义务教育教科书

数学

教师教学用书

七年级下册

湖南教育出版社

总　体　说　明

湘教版《义务教育教科书·数学》（七~九年级）是依据教育部制订的《义务教育数学课程标准（2011 年版）》（以下简称《课标》），在原实验教科书的基础上修订而成的，全套书分为 6 册，每学期一册，内容包括“数与代数”“图形与几何”“统计与概率”“综合与实践”四个领域，知识体系中的重要概念和数学思想按照学生的认知规律螺旋式上升，重视知识之间的联系与综合，体现“数与代数”“图形与几何”“统计与概率”以及“综合与实践”之间的实质性关联，形成一个有机的整体.

一、教材的主要特点

1. 重视培养学生科学理性的思维方式.

本教材按照“观察—抽象—探索—猜测—分析和论证”的数学思维方式编写，通过设立“观察”、“探究”、“动脑筋”、“做一做”、“议一议”等栏目，加强抽象、分析的环节，同时辅以设问的方式，让学生在“观察—抽象—探索—猜测—分析和论证”的活动过程中生动活泼地学习数学，受到数学思维方式全过程的熏陶.

2. “数与代数”部分强调建立数学模型和渗透算法，并且把握数学的实质，准确阐述初中数学的基本概念.

教材高度重视建立数学模型并渗透算法，采取螺旋上升的方式将模型思想贯穿于整个初中代数部分，同时，为了浅显易懂地渗透算法，我们常采用形象、生动的卡通流程图给出一般的解法步骤.

3. “图形与几何”部分用变换的观点来研究图形的性质.

考虑到初中阶段是学生处在形象思维逐步向抽象思维转变的过渡阶段，一开始学生很难接受严格的演绎证明，而通过图形变换来研究图形的性质，在此基础上再进一步证明这些性质，这对学生来讲直观、形象，又易于理解和接受. 教材尝试将几何的直观性和思维的严谨性有机地结合起来，用变换的观点来研究图形的位置关系和度量关系.

4. “统计与概率”部分强调数据分析观念的培养和“随机性”的渗透.

教材通过设计有效的统计活动，使学生经历完整的统计过程，包括收集数据、整理数据、描述数据、分析数据，同时注重在数据分析的过程中渗透随机思想，使学生在这样的统计过程中，不断积累统计活动经验，发展数据分析观念并加深对统计思想与方法的理解.

5. “综合与实践”更具可操作性，“数学与文化”力求通俗易懂.

“综合与实践”是一类以问题为载体、以学生自主参与为主的学习活动. 教材每册设置 1 个“综合与实践”，强调问题情境与学生所学的知识以及生活经验相结合，鼓励学生独立思考、合作交流，自主设计解决问题的方案和步骤，经历发现问题、提出问题、分析问题和解决问题的全过程，感悟数学与生活实际、数学与其他学科、数学各部分内容之间的联系，加深对所学数学内容的理解. 同时，通过该活动，帮助学生积累数学活动经验，培养学生应用意识和创新意识.

“数学与文化”栏目中的内容主要是介绍数学学科知识背景、数学在自然与社会中的应用、数学发展史的有关材料等，目的是帮助学生了解数学在人类文明发展中的作用，激发学生学习数学的兴趣，感受数学家治学的严谨性，欣赏数学的美.

二、使用说明

关于本套教材栏目设置的说明：

1. 正文设置“观察”“探究”“动脑筋”“做一做”“议一议”等栏目，加强抽象、分析的环节，同时辅以设问的方式，让学生在“观察—抽象—探索—猜测—分析和论证”的活动过程中生动活泼地学习数学，受到数学思维方式全过程的熏陶.

2. 正文针对易错点、归纳的结论或启发学生思考的问题，增设小贴士.

3. 每章安排“小结与复习”栏目，包括“回顾”“本章知识结构”“注意”三个环节. 其中“回顾”环节以提问的方式引导学生全面回顾、梳理本章所学知识；“本章知识结构”以结构图的形式，呈现本章知识间的内在联系，从整体上把握全章知识全貌；“注意”环节突出本章容易忽视的关键点，同时提示本章隐含出现的一些重要的数学思想和方法.

4. 本书的习题分为练习、习题、复习题三类，每一课时安排一个“练习”，供课内使用；每一大节安排一个“习题”，习题分 A、B 组，与课时对应，便于学生课外巩固提高；每一章安排一个“复习题”，供复习全章时使用，并按 A、B、C 组分类，其中 C 组不做要求，供学有余力的学生选择完成.

5. 每册教材安排一个“综合与实践”，视本册内容灵活安排在最恰当的知识点之后.

6. 每册分别安排两个“数学与文化”和“IT 教室”栏目，供学有余力或有兴趣的学生自行阅读或操作.

关于教师教学用书栏目的说明：

本套教师教学用书与《义务教育教科书·数学》（七~九年级）相对应，供教师教学参考使用. 全套书分为 6 册，每册书按章编排，具体栏目设置如下：

（一）概述

1. “课程内容”将《课标》关于本章内容的要求进行罗列，便于教师掌握本章的基本要求.

2. “课时建议”分别列出本章各节内容教学所需的课时数.

3. “教材说明”介绍本章的线索和设计思路，本章各小节之间的内在逻辑性和关联.

4. “评价建议”结合本章内容，提出了在本章学习中评价学生发展的建议.

（二）教学建议

1. 按节描述本节知识在“知识技能”“数学思考”“问题解决”“情感态度”等方面的目标.

2. 按节描述本节的教学重点和难点.

3. 按节阐述教材编写意图与教学参考建议，便于教师更好地理解、使用教材.

4. “补充例题”为教师在上课时补充课内例题的需要.

5. “资源拓展”提供与本节内容相关的学科背景介绍、数学史料等.

6. 按节提供教材练习、习题、复习题的参考答案.

（三）本章相关链接

提供本章相应的拓展资料，供教师教学时参考.

在本书的最后附有与本册教材配套的教学资源光盘，光盘内容包括两部分，第一部分是主编对本册教材特点的解读，第二部分是教学课件示例，供教师设计课件时参考.

目　录

目　录

第 1 章　二元一次方程组

Ⅰ. 概　述

一、课程内容

1. 能根据具体问题中的数量关系列出方程，体会方程是刻画现实世界数量关系的有效模型.

2. 掌握代入消元法和加减消元法，能解二元一次方程组.

*3. 能解简单的三元一次方程组.

4. 能根据具体问题的实际意义，检验方程的解是否合理.

二、课时建议

1.1　建立二元一次方程组	1 课时
1.2　二元一次方程组的解法	3 课时
1.3　二元一次方程组的应用	2 课时
*1.4　三元一次方程组	1 课时
小结与复习	1 课时

三、教材说明

二元一次方程组是在七年级上册已学习一元一次方程的基础上，关于方程知识的进一步学习. 它也是学习后续代数内容（比如一元二次方程、函数等）的基础. 因此，本章是初中代数中一个重要的基础内容，更是提高学生分析问题、解决问题能力的重要内容之一.

本章按照“建立模型—解法—模型的应用”的思路来编写. 首先从生活实例中引入二元一次方程、二元一次方程组等概念，然后重点学习二元一次方程组的两种解法——代入（消元）法、加减（消元）法，接着介绍了二元一次方程组的应用. 作为选学内容的三元一次方程组的解法放在本章的最后，它是进一步体会消元思想的重要载体，也是学习不共线三点确定二次函数解析式的基础.

本章的重点是二元一次方程组的解法和应用，难点是从实际问题中抽象出二元一次方程组.

根据知识间内在的逻辑性，本章的教学内容分 5 个小节，顺序安排如下：

在教学本章的过程中，需注意以下几点：

1. 本章所涉及的数学思想方法主要有两个：一个是由实际问题抽象出方程组这个过程中蕴含的模型思想，另一个是解方程组所体现的消元思想.

模型思想在七年级上册“一元一次方程”中已介绍. 本章中，有大量需要利用二元一次方程组来加以解决的现实问题，这就需要教师指导学生分析问题中的数量关系，设未知数并列出方程组，达到从现实情境抽象出方程模型的目的. 在此过程中，加强体会方程（组）模型是解决现实问题的重要数学工具.

解多元方程组的基本策略是“消元”，即逐步减少未知数的个数，使方程组化归为一元方程，先

解出一个未知数，然后逐步解出其他未知数. 代入法和加减法都是消元解方程组的方法，只是具体消元的过程不同.

2. 注重对“双基”的掌握.

本章中二元一次方程组的基本概念和消元解法是基础知识，通过列、解二元一次方程组分析、解决实际问题是基本能力，它们对于解三元一次方程组以及今后进一步学习有重要作用. 教学和学习时，要注意对基础知识进行提炼、归纳、整理，需通过必要的练习途径来掌握基本知识和提高基本能力.

3. 关注数学文化.

本章在体现数学的科学性和应用性的同时，又体现数学科学中蕴含的文化. 人们运用方程组解决含有多个未知数的问题已有很长的历史，中国古代数学在方程及方程组的研究方面也有很多重要的成果，例如著名的“鸡兔同笼”问题出自《孙子算经》，消元法的内容在《九章算术》中也有记载. 教学中应结合方程组内容挖掘数学文化的内涵，使学生受到数学文化的熏陶.

四、评价建议

1. 对本章“双基”达成情况的测试应注意以下几个问题：

（1）把握好对会解二元一次方程组的要求.

二元一次方程组的消元解法是本章的基础知识，通过列、解二元一次方程组分析、解决实际问题是基本能力. 教学和学习中应注意打好基础，切实掌握基本方法，并力求能够灵活地运用它们. 在此过程中需注意不要过分强调解方程组的技巧，计算也不要太繁.

（2）恰当评价学生运用二元一次方程组解决实际问题的能力.

分析问题中的数量关系并用二元一次方程组表示其中的等量关系，建立方程组模型是贯穿本章的主线. 在设计测试题时应创设学生发现并提出问题的平台，在分析和解决问题的过程中，要鼓励学生采取多种策略如借助图表、示意图等来帮助思考. 同时，要摒弃解题模式的常规做法.

2. 本章教学中的过程性评价应关注的问题.

在引导学生进行“动脑筋”“议一议”等活动中，不能仅关注基础知识、基本技能的掌握，还要关注学生是否积极参与数学问题的讨论，是否敢于发表自己的观点，能否用自然语言、符号语言、图表语言等不同的语言来进行表达. 过程评价要注重学生参与活动的程度和在活动中表现出来的思维水平. 要对学生在学习过程中的点滴闪光点进行适时肯定和鼓励，使学生获得成功的乐趣，树立自信心，激发其学习数学的兴趣.

3. 注重评价主体和评价方式的多样化.

除普通形式的书面测试外，要注意使用多种形式进行评价. 可以让学生进行自评或互评，也可以采用课题研究与小组合作交流的评价方式. 例如，可以布置学生去商场进行调查，了解商品打折的有关情况以及商品利润等有关知识，让学生根据所收集的条件，自编方程应用题，自己做出解答，写出心得体会，并在小组内交流.

第1章

二元一次方程组

我们已学会建立一元一次方程模型来解决许多实际问题. 你能解决下面的问题吗?

地球的表面积约为 5.1 亿千米^2, 其中海洋面积约为陆地面积的 2.4 倍, 则地球上的海洋面积和陆地面积各是多少?

这个问题可以建立一元一次方程模型求解, 也可以直接设两个未知数列出方程组求解. 如何根据实际问题中的数量关系建立二元一次方程组? 如何解二元一次方程组? 学了本章以后, 你将能解决这些问题.

1

Ⅱ. 教学建议

本章的章前图是世界水域与陆地的情境图. 在许多实际问题中, 算术方法已难以解决问题, 而通过设两个未知数建立等量关系来求解, 可以使问题的解决变得简捷. 可见建立方程模型是连接数学与现实世界的桥梁之一.

从章前图的情境出发引入二元一次方程组, 将使学生感到即将学习的内容与身边的事物有密切的联系, 增强学生的求知欲.

教学目标

了解二元一次方程、二元一次方程组和它的一个解的含义.

会检验一对数是不是某个二元一次方程组的解.

教学重点、难点

教学重点：二元一次方程组及其解的含义.

教学难点：理解二元一次方程组的解的含义.

本节通过一个实际问题，先引导学生运用已学过的一元一次方程知识去解决，然后尝试设两个未知数，根据题目中的两个条件列出两个方程，从而引入二元一次方程、二元一次方程组和它的一个解的概念. 通过比较两种解法，强化学生的类比意识，另外让学生初步感受到直接设两个未知数列方程组比列一个一元一次方程容易，同时为下一节讲代入法做好铺垫.

本节教学，只要求学生了解二元一次方程组的有关概念，暂不涉及二元一次方程组的解法.

