四边形 $ABCD$ 为平行四边形,

∴$AB \parallel DC$,$AD \parallel BC$(平行四边形的两组对边分别平行).

∴$\angle 1=\angle 2$,$\angle 3=\angle 4$.

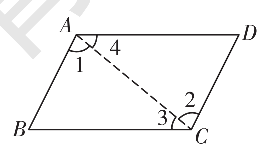


图 2.2-1-1

又 $AC=CA$，

∴ $\triangle ABC \cong \triangle CDA$.

∴ $AB=CD$，$BC=DA$，$\angle B=\angle D$.

又 $\angle 1+\angle 4=\angle 2+\angle 3$，

∴ $\angle BAD=\angle DCB$.

3. (1)平行四边形边的性质：

对边平行——平行四边形的定义；

对边相等——连接对角线，由全等三角形证明.

(2)平行四边形角的性质：

邻角互补——两直线平行，同旁内角互补；

对角相等——同角的补角相等，即对角相等.

〖变式训练〗

1. 如图 2.2-1-2，在▱$ABCD$ 中，$AB=3$，$BC=5$，$\angle ABC$ 的平分线交 AD 于点 E，则 DE 的长为 (　　)

A. 5

B. 4

C. 3

D. 2

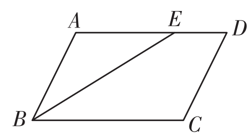


图 2.2-1-2

2. 如图 2.2-1-3，在▱$ABCD$ 中，点 E，F 分别在 AD，BC 上，且 $AE=CF$，EF，BD 相交于点 O. 求证：$OE=OF$.

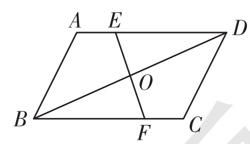


图 2.2-1-3

〖反思迁移〗

1. 平行四边形的内角和为 360°，外角和为 360°.
2. 任何一条对角线将平行四边形分成两个全等的三角形.
3. 平行四边形的性质为证明线段相等、角相等提供了新思路、新方法.
4. 连接对角线，把四边形转化为两个三角形是解决四边形问题的常用方法.

三、效果检测

1. 如图 2.2-1-4,在▱$ABCD$ 中,$\angle B=80°$,AE 平分$\angle BAD$ 交 BC 于点 E,$CF/\!/EA$ 交 AD 于点 F,则$\angle 1$ 的度数为 ( )

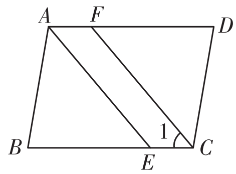


图 2.2-1-4

A. 40° B. 50° C. 60° D. 80°

2. 已知平行四边形的周长为 100 cm,两邻边之差为 30 cm,求平行四边形各边的长.

3. 已知:如图 2.2-1-5,在▱$ABCD$ 中,延长 AB 至点 E,延长 CD 至点 F,使得 $BE=DF$,连接 EF,与对角线 AC 交于点 O. 求证:$OE=OF$.

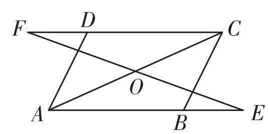


图 2.2-1-5

2.2 平行四边形(2)

一、前置夯实

〖前置诊断〗检测你的基础，助力新课学习.

1. 在▱$ABCD$ 中，若$\angle A=65^{\circ}$，则$\angle C$ 的度数是 ( )

A. 105° B. 115° C. 125° D. 65°

2. 如图 2.2-2-1，四边形 $ABCD$ 为平行四边形，F 是 CD 的中点，连接 AF 并延长与 BC 的延长线交于点 E，则下面的结论不正确的是 ( )

A. $AD=BC$ B. $AD=CE$

C. $AD=CF$ D. $BC=CE$

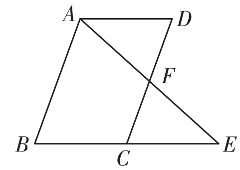


图 2.2-2-1

〖前置巩固〗如果你没有全部正确，务必回顾复习.

平行四边形两组对边分别平行且相等，对角相等.

你可以开始今天的新课学习了！

我们知道平行四边形的两组对边分别平行且相等，对角相等，那么平行四边形还有什么其他的性质吗？对角线又有怎样的性质呢？

二、深度理解

〖追根溯源〗

1. 平行四边形的对角线

连接平行四边形不相邻的两顶点得到的线段是平行四边形的对角线，平行四边形有两条对角线，且相交于一点.

2. 平行四边形对角线的性质

如图 2.2-2-2，∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$AB /\!/ DC$，$AB=DC$，

∴$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，

∴$\triangle OAB \cong \triangle OCD$.

∴$OA=OC$，$OB=OD$.

由此得到平行四边形的对角线互相平分.

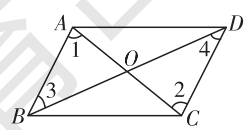


图 2.2-2-2

〖变式训练〗

1. 如图 2.2－2－3，▱$ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，且 $AC+BD=16$，$CD=6$，则△ABO 的周长是 (　　)

A. 10　　B. 14

C. 20　　D. 22

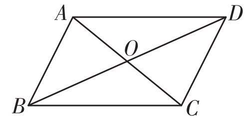


图 2.2－2－3

2. 以长为 5 cm，4 cm，7 cm 的三条线段中的两条为边，另一条为对角线画平行四边形，可以画出形状不同的平行四边形的个数是________.

3. 如图 2.2－2－4，在▱$ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，过 O 点作 EF 分别交 AB，CD 于点 E，F，那么 OE，OF 是否相等，说明理由.

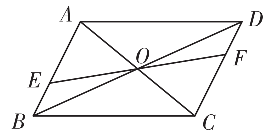


图 2.2－2－4

〖反思迁移〗

1. 平行四边形的性质包含边、角和对角线，从这三者的关系去记忆平行四边形的性质.
2. 平行四边形的对角线互相平分.

三、效果检测

1. 以下平行四边形的性质中，错误的是 (　　)

A. 对边平行　　B. 对角相等　　C. 对边相等　　D. 对角线相等

2. 如图 2.2－2－5，在▱$ABCD$ 中，已知$\angle ODA=90^\circ$，$AC=10$ cm，$BD=6$ cm，则 AD 的长为 (　　)

A. 4 cm　　B. 5 cm

C. 6 cm　　D. 8 cm

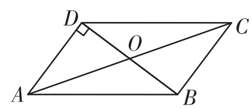


图 2.2－2－5

3. 一个平行四边形的一个内角是它邻角的 3 倍，那么这个内角的度数是________.

4. 已知：如图 2.2－2－6，▱$ABCD$ 的周长为 60 cm，对角线 AC，BD 相交于点 O，△AOB 的周长比△BOC 的周长多 8 cm，求▱$ABCD$ 各边的长.

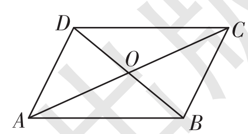


图 2.2－2－6

5. 已知：如图 2.2－2－7，在▱$ABCD$ 中，E，F 分别是 BC，AD 上的点，且 $BE=DF$，EF 交 AC 于点 O. 那么 OE 与 OF 相等吗？为什么？

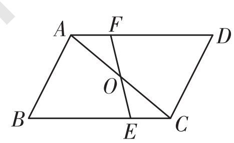


图 2.2－2－7

2.2 平行四边形(3)

一、前置夯实

〖前置诊断〗检测你的基础,助力新课学习.

1. 如图 2.2-3-1,O 是▱$ABCD$ 对角线的交点,△OBC 的周长为 59,$BD=38$,$AC=24$,则 AD 的长是 ( )

A. 12　　B. 19　　C. 28　　D. 31

2. 如图 2.2-3-2,在△MBN 中,$BM=6$,点 A,C,D 分别在 MB,BN,MN 上,四边形 $ABCD$ 为平行四边形,∠NDC=∠MDA,则▱$ABCD$ 的周长是 ( )

A. 24　　B. 18　　C. 16　　D. 12

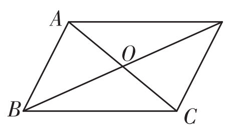


图 2.2-3-1

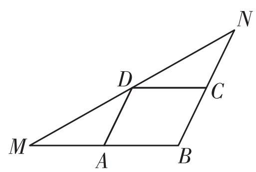


图 2.2-3-2

〖前置巩固〗如果你没有全部正确,务必回顾复习.

平行四边形的性质:

①两组对边分别平行且相等;

②平行四边形的对角相等,邻角互补;

③平行四边形的对角线互相平分.

你可以开始今天的新课学习了!

我们已经学习了平行四边形的边、角以及对角线的相关性质,那么如何判定一个四边形是平行四边形呢?它的边、角以及对角线又要满足什么条件呢?

二、深度理解

〖追根溯源〗

1. 定义是判定的基本方法

利用平行四边形的定义可以判定一个四边形是不是平行四边形,即看两组对边是不是分别平行.

2. 平行四边形的判定定理

两组对边分别相等的四边形是平行四边形. 只要连接对角线，利用全等，得到内错角相等，从而证明两组对边分别平行.

一组对边平行且相等的四边形是平行四边形. 连接对角线，利用全等，得到另一组对边也平行.

〖变式训练〗

1. 已知 $AD=BC$，要使四边形 $ABCD$ 是平行四边形，还需补充的一个条件是：________.

2. 如图 2.2-3-3，已知 AC 是四边形 $ABCD$ 的对角线，$\angle BAC=\angle DCA$，$\angle DAC=\angle BCA$，求证：$AD=BC$.

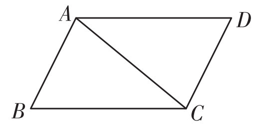


图 2.2-3-3

〖反思迁移〗

平行四边形的判定从边的关系来看，定义是基础，结合全等可以得到判定定理 1 和 2，特别是一组对边平行且相等是常用的方法.

三、效果检测

1. 下列条件中，不能够判定一个四边形是平行四边形的是 （　　）

A. 两组对边分别相等　　B. 两组对边分别平行

C. 一组对边平行且相等　　D. 一组对边平行，另一组对边相等

2. 如图 2.2-3-4，AB 与 DC 平行且相等，$DC=EF=10$，$DE=CF=8$，则图中的平行四边形有____________，理由分别是______________、______________.

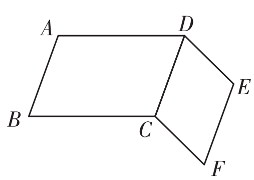


图 2.2-3-4

3. 如图 2.2-3-5，在▱$ABCD$ 中，$DE\perp AC$，$BF\perp AC$，证明：四边形 $DEBF$ 为平行四边形.

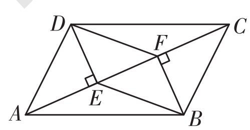


图 2.2-3-5

2.2 平行四边形(4)

一、前置夯实

〖前置诊断〗检测你的基础,助力新课学习.

1. 九根火柴棒排成如图 2.2-4-1 形状,图中有____个平行四边形,你判断的根据是______.

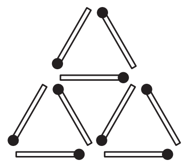


图 2.2-4-1

2. 在四边形 $ABCD$ 中,$AD /\!/ BC$,要判定 $ABCD$ 是平行四边形,那么还需满足 (　　)

A. $\angle A+\angle C=180^\circ$　　B. $\angle B+\angle D=180^\circ$

C. $\angle A+\angle B=180^\circ$　　D. $\angle A+\angle D=180^\circ$

〖前置巩固〗如果你没有全部正确,务必回顾复习.

利用边的关系进行平行四边形的判定,方法有:

①两组对边分别平行;

②两组对边分别相等;

③一组对边平行且相等.

你可以开始今天的新课学习了!

我们已经学习了从边的关系来证明一个四边形是平行四边形,那么从角的关系能够证明吗?从对角线的关系呢?

二、深度理解

〖追根溯源〗

1. 性质与判定可以成对进行辨析

平行四边形的两组对边分别平行,反过来,两组对边分别平行的四边形是平行四边形.

平行四边形的两组对边分别相等,反过来,两组对边分别相等的四边形是平行四边形.

2. 对角线互相平分的四边形是平行四边形

由于对角线互相平分且对顶角相等,可证明三角形全等,得到一组对边平行且相等,从而证明了对角线互相平分的四边形是平行四边形.

3. 两组对角分别相等的四边形是平行四边形

利用对角相等与四边形内角和等于 360°，得到邻角都互补，从而两组对边分别平行，证明了两组对角分别相等的四边形是平行四边形.

〖变式训练〗

1. 下面给出了四边形 $ABCD$ 中 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$，$\angle D$ 的度数之比，其中能判定四边形 $ABCD$是平行四边形的是 (　　)

A. 1∶2∶3∶4　　B. 2∶2∶3∶3

C. 2∶3∶3∶2　　D. 2∶3∶2∶3

2. 如图 2.2－4－2，在▱$ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，E，F 是对角线 AC 上的两点，当 E，F 满足下列哪个条件时，四边形 $DEBF$ 不一定是平行四边形 (　　)

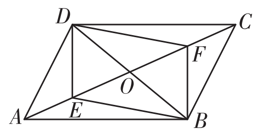


图 2.2－4－2

A. $AE=CF$　　B. $DE=BF$

C. $\angle ADE=\angle CBF$　　D. $\angle AED=\angle CFB$

3. 已知四边形 $ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，给出下列 5 个条件：①$AB/\!/CD$；②$OA=OC$；③$AB=CD$；④$\angle BAD=\angle DCB$；⑤$AD/\!/BC$.

从以上 5 个条件中任选 2 个条件，能推出四边形 $ABCD$ 是平行四边形的有：__________(用序号表示).

〖反思迁移〗

要理清平行四边形的判定与性质的区别. 学会从边、角、对角线的关系去判定一个四边形的形状，同时也会利用平行四边形的性质去得到边、角、对角线的关系.

三、效果检测

1. 能够判定一个四边形是平行四边形的条件是 (　　)

A. 一组对角相等　　B. 两条对角线互相平分

C. 两条对角线互相垂直　　D. 一对邻角的和为 180°

2. 如图 2.2－4－3，E，F 是▱$ABCD$ 对角线 BD 上的两点，请你添加一个适当的条件：__________，使四边形 $AECF$ 是平行四边形.