1.1 建立二元一次方程组

动脑筋

想一想，还有其他的方法吗?

问题中既要求水费，又要求天然气费，可以设 1 月份的天然气费是 x 元，水费是 y 元.

根据题意得

$$x+y=60, \quad ①$$

$$x-y=20. \quad ②$$

说一说

观察方程①、②各含有几个未知数? 含未知数的项的次数是多少?

方程在初中阶段的数学课程中占有十分重要的地位，本套教材中方程出现的顺序是这样的，七年级先后学习一元一次方程和二元一次方程组（含三元一次方程组），八年级学习分式方程，九年级学习一元二次方程.

二元一次方程组是继一元一次方程的学习之后进一步展开对方程的学习，本章教材是按照“建立模型—解法—模型的应用”的思路编写的.

像方程 $x+y=60$，$x-y=20$ 这样，含有两个未知数（二元），并且含未知数的项的次数都是 1，称这样的方程为**二元一次方程**（linear equation with two unknowns）.

在方程①和②中，x 都表示 1 月份的天然气费，y 都表示 1 月份的水费，所以它们必须**同时满足**方程①和②，因此把方程①和②用大括号联立起来，得

$$\begin{cases} x+y=60, \\ x-y=20. \end{cases}$$

像这样，把两个含有相同未知数的二元一次方程（或者一个二元一次方程，一个一元一次方程）联立起来，组成的方程组，叫做**二元一次方程组**（system of linear equations with two unknowns）.

做一做

把 $x=40$，$y=20$ 代入方程组 $\begin{cases} x+y=60, \\ x-y=20 \end{cases}$ 的每一个方程中，每一个方程左、右两边的值相等吗？

$40+20=60$，$40-20=20$.
每一个方程左、右两边的值都相等.

在一个二元一次方程组中，使每一个方程的左、右两边的值都相等的一组未知数的值，叫做这个**方程组的一个解**.

我们把 $x=40$，$y=20$ 叫做二元一次方程组 $\begin{cases} x+y=60, \\ x-y=20 \end{cases}$ 的一个解. 这个解通常记做 $\begin{cases} x=40, \\ y=20. \end{cases}$

求方程组的解的过程叫做**解方程组**（solving a system of equations）.

在“做一做”栏目中，通过将一组数代入方程组的两个二元一次方程中，使得方程左、右两边的值相等来确定该方程组的解. 这一过程既是为后续学习代入消元法作铺垫，同时也渗透了检验解的合理性.

理解方程组的一个解的含义是本节的一个难点. 难在方程组的一个解已经不是一个数值而是两个有联系的数值了. 关键在于帮助学生理解包含于问题中的互相联系的两个未知数，它们适合方程组中的每一个方程，把它们的值都写出来，才是问题的解答.

在介绍“方程组的一个解”时，不需介绍二元一次方程组无解或有无数个解的情形.

补充例题

1. 下列方程中属于二元一次方程组的有______（填序号）.

① $\begin{cases} x-y=1, \\ x+2y=3 \end{cases}$　② $\begin{cases} x=11, \\ x+y=3 \end{cases}$　③ $\begin{cases} x^2+y=1, \\ x-y=2 \end{cases}$　④ $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+y=1, \\ 2x+y=3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+y=3, \\ x-y=3 \end{cases}$ 的解是（　）

A. $\begin{cases} x=1, \\ y=2 \end{cases}$　B. $\begin{cases} x=2, \\ y=1 \end{cases}$　C. $\begin{cases} x=3, \\ y=0 \end{cases}$　D. 有无数个

分析数量关系并列二元一次方程组对于学生来说也比较难. 在例题环节，教师可先引导学生发现数量关系，再根据数量关系列出方程组.

例 小玲在文具店买了 3 本练习本，2 支圆珠笔，共花去 8 元，其中购买的练习本比圆珠笔多花 4 元.

（1）为了知道练习本、圆珠笔的单价是多少元，你能列出相应的方程组吗?

（2）$\begin{cases} x=2, \\ y=1 \end{cases}$ 是列出的二元一次方程组的解吗?

解 （1）设练习本的单价是 x 元，圆珠笔的单价是 y 元.

根据题意得

$$\begin{cases} 3x+2y=8, & ① \\ 3x-2y=4. & ② \end{cases}$$

（2）把 $\begin{cases} x=2, \\ y=1 \end{cases}$ 代入方程①中，左边 = 右边，

把 $\begin{cases} x=2, \\ y=1 \end{cases}$ 代入方程②中，左边 = 右边，

所以 $\begin{cases} x=2, \\ y=1 \end{cases}$ 是方程组 $\begin{cases} 3x+2y=8, \\ 3x-2y=4 \end{cases}$ 的解.

练习

1. $\begin{cases} x=2, \\ y=2 \end{cases}$ 是上例中方程组的解吗?

2. 一条船顺流航行，每小时行 24 km；逆流航行，每小时行 18 km.

（1）为了求轮船在静水中的速度 x 与水的流速 y，你能列出相应的方程组吗?

（2）$\begin{cases} x=21, \\ y=3 \end{cases}$ 是列出的二元一次方程组的解吗?

3. $\begin{cases} x=2, \\ y=1 \end{cases}$ 是下列哪个方程组的解?

（1）$\begin{cases} 2x-y=3, \\ x+3y=5; \end{cases}$ （2）$\begin{cases} 3x-4y=2, \\ 4x-3y=6. \end{cases}$

练习

1. 不是.

2.（1）$\begin{cases} x+y=24, \\ x-y=18. \end{cases}$

（2）是.

3. 是方程组(1)的解.

资源拓展

二元一次方程的解的特点

二元一次方程组的解是一对数值，即 $\begin{cases} x=a, \\ y=b. \end{cases}$

一个二元一次方程有无数多个解，即有无数多对数值适合该二元一次方程. 例如 $x+y=3$，我们能发现有许许多多的 x，y 值能满足该方程. 因此在教学过程中应引导学生关注和发现此特征，为后续学习一次函数埋下伏笔.

事实上，每个二元一次方程的图象就是一条直线，即二元一次方程 $mx+ny=p$ 能写成 $y=kx+b$ 或 $x=h$ 的形式，也就是说，一个二元一次方程对应一个一次函数.

习题 1.1

A 组

1. 已知两个自然数的和是 98，差是 4. 设这两个自然数分别是 x，y（其中 $x>y$），请你列出关于 x，y 的方程组.

2. 某项球类比赛，每场比赛须分出胜负，其中胜 1 场得 2 分，负 1 场得 1 分. 某队在全部 15 场比赛中得到 26 分，为了求出这个队胜、负场数分别是多少，请你列出相应的方程组.

3. $\begin{cases}x=2,\\y=5\end{cases}$ 是下列哪个方程组的解？

(1) $\begin{cases}5x-y=5,\\2x+3y=17;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}5x+y=15,\\3x-y=1.\end{cases}$

B 组

4. 某灾区在地震后有9 000 灾民急需帐篷居住. 某企业准备捐助甲、乙两种型号的帐篷共 2 000 顶，其中甲种帐篷每顶可安置 6 人，乙种帐篷每顶可安置 4 人. 设该企业捐助甲种帐篷 x 顶，乙种帐篷 y 顶，恰好安置全体灾民，那么下面列出的方程组中正确的是（　　）

(A) $\begin{cases}x+4y=2\,000,\\4x+y=9\,000\end{cases}$　　(B) $\begin{cases}x+y=2\,000,\\6x+y=9\,000\end{cases}$

(C) $\begin{cases}x+y=2\,000,\\4x+6y=9\,000\end{cases}$　　(D) $\begin{cases}x+y=2\,000,\\6x+4y=9\,000\end{cases}$

5. 甲、乙两人从相距 6 km 的 A，B 两地匀速相向而行，1 h 后相遇. 已知甲的速度比乙的速度快 1 km/h，为了求出甲、乙的速度，请你列出相应的方程组.

6. 某阶梯教室从第 2 排起，每一排都比前一排增加相同数目的座位. 已知第 5 排有 36 个座位，第 20 排有 66 个座位. 为了知道第 1 排有多少个座位，以及每一排比前一排多几个座位，你能列出相应的方程组吗？

习题1.1

A组

1. $\begin{cases}x+y=98,\\x-y=4.\end{cases}$

2. 设这个队胜、负场数分别为 x，y，则 $\begin{cases}x+y=15,\\2x+y=26.\end{cases}$

3. 是方程组(2)的解.

B组

4. D.

5. 设甲、乙的速度分别为 x km/h，y km/h，则 $\begin{cases}x-y=1,\\x+y=6.\end{cases}$

6. 设第 1 排有 x 个座位，每一排比前一排多 y 个座位，则 $\begin{cases}x+4y=36,\\x+19y=66.\end{cases}$

1.2 二元一次方程组的解法

1.2.1 代入消元法

探究

在 1.1 节中，我们列出了二元一次方程组

$$\begin{cases} x+y=60, & ① \\ x-y=20, & ② \end{cases}$$

并且知道 $x=40$，$y=20$ 是这个方程组的一个解. 这个解是怎么得到呢？

我会解一元一次方程，可是现在方程①和②中都有两个未知数……

方程①和②中的 x 都表示 1 月份的天然气费，y 都表示 1 月份的水费，因此方程②中的 x，y 分别与方程①中的 x，y 的值相同.

由②式可得

$$x=y+20. \qquad ③$$

于是可以把③代入①式，得

$$(y+20)+y=60. \qquad ④$$

解方程④，得 $y=$______.

把 y 的值代入③式，得 $x=$______.

因此原方程组的解是 $\begin{cases} x= \_\_\_\_\_\_, \\ y= \_\_\_\_\_\_. \end{cases}$

议一议

同桌同学讨论，解二元一次方程组的基本想法是什么？

教学目标

1. 了解解二元一次方程组的基本思想是消元.

2. 了解代入法、加减法是消元的方法.

3. 会用代入法、加减法解二元一次方程组.

教学重点、难点

教学重点：二元一次方程组的解法.

教学难点：用代入消元法或加减消元法解二元一次方程组.

本小节通过尝试解决上节提出的问题，从而引入二元一次方程组的代入消元法，随后又通过两个例题进一步介绍这种解法，并归纳这种解法的一般步骤.

引导学生回顾上节列一元一次方程的解法，并与此节的二元一次方程组的求解过程进行比较，使学生体验知识发生的过程，领悟“转化”、“消元”的思想.

要让学生学会将一个二元一次方程化为用含有一个未知数的代数式表示另一个未知数的形式.

可启发学生尝试先消 y 元 (如以 $y=x-20$ 代入 $x+y=60$ 或以 $y=60-x$ 代入 $x-y=20$) 解方程组. 让学生感悟解方程组的基本思想是消元——变“多元”为“一元”.

例 1 解二元一次方程组：

$$\begin{cases}5x-y=-9, & ①\\ 3x+y=1. & ②\end{cases}$$

解 由②式得 $y=-3x+1$. ③

把③代入①式，得 $5x-(-3x+1)=-9$.

解得 $x=-1$.

把 $x=-1$ 代入③式，得 $y=4$.

因此原方程组的解是

$$\begin{cases}x=-1,\\ y=4.\end{cases}$$

解二元一次方程组的基本想法是：**消去一个未知数**（简称为**消元**），**得到一个一元一次方程，然后解这个一元一次方程.**

在上面的例子中，消去一个未知数的方法是：把其中一个方程的某一个未知数用含有另一个未知数的代数式表示，然后把它代入到另一个方程中，便得到一个一元一次方程. 这种解方程组的方法叫做**代入消元法**（elimination by substitution），简称**代入法**.

例 2 用代入法解方程组：

$$\begin{cases}2x-3y=0, & ①\\ 5x-7y=1. & ②\end{cases}$$

解 由①式得 $x=\frac{3}{2}y$. ③

把③代入②式，得 $5\left(\frac{3}{2}y\right)-7y=1$,

解得 $y=2$.

把 $y=2$ 代入③式，得 $x=3$.

必须强调要把 $x=-1$，$y=4$ 代入原方程组中的每一个方程进行检验. 通过检验，使学生明确通过代入消元，的确可以求得方程组的解.

通过检验，可进一步巩固二元一次方程组的解的概念，杜绝变形和计算时发生的错误. 检验可以口算或在草稿纸上演算. 从例 2 起，以后的例题都没有写出检验过程.

必须强调“……把它代入到另一个方程中，……”否则将会得到一个数的恒等式.

例 1、例 2 分别采用消去“y”，“x”元的方法求解，要提醒学生注意消元的灵活性. 要使代入法求解过程较为简捷，必须注意使变形后的方程比较简单和代入后化简比较容易.

补充例题

用代入法解下列方程组：

（1）$\begin{cases}x=27-3y,\\ 2x+3y=8;\end{cases}$ （2）$\begin{cases}2a-b=5,\\ 3a+4b=2.\end{cases}$

因此原方程组的解是

$$\begin{cases} x=3, \\ y=2. \end{cases}$$

做一做

在例 2 中，用含 x 的代数式表示 y 来解原方程组.

练习

1. 把下列方程改写为用含 x 的代数式表示 y 的形式.

（1）$2x-y=-1$；　　（2）$x+2y-2=0$.

2. 用代入法解下列二元一次方程组：

（1）$\begin{cases} x+y=128, \\ x-y=4; \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} 3x+2y=5, \\ y=2x-1; \end{cases}$

（3）$\begin{cases} 5a+2b=11, \\ 3a+b=7; \end{cases}$　　（4）$\begin{cases} 3m-n+1=0, \\ 2m+3n-3=0. \end{cases}$

1.2.2 加减消元法

探究

如何解下面的二元一次方程组？

$$\begin{cases} 2x+3y=-1, & ① \\ 2x-3y=5. & ② \end{cases}$$

我们可以用学过的代入消元法来解这个方程组，得 $\begin{cases} x=1, \\ y=-1. \end{cases}$

练习

1.（1）$y=2x+1$.

（2）$y=-\frac{1}{2}x+1$.

2.（1）$\begin{cases} x=66, \\ y=62. \end{cases}$

（2）$\begin{cases} x=1, \\ y=1. \end{cases}$

（3）$\begin{cases} a=3, \\ b=-2. \end{cases}$

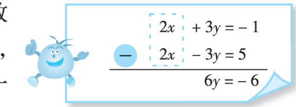
（4）$\begin{cases} m=0, \\ n=1. \end{cases}$

本小节从探究方程组 $\begin{cases} 2x+3y=-1, \\ 2x-3y=5 \end{cases}$ 的解入手，首先用学过的代入法求解，接着提问：还有没有更简单的解法呢？教师可适时提示解二元一次方程组的关键是消去一个未知数，接着引导学生观察方程组中两个方程同一未知数系数之间的关系，发现可以通过把两个方程的左、右两边分别相减（或加），达到消去一个未知数的目的. 随后的几个例题进一步介绍了加减消元法并归纳了这种解法的一般步骤.

还有没有更简单的解法呢?

我们知道解二元一次方程组的关键是消去一个未知数，使方程组转化为一个一元一次方程.

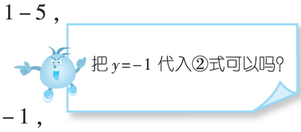
分析方程①和②，可以发现未知数 x 的系数相同，因此只要把这两个方程的两边分别相减，就可以消去其中一个未知数 x，得到一个一元一次方程.



即①－②，得 $\quad 2x+3y-(2x-3y)=-1-5,$

$$6y=-6,$$

解得 $$y=-1.$$



把 $y=-1$ 代入①式，得 $\quad 2x+3\times(-1)=-1,$

解得 $$x=1.$$

因此原方程组的解是 $\begin{cases}x=1,\\y=-1.\end{cases}$

做一做

解上述方程组时，在消元的过程中，如果把方程①与方程②相加，可以消去一个未知数吗?

例 3 解二元一次方程组:

$$\begin{cases}7x+3y=1, & ①\\2x-3y=8. & ②\end{cases}$$

分析 因为方程①、②中 y 的系数相反，用①＋②即可消去未知数 y.

解 ①＋②，得 $\quad 7x+3y+2x-3y=1+8,$

$$9x=9,$$

解得 $$x=1.$$

把 $x=1$ 代入①式，得 $\quad 7\times1+3y=1,$

解得 $$y=-2.$$

因此原方程组的解是 $\begin{cases}x=1,\\y=-2.\end{cases}$

第 1 章 二元一次方程组 9

教学中要注意小贴士的应用.

教材将一些重要的方法或容易产生疑问的地方进行适时提示，鼓励学生自学，促使其发现并提出问题.

例 3 给出的两个方程中，未知数 y 的系数互为相反数. 根据等式性质，只要把两个方程左、右两边分别相加，就可达到消去“y”元的目的.

补充例题

1. 用加减法解下列方程组:

(1) $\begin{cases}2s+5t=8,\\3s+2t=5;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}2m+3n=6,\\3m-2n=-2.\end{cases}$

2. 已知 $\begin{cases}3x-2y=1,\\2x-3y=2.\end{cases}$ 试求 $x+y$ 和 $x-y$ 的值.

学生在将方程变形时，往往出现“只乘方程的一边或某些项”的错误，对此，应提醒学生注意.

两个二元一次方程中同一未知数的系数相同或相反时，把这两个方程相减或相加，就能消去这个未知数，从而得到一个一元一次方程，这种解方程组的方法叫做**加减消元法**（elimination by addition and subtraction），简称**加减法**.

例 4 可让学生尝试用消去 y 求解.

例 4 用加减法解二元一次方程组：

$$\begin{cases} 2x+3y=-11, & ① \\ 6x-5y=9. & ② \end{cases}$$

分析 这两个方程中没有同一个未知数的系数相同或相反，直接加减这两个方程不能消去任一个未知数. 但如果把①式两边都乘 3，所得方程与方程②中 x 的系数相同，这样就可以用加减法来解.

解 ①×3，得 $6x+9y=-33$. ③

②－③，得 $-14y=42$,

解得 $y=-3$.

把 $y=-3$ 代入①式，得 $2x+3\times(-3)=-11$,

解得 $x=-1$.

因此原方程组的解是 $\begin{cases} x=-1, \\ y=-3. \end{cases}$

运用加减消元法解方程组的条件是方程组中某一未知数系数的绝对值相等.

当此条件不具备时，需利用等式性质，使得某未知数系数的绝对值相等.

做一做

在例 4 中，如果先消去 y 应如何解？会与上述结果一致吗？

练习

用加减法解二元一次方程组：

(1) $\begin{cases} 2x+y=-2, \\ -2x+3y=18; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 5a-2b=11, \\ 5a+3b=-4; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 3m+2n=8, \\ 6m-5n=-47; \end{cases}$ (4) $\begin{cases} 2x-4y=34, \\ 5x+2y=31. \end{cases}$

练习

(1) $\begin{cases} x=-3, \\ y=4. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} a=1, \\ b=-3. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} m=-2, \\ n=7. \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x=8, \\ y=-\dfrac{9}{2}. \end{cases}$

加减消元法和代入消元法是解二元一次方程组的两种方法，它们都是通过消去其中一个未知数（消元），使二元一次方程组转化为一元一次方程，从而求解，只是消元的方法不同. 我们可以根据方程组的具体情况来灵活选择适合它的消元方法.

例 5 解二元一次方程组：

$$\begin{cases} \dfrac{m}{5}-\dfrac{n}{2}=2, & ① \\ 2m+3n=4. & ② \end{cases}$$

分析 方程①与方程②不能直接消去 m 或 n，在方程①的两边都乘 10，去分母得 $2m-5n=20$，使得两个方程中未知数 m 的系数相同，然后用加减法来解.

解 ①×10，得 $\quad 2m-5n=20.$ ③

②－③，得 $\quad 3n-(-5n)=4-20,$

解得 $\quad n=-2.$

把 $n=-2$ 代入②式，得 $\quad 2m+3\times(-2)=4,$

解得 $\quad m=5.$

因此原方程组的解是 $\begin{cases} m=5, \\ n=-2. \end{cases}$

例 6 解二元一次方程组：

$$\begin{cases} 3x+4y=8, & ① \\ 4x+3y=-1. & ② \end{cases}$$

分析 为了使方程组中两个方程的未知数 x 的系数相同（或相反），可以在方程①的两边都乘 4，在方程②的两边都乘 3，然后将这两个方程相减，就可将 x 消去.

解 ①×4，得 $\quad 12x+16y=32.$ ③

②×3，得 $\quad 12x+9y=-3.$ ④

③－④，得 $\quad 16y-9y=32-(-3),$

解得 $\quad y=5.$

把 $y=5$ 代入①式，得 $\quad 3x+4\times5=8,$

解得 $\quad x=-4.$

因此原方程组的解是 $\begin{cases} x=-4, \\ y=5. \end{cases}$

你能用代入法解例 6 的方程组吗?

本节课是对加减法和代入法的综合运用，代入法和加减法的共同特点都是通过消元解方程组，将二元转化为一元；它们的不同点在于，消元的方法不同，一个是通过“代入”消元，另一个则是通过“加减”消元. 对于一个具体的方程组而言，用任何一种方法都可以，但应根据方程组的具体情况选择比较简便的方法. 教学时可引导学生对同一个方程组尝试运用不同的方法求解并加以比较，从而积累经验.

补充例题

若 $3x^{3m+5n+9}+4y^{4m-2n-7}=2$ 是关于 x，y 的二元一次方程，则 m 与 n 的值分别是多少？

学完本节课之后，应引导学生对代入法与加减法做一小结．比较这两种方法，可以发现其实质都是消元，只是消元途径不同而已．用消元法解方程组的过程，就是把二元一次方程组转化为一元一次方程的过程.

练习

1. (1) $\begin{cases} x=\dfrac{36}{5}, \\ y=\dfrac{2}{5}. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x=7, \\ y=-2. \end{cases}$

2. $a=1$，$b=1$.

习题1.2

A组

1. (1) $\begin{cases} x=3, \\ y=-3. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} s=2, \\ t=2. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x=2, \\ y=-1. \end{cases}$

(4) $\begin{cases} a=-8, \\ b=-3. \end{cases}$

例 7 在方程 $y=kx+b$ 中，当 $x=1$ 时，$y=-1$；当 $x=-1$ 时，$y=3$．试求 k 和 b 的值.

分析 把 x，y 的两组值分别代入 $y=kx+b$ 中，可得到一个关于 k，b 的二元一次方程组.

解 根据题意得 $\begin{cases} -1=k+b, & ① \\ 3=-k+b. & ② \end{cases}$

①+②，得 $2=2b$，

解得 $b=1$．

把 $b=1$ 代入①式，得 $k=-2$．

所以 $k=-2$，$b=1$．

练习

1. 解下列二元一次方程组：

(1) $\begin{cases} \dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{2}y=5, \\ x-3y=6; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x-5y=24, \\ 5x+2y=31. \end{cases}$

2. 已知 $\begin{cases} x=-1, \\ y=0 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x=2, \\ y=3 \end{cases}$ 都是方程 $y=ax+b$ 的解，求 a，b 的值.

习题 1.2

A 组

1. 解下列二元一次方程组：

(1) $\begin{cases} 2x-5y=21, \\ y=-x; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2s+t=6, \\ t=\dfrac{1}{2}s+1; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} y=-2x+3, \\ y=3x-7; \end{cases}$ (4) $\begin{cases} a-3b=1, \\ 5a-9b=-13. \end{cases}$

2. 解下列二元一次方程组：

（1）$\begin{cases} 2(x+2y)-5y=-1, \\ 3(x-y)+y=2; \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} \dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{3}y=7, \\ -\dfrac{2}{3}x+y=-13; \end{cases}$

（3）$\begin{cases} m+2n+5=0, \\ 7m-2n-13=0; \end{cases}$　　（4）$\begin{cases} 2x+5y=0, \\ x+3y=1; \end{cases}$

（5）$\begin{cases} 2x-y=3, \\ 4x+3y=-13; \end{cases}$　　（6）$\begin{cases} 1.5p-2q=-1, \\ -4.5p+7q=8. \end{cases}$

3. 当 $x=2$，-2 时，代数式 $kx+b$ 的值分别是 -2，-4，求 k，b 的值.

B 组

4. 解下列二元一次方程组：

（1）$\begin{cases} 3x+4y=-14, \\ 5x-3y=25; \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} \dfrac{m}{5}-\dfrac{n}{2}=-2, \\ 2(m+n+5)-(-m+n)=23. \end{cases}$

5. 有一个两位数，个位上的数比十位上的数大 5，如果把这两个数的位置进行对换，那么所得的新数与原数的和是 143. 求这个两位数.

6. 地球的表面积约为 5.1 亿千米²，其中海洋面积约为陆地面积的 2.4 倍，则地球上的海洋面积和陆地面积各是多少？

7. 从 A 城到 B 城的航线长 1 200 km，一架飞机从 A 城飞往 B 城，需要 2 h，从 B 城飞往 A 城，需要 2.5 h. 假设飞机保持匀速，风速的大小和方向不变，求飞机的速度与风速.

第 1 章　二元一次方程组　13

2. （1）$\begin{cases} x=-4, \\ y=-7. \end{cases}$

（2）$\begin{cases} x=6, \\ y=-9. \end{cases}$

（3）$\begin{cases} m=1, \\ n=-3. \end{cases}$

（4）$\begin{cases} x=-5, \\ y=2. \end{cases}$

（5）$\begin{cases} x=-\dfrac{2}{5}, \\ y=-\dfrac{19}{5}. \end{cases}$

（6）$\begin{cases} p=6, \\ q=5. \end{cases}$

3. $k=\dfrac{1}{2}$，$b=-3$.