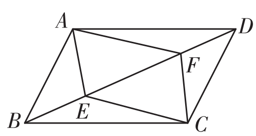


图 2.2－4－3

3. 如图 2.2－4－4，在▱$ABCD$ 中，$BN=DM$，$BE=DF$，四边形 $MENF$ 是平行四边形吗？为什么？

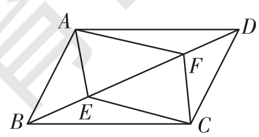


图 2.2－4－4

2.3 中心对称和中心对称图形(1)

一、前置夯实

〖前置诊断〗检测你的基础,助力新课学习.

1. 下列图形不一定是轴对称图形的是 (　　)

A. 线段　　B. 角

C. 三角形　　D. 正方形

2. 等边三角形绕着它的三条中线的交点旋转 n 度后与自身重合,则 n 等于 (　　)

A. 30　　B. 60　　C. 90　　D. 120

〖前置巩固〗如果你没有全部正确,务必回顾复习.

轴对称图形沿对称轴折叠后与原图形重合,且对称点的连线被对称轴垂直平分.

你可以开始今天的新课学习了!

我们已学过了旋转和旋转的相关性质,那么一个图形绕着某一个特定的点旋转180°,所形成的两个图形有什么关系呢?又具有什么性质呢?

二、深度理解

〖追根溯源〗

中心对称

把一个图形绕点 O 旋转 180°,如果它能够与另一个图形重合,那么就说这两个图形关于点 O 中心对称,点 O 叫作对称中心.

这两个图形中的对应点叫作关于中心的对称点.关于中心对称的两个图形是全等图形.

注意:关于中心对称的两个图形一定是全等图形,但是全等的两个图形不一定就成中心对称.

如图 2.3-1-1,$\triangle A_1B_1C_1$ 与$\triangle ABC$ 关于点 O 成中心对称,你能从图中找到哪些等量关系?

由图可得:$OA=OA_1$,$OB=OB_1$,$OC=OC_1$.

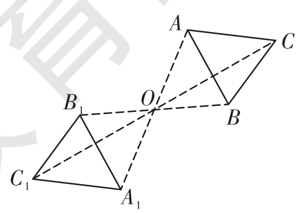


图 2.3-1-1

归纳：成中心对称的两个图形中，对应点的连线经过对称中心，且被对称中心平分.

反过来，如果两个图形的对应点连成的线段都经过某点，并且被该点平分，那么这两个图形一定关于这一点成中心对称.

〖变式训练〗

1. 下列说法中正确的是 （　　）

A. 成中心对称的两个图形中，对应点的连线不一定经过对称中心

B. 成中心对称的两个图形中，对称中心不一定平分对应点的连线

C. 成中心对称的两个图形中，对应点的连线一定经过对称中心，但不一定被对称中心平分

D. 成中心对称的两个图形中，对应点的连线一定经过对称中心，且被对称中心平分

2. 如图 2.3-1-2，$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 关于点 O 成中心对称，下列结论中不成立的是 （　　）

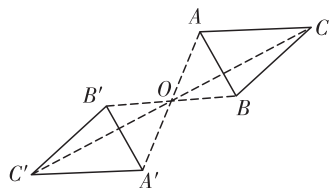


图 2.3-1-2

A. $OC=OC'$　　B. $OA=OA'$

C. $BC=B'C'$　　D. $\angle ABC=\angle A'C'B'$

3. 如图 2.3-1-3，已知 $\triangle ABC$，以点 O 为对称中心作出与它成中心对称的图形.

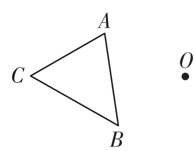


图 2.3-1-3

〖反思迁移〗

1. 判断两个图形是否成中心对称，关键是看是否存在一点，能把一个图形绕这个点旋转 180°后与另一个图形重合.

2. 两个图形成中心对称时，寻找对称中心的方法：①连接任意一对对应点，取对应点的连线的中点，该点即为对称中心；②任意连接两对对应点，这两条线段的交点即是对称中心.

3. 画一个图形关于某点成中心对称的图形时，关键是画出已知图形中特殊点的对应点.

三、效果检测

1. 如图 2.3－1－4，$\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 关于点 O 成中心对称，则下列说法不正确的是（　　）

A. $AB=A_1B_1$，$BC=B_1C_1$

B. $AB /\!/ A_1B_1$，$BC /\!/ B_1C_1$

C. $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle A_1B_1C_1}$

D. $\triangle ABC \cong \triangle A_1OC_1$

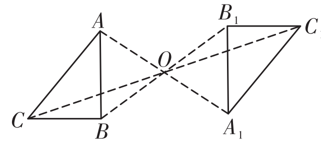
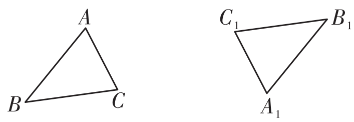


图 2.3－1－4

2. 如图 2.3－1－5，已知 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 成中心对称，画出它们的对称中心.



2.3－1－5

3. 如图 2.3－1－6，$\triangle ABO$ 与 $\triangle CDO$ 关于点 O 成中心对称，点 E，F 在线段 AC 上，且 $AF=CE$. 求证：$FD=BE$.

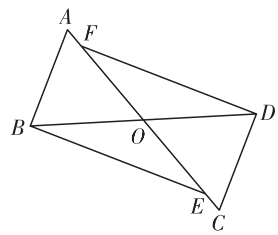


图 2.3－1－6

2.3 中心对称和中心对称图形(2)

一、前置夯实

〖前置诊断〗检测你的基础，助力新课学习.

1. 下列说法中，正确的是 （　　）

A. 形状和大小完全相同的两个图形成中心对称

B. 成中心对称的两个图形必重合

C. 成中心对称的两个图形形状和大小完全相同

D. 旋转后能重合的两个图形成中心对称

2. 如图 2.3-2-1，$\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 关于点 O 成中心对称，有下列说法：①$\angle BAC=\angle B_1A_1C_1$；②$AC=A_1C_1$；③$OA=OA_1$；④$\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 的面积相等. 其中正确的有 （　　）

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

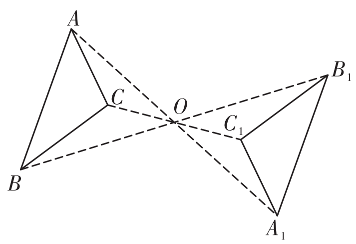


图 2.3-2-1

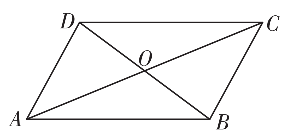


图 2.3-2-2

3. 如图 2.3-2-2，在▱$ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，则图中成中心对称的三角形共有 （　　）

A. 4 对　　B. 3 对　　C. 2 对　　D. 1 对

〖前置巩固〗如果你没有全部正确，务必回顾复习.

两个图形关于一个点成中心对称，则把一个图形绕着这个点旋转 180°，能够与另一个图形重合.

你可以开始今天的新课学习了！

前面我们学习了中心对称、轴对称和轴对称图形的性质，那么平行四边形是中心对称图形吗？它与轴对称图形又有什么不同呢？

二、深度理解

〖追根溯源〗

1. 中心对称图形

如果一个图形绕一个点 O 旋转 $180°$后能与自身重合，那么这个图形叫作中心对称图形. 这个点叫作它的对称中心.

2. 中心对称与中心对称图形的关系

区别：中心对称是指两个图形的关系，中心对称图形是指一个具有某种性质的图形.

联系：若把成中心对称的两个图形看成一个整体，则这个整体是中心对称图形.

若把中心对称图形沿某两个对应点的连线分成两部分，则这两部分图形成中心对称.

〖变式训练〗

1. 下列图形中，既是轴对称图形又是中心对称图形的是 (　　)

A. 角　　B. 等边三角形

C. 线段　　D. 平行四边形

2. 已知 A,B,O 三点不共线，A,A'关于点 O 对称，B,B'关于点 O 对称，那么线段 AB 与 $A'B'$的关系是________(填数量和位置关系).

3. 如图 2.3-2-3，已知：四边形 $ABCD$ 是中心对称图形，点 O 是它的对称中心.

求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

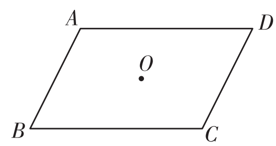


图 2.3-2-3

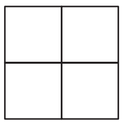
〖反思迁移〗

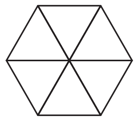
平行四边形不是轴对称图形，它是中心对称图形，对角线的交点是它的对称中心.

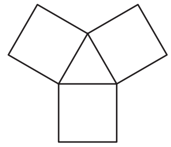
要会区分和记忆一些常见的轴对称图形和中心对称图形，熟悉一些既是轴对称又是中心对称的图形.

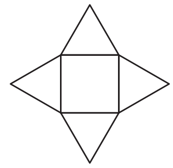
三、效果检测

1. 下列由正三角形和正方形拼成的图形中，是轴对称图形而不是中心对称图形的是 （　　）


A


B


C


D

2. 已知$\angle AOB=30^\circ$，点 P 在$\angle AOB$ 的内部，点 P_1 与 P 关于 OB 对称，点 P_2 与 P 关于 OA 对称，则$\triangle P_1OP_2$ 是 （　　）

A. 含 30°角的直角三角形

B. 顶角是 30°的等腰三角形

C. 等边三角形

D. 等腰直角三角形

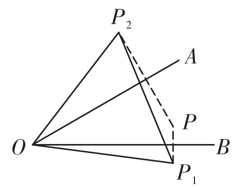


图 2.3－2－4

3. 如图 2.3－2－5，正方形 $ABCD$ 和正方形 $OEFG$ 的边长均为 4，点 O 是正方形 $ABCD$ 的对称中心，则图中阴影部分的面积为________.

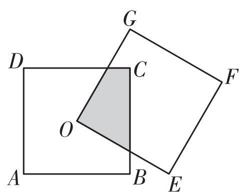


图 2.3－2－5

4. 如图 2.3－2－6，已知$\angle AOB=30^\circ$，点 P 在$\angle AOB$ 的内部，$OP=10$，点 M，N 分别在 OA，OB 上运动，求$\triangle PMN$ 周长的最小值并说明理由.

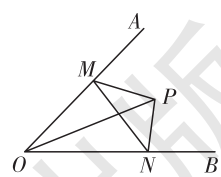


图 2.3－2－6

2.4 三角形的中位线

一、前置夯实

〖前置诊断〗检测你的基础，助力新课学习.

1. 在四边形 $ABCD$ 中，从①$AB/\!/CD$，②$AB=CD$，③$BC/\!/AD$，④$BC=AD$ 中任选两个使四边形 $ABCD$ 为平行四边形的选法种数为（　　）

A. 3　　B. 4

C. 5　　D. 6

2. 如图 2.4－1，在▱$ABCD$ 中，E，F 分别是边 BC，AD 上的点，有下列条件：①$AE/\!/CF$；②$BE=FD$；③$\angle 1=\angle 2$；④$AE=CF$. 若要添加其中一个条件，使四边形 $AECF$ 一定是平行四边形，则添加的条件可以是（　　）

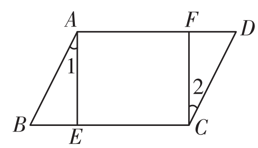


图 2.4－1

A. ①②③④　　B. ①②③

C. ②③④　　D. ①③④

3. 三角形有________条中线. 若 AD 是△ABC 的中线，则△ABD 与△ACD 的________相等.

〖前置巩固〗如果你没有全部正确，务必回顾复习.

1. 平行四边形的性质：对边平行且相等，对角相等、邻角互补，对角线互相平分.

2. 平行四边形的判定方法：

①定义法：两组对边分别平行的四边形是平行四边形；

②判定定理 1：一组对边平行且相等的四边形是平行四边形；

③判定定理 2：两组对边分别相等的四边形是平行四边形；

④判定定理 3：对角线相互平分的四边形是平行四边形.

你可以开始今天的新课学习了！

三角形的中线将三角形分成面积相等的两部分，那么三角形任意两边的中点的连线段有什么特殊性质呢？

二、深度理解

〔追根溯源〕

1. 三角形中位线的概念

连接三角形两边中点的线段叫作三角形的中位线.

如图 2.4－2,连接△ABC 的两条边 AB,AC 的中点的线段 DE 是△ABC 的一条中位线.

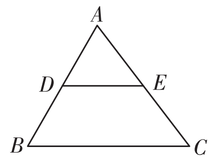


图 2.4－2

一个三角形有三条中位线.

2. 三角形的中位线与三角形的中线不是同一条线段

3. 三角形的中位线定理

三角形的中位线平行于第三边,并且等于第三边的一半.

〔变式训练〕

1. 如图 2.4－3,四边形 $ABCD$ 是平行四边形,对角线 AC,BD 交于点 O,E 是 BC 的中点,以下说法错误的是 (　　)

A. $OE=\frac{1}{2}DC$　　B. $OA=OC$

C. $\angle BOE=\angle OBA$　　D. $\angle OBE=\angle OCE$

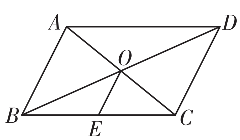


图 2.4－3

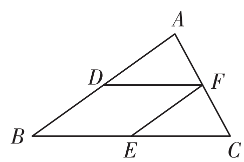


图 2.4－4

2. 如图 2.4－4,在△ABC 中,$AB=3$,$BC=4$,$AC=2$,D,E,F 分别为 AB,BC,AC 的中点,连接 DF,FE,则四边形 $DBEF$ 的周长是 (　　)

A. 5　　B. 7　　C. 9　　D. 11

〔反思迁移〕

1. 由三角形的三条中位线,可得出以下结论:

(1)三条中位线组成一个三角形,其周长为原三角形周长的一半;

(2)三条中位线将原三角形分割成四个全等的三角形;

(3)经过三角形一边的中点且平行于另一边的直线必然平分第三边.

2. 利用三角形中位线定理,常用的添加辅助线的方法有如图 2.4－5 所示几种.

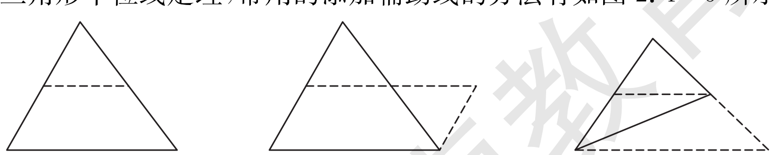


图 2.4－5

三、效果检测

1. 如图 2.4－6，在$\triangle ABC$中，E,D,F分别是AB,BC,CA的中点，$AB=6$，$AC=4$. 那么四边形$AEDF$的周长是________.