B 组

4. （1）$\begin{cases} x=2, \\ y=-5. \end{cases}$

（2）$\begin{cases} m=\dfrac{45}{17}, \\ n=\dfrac{86}{17}. \end{cases}$

5. 设这个两位数十位上的数字为 x，个位上的数字为 y，则 $\begin{cases} y-x=5, \\ (10x+y)+(10y+x)=143, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x=4, \\ y=9. \end{cases}$

答：这个两位数为 49.

6. 设地球上的海洋面积和陆地面积分别为 x 亿千米²，y 亿千米²，则 $\begin{cases} x+y=5.1, \\ x=2.4y, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x=3.6, \\ y=1.5. \end{cases}$

答：海洋面积为 3.6 亿千米²，陆地面积为 1.5 亿千米².

7. 设飞机的速度为 x km/h，风速为 y km/h，则 $\begin{cases} (x+y)\times 2=1\ 200, \\ (x-y)\times 2.5=1\ 200, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x=540, \\ y=60. \end{cases}$

答：飞机的速度为 540 km/h，风速为 60 km/h.

教学目标

1. 会根据问题情境及条件列出二元一次方程组，解方程组，并检验解是否合理.

2. 通过解决实际问题进一步体会方程建模的过程和作用.

教学重点、难点

教学重点：列出二元一次方程组解决实际问题.

教学难点：寻找等量关系.

列方程组为$\begin{cases}x+y=35,\\2x+4y=94.\end{cases}$

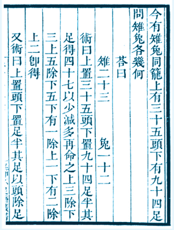
解得$\begin{cases}x=23,\\y=12.\end{cases}$

本节安排了几个实际问题，目的在于引导学生经历建模—求解—检验的过程，进一步体会方程建模的作用与价值，在此过程中，体会数学与生活的联系，同时培养学生分析问题和解决问题的能力.

1.3 二元一次方程组的应用

动脑筋

“鸡兔同笼”是我国古代著名的数学趣题之一. 大约在 1 500 年前成书的《孙子算经》中，就有关于“鸡兔同笼”的记载：“今有雉兔同笼，上有三十五头，下有九十四足，问雉兔各几何？”这四句话的意思是：有若干只鸡兔关在一个笼子里，从上面数，有 35 个头；从下面数，有 94 条腿. 问笼中各有几只鸡和兔？


今有雉兔同籠上有三十五頭下有九十四足
問雉兔各幾何
荅曰
雉二十三 兔一十二
術曰上置三十五頭下置九十四足半其
足得四十七以少減多再命之上三除下
三上五除下五下有一除上一下有二除
上二即得
又術曰上置頭下置足半其足以頭除足

宋刻《孙子算经》书影

本问题涉及的等量关系有：

鸡头数 + 兔头数 = ________，

鸡的腿数 + 兔子的腿数 = ________.

设鸡有 x 只，兔有 y 只.

根据等量关系，得

$\begin{cases}\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_,\\\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.\end{cases}$

解这个方程组，得

$\begin{cases}x=\_\_\_\_\_\_\_\_,\\y=\_\_\_\_\_\_\_\_.\end{cases}$

答：笼中有 ______ 只鸡，______ 只兔.

例 1 某业余运动员针对自行车和长跑项目进行专项训练. 某次训练中，他骑自行车的平均速度为 10 m/s，跑步的平均速度为 $\frac{10}{3}$ m/s，自行车路段和长跑路段共 5 km，共用时 15 min. 求自行车路段和长跑路段的长度.

14 数学 七年级下册

资源拓展

《孙子算经》

《孙子算经》的确切成书年代不详. 学者根据书中事物出现的时间，估计《孙子算经》成书于南北朝.

全书共分三卷. 上卷详细地讨论了度量衡的单位以及筹算的制度和方法. 筹算在春秋战国时期已经运用，但在古代数学著作如《算数书》、《九章算术》等书中都不曾记载算筹的使用方法；《孙子算经》第一次详细地记述了筹算的布算规则：“凡算之法，先识其位，一纵十横，百立千僵，千十相望，百万相当”，此外又说明用空位表示零. 中卷主要是关于分数的应用题，包括面积、体积、等比数列等计算题，大致都在《九章算术》论述的范围之内. 下卷对后世的影响最为深远，如下卷第 31 题即著名的“鸡兔同笼”问题，后传至日本，被改为“鹤龟算”. 下卷第 28 题“物不知数”是后来的“大衍求一术”的起源，被看作是中国数学史上最有创造性的成就之一，称为中国余数定理.

分析　本问题涉及的等量关系有：

自行车路段长度＋长跑路段长度＝总路程，

骑自行车的时间＋长跑时间＝总时间.

解　设自行车路段的长度为 x m，长跑路段的长度为 y m.

根据等量关系，得

$$\begin{cases} x+y=5\,000, \\ \dfrac{x}{10}+\dfrac{y}{\frac{10}{3}}=15\times 60. \end{cases}$$

解这个方程组，得 $\begin{cases} x=3\,000, \\ y=2\,000. \end{cases}$

因此自行车路段的长度为 3 000 m，长跑路段的长度为 2 000 m.

例 2　某食品厂要配制含蛋白质 15%的食品 100 kg，现在有含蛋白质分别为 20%，12%的甲乙两种配料. 用这两种配料可以配制出所要求的食品吗？如果可以的话，它们各需多少千克？

分析　本问题涉及的等量关系有：

甲配料质量＋乙配料质量＝总质量，

甲配料含蛋白质质量＋乙配料含蛋白质质量＝总蛋白质质量.

解　设含蛋白质 20% 的配料需用 x kg，含蛋白质 12% 的配料需用 y kg.

根据等量关系，得

$$\begin{cases} x+y=100, \\ x\cdot 20\%+y\cdot 12\%=100\cdot 15\%. \end{cases}$$

解这个方程组，得 $\begin{cases} x=37.5, \\ y=62.5. \end{cases}$

答：可以配制出所要求的食品，其中含蛋白质 20% 的配料需用 37.5 kg，含蛋白质 12% 的配料需用 62.5 kg.

建立二元一次方程组解决实际问题的步骤如下：

实际问题 $\xrightarrow[\text{设两个未知数}]{\text{分析等量关系}}$ 列二元一次方程组 → 解方程组 → 检验解是否符合实际情况

例 1、例 2 中的等量关系较复杂，应引导学生观察发现变化过程中的不变，以找到等量关系.

在解方程组时，仍应提醒学生观察方程中未知数系数的特点，选用合适的消元法，寻求简便解法.

列方程组解应用题也要养成检验的习惯. 熟练后可不在过程中写出.

本节课的最后，适时帮助学生归纳建立二元一次方程组（模型）解决实际问题的步骤. 这本身是一种算法，同时也渗透了建模的过程. 应让学生在熟练掌握方法与步骤后，适时帮助其提炼、归纳、总结，从而从整体上认识方程组模型与实际问题的关系.

补充例题

1. 我国明朝时有一位著名的数学家叫程大位，在他的书中记录了这样一道名题：“100 个和尚分 100 个馒头，大和尚每人吃 3 个，小和尚每 3 人吃 1 个，问大、小和尚各多少？”

2. 《一千零一夜》中有这样一段文字：有一群鸽子，其中一部分在树上欢歌，另一部分在地上觅食，树上的一只鸽子对地上觅食的鸽子说：“若从你们中飞上来一只，则树下的鸽子就是整个鸽群的 $\dfrac{1}{3}$；若从树上飞下去一只，则树上、树下的鸽子就一样多了.”你知道树上、树下各有多少只鸽子吗？

练习

1. 设合金中含金 x g，含银 y g，

则 $\begin{cases} x+y=250, \\ \dfrac{1}{19}x+\dfrac{1}{10}y=16, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x=190, \\ y=60. \end{cases}$

答：合金中含金 190 g，含银 60 g.

本题还有一个有趣的背景——“阿基米德与金冠之谜”，有兴趣的教师或学生可查阅相关资料.

2. 设甲、乙两种商品原来的单价分别为 x 元，y 元，则

$\begin{cases} x+y=100, \\ 90\%x+140\%y=120\%(x+y), \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x=40, \\ y=60. \end{cases}$

答：甲、乙两种商品原来的单价分别为 40 元、60 元.

本节课的重点是二元一次方程组模型的应用. 首先是建立方程模型，即根据各种数量关系抽象成方程，然后是求解方程组，最后是检验解的合理性. 在这一过程中，一方面是指导学生解决实际问题，另一方面还要适时渗透模型、转化、消元的思想.

列方程组为 $\begin{cases} \dfrac{x}{60}+\dfrac{y}{80}=10, \\ \dfrac{x}{60}+\dfrac{y}{40}=15. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x=300, \\ y=400. \end{cases}$

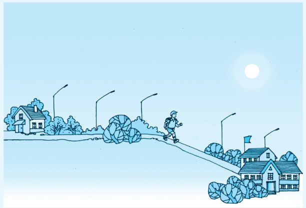
练习

1. 一块金与银的合金重 250 g，放在水中称，减轻了 16 g. 已知金在水中称，金重减轻 $\dfrac{1}{19}$；银在水中称，银重减轻 $\dfrac{1}{10}$. 求这块合金中含金、银各多少克.

2. 甲、乙两种商品原来的单价和为 100 元，因市场变化，甲商品降价 10%，乙商品提价40%，调价后两种商品的单价和比原来的单价和提高了 20%. 求甲、乙两种商品原来的单价.

动脑筋

小华从家里到学校的路是一段平路和一段下坡路. 假设他始终保持平路每分钟走 60 m，下坡路每分钟走 80 m，上坡路每分钟走 40 m，则他从家里到学校需 10 min，从学校到家里需 15 min. 问小华家离学校多远？



小华家到学校的路程分为两段：平路与坡路（回家所走的上坡路长即为去学校的下坡路长）. 根据问题中涉及的路程、速度与时间的数量关系，可得

走平路的时间＋走下坡的时间＝__________，

走上坡的时间＋走平路的时间＝__________.

设小华家到学校平路长 x m，下坡长 y m.

根据等量关系得 $\begin{cases} \underline{\qquad\qquad\qquad}, \\ \underline{\qquad\qquad\qquad}. \end{cases}$

解这个方程组，得

$\begin{cases} x=\underline{\qquad\qquad}, \\ y=\underline{\qquad\qquad}. \end{cases}$

因此，平路长为 ______m，下坡长为 ______m，小华家离学校 ______m.

例 3 某城市规定：出租车起步价所包含的路程为 0~3 km，超过 3 km 的部分按每千米另收费. 甲说：“我乘这种出租车走了 11 km，付了 17 元.” 乙说：“我乘这种出租车走了 23 km，付了 35 元.” 请你算一算：出租车的起步价是多少元？超过 3 km 后，每千米的车费是多少元？

分析 本问题涉及的等量关系有：

总车费 = 0~3 km 的车费(起步价) + 超过 3 km 的车费.

解 设出租车的起步价是 x 元，超过 3 km 后每千米收费 y 元.

根据等量关系，得

$$\begin{cases} x+(11-3)y=17, \\ x+(23-3)y=35. \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x+8y=17, \\ x+20y=35. \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} x=5, \\ y=1.5. \end{cases}$$

答：这种出租车的起步价是 5 元，超过 3 km 后每千米收费 1.5 元.

例 4 某装订车间的工人要将一批书打包后送往邮局，其中每包书的数目相等. 第一次他们领来这批书的 $\frac{7}{12}$，结果打了 14 个包还多 35 本；第二次他们把剩下的书全部取来，连同第一次打包剩下的书一起，刚好又打了 11 包. 那么这批书共有多少本？

解 设这批书共有 x 本，每包书有 y 本.

根据等量关系，得

$$\begin{cases} \frac{7}{12}x=14y+35, \\ \left(1-\frac{7}{12}\right)x+35=11y. \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} x=1\,500, \\ y=60. \end{cases}$$

答：这批书共有 1 500 本.

本节课一共安排了 3 个实际问题，这些问题更加接近生活的实际，并且分析和解决这些问题的难度有所加大. 对于这些问题的解决，应充分发挥学生的主观能动性，自主学习，独立探究，而后合作交流进行解答，进一步积累运用方程模型解决实际问题的经验，培养良好的数学思维习惯以及分析问题、解决问题的能力.

例 3 的等量关系只有一个，围绕这个等量关系以及条件可以列出两个方程.

例 4 并没有列出等量关系式，在教学时，需指导学生分析等量关系，并结合复杂的已知条件列出方程组.

练习

1. 星期日，小军与小明所在年级分别有同学去颐和园和圆明园参观，其参观人数和门票花费如下表：

	颐和园参观人数	圆明园参观人数	门票花费总计
小军所在年级	30	30	750 元
小明所在年级	30	20	650 元

问：颐和园和圆明园的门票各多少元？

2. 王先生家厨房需更换地面瓷砖，他采用两种颜色的地砖搭配使用，其中彩色地砖 24 元/块，单色地砖 12 元/块，购买的单色地砖数比彩色地砖数的 2 倍少 15 块，买两种地砖共花去 2 220 元．求购买的彩色地砖数和单色地砖数．

习题 1.3

A 组

1. 小红买了 80 分与 60 分的邮票共 17 枚，花去 12.2 元．试问：80 分与 60 分邮票各买了多少枚？

2. 小亮对小芬说：“我的生日的月和日相加是 37，月的 2 倍和日相加是 43.” 小芬说：“这不可能啊！” 你觉得小芬说得对吗？为什么？

3. 小英家今年 1 月份用水 20 t，交水费 43 元；2 月份用水 18 t，交水费 38 元．该城市实行阶梯水价，14 t 以内按正常收费，超出部分则收较高水费．问：在限定量以内的水费每吨多少元？超出部分的水费每吨多少元？

4. 某企业向商业银行申请了甲、乙两种贷款，共计 35 万元，每年需付出利息 4.4 万元．甲种贷款每年的利率是 12%，乙种贷款的利率是 13%．求这两种贷款的金额各是多少．

练习

1. 设颐和园和圆明园的门票分别为 x 元，y 元，则 $\begin{cases}30x+30y=750,\\30x+20y=650,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=15,\\y=10.\end{cases}$

答：颐和园和圆明园的门票分别为 15 元、10 元．

2. 设购买的彩色地砖数和单色地砖数分别为 x 块，y 块，则 $\begin{cases}24x+12y=2\,220,\\2x-15=y,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=50,\\y=85.\end{cases}$

答：购买了彩色地砖 50 块，单色地砖 85 块．

习题1.3

A组

1. 设 80 分与 60 分的邮票分别买了 x 枚，y 枚，则 $\begin{cases}x+y=17,\\0.8x+0.6y=12.2,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=10,\\y=7.\end{cases}$

答：80 分与 60 分的邮票各买了 10 枚、7 枚．

2. 对，因为小亮所说的是 6 月 31 日，这是不可能的．

3. 设在限定量以内的水费每吨 x 元，超出部分的水费每吨 y 元，则 $\begin{cases}14x+6y=43,\\14x+4y=38,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=2,\\y=2.5.\end{cases}$

答：在限定量以内的水费每吨 2 元，超出部分的水费每吨 2.5 元．

4. 设甲种贷款 x 万元，乙种贷款 y 万元，则 $\begin{cases}x+y=35,\\12\%x+13\%y=4.4,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=15,\\y=20.\end{cases}$

答：甲种贷款 15 万元，乙种贷款 20 万元．

5. 某水果公司收购某种水果 104 t，准备加工后上市销售. 该公司加工该种水果的能力是：每天可以精加工 4 t 或粗加工 8 t. 现水果公司计划用 16 天完成这项加工任务，则应安排几天精加工，几天粗加工？

B 组

6. 某农户种植核桃树和杏树，已知种植的核桃树棵数比总数的一半多 11 棵，种植的杏树棵数比总数的三分之一少 2 棵. 问两种果树各种植了多少棵？

7. 某中学组织一批学生春游，原计划租用 45 座客车若干辆，但有 15 人没有座位；若租用同样数量的 60 座客车，则多出一辆车，且其余客车恰好坐满. 已知 45 座客车租金为每辆 220 元，60 座客车租金为每辆 300 元，问：

（1）这批学生的人数是多少？原计划租用多少辆 45 座客车？

（2）若租用同一种车，要使每位学生都有座位，应该怎样租用才合算？

8. 某天，一蔬菜经营户用 60 元从蔬菜批发市场购进西红柿和豆角共 40 kg 到菜市场去卖，西红柿和豆角这天的批发价、零售价（单位：元/kg）如下表所示：

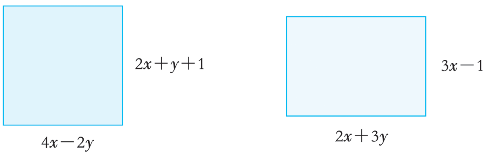
品名	批发价	零售价
西红柿	1.2	1.8
豆角	1.6	2.5

问他当天卖完这些西红柿和豆角能赚多少钱？

9. 如图，有一个正方形和一个长方形. 若正方形的周长与长方形的周长相等，求：

（1）x，y 的值；

（2）正方形和长方形的面积.



（第 9 题图）

5. 设应安排x天精加工，y天粗加工，则$\begin{cases}x+y=16,\\4x+8y=104,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=6,\\y=10.\end{cases}$

答：应安排 6 天精加工，10 天粗加工.

B组

6. 设种植了x棵核桃树，y棵杏树，则$\begin{cases}x=\frac{1}{2}(x+y)+11,\\y=\frac{1}{3}(x+y)-2,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=38,\\y=16.\end{cases}$

答：核桃树和杏树各种植了 38 棵、16 棵.

7.（1）设这批学生的人数为 x 人，原计划租用 y 辆 45 座客车，则$\begin{cases}45y+15=x,\\60(y-1)=x,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=240,\\y=5.\end{cases}$

答：这批学生有 240 名，原计划租用 5 辆 45 座客车.

（2）租 4 辆 60 座的客车合算.

8. 设该经营户购进了西红柿 x kg，豆角 y kg，则$\begin{cases}x+y=40,\\1.2x+1.6y=60,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=10,\\y=30.\end{cases}$

他当天卖完这些西红柿和豆角能赚$(1.8-1.2)\times10+(2.5-1.6)\times30=33$(元).

9.（1）$x=2$，$y=1$.

（2）正方形和长方形的面积分别为 36，35.

教学目标

1. 了解三元一次方程组的概念.

2. 会运用代入法和加减法解简单的三元一次方程组.

教学重点、难点

教学重点：三元一次方程组的解法.

教学难点：如何消元.

本节内容是这次新增的内容，目的是通过解三元一次方程组进一步体会消元法的思想方法，同时为九年级学习二次函数时利用待定系数法求二次函数解析式奠定基础. 由于是选学内容，不对全体学生做要求，因此在难度设置上不宜太难，重点应放在体会“转化”与“消元”的思想上.

*1.4 三元一次方程组

动脑筋

小丽家三口人的年龄之和为 80 岁，小丽的爸爸比妈妈大 6 岁，小丽的年龄是爸爸与妈妈年龄和的 $\frac{1}{7}$. 试问这家人的年龄分别是多少岁？

可建立二元一次方程组来解决. 设爸爸的年龄为 x 岁，小丽的年龄为 y 岁，则妈妈的年龄为 $(x-6)$ 岁. 根据题意得：

$$\begin{cases} x+y+x-6=80, \\ y=\frac{1}{7}(x+x-6). \end{cases}$$

解这个方程组得 $x=38$， $y=10$.

因此爸爸的年龄为 38 岁，妈妈的年龄为 32 岁，小丽的年龄为 10 岁.

想一想，还有其他的方法列方程组求解吗？

因为要求三个人的年龄，所以可设爸爸的年龄为 x 岁，妈妈的年龄为 y 岁，小丽的年龄为 z 岁. 根据题意得：

$$x+y+z=80,$$
$$x-y=6,$$
$$x+y=7z.$$

三人的年龄必须同时满足上述三个方程，所以，我们把这三个方程联立在一起写成：

$$\begin{cases} x+y+z=80, \\ x-y=6, \\ x+y=7z. \end{cases}$$

* 本节为选学内容.

资源拓展

公元 5 世纪我国古代数学家张丘建在他的《算经》中有一道世界著名的百鸡问题：“鸡翁一，值钱五，鸡母一，值钱三，鸡雏三，值钱一，百钱买百鸡. 问鸡翁、母、雏各几何？”此题经过化简得到一个不定方程（设鸡翁为 x 只，鸡母为 y 只，鸡雏为 z 只）：$7x+4y=100$.

该题有以下几种结果：

x	0	4	8	12
y	25	18	11	4
z	75	78	81	84

可以发现，这个方程组中含有三个未知数，每个方程中含未知数的项的次数均为 1，并且一共有三个方程，像这样的方程组叫做**三元一次方程组**.

在三元一次方程组中，适合每一个方程的一组未知数的值，叫做这个方程组的一个解.

动脑筋

解二元一次方程组可以利用代入法或加减法消去一个未知数，使其转化为一元一次方程来求解，那么我们在解三元一次方程组时，能不能同样利用代入法或加减法来消去一个或两个未知数，使其转化为二元一次方程组或一元一次方程呢?

现在我们来解下面的三元一次方程组：

$$\begin{cases} x+y+z=80, & ① \\ x-y=6, & ② \\ x+y=7z. & ③ \end{cases}$$

我们把①、②两式相加得到一个只含 x 和 z 的二元一次方程，即$2x+z=86$. 再把 ②、③两式相加又得到一个只含 x 和 z 的二元一次方程，即 $2x=6+7z$.

由此可得一个关于 x，z 的二元一次方程组

$$\begin{cases} 2x+z=86, \\ 2x-7z=6. \end{cases}$$

解这个方程组，得 $\begin{cases} x=38, \\ z=10. \end{cases}$

把 x=38，z=10 代入①式，得 $38+y+10=80$，

解得 $y=32$.

因此，三元一次方程组的解为 $\begin{cases} x=38, \\ y=32, \\ z=10. \end{cases}$

从上面解方程组的过程可以看出，解三元一次方程组的基本想法是：先消去一个未知数，将解三元一次方程组转化为解二元一次方程组，进而再转化为解一元一次方程. 消元的基本方法仍然是代入法和加减法.

教学“动脑筋”内容时，应适时渗透“转化”思想. 通过“消元”，将三元转化为二元，最后到一元.

消元的基本方法仍然是代入法和加减法.

例 解三元一次方程组：

$$\begin{cases} 5x+4y+z=0, & ① \\ 3x+y-4z=1, & ② \\ x+y+z=-2. & ③ \end{cases}$$

分析 通过观察发现，z 或 y 的系数较为简单，可以先消去 z 或 y 来求解.

解 ②×4−①，得 $7x-17z=4$.

②−③，得 $2x-5z=3$.

由此得到 $\begin{cases} 7x-17z=4, \\ 2x-5z=3. \end{cases}$

解这个二元一次方程组得 $\begin{cases} x=-31, \\ z=-13. \end{cases}$

把 $x=-31$，$z=-13$ 代入③式，得 $y=42$.

所以原方程组的解为 $\begin{cases} x=-31, \\ y=42, \\ z=-13. \end{cases}$

做一做

请你用其他的方法来解上例中的方程组.

练习

1. 解下列三元一次方程组：

(1) $\begin{cases} x+y=7, \\ 2y+z=6, \\ x-z=7; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2x+2y+z=4, \\ 2x+y+2z=7, \\ x+2y+2z=-6. \end{cases}$

2. 有甲、乙、丙三人，若甲、乙的年龄之和为 15 岁，乙、丙的年龄之和为 16 岁，丙、甲的年龄之和为 17 岁，则甲、乙、丙三人的年龄分别为多少岁？

“做一做”栏目的目的是希望教师讲解完例题以后，还能引导学生从消去未知数 z 的角度解答这个例题，而后与例题的结果进行比较. 一题多做，可以使学生获得更多收获.

练习

1. (1) $\begin{cases} x=1, \\ y=6, \\ z=-6. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x=8, \\ y=-5, \\ z=-2. \end{cases}$

2. 设甲、乙、丙三人的年龄分别为 x 岁，y 岁，z 岁，则 $\begin{cases} x+y=15, \\ y+z=16, \\ z+x=17, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x=8, \\ y=7, \\ z=9. \end{cases}$

答：甲、乙、丙三人的年龄分别为 8 岁、7 岁和 9 岁.

习题 1.4

A 组

1. 解下列三元一次方程组：

(1) $\begin{cases} y=x+1, \\ 2x+y+z=1, \\ x-2y+z=-6; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 3x-2z=1, \\ 3z+2y=2, \\ 3y-x=-18. \end{cases}$

2. 解下列三元一次方程组：

(1) $\begin{cases} x-y+z=0, \\ 4x+2y+z=3, \\ 25x+5y+z=60; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 3a+4b=7, \\ 5a-9b+7c=8, \\ 2a+3b+c=9. \end{cases}$

3. 当 $x=1$，3，-2 时，代数式 ax^2+bx+c 的值分别为 -9，-3，12，试求 a，b，c 的值.