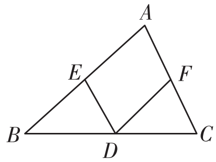


图 2.4－6

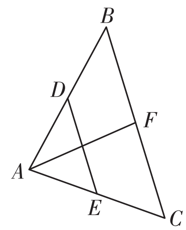


图 2.4－7

2. 如图 2.4－7，在$\triangle ABC$中，D,E,F分别是AB,AC,BC的中点，则DE与AF的关系是________.

3. 如图 2.4－8，在$\triangle ABC$中，$AB=5$，$AC=3$，AM平分$\angle BAC$，$CM\perp AM$，点N为BC的中点，求MN的长.

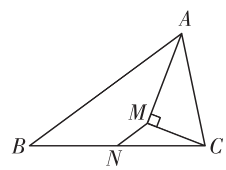


图 2.4－8

4. 已知：如图 2.4－9，在$\triangle ABC$中，CF平分$\angle ACB$，$AC=DC$，$AE=BE$. 求证：$EF=\frac{1}{2}BD$.

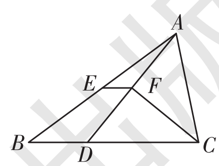


图 2.4－9

2.5 矩形(1)

一、前置夯实

〖前置诊断〗检测你的基础,助力新课学习.

1. 如图 2.5-1-1,在▱$ABCD$ 中,$AD=5$,$AB=3$,AE 平分$\angle BAD$ 交 BC 于点 E,则线段 BE,EC 的长度分别为 ( )

A. 2 和 3　　B. 3 和 2

C. 4 和 1　　D. 1 和 4

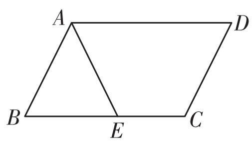


图 2.5-1-1

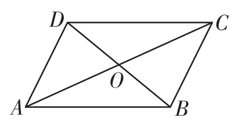


图 2.5-1-2

2. 如图 2.5-1-2,▱$ABCD$ 的两条对角线相交于点 O,已知 $AB=8$ cm,$BC=6$ cm,$\triangle AOB$ 的周长是18 cm,那么$\triangle AOD$ 的周长是 ( )

A. 14 cm　　B. 15 cm

C. 16 cm　　D. 17 cm

〖前置巩固〗如果你没有全部正确,务必回顾复习.

判定平行四边形的方法选择

已知条件	证明思路
一组对边相等	1. 另一组对边也相等　　2. 相等的边也平行
一组对边平行	1. 另一组对边也平行　　2. 平行的边也相等
一组对角相等	另一组对角也相等
对角线相交	对角线互相平分

你可以开始今天的新课学习了!

在小学,我们初步认识了长方形,那么长方形是平行四边形吗?它有哪些性质呢?它与平行四边形有什么区别和联系呢?

二、深度理解

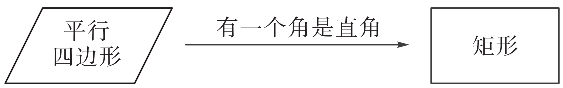
〔追根溯源〕

实践演示:转动平行四边形活动木框,改变平行四边形的形状,观察并思考:

(1)当平行四边形有一个内角是直角时,它是什么四边形?

(2)这个特殊的平行四边形有什么特征?

1. 矩形的定义:有一个角是直角的平行四边形叫作矩形.



2. 如图 2.5-1-3,四边形 $ABCD$ 为矩形,那么对角线 AC 与 DB 相等吗?

因为四边形 $ABCD$ 是矩形,于是有

$AB=DC$,$\angle ABC=\angle DCB=90^\circ$,$BC=CB$,

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle DCB$.

$\therefore AC=DB$.

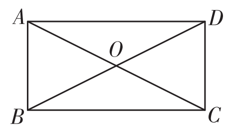


图 2.5-1-3

由此得到矩形的性质:矩形的对角线相等.

3. 矩形与平行四边形的性质对比

类型	平行四边形	矩形
边	两组对边平行且相等	两组对边平行且相等
角	对角相等	每一个角都是 90°
对角线	两条对角线互相平分	两条对角线相等且互相平分

〔变式训练〕

1. 矩形具有而一般平行四边形不一定具有的性质是 (   )

A. 对边互相平行　　B. 对角线相等

C. 对角线互相平分　　D. 对角相等

2. 在矩形 $ABCD$ 中,对角线交于 O 点,$AB=6$,$BC=8$,那么$\triangle AOB$ 的面积为________;周长为________.

3. 如图 2.5-1-4,在矩形 $ABCD$ 中,E 为 AD 中点,$\angle BEC$ 为直角,矩形 $ABCD$ 的周长是 20,求 AD,AB 的长.

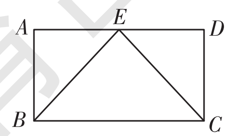


图 2.5-1-4

〖反思迁移〗

矩形的性质可以从边、角、对角线去记忆.

矩形是一个特殊的平行四边形,它具有平行四边形的所有性质,特殊点在于四个角都是 90°,对角线相等.

三、效果检测

1. 下列图形性质中,矩形不一定具有的是 ( )

A. 对角线互相平分且相等　　B. 四个角相等

C. 是轴对称图形　　D. 对角线互相垂直

2. 在$\triangle ABC$中,AM是中线,$\angle BAC=90^\circ$,$AB=6$ cm,$AC=8$ cm,那么AM的长为________.

3. 如图 2.5-1-5,在矩形$ABCD$中,AE平分$\angle BAD$,$\angle CAE=15^\circ$,求$\angle BOE$的度数.

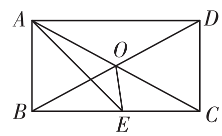


图 2.5-1-5

4. 如图 2.5-1-6,在矩形$ABCD$中,对角线AC与BD相交于点O,BC的长为6,$\triangle OBC$的周长是15,求矩形的对角线的长度.

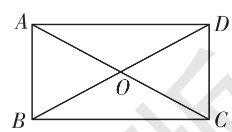


图 2.5-1-6

2.5 矩形(2)

一、前置夯实

〖前置诊断〗检测你的基础,助力新课学习.

1. 关于四边形 $ABCD$ 有:①两组对边分别相等;②一组对边平行且相等;③一组对边平行且另一组对边相等;④两条对角线相等. 以上四个条件中,可以判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形的有 (　　)

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

2. 已知矩形的对角线长为 4 cm,一条边长为 $2\sqrt{3}$cm,则这个矩形的面积为________.

〖前置巩固〗如果你没有全部正确,务必回顾复习.

1. 矩形的四个角都是直角,对边相等,对角线互相平分.
2. 矩形的对角线相等.
3. 矩形既是中心对称图形,又是轴对称图形.

你可以开始今天的新课学习了!

前面我们学习了矩形的性质,根据性质和判定的关系,我们能否猜想得出矩形的判定呢?

二、深度理解

〖追根溯源〗

1. (1)矩形的判定方法 1:有一个角是直角的平行四边形是矩形.

(2)矩形的判定方法 2:有三个角是直角的四边形是矩形.

(3)矩形的判定方法 3:对角线相等的平行四边形是矩形.(对角线相等且互相平分的四边形也是矩形)

2. 思考:(1)对角线相等的四边形一定是矩形吗?

(2)需要添加什么条件才能使对角线相等的四边形是矩形呢?

〖变式训练〗

1. 下列说法错误的是 (　　)

A. 有一组对角互补的平行四边形一定是矩形

B. 两条对角线相等的平行四边形一定是矩形

C. 对角线互相平分的四边形一定是矩形

D. 有三个角是直角的四边形一定是矩形

2. 在▱$ABCD$ 中，$AB=6$，$BC=8$，$AC=10$，则它的面积是________.

3. 已知：如图 2.5－2－1，▱$ABCD$ 的四个内角的平分线分别相交于点 E，F，G，H. 求证：四边形 $EFGH$ 是矩形.

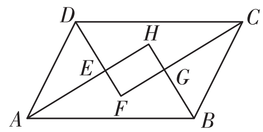


图 2.5－2－1

〖反思迁移〗

利用边、角、对角线的关系可以证明一个四边形是矩形，反过来，给出一个矩形就能得到边、角、对角线之间的关系，切记混淆！

三、效果检测

1. 下列说法正确的是　（　　）
   A. 一组对边平行且相等的四边形是矩形
   B. 一组对边平行且有一个角是直角的四边形是矩形
   C. 对角线互相垂直的平行四边形是矩形
   D. 一个角是直角且对角线互相平分的四边形是矩形

2. 若矩形的一条角平分线将一边分为 3 cm 和 5 cm 两部分，则矩形的周长为　（　　）
   A. 22 cm　　B. 26 cm　　C. 22 cm 或 26 cm　　D. 28 cm

3. 如图 2.5－2－2，在△ABC 中，$AB=AC$，AD 为∠BAC 的平分线，AN 为△ABC 的外角∠CAM 的平分线，$CE\perp AN$，垂足为 E. 求证：四边形 $ADCE$ 是矩形.

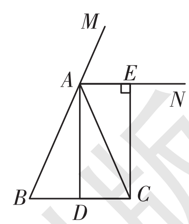


图 2.5－2－2

4. 如图 2.5－2－3，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=3$，$BC=4$，P 是 AD 上任一点，$PE\perp AC$ 于点 E，$PF\perp BD$ 于点 F. 求 $PE+PF$ 的值.

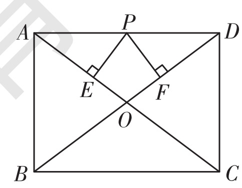


图 2.5－2－3

2.6 菱形(1)

一、前置夯实

〖前置诊断〗检测你的基础，助力新课学习.

1. 以下关于矩形的说法中，错误的是 (　　)

A. 有一个角是直角的平行四边形是矩形　　B. 三个角是直角的四边形是矩形

C. 对角线相等且互相平分的四边形是矩形　　D. 对角线相等的四边形是矩形

2. 已知矩形的一条对角线长是 8 cm，两条对角线的一个夹角为 60°，则矩形的周长为________.

〖前置巩固〗如果你没有全部正确，务必回顾复习.

掌握矩形的性质和判定定理.

你可以开始今天的新课学习了!

有一个角是直角的平行四边形是矩形，那么还有其他特殊的平行四边形吗？下面我们将学习另一种特殊的平行四边形——菱形，掌握菱形的性质.

二、深度理解

〖追根溯源〗

1. 菱形的定义

一组邻边相等的平行四边形叫作菱形.

2. 菱形的性质

边	角	对角线	对称性
四条边都相等	对角相等	对角线互相垂直且平分， 每条对角线平分一组对角	轴对称、中心对称

3. 菱形的面积等于两条对角线长度乘积的一半

〔变式训练〕

1. 如图 2.6-1-1,在菱形 $ABCD$ 中,对角线 AC,BD 相交于点 O,下列说法错误的是 ( )

A. $\angle ADB=\angle CDB$

B. $AC=BD$

C. $AC\perp BD$

D. $AB=AD$

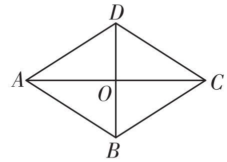


图 2.6-1-1

2. 在菱形 $ABCD$ 中,$\angle ABC=60°$,$AC=4$,则 BD 的长为 ( )

A. $8\sqrt{3}$　　B. $4\sqrt{3}$　　C. $2\sqrt{3}$　　D. 8

3. 在菱形 $ABCD$ 中,若 $AC=6$,$BD=8$,则菱形 $ABCD$ 的面积是________.

4. 如图 2.6-1-2,O 是矩形 $ABCD$ 的对角线的交点,$DE /\!/ AC$,$CE /\!/ BD$,求证:$OE\perp DC$.

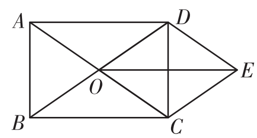


图 2.6-1-2

〔反思迁移〕

菱形是一个特殊的平行四边形,它的四条边都相等,对角线互相垂直且每条对角线平分一组对角.

矩形的四个角都相等,对角线也相等. 注意区分菱形和矩形的性质.

三、效果检测

1. 菱形和矩形一定都具有的性质是 ( )

A. 对角线相等　　B. 对角线互相平分

C. 对角线互相垂直　　D. 每条对角线平分一组对角

2. 菱形的一个内角是 120°,一条较短的对角线的长为 10,则菱形的周长是________.

3. 如图 2.6-1-3,在▱$ABCD$ 中,$AB=3$ cm,$BC=5$ cm,$\angle B=60°$,G 是 CD 的中点,E 是边 AD 上的动点,EG 的延长线与 BC 的延长线交于点 F,连接 CE,DF.

(1)当 $AE=$________cm 时,四边形 $CEDF$ 是矩形;

(2)当 $AE=$________cm 时,四边形 $CEDF$ 是菱形.

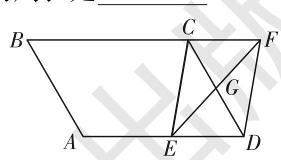


图 2.6-1-3

4. 如图 2.6-1-4,在边长为 2 的菱形 $ABCD$ 中,$\angle DAB=60°$,点 E 为 AB 中点,点 F 是 AC 上一动点,求 $EF+BF$ 的最小值.(提示:根据轴对称的性质)

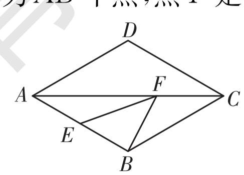


图 2.6-1-4

2.6 菱形(2)

一、前置夯实

〖前置诊断〗检测你的基础,助力新课学习.

1. 在菱形 $ABCD$ 中,已知 $AB=4$ cm,则菱形的周长为________.

2. 菱形的两条对角线长分别是 6 和 8,则此菱形的边长是 ( )

A. 10　　B. 8　　C. 6　　D. 5

〖前置巩固〗如果你没有全部正确,务必回顾复习.

1. 菱形的四条边都相等,对角相等,对角线互相平分.
2. 菱形的对角线互相垂直.
3. 菱形既是中心对称图形,又是轴对称图形.

你可以开始今天的新课学习了!

前面我们学习了菱形的性质,类比矩形的性质和判定,怎么证明一个四边形是菱形呢?

二、深度理解

〖追根溯源〗

1. 用定义判定

判断一个四边形是菱形,用它的定义判定是最基本的方法,即先判定四边形是平行四边形,再判定它有一组邻边相等.

2. 菱形的判定定理

判定定理 1:四条边都相等的四边形是菱形.

判定定理 2:对角线互相垂直的平行四边形是菱形.

〖变式训练〗

1. 下列条件能判定四边形 $ABCD$ 是菱形的是 ( )

A. 对角线互相平分　　B. 对角线互相垂直

C. 邻边相等　　D. 对角线互相垂直且平分

2. 如图 2.6－2－1,将矩形 $ABCD$ 绕对角线交点逆时针方向旋转一角度后,使 A 与 B 重合,得矩形 $BFDE$,BF 交 AD 于点 M,DE 交 BC 于点 N,则四边形 $BMDN$ 是________(填特殊四边形的名称).

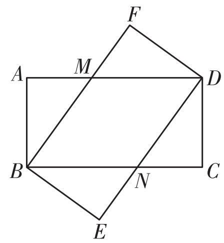


图 2.6－2－1

3. 如图 2.6－2－2,已知▱$ABCD$ 的对角线 AC,BD 相交于点 O,且 $AD=\sqrt{13}$,$AC=6$,$BD=4$,你能说明四边形 $ABCD$ 是菱形吗?

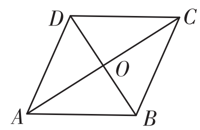


图 2.6－2－2

〖反思迁移〗

不管是矩形或者菱形,都是平行四边形,可以先判定四边形是平行四边形,再判定这个平行四边形具有某种特殊性.如果还有一组邻边相等,那它就是菱形;如果还有一个角是直角,那它就是矩形.

三、效果检测

1. 已知四边形 $ABCD$ 是平行四边形,下列结论中不一定正确的是 (　　)

A. $AB=CD$　　B. $AC=BD$

C. $AC\perp BD$ 时,它是菱形　　D. 当$\angle ABC=90°$时,它是矩形

2. 在四边形 $ABCD$ 中,对角线 AC,BD 交于点 O,从(1)$AB=CD$,(2)$AB/\!/CD$,(3)$OA=OC$,(4)$OB=OD$,(5)$AC\perp BD$,(6)AC 平分$\angle BAD$ 这六个条件中,选取三个推出四边形 $ABCD$ 是菱形.如(1)(2)(5)⇒四边形 $ABCD$ 是菱形,再写出符合要求的两个:__________⇒四边形 $ABCD$ 是菱形;__________⇒四边形 $ABCD$ 是菱形.

3. 如图 2.6－2－3,AD 是 Rt△ABC 斜边 BC 上的高,$\angle B$ 的平分线交 AD 于点 M,交 AC 于点 E,$\angle DAE$ 的平分线交 CD 于点 N.求证:四边形 $AMNE$ 为菱形.

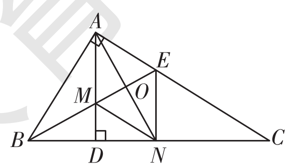


图 2.6－2－3

2.7 正方形

一、前置夯实

〖前置诊断〗检测你的基础，助力新课学习.

1. 下列条件中，不能判定四边形 $ABCD$ 是菱形的是 (　　)

A. $\square ABCD$ 中，$AB=BC$　　B. $\square ABCD$ 中，$AC\perp BD$

C. $\square ABCD$ 中，$AC=BD$　　D. $\square ABCD$ 中，AC 平分 $\angle BAD$

2. 如图 2.7－1，在 $\square ABCD$ 中，$\angle BAD$ 的平分线交 BC 于点 E，$\angle ABC$ 的平分线交 AD 于点 F. 若 $BF=12$，$AB=10$，则 AE 的长为__________.

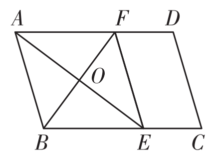


图 2.7－1

〖前置巩固〗如果你没有全部正确，务必回顾复习.

1. 四条边都相等的四边形是菱形.

2. 对角线互相垂直的平行四边形是菱形.

你可以开始今天的新课学习了！

矩形和菱形都是特殊的平行四边形，它们再进一步特殊，会得到什么图形呢？

二、深度理解

〖追根溯源〗

1. 正方形的定义

有一组邻边相等且有一个角是直角的平行四边形叫作正方形.

2. 正方形的性质

(1)正方形四条边都相等，四个角都是直角.

(2)正方形的对角线相等，且互相垂直平分.

(3)正方形既是中心对称图形，又是轴对称图形.

3. 正方形的判定

(1)一组邻边相等的矩形是正方形；

(2)有一个角是直角的菱形是正方形；

(3)对角线互相垂直平分且相等的四边形是正方形.

〖变式训练〗

1. 正方形具有而菱形不一定具有的性质是 ( )

A. 对角线互相垂直　　B. 对角线相等

C. 对角线互相平分　　D. 对角相等

2. 能判定正方形的是 ( )

A. 四边相等的四边形是正方形

B. 四角相等的四边形是正方形

C. 对角线互相垂直的平行四边形是正方形

D. 对角线互相垂直平分且相等的四边形是正方形

3. 如图 2.7－2，直线 l 过正方形 $ABCD$ 的顶点 B，点 A，C 到直线 l 的距离 AE，CF 分别是 1 cm，2 cm，则线段 EF 的长为 ________ cm.

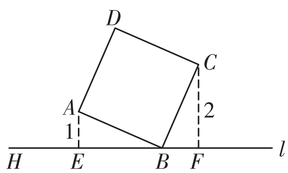


图 2.7－2

〖反思迁移〗

正方形具有矩形、菱形、平行四边形的所有性质，可以从边、角、对角线去记忆.

正方形的判定可以分步来证明：可以先判定四边形是矩形，再判定这个矩形有一组邻边相等；也可以先判定四边形是菱形，再判定这个菱形有一个角是直角.

三、效果检测

1. 已知四边形 $ABCD$ 是平行四边形，再从①$AB=BC$，②$\angle ABC=90°$，③$AC=BD$，④$AC\perp BD$ 四个条件中，选两个作为补充条件，使得四边形 $ABCD$ 是正方形，现有下列四种选法，其中错误的是 ( )

A. ①②　　B. ②③　　C. ①③　　D. ②④

2. 如图 2.7－3，已知 P 是正方形 $ABCD$ 对角线 BD 上一点，且 $BP=BC$，则 $\angle ACP=$ ________.

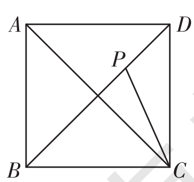


图 2.7－3

3. 如图 2.7－4，在$\triangle ABC$中，$\angle ABC=90^{\circ}$，BD平分$\angle ABC$，$DE\perp BC$，$DF\perp AB$，试说明四边形$BEDF$是正方形.

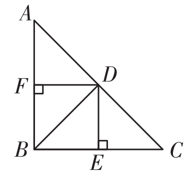


图 2.7－4

4. 如图 2.7－5，已知过正方形$ABCD$对角线BD上一点P，作$PE\perp BC$于点E，作$PF\perp CD$于点F. 试说明$AP=EF$.

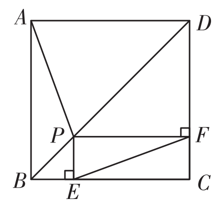
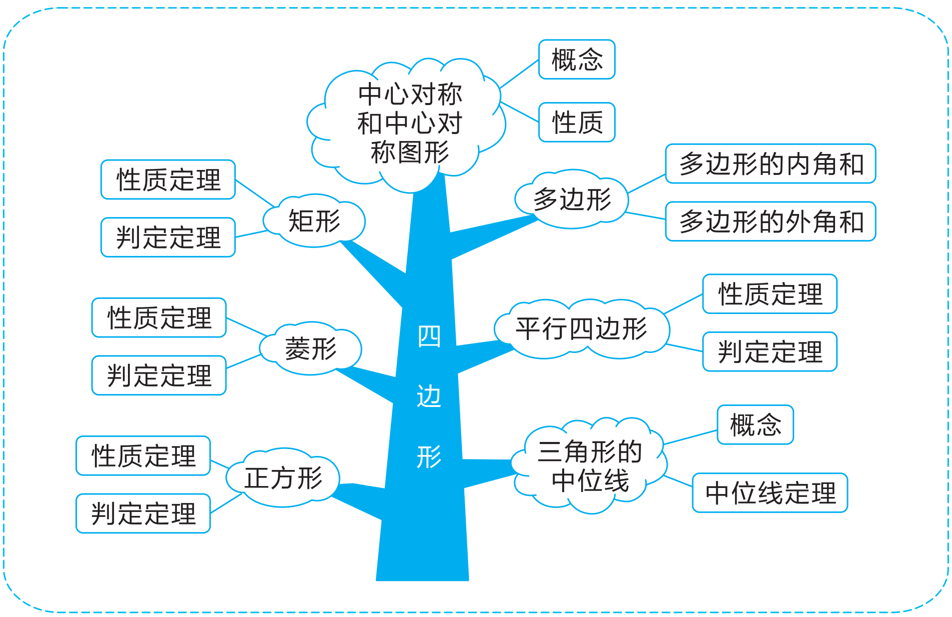


图 2.7－5

本章整理提升

知识框架



融会贯通

1. 特殊平行四边形的性质和判定

熟练掌握各类特殊平行四边形的定义、性质、判定以及它们之间的联系和区别，同时灵活运用全等三角形、等腰三角形、直角三角形等知识进行分析.

例 1 如图 2 - 1，在矩形 $ABCD$ 中，M，N 分别是 AD，BC 的中点，P，Q 分别是 BM，DN 的中点.

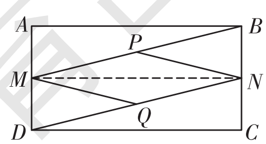


图 2 - 1

(1)求证：$\triangle MBA \cong \triangle NDC$；

(2)四边形 $MPNQ$ 是什么样的特殊四边形？请说明理由.

解：(1)∵四边形 $ABCD$ 是矩形，∴$AB=CD$，$AD=BC$，$\angle A=\angle C=90$.

∵M，N 分别是 AD，BC 的中点，∴$AM=CN$.

在$\triangle MBA$和$\triangle NDC$中，

$AM=CN$，$\angle A=\angle C$，$AB=CD$，

$\therefore \triangle MBA \cong \triangle NDC$(SAS).

(2)如图 2-1，连接MN.

$\because M$，N分别是AD，BC的中点，$\therefore MN // AB // DC$，

$\therefore \angle BNM=\angle DMN=90^{\circ}$.

$\because P$，Q分别是BM，DN的中点，

$\therefore PN=MP=\frac{1}{2}BM$，$MQ=QN=\frac{1}{2}DN$.

由(1)知$\triangle MBA \cong \triangle NDC$，

$\therefore BM=DN$，

$\therefore PN=MP=MQ=QN$，

$\therefore$四边形$MPNQ$是菱形.

2. 三角形的中位线定理的应用

三角形的中位线定理不仅反映了图形间线段的位置关系，而且还揭示了线段间的数量关系，利用三角形的中位线定理可以解决许多相关的问题.

例 2 如图 2-2，已知四边形$ABCD$中，R，P分别是BC，CD上的点，E，F分别是AP，RP的中点，当点P在CD上从C向D移动而点R不动时，下列结论成立的是 (　　)

A. 线段EF的长逐渐增大

B. 线段EF的长逐渐减小

C. 线段EF的长不变

D. 线段EF的长与点P的位置有关

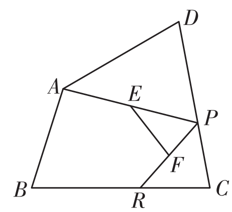


图 2-2

解: 连接AR. 因为AR的长度不变，根据中位线定理可知，$EF // AR$，且$EF=\frac{1}{2}AR$. 所以当点P在CD上从C向D移动而点R不动时，线段EF的长不变. 故选 C.

例 3 如图 2-3，在$\triangle ABC$中，$BC>AC$，点D在BC上，且$DC=AC$，$\angle ACB$的平分线CF交AD于F，点E是AB的中点，连接EF. 试说明$EF // BC$.

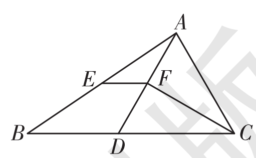


图 2-3

证明: 在$\triangle ACD$中，$\because DC=AC$，CF平分$\angle ACD$，

$\therefore AF=FD$，即F是AD的中点.

又$\because E$是AB的中点，

$\therefore EF$是$\triangle ABD$的中位线，

$\therefore EF // BC$.

3. 动点问题

“动点问题”是指图形中存在一个或多个动点，它们在线段、射线或弧线上运动. 动点问题的背景一般是特殊图形，所以要把握好一般与特殊的关系. 分析过程中，特别要关注图形的特性(特殊角、特殊图形的性质、图形的特殊位置). 解决这类问题的关键是动中求静，灵活运用有关数学知识解决问题.

例 4 如图 2－4，在四边形 $ABCD$ 中，$AD // BC$，$\angle B=90^\circ$，$AD=18$ cm，$BC=21$ cm，点 P 从点 A 开始沿 AD 边向 D 以 1 cm/s 的速度运动，点 Q 从点 C 开始沿 CB 边向 B 以 2 cm/s 的速度运动，如果点 P，Q 分别从点 A，C 同时出发，当一点到达终点时，两点同时停止运动，设运动时间为 t s.

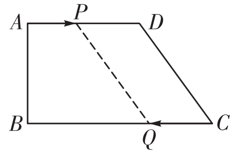


图 2－4

(1)当 t 为何值时，四边形 $ABQP$ 为矩形？

(2)当 t 为何值时，四边形 $PQCD$ 为平行四边形？

解:(1)由题意知 $AP=t$ cm，$CQ=2t$ cm，

$\therefore BQ=(21-2t)$ cm.

$\because AD // BC$，

$\therefore AP // BQ$.

又$\because \angle B=90^\circ$，

$\therefore$要使四边形 $ABQP$ 为矩形，只需满足 $AP=BQ$.

即 $t=21-2t$，解得 $t=7$.

即当 $t=7$ s 时，四边形 $ABQP$ 为矩形.

(2)由题意知 $CQ=2t$ cm，$PD=(18-t)$cm.

$\because AD // BC$，

$\therefore$要使四边形 $PQCD$ 为平行四边形，只需满足 $PD=QC$.

即 $18-t=2t$，解得 $t=6$.

即当 $t=6$ s 时，四边形 $PQCD$ 为平行四边形.

〖变式训练〗

1. 如图 2－5，某花木场有一块如四边形 $ABCD$ 的空地，两对角线相等，各边的中点分别是 E，F，G，H，用篱笆围成的四边形 $EFGH$ 场地的周长为 40 cm，则对角线 $AC=$________cm.