B 组

4. 一个三位数是它各数位上数字之和的 27 倍. 已知百位上的数字与个位上的数字之和比十位上的数字大 1. 如果把百位上的数字与个位上的数字交换位置，则所得的新数比原数大 99. 求这个三位数.

5. （中国古代数学问题）[①]今有上等谷 3 束，中等谷 2 束，下等谷 1 束，共是 39 斗；上等谷 2 束，中等谷 3 束，下等谷 1 束，共是 34 斗；上等谷 1 束，中等谷 2 束，下等谷 3 束，共是 26 斗. 问上、中、下三等谷每束各是几斗？

（中国古代借助算筹来列方程组）

① 选自《九章算术》，原文是：今有上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗；上禾二秉，中禾三秉，下禾一秉，实三十四斗；上禾一秉，中禾二秉，下禾三秉，实二十六斗. 问上、中、下禾实一秉各几何？

习题1.4

A组

1. (1) $\begin{cases} x=1, \\ y=2, \\ z=-3. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x=3, \\ y=-5, \\ z=4. \end{cases}$

2. (1) $\begin{cases} x=3, \\ y=-2, \\ z=-5. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} a=-\dfrac{5}{27}, \\ b=\dfrac{17}{9}, \\ c=\dfrac{100}{27}. \end{cases}$

3. $a=2$，$b=-5$，$c=-6$.

B组

4. 设这个三位数百位上的数字为 x，十位上的数字为 y，个位上的数字为 z，则 $\begin{cases} 100x+10y+z=27(x+y+z), \\ x+z=y+1, \\ 100z+10y+x=100x+10y+z+99, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=2, \\ y=4, \\ z=3. \end{cases}$

答：这个三位数是 243.

5. 设上、中、下三等谷每束分别为 x 斗，y 斗，z 斗，则 $\begin{cases} 3x+2y+z=39, \\ 2x+3y+z=34, \\ x+2y+3z=26, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=\dfrac{37}{4}, \\ y=\dfrac{17}{4}, \\ z=\dfrac{11}{4}. \end{cases}$

答：上、中、下三等谷每束分别为 $\dfrac{37}{4}$ 斗、$\dfrac{17}{4}$ 斗、$\dfrac{11}{4}$ 斗.

小结与复习通过回顾本章的主要内容，使学生对方程组以及方程组的解的概念有进一步的理解. 掌握解二元一次方程组的基本思想(消元)和基本方法(代入法和加减法). 能灵活运用代入法或加减法解二元一次方程组并会列出二元一次方程组解决简单实际问题.

小结与复习

回顾

1. 解二元一次方程组的基本想法是什么？解方程组的方法有哪些？
2. 用二元一次方程组解决实际问题有哪些步骤？

*3. 解三元一次方程组与解二元一次方程组有何联系与区别？

本章知识结构

“注意”栏目中列举了学习本章知识时要留意的地方，这些事项在前面的学习过程中已做了强调，在这里重新把这些问题提出来，有利于学生整体回顾，建议教师在小结与复习中通过具体的例子对注意事项进行再说明，以达到事半功倍的效果.

注意

1. 解二元一次方程组时，要注意观察未知数的系数特征，灵活选择方法.

*2. 解三元一次方程组的基本想法与解二元一次方程组的想法是一致的. 通过消元，将三元一次方程组转化为二元一次方程组或一元一次方程，进而求解.

资源拓展

本书中许多题目都源自《九章算术》.《九章算术》是中国古代数学专著，是“算术十书”（汉唐之间出现的十部古代古算术）中最重要的一部. 它上承先秦数学发展之源流，入汉之后又经许多学者的删补才最后成书. 它的出现，标志着中国古代数学体系的形成.《九章算术》在隋唐时期即已传入朝鲜、日本，现在已被译成日、德、意、法等多种文字.

习题 1.4 中的第 5 题还讲述了中国古代是借助算筹来列方程组并求解，这一方面是当时中国古代所取得的数学成就，另一方面也反映出若没有给出字母系数的表达方法，数学将难以发展，可见把事物抽象到符号表达是多么重要，而阿拉伯人、欧洲人率先做到了这一步.

复习题 1

A 组

1. 分别用代入法和加减法解方程组：$\begin{cases}x+y=7,\\3x+y=17.\end{cases}$

2. 解下列二元一次方程组：

(1) $\begin{cases}m=2n+13,\\m=-3n-12;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x+2y=10,\\-3x+5y=3;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}7x+3y=15,\\2x-3y=12;\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}3x+2y=6,\\y=\dfrac{1}{2}x+2.\end{cases}$

3. 解下列二元一次方程组：

(1) $\begin{cases}4x+3y=1,\\3x-4y=-18;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}3m-5n+23=0,\\5m+n-27=0.\end{cases}$

4. 已知等式 $y=kx+b$，当 $x=20$，30 时，y 的值分别为 68，86，求 k，b 的值.

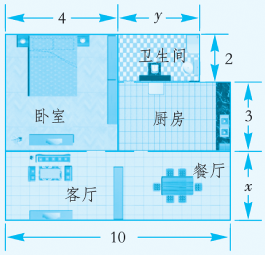
5. 晓玲想通过饮用牛奶和橙汁来提高身体中钙和维生素 A 的含量. 一盎司[①]牛奶含 38 毫克钙和 56 微克维生素 A，一盎司橙汁含 5 毫克钙和 60 微克维生素 A，她每天应喝牛奶和橙汁各多少盎司，才能保证身体中每日摄入 550 毫克钙和 1 200 微克维生素 A？

6. 小刚从今年 2 月初起刻苦练习跳高，每个月的跳高成绩都比上一个月有提高，而且提高的高度相同. 3 月份，7 月份他的跳高成绩分别为 1.45 m，1.53 m. 你能算出他 2 月份的跳高成绩以及每个月提高的高度吗？

7. 大伟购买了一套经济适用房，户型图如图所示，他打算将地面铺上地砖，请根据图中的数据（单位：m）回答下列问题：

(1) 写出用含 x，y 的代数式表示的地面总面积.

(2) 已知客、餐厅面积之和比卫生间面积多 22 m²，且地面总面积是卫生间面积的 9.5 倍，铺 1 m² 地砖的平均费用为 85 元，求铺地砖的总费用为多少元.



（第 7 题图）

① 盎司是英制质量单位的一种，1 盎司=28.349 5 克.

复习题1

A组

1. $\begin{cases}x=5,\\y=2.\end{cases}$

2. (1) $\begin{cases}m=3,\\n=-5.\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x=4,\\y=3.\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x=3,\\y=-2.\end{cases}$

(4) $\begin{cases}x=-\dfrac{1}{2},\\y=2\dfrac{1}{4}.\end{cases}$

3. (1) $\begin{cases}x=-2,\\y=3.\end{cases}$

(2) $\begin{cases}m=4,\\n=7.\end{cases}$

4. $k=1.8$，$b=32$.

5. 设她每天应喝牛奶 x 盎司，橙汁 y 盎司，则 $\begin{cases}38x+5y=550,\\56x+60y=1\,200,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=13.5,\\y=7.4.\end{cases}$

答：她每天应喝牛奶 13.5 盎司，橙汁 7.4 盎司.

6. 设他 2 月份的跳高成绩为 x m，每个月提高的高度为 y m，

则 $\begin{cases}x+y=1.45,\\x+5y=1.53,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=1.43,\\y=0.02.\end{cases}$

答：2 月份跳高成绩是 1.43 m，每月提高的高度是 0.02 m.

7. (1) $10x+2y+38$.

(2) 由题意可得 $\begin{cases}10x-2y=22,\\10x+2y+38=2y\times9.5,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=3,\\y=4.\end{cases}$

所以铺地砖的总费用为 $(10\times3+2\times4+38)\times85=6\,460$（元）.

8. 小亮所在年级到某地参加志愿者活动. 车上准备了 5 箱矿泉水，每箱的瓶数相同. 到达目的地后，先从车上搬下 2 箱，发给每位志愿者 1 瓶矿泉水，有 8 瓶未领到. 接着又从车上搬下 3 箱，继续分发，最后每位志愿者都有 2 瓶矿泉水，还剩下 8 瓶. 问：有多少人参加志愿者活动？每箱有多少瓶矿泉水？

*__9.__ 解下列三元一次方程组：

（1）$\begin{cases} x=2y, \\ 2x-y+z=2, \\ x-2y+3z=-3; \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} x+y+z=-4, \\ x-y+z=0, \\ 4x+2y+z=-3. \end{cases}$

B 组

10. 解下列二元一次方程组：

（1）$\begin{cases} 2(x+y-1)=3(3-y)-3, \\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=2; \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} \dfrac{2x-3y}{6}=4, \\ \dfrac{(5x+15y)-5}{3}=0. \end{cases}$

11. 某城市一种出租车的起步价为 10 元，两位乘客分别乘这种出租车走了 10 km 和 14 km，车费分别为 21.2 元和 27.6 元，且一路顺利，没有停车等候. 你能算出这种出租车起步价所允许行驶的最远路程吗？超过起步路程但行驶不到 15 km 时，超过部分每千米车费为多少元？（本题不考虑用计程器计费的某些特殊规定.）

C 组

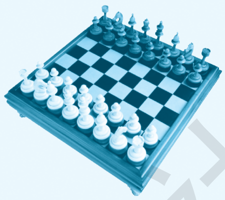
12. 下列二元一次方程组有解吗？

$$\begin{cases} x-3y=2, \\ -2x+6y=5. \end{cases}$$

13. 下列二元一次方程组有多少解？

$$\begin{cases} x-3y=2, \\ -2x+6y=-4. \end{cases}$$

14. 在一次国际象棋女子挑战赛上，我国女子国际象棋特级大师谢军在苦战 15 盘后，以净胜俄罗斯棋手加里亚莫娃 2 分的优异成绩，第三次夺得棋后桂冠. 比赛的积分规则是胜得 1 分，负得 0 分，和棋各得 0.5 分. 问两位棋手最后的积分各是多少？



26　数学　七年级下册

8. 设有 x 人参加志愿者活动，每箱有 y 瓶矿泉水，则 $\begin{cases} x-8=2y, \\ 2x=5y-8, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x=56, \\ y=24. \end{cases}$

答：有 56 人参加志愿者活动，每箱有 24 瓶矿泉水.

9.（1）$\begin{cases} x=2, \\ y=1, \\ z=-1. \end{cases}$

（2）$\begin{cases} x=1, \\ y=-2, \\ z=-3. \end{cases}$

B组

10.（1）$\begin{cases} x=9, \\ y=-2. \end{cases}$

（2）$\begin{cases} x=\dfrac{25}{3}, \\ y=-\dfrac{22}{9}. \end{cases}$

11. 设起步价允许行驶的最远路程是 x km，超过部分每千米车费是 y 元，则 $\begin{cases} 10+(10-x)y=21.2, \\ 10+(14-x)y=27.6, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x=3, \\ y=1.6. \end{cases}$

答：起步价允许行驶的最远路程是 3 km，超过部分每千米车费 1.6 元.

C组

12. 无解.

13. 有无穷多个解.

14. 设谢军和加里亚莫娃的积分分别是 x 分，y 分，则 $\begin{cases} x+y=15, \\ x-y=2, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x=8.5, \\ y=6.5. \end{cases}$

答：谢军和加里亚莫娃的最后积分分别是 8.5 分、6.5 分.

本题的关键是找到等量关系：不论胜负如何，每盘棋两人的得分之和总是 1 分，因此 15 盘棋两人的总得分是 15 分.

数学与文化

高斯消元法

计算机技术的迅猛发展，使得实际问题中含有成千上万个未知数的一次方程组有可能求解. 为了使计算机能够机械地执行命令，解一次方程组需要一种统一的算法. 现在我们以下面的二元一次方程组为例，说明这种统一的消元法.

已知 $\begin{cases}2x+3y-7=0,\\3x-5y+18=0.\end{cases}$

第一步，把方程组写成如下的标准形式：

$$\begin{cases}2x+3y=7, & ①\\3x-5y=-18. & ②\end{cases}$$

按标准形式将数据输入到计算机中.

第二步，把标准形式的方程组化成阶梯形：

①×$\left(-\frac{3}{2}\right)$，加到方程②上，得

$$\begin{cases}2x+\ \ 3y\ =7, & ③\\ \quad -\frac{19}{2}y=-\frac{57}{2}. & ④\end{cases}$$

由③、④组成的方程组叫做阶梯形方程组，其中第二个方程（即方程④）已经不含未知数 x.

第三步，解方程④，得 $y=3$.

往回代入③，解得 $x=-1$.