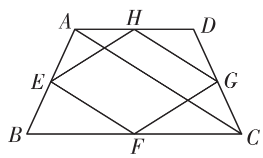


图 2－5

2. 如图 2－6，已知四边形 $ABCD$ 为平行四边形，$AE \perp BD$ 于点 E，$CF \perp BD$ 于点 F.

(1)求证：$BE=DF$；

(2)若 MN 分别为边 AD，BC 上的点，且 $DM=BN$，试判断四边形 $MENF$ 的形状.

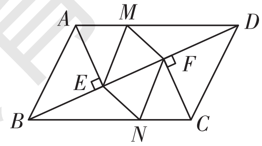


图 2－6

3. 如图 2－7，在矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，点 P 是线段 AD 上一动点（不与点 A，D 重合），PO 的延长线交 BC 于点 Q，连接 BP，QD.

（1）求证：四边形 $PBQD$ 为平行四边形.

（2）若 $AB=3$ cm，$AD=4$ cm，点 P 从点 A 出发，以 1 cm/s 的速度向点 D 匀速运动，设点 P 的运动时间为 t s，则四边形 $PBQD$ 能够成为菱形吗？如果能，请求出相应的 t 值；如果不能，请说明理由.

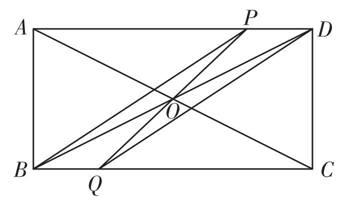


图 2－7

本章达标测试

（时间 60 分钟，满分 100 分）

一、选择题（每小题 3 分，共 24 分）

1. 一个多边形的每一个内角都等于 135°，则它的边数是　　（　　）

A. 6　　B. 8　　C. 10　　D. 12

2. 顺次连接菱形各边中点所得的四边形一定是　　（　　）

A. 等腰梯形　　B. 正方形　　C. 平行四边形　　D. 矩形

3. 给出下列命题，其中错误命题的个数是　　（　　）

①四条边相等的四边形是正方形；②两组邻边分别相等的四边形是平行四边形；③有一个角是直角的平行四边形是矩形；④矩形、线段都是轴对称图形.

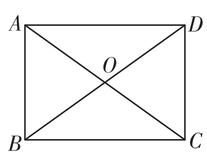
A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

4. 下列图形中既是轴对称图形，又是中心对称图形的是　　（　　）

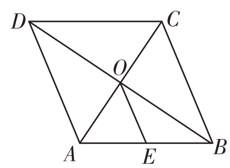
A. 平行四边形　　B. 等边三角形　　C. 矩形　　D. 直角三角形

5. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC,BD 相交于点 O，若 $OA=2$，则 BD 的长为　　（　　）

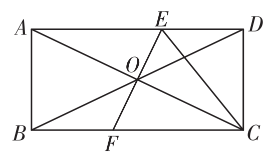
A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1



第 5 题图



第 6 题图



第 7 题图

6. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC,BD 相交于点 O，E 为 AB 的中点，且 $OE=a$，则菱形 $ABCD$ 的周长为　　（　　）

A. $16a$　　B. $12a$　　C. $8a$　　D. $4a$

7. 如图，矩形 $ABCD$ 的周长为 20 cm，两条对角线相交于 O 点，过点 O 作 AC 的垂线 EF，分别交 AD,BC 于 E,F 点，连接 CE，则△CDE 的周长为　　（　　）

A. 5 cm　　B. 8 cm　　C. 9 cm　　D. 10 cm

8. 在四边形 $ABCD$ 中，AC 与 BD 相交于点 O，且 $OA=OC,OB=OD$. 如果再增加条件 $AC=BD$，此四边形一定是　　（　　）

A. 正方形　　B. 矩形　　C. 菱形　　D. 都有可能

二、填空题（每小题 3 分，共 24 分）

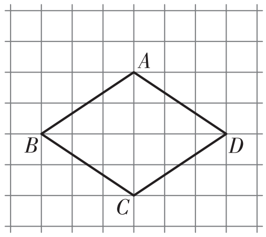
9. 五边形的内角和是________.

10. 在平行四边形 $ABCD$ 中，$\angle B+\angle D=200^\circ$，则 $\angle A$ 的度数是________.

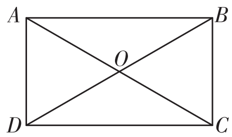
11. 以长为 8，宽为 6 的矩形各边中点为顶点的四边形的周长为________.

12. 已知正方形的一条对角线长为 4 cm,则它的面积是________.

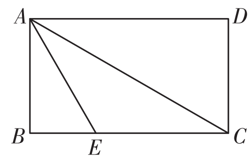
13. 若方格纸中每个最小正方形的边长为 1,则该菱形的面积为________.



第 13 题图



第 14 题图



第 15 题图

14. 如图,在矩形 $ABCD$ 中,对角线 AC,BD 交于点 O,已知$\angle AOB=120^{\circ}$,$AB=2.5$,则 AC 的长为________.

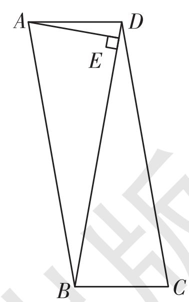
15. 如图,矩形纸片 $ABCD$,$AB=2$,点 E 在 BC 上,且 $AE=EC$. 若将纸片沿 AE 折叠,点 B 恰好落在 AC 上,则 AC 的长是________.

16. 矩形的面积是 12 cm^2,一边长为 3 cm,则对角线的长为________.

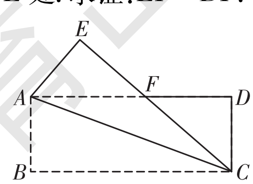
三、解答题(共 52 分)

17. (6 分)若一个多边形内角和与外角和相加是 1 800°,则它是几边形?

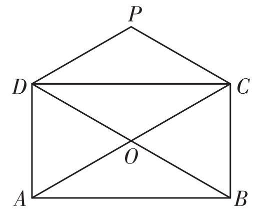
18. (6 分)如图,在▱$ABCD$ 中,$DB=CD$,$\angle C=80^{\circ}$,$AE\perp BD$ 于点 E,试求$\angle DAE$ 的度数.



19. (8 分)如图,将矩形纸片 $ABCD$ 沿对角线 AC 折叠,使点 B 落在点 E 处. 求证:$EF=DF$.



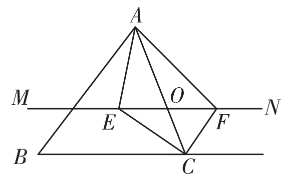
20. (10 分)如图,矩形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O,$DP \parallel AC$,$CP \parallel BD$,PD,PC 相交于点 P,四边形 $PCOD$ 是菱形吗?试说明理由.



21. (10 分)如图,在△ABC 中,点 O 是 AC 边上的一个动点,过点 O 作直线 $MN \parallel BC$,设 MN 交∠BCA 的平分线于点 E,交∠BCA 的外角平分线于点 F.

(1)求证:$EO=FO$;

(2)当点 O 运动到何处时,四边形 $AECF$ 是矩形?并证明你的结论.



22. (12 分)正方形 $ABCD$ 中,AC 是对角线,今有较大的直角三角板,一边始终经过点 B,直角顶点 P 在射线 AC 上移动,另一边交 DC 于 Q.

(1)如图 1,当点 Q 在 DC 边上时,猜想并写出 PB 与 PQ 所满足的数量关系,并加以证明;

(2)如图 2,当点 Q 落在 DC 的延长线上时,猜想并写出 PB 与 PQ 满足的数量关系,请证明你的猜想.

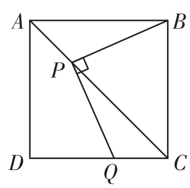


图1

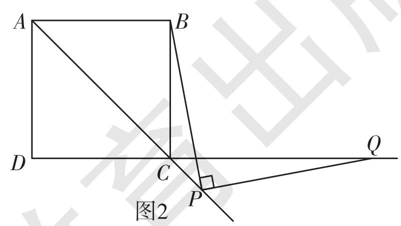


图2

参考答案

第1章　直角三角形

1.1　直角三角形的性质和判定(Ⅰ)(1)

〚前置诊断〛

1. D　**2.** B

〚变式训练〛

1. 38°　**2.** A

3. (1)AD,BD　(2)$\angle ABD$　(3)35°

〚效果检测〛

1. B　**2.** C　**3.** 50°　40°　**4.** 10

5. $BC=\frac{1}{2}AB$. 理由如下：

取线段 AB 的中点 D,连接 CD.

$\because CD$ 是 Rt$\triangle ABC$ 斜边 AB 上的中线，

$\therefore CD=\frac{1}{2}AB=BD$.

$\because \angle BCA=90^\circ$,$\angle A=30^\circ$,$\therefore \angle B=60^\circ$.

$\therefore \triangle BDC$ 为等边三角形，

$\therefore BC=BD=\frac{1}{2}AB$.

1.1　直角三角形的性质和判定(Ⅰ)(2)

〚前置诊断〛

1. C　**2.** B　**3.** A

〚变式训练〛

1. C

2. 30°或 150°　本题分两种情况讨论：

(1)如图 1,当 BD 在三角形内部时，

$\because BD=\frac{1}{2}AB$,$\angle ADB=90^\circ$,

$\therefore \angle A=30^\circ$.

(2)如图 2,当 BD 在三角形外部时，

$\because BD=\frac{1}{2}AB$, $\angle ADB=90^\circ$,

$\therefore \angle DAB=30^\circ$,$\angle BAC=180^\circ-\angle DAB=150^\circ$.

故顶角度数是 30°或 150°.

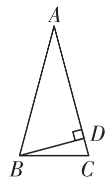


图1

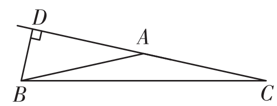


图2

3. 过点 P 作 $PD\perp AB$,交 AB 的延长线于点 D.

由题意可知$\angle A=15^\circ$,$\angle PBD=30^\circ$,

$\therefore \angle BPA=\angle PBD-\angle A=15^\circ$,即$\angle BPA=\angle A$.

$\therefore PB=AB=15\times 2=30$(海里).

在 Rt$\triangle BPD$ 中,$\angle PBD=30^\circ$,$PB=30$ 海里，

$\therefore PD=\frac{1}{2}PB=\frac{1}{2}\times 30=15$(海里).

由于 15 海里<18 海里,所以轮船继续向前航行有触礁的危险.

〚效果检测〛

1. C　**2.** B　**3.** 3 cm

4. 9 cm　$\because AB=AC$,$\angle BAC=120^\circ$,

$\therefore \angle B=\angle C=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle BAC)=30^\circ$.

$\because AD\perp AC$, $\therefore \angle DAC=90^\circ$.

$\therefore \angle BAD=120^\circ-90^\circ=30^\circ=\angle B$,

$\therefore AD=BD=3$ cm.

$\because \angle DAC=90^\circ$,$\angle C=30^\circ$,

$\therefore CD=2AD=6$ cm.

$\therefore BC=BD+DC=9$ cm.

5. $\because AD\perp BC$,$\therefore \angle ADC=90^\circ$.

在 Rt△ADC 中，∵∠C=30°，AC=2 cm，

∴ ∠DAC=60°，$AD=\frac{1}{2}AC$=1 cm.

又∠BAC=105°，∠BAD=∠BAC－∠DAC=105°－60°=45°，

∴∠ABD=90°－∠BAD=45°=∠BAD，

∴$BD=AD$=1 cm.

6. 过点 A 作 $AD\perp BC$ 于 D.

∵∠AOD=90°－60°=30°，∠ADO=90°，

∴$AD=\frac{1}{2}AO=\frac{1}{2}\times 20\sqrt{3}\approx 17.3$(海里).

由于 AD 长小于 20 海里，所以轮船由西向东航行有触礁的危险.

1.2 直角三角形的性质和判定（Ⅱ）(1)

〖前置诊断〗

1. D **2.** B **3.** A

〖变式训练〗

1. C

2. 直角 $(a+b)^2=10^2-2\times 18=64$，

∵$c^2=64$，∴$a^2+b^2=c^2$.

∴△ABC 是直角三角形.

3. 4 cm

〖效果检测〗

1. C **2.** 13 或 $\sqrt{119}$ **3.** 12 cm

4. 14 ∵∠ACB=90°，$S_1=6$，$S_2=8$，

∴$AC^2=6$，$BC^2=8$，

∴$AB^2=AC^2+BC^2=14$.

∴$S_3=14$.

5. (1)在 Rt△ABC 中，∵∠C=90°，BC=6，AC=8，

∴$AB=\sqrt{6^2+8^2}=10$.

∵DE 垂直平分 AB，∴$AD=BD=5$.

(2)∵DE 垂直平分 AB，∴$BE=AE$.

设 $EC=x$，则 $AE=BE=8-x$.

故 $6^2+x^2=(8-x)^2$.

解得 $x=\frac{7}{4}$.

∴$AE=8-\frac{7}{4}=\frac{25}{4}$.

1.2 直角三角形的性质和判定（Ⅱ）(2)

〖前置诊断〗

1. A **2.** C **3.** D

〖变式训练〗

1. B 由题意可得：AB=25 m，OB=7 m，

则 $OA=\sqrt{AB^2-OB^2}=\sqrt{25^2-7^2}=24$(m).

当云梯的顶端下滑了 4 m，则 $A'O=24-4=20$(m).

故 $OB'=\sqrt{25^2-20^2}=15$(m)，

则 $BB'=OB'-OB=8$ m. 故选 B.

2. C ∵∠CAB=90°，∠C=30°，AC=36 m，

设 $AB=x$ m，则 $BC=2x$ m.

∴$AC^2+AB^2=BC^2$，

即 $36^2+x^2=(2x)^2$.

解得 $x=12\sqrt{3}$. 故选 C.

3. D 由勾股定理得，正方形 F 的面积=正方形 A 的面积+正方形 B 的面积=$3^2+5^2=34$.

同理，正方形 G 的面积=正方形 C 的面积+正方形 D 的面积=$2^2+3^2=13$.

∴正方形 E 的面积=正方形 F 的面积+正方形 G 的面积=47. 故选 D.

4. ∵甲轮船向东南方向航行，乙轮船向西南方向航行，∴$AO\perp BO$.

∵甲轮船以 24 海里/h 的速度航行了半小时，

∴$OB=24\times 0.5=12$(海里).

又∵AB=15 海里，

∴ 在 Rt△AOB 中，$AO=\sqrt{AB^2-OB^2}=\sqrt{15^2-12^2}=9$(海里)，

∴乙轮船每小时航行 $9\div 0.5=18$(海里).

〖效果检测〗

1. A **2.** D

3. B ∵∠ACB=90°，∴$AC^2+BC^2=AB^2$.

∵$S_1=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{AC}{2}\right)^2=\frac{\pi\cdot AC^2}{8}$，

$S_2=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{BC}{2}\right)^2=\frac{\pi\cdot BC^2}{8}$,

$S_3=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2=\frac{\pi\cdot AB^2}{8}$,

$\therefore S_1+S_2=\frac{\pi}{8}(AC^2+BC^2)=\frac{\pi}{8}AB^2=S_3$.

即 $S_1+S_2=S_3$. 故选 B.

4. (1)由题意可得$\angle PBC=30^\circ$,$\angle MAB=60^\circ$.

$\therefore\angle CBQ=60^\circ$,$\angle BAN=30^\circ$,

$\therefore\angle ABQ=30^\circ$,

$\therefore\angle ABC=90^\circ$.

$\because AB=BC=10$ km,

$\therefore AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=10\sqrt{2}\approx14.1$(km).

故 A,C 两港之间的距离约为 14.1 km.

(2)由(1)知,$\triangle ABC$ 为等腰直角三角形,

$\therefore\angle BAC=45^\circ$,

$\therefore\angle CAM=60^\circ-45^\circ=15^\circ$.

$\therefore C$ 港在 A 港的北偏东 15°方向上.

5. (1)结论:$a^2+b^2=c^2$.

证明:$\because$阴影部分的面积$=4\times\frac{1}{2}ab=2ab$,

阴影部分的面积$=(a+b)^2-c^2$,

$\therefore(a+b)^2-c^2=2ab$,即 $a^2+b^2=c^2$.

(2)在 Rt$\triangle ABC$ 中,$AC=5$,$AB=13$,

$\therefore5^2+BC^2=13^2$,

解得 $BC=12$.

当 $CP\perp AB$ 时,PC 最短,

此时$\frac{1}{2}BC\times AC=\frac{1}{2}AB\times PC$,

即 $PC=\frac{5\times12}{13}=\frac{60}{13}$,

$\therefore PC$ 的最小值为$\frac{60}{13}$.

1.2 直角三角形的性质和判定(Ⅱ)(3)

〖前置诊断〗

1. D

2. C 如果一个命题的条件和结论分别是另一个命题的结论和条件,那么这两个命题叫作互逆命题. 选项 C 的逆命题是:对应角相等的两个三角形是全等三角形,显然是假命题. 故选 C.

3. 如果三角形的三条边长 a,b,c 满足关系式:$a^2+b^2=c^2$,那么这个三角形是直角三角形

〖变式训练〗

1. B

2. C 直角三角形是(1)(2)(3),故选 C.

3. 等腰直角三角形

4. (1)$\because AB=13$ cm,$BD=8$ cm,

$\therefore AD=AB-BD=5$ cm.

$\because AC=13$ cm,$CD=12$ cm,

$\therefore AD^2+CD^2=AC^2$,

$\therefore\angle ADC=90^\circ$,

故$\triangle ADC$ 是直角三角形.

(2)在 Rt$\triangle BDC$ 中,$\angle BDC=180^\circ-90^\circ=90^\circ$,

$BD=8$ cm,$CD=12$ cm,

由勾股定理得 $BC=\sqrt{BD^2+CD^2}=\sqrt{8^2+12^2}=4\sqrt{13}$(cm).

〖效果检测〗

1. B **2.** 直角三角形

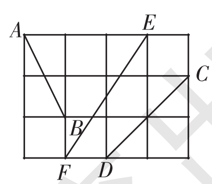
3. (1)$\sqrt{5}$

(2)如图,$EF=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$,$CD=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$.

$\because CD^2+AB^2=8+5=13$,$EF^2=13$,

$\therefore CD^2+AB^2=EF^2$,

$\therefore AB$,CD,EF 三条线段可以构成直角三角形.



4. 连接 AC.

在$\triangle ABC$ 中,$\because\angle B=90^\circ$,$AB=3$,$BC=4$,

$\therefore AC=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

$\because CD=12$,$AD=13$,$AC=5$,

$\therefore AC^2+CD^2=AD^2$,

$\therefore\triangle ACD$ 是直角三角形,

$\therefore S_{阴影}=S_{\triangle ACD}-S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 5\times 12-\frac{1}{2}\times 3\times 4=30-6=24.$

5. 直角三角形. 理由如下：

$\because AB=BC=CD=AD=4, CE=\frac{1}{4}BC,$

$\therefore EC=1, BE=3.$

$\because F$ 为 CD 的中点，$\therefore DF=FC=2.$

$\because \angle DAB=\angle B=\angle C=\angle D=90°,$

$\therefore EF=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5},$

$AF=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20},$

$AE=\sqrt{4^2+3^2}=5,$

$\therefore AE^2=EF^2+AF^2.$

$\therefore \triangle AEF$ 是直角三角形.

1.3 直角三角形全等的判定

〖前置诊断〗

1. A **2.** C **3.** C **4.** $\frac{5}{2}$

〖变式训练〗

1. A

2. $AB=AC$（或 $BD=CD$ 或 $\angle B=\angle C$ 或 $\angle BAD=\angle CAD$）

3. $\because C$ 是 BE 的中点，$\therefore BC=CE.$

$\because AD\perp BE, \therefore \angle ACB=\angle DCE=90°.$

在 $Rt\triangle ACB$ 和 $Rt\triangle DCE$ 中，

$\because AB=DE, BC=EC,$

$\therefore Rt\triangle ACB\cong Rt\triangle DCE$（HL）.

$\therefore \angle B=\angle E, \therefore AB/\!/ED.$

〖效果检测〗

1. B **2.** D

3. (1) HL (2) SAS

4. $\because \angle 1=\angle 2, \therefore DE=CE.$

在 $Rt\triangle ADE$ 和 $Rt\triangle BEC$ 中，

$\because DE=EC, AD=BE,$

$\therefore Rt\triangle ADE\cong Rt\triangle BEC$（HL）.

5. 相等.

理由：由题意易知 $AC=BD$.

$\because CB\perp AB, DA\perp AB,$

$\therefore \angle DAB=\angle CBA=90°.$

在 $Rt\triangle DAB$ 和 $Rt\triangle CBA$ 中，

$\because BD=AC, AB=BA,$

$\therefore Rt\triangle DAB\cong Rt\triangle CBA$（HL），

$\therefore DA=CB.$

6. $\triangle ABC$ 是等腰三角形. 理由如下：

$\because DE\perp AB, DF\perp AC,$

$\therefore \angle BED=\angle CFD=90°.$

$\because D$ 是 BC 边上的中点，$\therefore BD=DC.$

又 $\because DE=DF,$

$\therefore Rt\triangle EBD\cong Rt\triangle FCD$（HL），

$\therefore \angle B=\angle C.$

$\therefore \triangle ABC$ 是等腰三角形.

1.4 角平分线的性质（1）

〖前置诊断〗

1. C

2. A 在 $Rt\triangle ABE$ 中，$\because AE=\frac{1}{2}AB,$

$\therefore \angle B=30°,$

$\therefore \angle BAE=90°-30°=60°.$

$\because AC$ 是 $\angle BAE$ 的平分线，

$\therefore \angle BAC=\angle EAC=\frac{1}{2}\angle BAE=30°.$

又 $\because AD$ 是 $\angle BAC$ 的平分线，$\therefore \angle DAC=15°.$

$\because \angle EAC=30°, \therefore \angle EAD=\angle EAC+\angle CAD=45°.$

$\because AE=2, \therefore AB=4, ED=2.$

$\therefore EB=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3},$

$\therefore BD=EB-ED=2\sqrt{3}-2.$

〖变式训练〗

1. C **2.** 6

3. $\because AD$ 平分 $\angle BAC, DE\perp AB, \angle C=90°,$

$\therefore \angle CAD=\angle EAD, CD=DE, \angle AED=90°.$

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle AED$ 中，

$\angle CAD=\angle EAD, \angle C=\angle AED, AD=AD,$

$\therefore \triangle ACD\cong \triangle AED$（AAS）.

$\therefore AC=AE$.

$\therefore \triangle DEB$ 的周长为 $DE+DB+EB=CD+DB+EB=BC+EB=AC+EB=AE+EB=AB=10$ cm.

〖效果检测〗

1. A　**2.** $41°$

3. $2:3:4$　过点 O 作 $OD\perp AC$ 于 D，$OE\perp AB$ 于 E，$OF\perp BC$ 于 F.

$\because O$ 是 $\triangle ABC$ 三条角平分线的交点，

$\therefore OD=OE=OF$.

$\because AB=20, BC=30, AC=40$，

$\therefore S_{\triangle ABO}:S_{\triangle BCO}:S_{\triangle CAO}=2:3:4$.

4. $\because S_{\triangle ABD}=36$，

$\therefore \frac{1}{2}AB\cdot ED=\frac{1}{2}\times 12\cdot ED=36$，

解得 $DE=6$.

$\because BD$ 是 $\angle ABC$ 的平分线，$DE\perp AB$ 于 E，$DF\perp BC$ 于 F，

$\therefore DF=DE=6$.

$\because BC=15$，

$\therefore \triangle BCD$ 的面积 $S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}BC\cdot DF=\frac{1}{2}\times 15\times 6=45$.

5. $\because BD$ 是 $\angle ABC$ 的平分线，$\therefore \angle ABD=\angle DBC$.

又 $\because AB=BC, BD=BD$，

$\therefore \triangle ABD\cong\triangle CBD$(SAS).

$\therefore \angle ADB=\angle CDB$.

又 $\because PM\perp AD, PN\perp CD$，

$\therefore PM=PN$.

1.4　角平分线的性质(2)

〖前置诊断〗

1. D　**2.** C

〖变式训练〗

1. B

2. B　作 $DH\perp BC$ 于点 H.

$\because BD$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，$DE\perp AB$，$DH\perp BC$，

$\therefore DH=DE=2$.

$\because \triangle ABD$ 的面积 $+\triangle CBD$ 的面积 $=\triangle ABC$ 的面积，

$\therefore \frac{1}{2}\times 4\times 2+\frac{1}{2}\times 6\times 2=\frac{1}{2}\times 6\times AF$，

解得 $AF=\frac{10}{3}$.

3. $9:7:8$

作 $OD\perp AB$ 于 D，$OE\perp CB$ 于 E，$OF\perp AC$ 于 F.

$\because AO, BO, CO$ 分别是三个内角的平分线，$OD\perp AB$ 于 D，$OE\perp CB$ 于 E，$OF\perp AC$ 于 F，

$\therefore OD=OE=OF$，

$\therefore S_{\triangle AOB}:S_{\triangle BOC}:S_{\triangle AOC}=AB:BC:CA=9:7:8$.

〖效果检测〗

1. B　**2.** C　**3.** 4

4. 作 $\angle AOB$ 的平分线，作线段 CD 的垂直平分线，两线的交点即为 P.

5. (1) $\because D$ 是 $\angle MAN$ 内一点，$DE\perp AM$ 于 E，$DF\perp AN$ 于 F，且 $DE=DF$，

$\therefore AD$ 平分 $\angle MAN$.

(2)分两种情况：

①如图 1，当点 C 在线段 AF 上时，

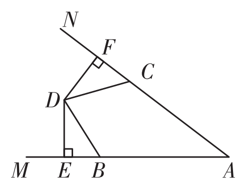


图1

$\because DE\perp AM$ 于 E，$DF\perp AN$ 于 F，

$\therefore \angle DEB=\angle DFC=90°$.

在 Rt$\triangle DEB$ 和 Rt$\triangle DFC$ 中，

$\because DC=DB, DE=DF$，

$\therefore$ Rt$\triangle DEB\cong$Rt$\triangle DFC$(HL)，

$\therefore CF=BE=2$，

$\therefore AC=AB=6$.

②如图 2，当点 C 在线段 AF 的延长线上时，

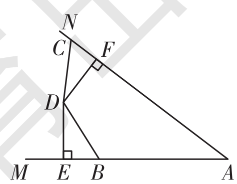


图2

同理可证 Rt$\triangle DEB\cong$Rt$\triangle DFC$，

$\therefore CF=BE=2$.

$\because AF=AE=AB+BE=8$，

$\therefore AC=AF+CF=10$.

故 AC 长为 6 或 10.

本章达标测试

一、选择题

1. B **2.** A **3.** C **4.** A **5.** D **6.** B

7. D 设斜边长为 x cm,则另一条直角边长为 $(49-x)$ cm.

$\therefore x^2-7^2=(49-x)^2$,

$\therefore x=25$. 故选 D.

8. A

9. C 折叠重合的边相等,$\therefore ED=BE$. 设 $AE=x$ cm,则 $ED=(9-x)$ cm.

在 Rt△ABE 中,$3^2+x^2=(9-x)^2$,

解得 $x=4$.

$S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}\times3\times4=6(\text{cm}^2)$. 故选 C.

10. D 两船航行的方向所成的角为 90°,一船航行 32 海里,另一船航行 24 海里.

由勾股定理可知,两船相距 40 海里. 故选 D.

二、填空题

11. 6 cm **12.** $\sqrt{34}$或 4 **13.** 10 m **14.** 6

15. 17 m

16. 4 根据勾股定理,$S_1+S_2=1$,$S_3+S_4=3$,故 $S_1+S_2+S_3+S_4=1+3=4$.

三、解答题

17. (1)因为 $AB^2=BC^2+AC^2$,

根据三边满足的条件,可以判断△ABC 是直角三角形,其中∠C 为直角.

(2)因为 $a^2=(n^2-1)^2$,$b^2=(2n)^2$,$c^2=(n^2+1)^2$,

所以 $a^2+b^2=(n^2-1)^2+(2n)^2=n^4-2n^2+1+4n^2=n^4+2n^2+1=(n^2+1)^2=c^2$.

根据三边满足的条件,可以判断△ABC 是直角三角形,其中∠C 为直角.

18. ∵BO,CO 分别平分∠ABC 和∠ACB,

∴点 O 到 AB,BC,AC 三边的距离相等,

$\therefore S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABO}+S_{\triangle BCO}+S_{\triangle ACO}=\frac{1}{2}(AB+BC+AC)\cdot OD=\frac{1}{2}\times28\times3=42(\text{cm}^2)$.

19. (1)由题意可得 $AF=AD=10$ cm.