因此原方程组的解是 $\begin{cases}x=-1,\\y=3.\end{cases}$

上述这种解一次方程组的方法叫做高斯消元法，其中第二步叫做消元算法，第三步叫做回代算法. 高斯消元法不仅可以用来解任意一个二元一次方程组，而且可以用来解任意一个三元一次方程组，以及解任意一个 n 元一次方程组，其中 n 是任一正整数且 $n\geqslant 2$.（注：有 n 个未知数，并且含未知数的每一项都是 1 次的方程叫做 n 元一次方程. 含有相同未知数的若干个 n 元一次方程联立起来，组成的方程组叫做 n 元一次方程组.）

高斯消元法的实质在我国《九章算术》的“方程”一章中就已体现.

“数学与文化”栏目中的内容主要是介绍数学学科知识背景、数学在自然与社会中的应用、数学发展史的有关材料等，目的是帮助学生了解数学在人类文明发展中的作用，激发学生学习数学的兴趣，感受数学家治学的严谨性，欣赏数学的美.

本内容可以让学生自行阅读，教师加以引导. 如通过网络、书籍收集关于消元法的史料，查找高斯的介绍，查找计算机解方程的原理是怎样的，以激发学生学习数学的兴趣.

Ⅲ. 本章相关链接

一次方程组的相关史料

一次方程组也叫线性方程组，是最简单也是最重要的一类代数方程组.

我国是研究一次方程组最早的国家之一. 公元 3 世纪，我国著名的数学家刘徽曾这样解释“方程”的含义：“程，课程也. 群物众杂，各列有数，总言其实. 令每行为率，二物者再程，三物者三程，皆如物数程之，并列为行，故谓之方程.”其中，“令每行为率”是按条件列等式的意思. “如物数程之”是说有几个未知数列几个等式. 然后，再用竹制的算筹布列出一个方阵，就是我们今天所使用的方程组.

一次方程组的解法早在中国古代的数学名著《九章算术》方程中已经做出了比较完整的论述. 所用的方法本质上相当于现代对方程组的增广矩阵施行初等变换、消去未知数的方法.

在西方，一次方程组的研究始于 17 世纪后期的莱布尼兹. 马克劳林在 18 世纪上半叶研究了具有二、三、四个未知数的一次方程组，得到了现在称为克莱姆法则的结果. 克莱姆不久也发表了这个法则. 到了 19 世纪，英国数学家史密斯引进了方程组的增广矩阵和非增广矩阵的术语. 道奇森证明了 n 个未知数 m 个方程的方程组相容的充要条件，使方程组理论臻于完善.

二元一次方程组的解法

（1）消元法

消元法包括代入消元法与加减消元法等.

代入消元法就是从方程组中的某一个方程中解出一个未知数（用含其他未知数的代数式表示），再将这个未知数的表达式代入这个方程组的其他方程中，在其他方程中消去这个未知数.

加减消元法就是将方程组的一些方程分别乘以适当的数，使得某一个未知数的系数相加减等于 0，然后将这些方程相加减，消去这个未知数.

（2）公式法

对于方程组$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2, \end{cases}$

当 $a_1b_2\neq a_2b_1$ 时，有唯一解$\begin{cases} x=\dfrac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}, \\ y=\dfrac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}. \end{cases}$

第 2 章　整式的乘法

Ⅰ. 概　述

一、课程内容

1. 掌握幂的运算法则（同底数幂、幂的乘方与积的乘方），理解法则的推导过程和运算依据，能灵活运用法则进行计算.

2. 能进行简单的整式乘法运算（其中多项式相乘仅指一次式之间以及一次式与二次式相乘），知道运算律是推导运算法则的理论依据.

3. 能推导乘法公式：$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$，$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$，了解公式的几何背景，并能利用这些公式进行简单计算.

二、课时建议

2.1　整式的乘法	6课时
2.2　乘法公式	4课时
小结与复习	2课时

三、教材说明

本章的主要内容是整式的乘法，这些内容是在学生掌握了有理数、整式加减等知识的基础上学习的. 其中，幂的运算性质，即同底数幂的乘法、幂的乘方和积的乘方是学习整式乘法的基础. 在学生掌握了幂的运算性质后，教材安排了单项式的乘法，这是学习多项式乘法的基础，在此基础上，利用分配律进一步学习多项式的乘法，最后在整式乘法的基础上学习乘法公式. 这样使得整章的运算从简到繁，由易到难，层层递进，环环相扣.

根据知识间内在的逻辑性，本章的教学内容分为 6 个小节，顺序安排如下：

同底数幂的乘法 → 幂的乘方与积的乘方 → 单项式的乘法 → 多项式的乘法 → 平方差公式 → 完全平方公式

本章的概念、运算法则、公式多，因此教材编写力求做到贴近学生生活实际，概念的引入多借助学生熟悉的例子，每个法则、公式的得出均注意采用“问题情境—观察—抽象—归纳猜想—演绎推理，得到法则”的模式，教师在教学时，应重视这一过程的价值，让学生亲身经历这一数学思维的过程，帮助学生积累数学活动经验，以及建立数学直观. 尤其值得指出的是：合情推理（归纳猜想）与演绎推理的结合是本章的特色. 合情推理是发现命题、提炼公式的有效工具，在培养人的创新性思维方面起着重大作用，而演绎推理在培养人的逻辑思维能力方面起着重要作用. 在教学时应充分重视这一点，以教材为基础，探讨知识发生的过程，并和学生一起研究如何经过由具体到抽象，概括得到性质、法则和公式，这将有助于训练学生的思维，使学生领会到数学的思想和方法.

本章所有运算法则的理论依据都是运算律以及同底数幂的乘法法则. 理解并掌握这一法则，灵活运用交换律、结合律以及乘法对加法的分配律便可得出整式其他的运算法则. 所以，在教材编写中，我们强调了运算律的应用. 有些法则，如“单项式与多项式相乘”，我们直接用了一句实质性的话——

“可以运用乘法对加法的分配律”，引导学生归纳总结出单项式与多项式相乘的法则.

本章不必要求学生死记硬背每条运算法则，而重在认识、区别和理解每条运算法则的算理，并能灵活运用.

对于乘法公式，《课标》只要求会推导并掌握最基本的两个：$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$，$(a\pm b)^2=a^2\pm2ab+b^2$，即平方差公式和完全平方公式. 考虑到学生发展的差异和各地区发展的不平衡，本章在保证《课标》的基本要求的前提下，体现了一定的弹性. 例如，我们把除平方差公式及完全平方公式以外常用的乘法公式（即 $(a\pm b)^3$，$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$，$(a+b+c)^2$ 等）以练习或习题的形式呈现出来，特别是在复习题 C 组中集中呈现，可以让学有余力的学生自行推导这些乘法公式. 鉴于《课标》对“多项式相乘仅指一次式之间以及一次式与二次式相乘”的原则，这些公式不要求每个学生都掌握.

本章许多课堂练习中安排了“下面的计算对不对？如果不对，应怎样改正？”一类的练习题. 教学中不能满足于让学生说出正确答案即可，要让学生切实理解为什么不对，然后再继续下一个步骤.

四、评价建议

1. 在课堂教学中，要注意每个学生在学习过程中的兴趣，结合具体教学过程和问题情境，及时了解每个学生是否积极主动参与“动脑筋”、“做一做”、“探究”等教学活动，以及他们对所涉及的数学问题所做的判断、结论正确与否并做出评价.

2. 由于本章内容多是概念和法则，要重在评价学生对这些概念是否能正确理解，法则是否能正确、灵活的应用，改变以考试的形式默写定义、法则、公式评价学生对本章知识掌握程度的死板的方法. 要采取多变、活泼的形式，创造轻松、愉快的情境，如对话、交流、讨论，通过这些方法，对学生掌握知识的程度、应用的能力做出客观的评价.

3. 本章教学中的过程性评价应关注的问题.

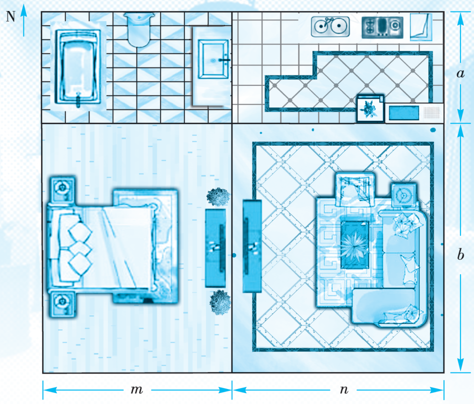
在引导学生进行“动脑筋”“议一议”等活动中，不能仅关注基础知识、基本技能的掌握，还要关注学生是否积极参与数学问题的讨论，是否敢于发表自己的观点，能否用自然语言、符号语言、图表语言等不同的语言来进行表达. 过程评价要注重学生参与活动的程度和在活动中表现出来的思维水平. 要对学生在学习过程中的点滴闪光点进行适时肯定和鼓励，使学生获得成功的乐趣，树立自信心，激发学习数学的兴趣，保护和激发对数学的好奇心、求知欲.

4. 注重评价主体和评价方式的多样化

除普通形式的书面测试外，要注意使用多种形式进行评价. 可以让学生进行自评或互评，也可以采用课题研究与小组合作交流的评价方式.

Ⅱ. 教学建议

本章章前图是一套房屋的户型图，图中用字母标明了长度，可让学生在已有代数式运算的基础上，尝试用乘法来计算户型面积，从而引出整式可以像数一样进行乘法运算.



$$(a+b)(m+n)=a(m+n)+b(m+n)$$
$$=am+an+bm+bn$$

第2章

整式的乘法

整式包括单项式和多项式，我们已经知道整式可以进行加减运算，整式可以像数一样进行乘法运算吗？

上图是一套房子的户型简图，这套房子的一边长为 $a+b$，另一边长为 $m+n$，你能算出这套房子的面积吗？本章将帮助我们解决这些问题.

28

2.1 整式的乘法

2.1.1 同底数幂的乘法

做一做

$2^2\times2^4=$______；　　$a^2\cdot a^4=$______；

$a^2\cdot a^m=$______（m 是正整数）.

$$2^2\times2^4=(\underbrace{2\times2}_{2个2})\times(\underbrace{2\times2\times2\times2}_{4个2})=\underbrace{2\times2\times2\times2\times2\times2}_{(2+4)个2}=2^6.$$

$$a^2\cdot a^4=(\underbrace{a\cdot a}_{2个a})\cdot(\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot a}_{4个a})=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a}_{(2+4)个a}=a^6.$$

$$a^2\cdot a^m=(\underbrace{a\cdot a}_{2个a})\cdot(\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{m个a})=\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{(2+m)个a}=a^{2+m}.$$

通过观察，你发现上述式子的指数和底数是怎样变化的？

底数不变，指数相加.

我们把上述运算过程推广到一般情况（即 $a^m\cdot a^n$），即

$$a^m\cdot a^n=(\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{m个a})\cdot(\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n个a})$$

$$=\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{(m+n)个a}$$

$$=a^{m+n}\text{（}m,\ n\text{ 都是正整数）}.$$

教学目标

通过对特例的探索，发现同底数幂的乘法法则，并会运用幂的乘法法则进行计算.

教学重点、难点

同底数幂的乘法法则.

同底数幂的乘法是整式乘法的基础. 只要掌握了同底数幂的乘法法则，结合 3 个运算律，其他的乘法法则均可推导出来. 对此，教师应引起足够的重视.

正确理解底数、指数、幂等概念，是理解和推导同底数幂的乘法法则的基础. 教师应首先复习幂的相关知识.

“做一做”栏目的 3 个问题涉及三个方面：

（1）同底数幂中，底数为数；

（2）同底数幂中，底数为字母；

（3）同底数幂中，底数、指数均为字母.

从特殊到一般的探索并发现规律，这个过程实质是一种归纳推理，教师可让学生自主探索、合作交流，以获得归纳思维的活动经验，切实提高学生的归纳思维水平. 同时，教师应帮助学生概括、抽象从特殊到一般的情形，引导学生说出每一步的根据.

“做一做”栏目的整体设计蕴含了“观察—抽象—猜想—论证”的数学思维方式，教师在教学过程中注意让学生体会这种科学的数学思维方式，适时提醒学生，通过少数几个案例发现的猜想是由不完全归纳法得出的结论，数学上还应该严格的证明以得到一般形式.

同底数幂的乘法法则的表达式中 a 是任意数，但 m，n 必须都是正整数（否则这个推导过程就失去意义）. 对于后者，教师不必过分强调. 因为将来指数概念扩充以后，m，n 可以为任何实数，对此，亦不必向学生说明.

应该要求学生在得到法则 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$（m，n 都是正整数）后，把这个法则用语言叙述出来，以逐渐培养学生数学语言的表达能力.

“议一议”环节是为了得到三个或三个以上的同底数幂相乘的乘法公式而设计的. 这样安排，一是为了拓宽学生的视野，二是为今后的复杂计算带来方便. 教师可视学生的不同情况，鼓励其自行推导，或是观察实例获得猜想，由教师帮助其进一步抽象、概括得到一般公式.