在 Rt△ABF 中,因为 $AB=8$ cm,

所以 $BF=\sqrt{AF^2-AB^2}=6(\text{cm})$.

所以 $FC=BC-BF=10-6=4(\text{cm})$.

(2)由题意可得 $EF=DE$,设 DE 的长为x cm,则 $EC=(8-x)$cm.

在 Rt△EFC 中,由勾股定理得 $EC^2+FC^2=EF^2$,即$(8-x)^2+4^2=x^2$,

解得 $x=5$,即 EF 的长为 5 cm.

20. 连接 AC.

在 Rt△ABC 中,∠$B=90°$.

∵$AB=3$ m,$BC=4$ m,则 $AC=\sqrt{3^2+4^2}=5(\text{m})$.

∵$CD=12$ m,$DA=13$ m,

$\therefore AC^2+CD^2=AD^2$.

故∠$ACD=90°$.

$\therefore S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}\times3\times4+\frac{1}{2}\times5\times12=36(\text{m}^2)$,$36\times100=3\ 600$(元).

∴铺满这块空地需花费 3 600 元.

第 2 章 四边形

2.1 多边形(1)

〖前置诊断〗

1. C **2.** C **3.** B

〖变式训练〗

1. 14

2. 设多边形的边数是 n,则

$(n-2)\times180=2\ 018$.

$\therefore n=13\frac{19}{90}$.

∵n 不是整数,

∴不可能.

3. 设多边形的边数为 n,则

$0<(n-2)\times180-2\ 016<180$,

解得 $13\frac{1}{5}<n<14\frac{1}{5}$.

∵多边形的边数是正整数,

∴它是十四边形.

[效果检测]

1. 4,10

设两个多边形的边数分别为 x,y,由题意可知:

$\begin{cases}(x-2)\times180+(y-2)\times180=1\ 800,\\ x:y=2:5,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=4,\\ y=10.\end{cases}$

2. 12　20°

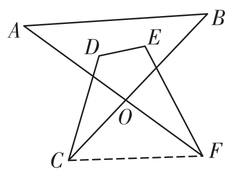
由题意可得 $0<(n-2)\times180-1\ 780<180$,

解得 $11\frac{8}{9}<n<12\frac{8}{9}$.

从而可知 $n=12$.

则这个内角的度数为$(n-2)\times180°-1\ 780°=20°$.

3. 连接 CF.



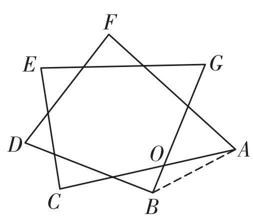
由三角形内角和可知

$\angle A+\angle B=\angle OCF+\angle OFC$.

$\therefore\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F=\angle OCF+\angle OFC+\angle DCB+\angle EFA+\angle D+\angle E=360°$(四边形内角和为 360°).

4. 连接 AB.

$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F+\angle G=(\angle A+\angle B+\angle D+\angle F)+(\angle C+\angle E+\angle G)=360°-(\angle CAB+\angle GBA)+360°-(180°-\angle CAB-\angle GBA)=540°$.



2.1　多边形(2)

[前置诊断]

1. C

2. D　由三角形内角和可知:$\angle ACB=180°-\angle A-\angle B=110°$,同理可得$\angle ACD=70°$.

$\because CE$ 平分$\angle ACB$,

$\therefore\angle ACE=\frac{1}{2}\angle ACB=55°$,

从而$\angle DCE=\angle ACD-\angle ACE=15°$.

[变式训练]

1. 6　2. 8

3. 5　设正多边形一个外角为 $x°$,则$(180-x)-x=36$,解得 $x=72$.

$\therefore n=360\div72=5$.

4. $\because\angle A+\angle B=\angle AGH$,

$\angle C+\angle D=\angle DMH$,

$\angle E+\angle F=\angle FHG$,

$\therefore\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F=\angle AGH+\angle DMH+\angle FHG=360°$.

[效果检测]

1. 36°　2. 540°　3. 360°

4. $\because\angle A+\angle C$ 和$\angle B+\angle D$ 都是$\angle E$ 所在的小三角形的内角,

$\therefore\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E=180°$.

又$\because\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=\angle E$,

$\therefore\angle A=180°\div5=36°$.

2.2　平行四边形(1)

[前置诊断]

1. C　2. D

[变式训练]

1. D

2. $\because$四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AD/\!/BC,AD=BC$.

$\because AE=CF,\therefore DE=BF$.

在$\triangle DOE$ 和$\triangle BOF$ 中,

$\angle DOE=\angle BOF,\angle ODE=\angle OBF,DE=BF$,

$\therefore\triangle DOE\cong\triangle BOF$.

$\therefore OE=OF$.

[效果检测]

1. B　2. 40 cm,10 cm,40 cm,10 cm

3. ∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$AB /\!/ DC$，$AB=CD$.

∵$BE=DF$，

∴$AB+BE=CD+DF$，即 $AE=CF$.

∵$AB /\!/ DC$，

∴$AE /\!/ FC$，

∴$\angle CAE=\angle ACF$，$\angle E=\angle F$，

∴$\triangle AOE \cong \triangle COF$.

∴$OE=OF$.

2.2 平行四边形(2)

〖前置诊断〗

1. D 2. C

〖变式训练〗

1. B

2. 3 ∵5 cm，4 cm，7 cm 可以组成三角形，∴三角形三边都可以作为对角线，另外两边为平行四边形的边，这样组成的平行四边形一共 3 个.

3. $OE=OF$. 理由如下：

在▱$ABCD$ 中，∵AC，BD 交于点 O，

∴$OB=OD$，$\angle OBE=\angle ODF$.

又$\angle BOE=\angle DOF$，

∴$\triangle OBE \cong \triangle ODF$.

∴$OE=OF$.

〖效果检测〗

1. D 2. A 3. $135°$

4. $AB=CD=19$ cm，$AD=BC=11$ cm

5. $OE=OF$. 理由如下：

∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$AD=BC$，$AD /\!/ BC$.

又 $BE=DF$，

∴$AF=CE$. 又$\angle OAF=\angle OCE$，$\angle AOF=\angle COE$，

∴$\triangle OAF \cong \triangle OCE$(AAS).

∴$OE=OF$.

2.2 平行四边形(3)

〖前置诊断〗

1. C

2. D ∵四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

∴$AB /\!/ DC$，$AD /\!/ BC$，

∴$\angle MDA=\angle N$，$\angle NDC=\angle M$.

又$\angle NDC=\angle MDA$，

∴$\angle MDA=\angle N=\angle NDC=\angle M$，

∴$AM=AD$，$CN=CD$，$BM=BN=6$.

∴▱$ABCD$ 的周长$=AB+BC+CD+DA=AB+BC+CN+AM=BM+BN=2BM=12$.

〖变式训练〗

1. $AD /\!/ BC$(或者 $AB=CD$)

2. ∵$\angle BAC=\angle DCA$，$\angle DAC=\angle BCA$，

∴$AB /\!/ DC$，$AD /\!/ BC$，

∴四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$AD=BC$.

〖效果检测〗

1. D

2. ▱$ABCD$ 和▱$CDEF$ 一组对边平行且相等的四边形是平行四边形 两组对边分别相等的四边形是平行四边形

3. ∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ADC}$.

又∵$DE \perp AC$，$BF \perp AC$，

∴$DE=BF$，$DE /\!/ FB$，

∴四边形 $DEBF$ 为平行四边形.

2.2 平行四边形(4)

〖前置诊断〗

1. 3 两组对边分别相等的四边形是平行四边形

2. D

〖变式训练〗

1. D 2. B

3. ①②,①③,①④,①⑤,②⑤,④⑤

①②:△AOB 与△COD 全等,从而 $AB=CD$,一组对边平行且相等的四边形是平行四边形;

①③:一组对边平行且相等的四边形是平行四边形;

①④:易证∠ABC=∠ADC,两组对角分别相等的四边形是平行四边形;

①⑤:两组对边分别平行的四边形是平行四边形;

②⑤:△AOD 与△COB 全等,从而 $AD=CB$,一组对边平行且相等的四边形是平行四边形;

④⑤:易证∠ABC=∠ADC,两组对角分别相等的四边形是平行四边形.

〖效果检测〗

1. B

2. ∠BAE=∠DCF(或∠DAF=∠BCE 或 $BE=DF$ 或 AE∥FC 或 AF∥EC)

3. 四边形 $MENF$ 是平行四边形. 理由如下:

∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴∠MDF =∠NBE.

又∵$BN=DM$,$BE=DF$,

∴△DMF≌△BNE(SAS).

∴MF =EN,∠DFM =∠BEN.

∴∠MFE =∠NEF,

∴MF∥EN,

∴四边形 $MENF$ 是平行四边形.

2.3 中心对称和中心对称图形(1)

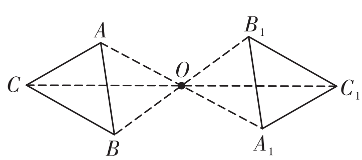
〖前置诊断〗

1. C 2. D

〖变式训练〗

1. D 2. D

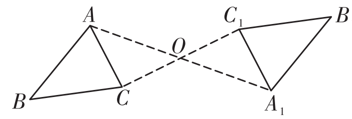
3. 如图所示,△$A_1B_1C_1$ 即为所作.



〖效果检测〗

1. D

2. 连接 AA_1,CC_1,其交点 O 即为对称中心.



3. ∵△ABO 与△CDO 关于点 O 成中心对称,

∴△ABO≌△CDO.

∴$AO=CO$, $BO=DO$.

又∵$AF=CE$,

∴$AO-AF=CO-CE$,即 $OF=OE$.

又∠FOD=∠EOB,

∴△FOD≌△EOB(SAS).

∴$FD=BE$.

2.3 中心对称和中心对称图形(2)

〖前置诊断〗

1. C 2. D

3. A 成中心对称的三角形共有 4 对,分别是△ADO 和△CBO,△AOB 和△COD,△ADC 和△CBA,△ADB 和△CBD.

〖变式训练〗

1. C 2. 平行且相等

3. 连接 AC,BD.

∵四边形 $ABCD$ 是中心对称图形,点 O 是它的对称中心,

∴O 点在 AC 上,也在 BD 上,并且 $OA=OC$,$OB=OD$,

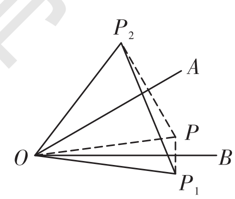
∴四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

〖效果检测〗

1. C

2. C 如图,连接 OP.

∵P_1 与 P 关于 OB 对称,P_2 与 P 关于 OA 对称,



$\therefore OP_1=OP, OP=OP_2, \angle BOP=\angle BOP_1, \angle AOP=\angle AOP_2$.

$\therefore OP_1=OP_2, \angle P_1OP_2=\angle BOP+\angle BOP_1+\angle AOP+\angle AOP_2=2\angle BOP+2\angle AOP=2\angle AOB$.

$\because \angle AOB=30°, \therefore \angle P_1OP_2=60°$.

$\therefore \triangle P_1OP_2$ 是等边三角形.

3. 4　如图,设 BC 与 OE 相交于点 M,CD 与 OG 相交于点 N,连接 OC,OB.

$\because$ 正方形 $ABCD$ 与正方形 $OEFG$ 的边长均为 4,

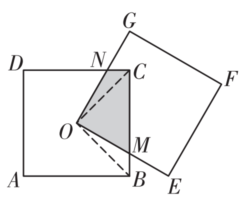
在 $\triangle OCN$ 和 $\triangle OBM$ 中,$OB=OC$,$\angle OCN=\angle OBM=45°$,$\angle CON=\angle BOM$,

$\therefore \triangle OCN \cong \triangle OBM$.

$\because O$ 是正方形 $ABCD$ 的对称中心,

$\therefore \triangle OCB$ 的高等于正方形边长的一半,

$\therefore S_{阴影}=S_{\triangle OBC}=\frac{1}{4}S_{正方形}=4$.



4. 作点 P 关于 OA 的对称点 P_1,关于 OB 的对称点 P_2,连接 P_1P_2 交 OA 于点 M,交 OB 于点 N. 则 $\triangle PMN$ 周长的最小值为 P_1P_2 的长.

由第 2 题知 $\triangle P_1OP_2$ 是等边三角形,

$\therefore P_1P_2=OP=10$.

$\therefore \triangle PMN$ 周长的最小值为 10.

2.4　三角形的中位线

〖前置诊断〗

1. B　**2.** B　**3.** 3　面积

〖变式训练〗

1. D

2. B　$\because D,E,F$ 分别为 AB,BC,AC 的中点,

$\therefore DF=\frac{1}{2}BC=2, DF\parallel BC, FE=\frac{1}{2}AB=\frac{3}{2}$,

$FE\parallel AB$,

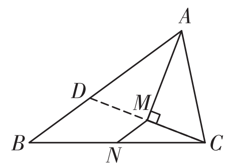
$\therefore$ 四边形 $DBEF$ 为平行四边形.

$\therefore$ 四边形 $DBEF$ 的周长 $=2(DF+EF)=2\times\left(2+\frac{3}{2}\right)=7$.

〖效果检测〗

1. 10　**2.** 互相平分

3. 如图,延长 CM 交 AB 于点 D.



$\because AM$ 平分 $\angle BAC$,$CM\perp AM$,

$\therefore AD=AC=3$.

又 $\because AB=5, \therefore BD=2$.

又 $\because$ 点 M 是 DC 的中点,点 N 是 BC 的中点,

$\therefore MN$ 是 $\triangle CDB$ 的中位线,

$\therefore MN=\frac{1}{2}BD=1$.

4. $\because CF$ 平分 $\angle ACB$,$AC=DC$,

$\therefore AF=DF$.

又 $\because AE=BE$,

$\therefore EF$ 是 $\triangle ABD$ 的中位线,

$\therefore EF=\frac{1}{2}BD$.

2.5　矩形(1)

〖前置诊断〗

1. B　**2.** C

〖变式训练〗

1. B　**2.** 12　16

3. 在矩形 $ABCD$ 中,E 是 AD 中点,

$\therefore AE=ED=\frac{1}{2}AD$.

由对称性可知:$BE=CE$.

又 $\because \angle BEC$ 为直角,$\therefore \angle EBC=\angle ECB=45°$.

$\because \angle ABC=90°$,

$\therefore \angle ABE=90°-\angle EBC=45°$.

又∵$\angle A=90°$，

∴$\angle ABE=\angle AEB=45°$，

∴$AB=AE$.

∵$AD=2AE$，

∴矩形 $ABCD$ 的周长$=2(AB+AD)=2(AB+2AE)=2\times 3AB=6AB=20$，

解得 $AB=\frac{10}{3}$，

∴$AD=2AB=\frac{20}{3}$.

〖效果检测〗

1. D　**2.** 5 cm

3. ∵AE 平分$\angle BAD$，

∴$\angle BAE=\frac{1}{2}\angle BAD=45°$.

∴$\triangle ABE$ 是等腰直角三角形，

∴$AB=BE$.

∵$\angle CAE=15°$，

∴$\angle BAC=45°+15°=60°$.

在矩形 $ABCD$ 中，$OA=OB$，

∴$\triangle AOB$ 是等边三角形，

∴$OB=AB$，$\angle ABO=60°$，

∴$OB=BE$，$\angle OBE=90°-60°=30°$，

∴$\angle BOE=\frac{1}{2}(180°-30°)=75°$.

4. 9

2.5　矩形(2)

〖前置诊断〗

1. B　**2.** $4\sqrt{3}$ cm^2

〖变式训练〗

1. C　**2.** 48

3. ∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$AD/\!/BC$，

∴$\angle DAB+\angle ABC=180°$.

∵AH，BH 分别平分$\angle DAB$ 与$\angle ABC$，

∴$\angle HAB=\frac{1}{2}\angle DAB$，$\angle HBA=\frac{1}{2}\angle ABC$，

∴$\angle HAB+\angle HBA=\frac{1}{2}(\angle DAB+\angle ABC)=\frac{1}{2}\times 180°=90°$，

∴$\angle H=90°$.

同理$\angle HEF=\angle F=90°$，

∴四边形 $EFGH$ 是矩形.

〖效果检测〗

1. D　**2.** C

3. 因为 AD 为$\angle BAC$ 的平分线，

所以$\angle BAD=\angle CAD$.

又因为 AN 平分$\angle CAM$，$\angle BAC+\angle CAM=180°$，

所以$\angle CAD+\angle CAN=\frac{180°}{2}=90°$.

因为 $AB=AC$，$\angle BAD=\angle CAD$，

所以 $AD\perp BC$.

又因为 $CE\perp AN$，

所以$\angle ADC=\angle CEA=\angle DAE=90°$，

所以四边形 $ADCE$ 是矩形.

4. 连接 OP.

由勾股定理可得 $AC=5$，$OC=OA=OD=OB=2.5$.

$S_{\triangle AOD}=\frac{1}{4}AB\cdot AD=S_{\triangle AOP}+S_{\triangle POD}=3$，

∴$\frac{1}{2}OA\cdot PE+\frac{1}{2}OD\cdot PF=3$，

∴$PE+PF=2.4$.

2.6　菱形(1)

〖前置诊断〗

1. D　**2.** $(8+8\sqrt{3})$cm

〖变式训练〗

1. B　**2.** B　**3.** 24

4. ∵$DE/\!/AC$，$CE/\!/BD$，

∴四边形 $OCED$ 是平行四边形.

∵四边形 $ABCD$ 是矩形，∴$OC=OD$.

∴四边形 $OCED$ 是菱形，

∴$OE\perp DC$.

〖效果检测〗

1. B　**2.** 40　**3.** (1)3.5　(2)2

4. 连接 DB,DE,设 DE 交 AC 于 M,连接 MB,DF.

∵四边形 $ABCD$ 是菱形,

∴AC,BD 互相垂直平分.

∴点 B 关于 AC 的对称点为 D,

∴$FD=FB$.

∴$FE+FB=FE+FD\geqslant DE$,

只有当点 F 运动到点 M 时取等号(两点之间线段最短).

∵$AD=AB$,$\angle DAB=60^\circ$,

∴$\triangle ABD$ 是等边三角形.

∵E 为 AB 的中点,∴$DE\perp AB$.

∴$AE=\frac{1}{2}AB=1$,$DE=\sqrt{AD^2-AE^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$,

∴$EF+BF$ 的最小值为$\sqrt{3}$.

2.6　菱形(2)

〖前置诊断〗

1. 16 cm　**2.** D

〖变式训练〗

1. D

2. 菱形　∵$AD/\!/BC$,$BF/\!/ED$,

∴四边形 $BMDN$ 是平行四边形.

易证$\triangle AMB\cong\triangle FMD$(AAS),

∴$BM=DM$.

∴四边形 $BMDN$ 是菱形.

3. ∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形,$AC=6$,$BD=4$,

∴$OA=OC=3$,$OB=OD=2$.

又∵$AD=\sqrt{13}$,

∴$AD^2=OA^2+OD^2$.

∴$\angle AOD=90^\circ$,即 $AC\perp BD$.

∴四边形 $ABCD$ 是菱形.

〖效果检测〗

1. B

2. (1)(2)(6),(3)(4)(5),(3)(4)(6)(任选两个)

3. 设 AN 与 ME 相交于点 O,因为 AD 是 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 斜边 BC 上的高,

所以$\angle ABD=\angle CAD$.

又 BE,AN 分别平分$\angle ABD$ 和$\angle CAD$,

所以$\angle EAN=\angle ABE$.

所以在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 中,$\angle AOB=90^\circ$,$\triangle AME$ 是等腰三角形,AN 平分 ME.

又因为$\angle ABO=\angle NBO$,$OB=OB$,

所以 $\mathrm{Rt}\triangle AOB\cong\mathrm{Rt}\triangle NOB$.

∴$AO=ON$,即 ME 垂直平分 AN,

所以四边形 $AMNE$ 是菱形.

2.7　正方形

〖前置诊断〗

1. C

2. 16　∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴$AD/\!/BC$.

∴$\angle DAE=\angle AEB$.

∵$\angle BAD$ 的平分线交 BC 于点 E,

∴$\angle DAE=\angle BAE$.

∴$\angle BAE=\angle AEB$.

∴$AB=EB$.

同理可得 $AB=AF$.

∴$AF=BE$.

∴四边形 $ABEF$ 是菱形.

∴$AE\perp BF$,$OA=OE$,$OB=OF=\frac{1}{2}BF=6$.

∴$OA=\sqrt{AB^2-OB^2}=8$,

∴$AE=2OA=16$.

〖变式训练〗

1. B　**2.** D

3. 3　∵四边形 $ABCD$ 为正方形,

∴$AB=BC$,$\angle ABC=90^\circ$.

∵$AE\perp l$,$CF\perp l$,

∴$\angle E=\angle F=90^\circ$,$\angle EAB+\angle ABE=90^\circ$,$\angle FBC+\angle BCF=90^\circ$.

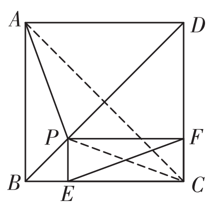
∵$\angle ABE+\angle ABC+\angle FBC=180^\circ$,

∴$\angle ABE+\angle FBC=90^\circ$,

∴$\angle EAB=\angle FBC$.
∴$\triangle ABE\cong\triangle BCF$(AAS).
∴$BE=CF=2$ cm，$BF=AE=1$ cm，
∴$EF=BE+BF=2+1=3$(cm).

〖效果检测〗

1. B　**2.** 22.5°
3. ∵$\angle ABC=90°$，$DE\perp BC$，
∴$DE// AB$，同理可得 $FD// BC$.
∴四边形 $BEDF$ 是平行四边形.
∵BD 平分$\angle ABC$，$DE\perp BC$，$DF\perp AB$，
∴$DE=DF$.
又∵$\angle ABC=90°$，
∴四边形 $BEDF$ 是正方形.
4. 如图，连接 AC，PC.



∵四边形 $ABCD$ 为正方形，
∴BD 垂直平分 AC，
∴$AP=CP$.
∵$PE\perp BC$，$PF\perp CD$，$\angle BCD=90°$，
∴四边形 $PECF$ 为矩形.
∴$PC=EF$，
∴$AP=EF$.
注意：①在正方形中，常利用对角线互相垂直平分证明线段相等.
②无论是正方形还是矩形，常添加的辅助线就是连接对角线.

本章整理提升

〖变式训练〗

1. 20　∵梯形 $ABCD$ 的对角线相等，EF，HG，GF，EH 均为梯形的中位线，
∴$EF=HG=GF=EH=\frac{1}{2}AC$.
又 $EF+HG+GF+EH=40$ cm，即 $2AC=40$ cm，
∴$AC=20$ cm.
2. (1)∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，
∴$AB=DC$，$AB// DC$.
∴$\angle ABD=\angle CDB$.
∵$AE\perp BD$ 于点 E，$CF\perp BD$ 于点 F，
∴$\angle AEB=\angle CFD=90°$，
∴$\triangle ABE\cong\triangle CDF$(AAS).
∴$BE=DF$.
(2)四边形 $MENF$ 是平行四边形.
理由：∵四边形 $ABCD$ 为平行四边形，
∴$AD// BC$，
∴$\angle MDB=\angle NBD$.
由(1)知 $BE=DF$，又 $DM=BN$，
∴$\triangle DMF\cong\triangle BNE$.
∴$MF=NE$，$\angle MFD=\angle NEB$，
∴$\angle MFE=\angle NEF$，
∴$MF// EN$，
∴四边形 $MENF$ 是平行四边形.
3. ∵(1)四边形 $ABCD$ 是矩形，
∴$AD// BC$，$OD=OB$，
∴$\angle PDO=\angle QBO$.
在$\triangle POD$ 与$\triangle QOB$ 中，
$\angle PDO=\angle QBO$，$OD=OB$，$\angle POD=\angle QOB$，
∴$\triangle POD\cong\triangle QOB$(ASA).
∴$OP=OQ$，
∴四边形 $PBQD$ 为平行四边形.
(2)能. 由题意知 $AP=t$ cm，$PD=(4-t)$ cm.
若四边形 $PBQD$ 是菱形，则 $PB=PD=(4-t)$ cm.
∵四边形 $ABCD$ 是矩形，
∴$\angle BAP=90°$.
在 Rt$\triangle ABP$ 中，$AP^2+AB^2=PB^2$，即 $t^2+3^2=(4-t)^2$，
解得 $t=\frac{7}{8}$.
∴当 $t=\frac{7}{8}$ s 时，四边形 $PBQD$ 为菱形.

本章达标测试

一、选择题

1. B　**2.** D　**3.** B　**4.** C　**5.** A　**6.** C　**7.** D　**8.** B

二、填空题

9. 540°　**10.** 80°　**11.** 20　**12.** 8　**13.** 12　**14.** 5

15. 4　∵$AE=EC$，∴$\angle EAC=\angle ECA$.

∵将纸片沿 AE 折叠，点 B 恰好落在 AC 上，

∴$\angle BAE=\angle EAC$.

∴$\angle BAE=\angle EAC=\angle ECA$.

∵$\angle B+\angle ECA+\angle CAB=180^\circ$，

∴$\angle ECA=30^\circ$.

∵$AB=2$，

∴$AC=2AB=4$.

16. 5 cm

三、解答题

17. 这个多边形是十边形.

18. $\angle DAE=10^\circ$

19. ∵四边形是 $ABCD$ 是矩形，

∴$\angle B=\angle D=90^\circ$，$AB=CD$.

由折叠的性质可得 $\angle E=\angle B=90^\circ$，$AE=AB$，

∴$\angle E=\angle D$，$AE=CD$.

在△AEF 和△CDF 中，

$$\begin{cases}\angle E=\angle D,\\ \angle EFA=\angle DFC,\\ AE=CD,\end{cases}$$

∴△AEF≌△CDF，

∴$EF=DF$.

20. 四边形 $PCOD$ 是菱形.

理由：∵$DP\parallel AC$，$CP\parallel BD$，

∴四边形 $PCOD$ 是平行四边形.

∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴$AC=BD$，$OD=\frac{1}{2}BD$，$OC=\frac{1}{2}AC$，

∴$OD=OC$，

∴四边形 $PCOD$ 是菱形.

21. (1)如图，∵CE 平分$\angle ACB$，∴$\angle 1=\angle 2$.

又∵$MN\parallel BC$，∴$\angle 1=\angle 3$，

∴$\angle 3=\angle 2$，∴$EO=CO$.

同理 $FO=CO$，∴$EO=FO$.

(2)当点 O 运动到 AC 的中点时，四边形 $AECF$ 是矩形.

理由：∵$EO=FO$，点 O 是 AC 的中点，

∴四边形 $AECF$ 是平行四边形.

∵CF 平分$\angle BCA$ 的外角，

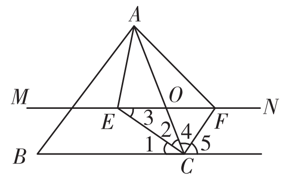
∴$\angle 4=\angle 5$.

又∵$\angle 1=\angle 2$，

∴$\angle 2+\angle 4=\frac{1}{2}\times 180^\circ=90^\circ$，

即$\angle ECF=90^\circ$，

∴四边形 $AECF$ 是矩形.



22. (1)$PB=PQ$.

证明：如图 1，过点 P 作 $PE\perp BC$，$PF\perp CD$.

∵P，C 为正方形对角线 AC 上的点，

∴PC 平分$\angle DCB$，$\angle DCB=90^\circ$，

∴$PF=PE$，

∴四边形 $PECF$ 为正方形.

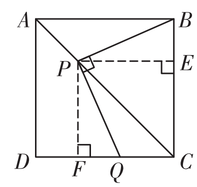


图1

∵$\angle BPE+\angle QPE=90^\circ$，$\angle QPE+\angle QPF=90^\circ$，

∴$\angle BPE=\angle QPF$，

∴Rt△PQF≌Rt△PBE，

∴$PB=PQ$.

(2)$PB=PQ$.

证明：如图 2，过点 P 作 $PE\perp BC$，$PF\perp CD$.

∵P，C 为正方形对角线 AC 上的点，

∴PC 平分$\angle DCB$，$\angle DCB=90^\circ$，

∴$PF=PE$，

∴四边形 $PECF$ 为正方形.

∵$\angle BPF+\angle QPF=90^\circ$，$\angle BPF+\angle BPE=90^\circ$，

∴$\angle BPE=\angle QPF$，

∴Rt△PQF≌Rt△PBE，

∴$PB=PQ$.

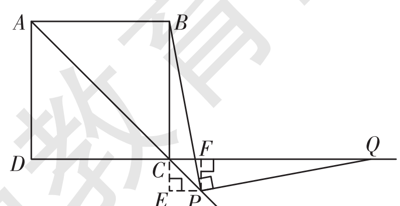


图2