练习

1. （1）10^{10}.　（2）x^8.
　（3）a^5.　（4）y^8.

也就是

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}\quad（m，n\text{ 都是正整数}）.$$

于是，我们得到：同底数幂相乘，底数不变，指数相加.

例 1 计算：（1）$10^5 \times 10^3$；　（2）$x^3 \cdot x^4$.

解 （1）$10^5 \times 10^3 = 10^{5+3} = 10^8$.

（2）$x^3 \cdot x^4 = x^{3+4} = x^7$.

例 2 计算：（1）$-a \cdot a^3$；　（2）$y^n \cdot y^{n+1}$（n是正整数）.

解 （1）$-a \cdot a^3 = -1 \cdot a^{1+3} = -a^4$.

（2）$y^n \cdot y^{n+1} = y^{n+n+1} = y^{2n+1}$.

议一议

当三个或三个以上的同底数幂相乘时，怎样用公式表示运算的结果呢？

例 3 计算：（1）$3^2 \times 3^3 \times 3^4$；　（2）$y \cdot y^2 \cdot y^4$.

解 （1）$3^2 \times 3^3 \times 3^4$
$= (3^2 \times 3^3) \times 3^4 = 3^5 \times 3^4 = 3^9$.

（2）$y \cdot y^2 \cdot y^4$
$= (y \cdot y^2) \cdot y^4 = y^3 \cdot y^4 = y^7$.

例 3 还可以如下计算：

（1）$3^2 \times 3^3 \times 3^4 = 3^{2+3+4} = 3^9$.

（2）$y \cdot y^2 \cdot y^4 = y^{1+2+4} = y^7$.

练习

1. 计算：

（1）$10^6 \times 10^4$；　（2）$x^5 \cdot x^3$；

（3）$a \cdot a^4$；　（4）$y^4 \cdot y^4$.

资源拓展

归纳推理

归纳推理是一种特殊的推理，一种前提和结论间不具有蕴涵关系的推理，它从个别性的前提推出一般性的结论. 如推理：金能导电，银能导电，铜能导电，铁能导电，锡能导电，金、银、铜、铁、锡都是金属，所以，金属能导电.

归纳推理与演绎推理的主要区别是：（1）演绎推理的前提是结论的充分条件；归纳推理的前提是结论的必要条件.（2）演绎推理是从一般到特殊，归纳推理是从特殊到一般.（3）演绎推理的结论在逻辑上是必然的；归纳推理的结论是或然的，通常有待修正.

归纳推理可分为完全归纳推理与不完全归纳推理，而不完全归纳推理又可分为简单枚举归纳推理和科学归纳推理.

目前逻辑学家对归纳推理与归纳法之间关系有两种看法：一曰，归纳法就是归纳推理；一曰，归纳法除包括归纳推理外，还包括归纳过程的一切思维方式，如观察、实验、比较、分类、分析、综合、抽象、概括等方法.

2. 计算：

(1) $2\times2^3\times2^5$；　　(2) $x^2\cdot x^3\cdot x^4$；

(3) $-a^5\cdot a^5$；　　(4) $a^m\cdot a$（m 是正整数）；

(5) $x^{m+1}\cdot x^{m-1}$（其中$m>1$，且 m 是正整数）.

2.1.2 幂的乘方与积的乘方

做一做

$(2^2)^3=$__________；　　$(a^2)^3=$__________；

$(a^2)^m=$__________（m 是正整数）.

$$(2^2)^3=2^2\cdot2^2\cdot2^2=2^{2+2+2}=2^{2\times3}=2^6.$$

$$(a^2)^3=a^2\cdot a^2\cdot a^2=a^{2+2+2}=a^{2\times3}=a^6.$$

$$(a^2)^m=\underbrace{a^2\cdot a^2\cdot\cdots\cdot a^2}_{m\text{ 个 }a^2}=a^{\overbrace{2+2+\cdots+2}^{m\text{ 个 }2}}=a^{2\times m}=a^{2m}.$$

通过观察，你发现上述式子的指数和底数是怎样变化的？

底数不变，指数相乘.

2. (1) 2^9.

(2) x^9.

(3) $-a^{10}$.

(4) a^{m+1}.

(5) x^{2m}.

在讲解习题或指导学生演算时，教师应提示：① 不能丢掉指数为 1 的幂的指数；② 幂运算的意义及符号法则，例如练习第 2 题第(3)小题中的$-a^5$ 是 a^5 的相反数.

教学目标

通过从特殊到一般，从数到字母的探索，并结合同底数幂的乘法法则，归纳幂的乘方与积的乘方法则.

会运用幂的乘方法则与积的乘方法则进行计算.

教学重点、难点

教学重点：幂的乘方法则与积的乘方法则.

教学难点：同底数幂的乘法、幂的乘方、积的乘方这三个法则的区别与联系.

教材对幂的乘方的设计与同底数幂的乘法的设计思路是一致的，即鼓励学生先观察一些具有特点的式子获得猜想，然后对一般形式进行推理. 这一过程须注意几个方面：

(1) 教材所呈现的 3 个案例有一定的代表性，教师可适时补充一些其他的例子，让学生获得一些直观的体验；

(2) 通过观察式子中指数与底数的变化规律获得猜想，这一过程应鼓励学生多做交流，合情推理(采用不完全归纳法)，这是积累学生基本活动经验的极好的载体；

(3) 最后还应对猜想进行验证，即得到一般情况，此时应适时说明：合情推理得到的结论不一定正确，还要经过演绎推理来验证.

教材对“做一做”的整体设计渗透了“观察—抽象—猜想—论证”的思维过程. 这是一个需要长期重视培养的思维过程. 这对于提高学生的数学素养是极其有利的.

要使学生知道幂的乘方法则是根据乘方的定义及同底数幂的乘法法则得到的.

对于幂的乘方法则的语言叙述，要正确理解其含义，特别要与同底数幂的乘法法则“底数不变，指数相加”相区别. 让学生从法则的推导过程中弄明白为什么一个是“指数相加”，而另一个是“指数相乘”的道理，而不是死记硬背.

同样，我们把上述运算过程推广到一般情况，即

$$\begin{aligned}(a^m)^n &= \underbrace{a^m\cdot a^m\cdot\cdots\cdot a^m}_{n\text{个}a^m}\\ &= a^{\overbrace{m+m+\cdots+m}^{n\text{个}m}}\\ &= a^{mn}\ (m,\ n\text{都是正整数}).\end{aligned}$$

也就是

$$(a^m)^n = a^{mn}\quad (m,\ n\text{都是正整数}).$$

于是我们得到：幂的乘方，底数不变，指数相乘.

例 4 计算:

(1) $(10^5)^2$；　　(2) $-(a^3)^4$.

解 (1) $(10^5)^2=10^{5\times2}=10^{10}$.

(2) $-(a^3)^4=-a^{3\times4}=-a^{12}$.

例 5 计算:

(1) $(x^m)^4$（m 是正整数）；　　(2) $(a^4)^3\cdot a^3$.

解 (1) $(x^m)^4=x^{m\times4}=x^{4m}$.

(2) $(a^4)^3\cdot a^3=a^{4\times3}\cdot a^3=a^{12+3}=a^{15}$.

练习

1. 填空：

(1) $(10^4)^3=$________；　　(2) $(a^3)^3=$________；

(3) $-(x^3)^5=$________；　　(4) $(x^2)^3\cdot x^2=$________.

2. 下面的计算对不对？如果不对，应怎样改正？

(1) $(a^4)^3=a^7$；　　(2) $(a^3)^2=a^9$.

3. 自编两道幂的乘方运算题，并与同学交流计算过程与结果.

练习

1. (1) 10^{12}.

(2) a^9.

(3) $-x^{15}$.

(4) x^8.

2. (1) 不对，应为a^{12}.

(2) 不对，应为a^6.

这类练习题可先让学生直接说出对不对，如果学生认为不对，还要让学生指出错在哪里，然后再改正.

3. 略.

做一做

$(3x)^2=$________；　$(4y)^3=$________；　$(ab)^3=$________.

$$(3x)^2=3x\cdot 3x=(3\cdot 3)\cdot(x\cdot x)=9x^2.$$

$$\begin{aligned}(4y)^3&=(4y)\cdot(4y)\cdot(4y)\\&=(4\cdot 4\cdot 4)\cdot(y\cdot y\cdot y)\\&=64y^3.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(ab)^3&=(ab)\cdot(ab)\cdot(ab)\quad(\text{乘方的意义})\\&=(a\cdot a\cdot a)\cdot(b\cdot b\cdot b)\quad(\text{使用交换律和结合律})\\&=a^3b^3.\end{aligned}$$

通过观察上述运算过程，你能推导出下面的公式吗？

$(ab)^n=a^nb^n$（n 是正整数）.

$$\begin{aligned}(ab)^n&=\underbrace{(ab)\cdot(ab)\cdot\cdots\cdot(ab)}_{n\text{个}ab}\\&=(\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n\text{个}a})\cdot(\underbrace{b\cdot b\cdot\cdots\cdot b}_{n\text{个}b})\\&=a^nb^n\quad(n\text{ 是正整数}).\end{aligned}$$

于是我们得到：积的乘方，等于把积的每一个因式分别乘方，再把所得的幂相乘.

本节课的重点是积的乘方. 教师应重视“做一做”栏目的教学环节，与前两节课保持风格一致. 鼓励学生自主探索，发现猜想，并论证. 在获得基础知识的同时积累基本活动经验.

和前面两个法则的设置一样，这个法则也是先通过探索几个具有特点的式子，说明积的乘方的意义和导出法则的每一步的依据，然后归纳出积的乘方法则的一般情形. 这个法则也很容易推广到三个及三个以上因式的情形. 教学时要明确推导这一法则的依据，让学生掌握算理.

教学过程中，要使学生弄清“积的乘方”与“幂的乘方”这两个概念的区别.

关于“议一议”这个公式的推导：

$(abc)^n=$

$\underbrace{(abc)\cdot\cdots\cdot(abc)}_{n\text{个}abc}=$

$\underbrace{(a\cdot a\cdot\cdots\cdot a)}_{n\text{个}a}\cdot\underbrace{(b\cdot b\cdot\cdots\cdot b)}_{n\text{个}b}\cdot$

$\underbrace{(c\cdot c\cdot\cdots\cdot c)}_{n\text{个}c}=a^nb^nc^n.$

教师可引导学生说出推导过程中每一步的算理.

议一议

$(abc)^n=?$ （n 是正整数）.

例 6 计算：

(1) $(-2x)^3$；　　(2) $(-4xy)^2$；

(3) $(xy^2)^3$；　　(4) $\left(-\frac{1}{2}xy^2z^3\right)^4$.

解 (1) $(-2x)^3=(-2)^3\cdot x^3=-8x^3$.

(2) $(-4xy)^2=(-4)^2\cdot x^2\cdot y^2=16x^2y^2$.

(3) $(xy^2)^3=x^3\cdot(y^2)^3=x^3y^6$.

(4) $\left(-\frac{1}{2}xy^2z^3\right)^4$

$=\left(-\frac{1}{2}\right)^4\cdot x^4\cdot(y^2)^4\cdot(z^3)^4=\frac{1}{16}x^4y^8z^{12}$.

括号内每一个因式都要乘方.

例 7 计算：$2(a^2b^2)^3-3(a^3b^3)^2$

解 $2(a^2b^2)^3-3(a^3b^3)^2$

$=2a^6b^6-3a^6b^6$

$=-a^6b^6$.

结果中如果有同类项的要合并.

练习

1. 计算：

(1) $\left(\frac{1}{2}x\right)^3$；　　(2) $(-xy)^4$；

(3) $(-2m^2n)^3$；　　(4) $(-3ab^2c^3)^4$.

2. 下面的计算对不对？如果不对，应怎样改正？

(1) $(ab^3)^2=ab^6$；　　(2) $(2xy)^3=6x^3y^3$.

3. 计算：$-(xyz)^4+(2x^2y^2z^2)^2$.

练习

1. (1) $\frac{1}{8}x^3$.

(2) x^4y^4.

(3) $-8m^6n^3$.

(4) $81a^4b^8c^{12}$.

2. (1) 不对，应为a^2b^6.

(2) 不对，应为$8x^3y^3$.

先让学生说对不对，如果不对，说出错在哪里，然后再改正.

3. $3x^4y^4z^4$.

2.1.3 单项式的乘法

动脑筋

怎样计算 $4xy$ 与 $-3xy^2$ 的乘积？

$$
\begin{aligned}
&4xy \cdot (-3xy^2)\\
=&[4 \cdot (-3)](x \cdot x)(y \cdot y^2)\\
=&\underline{\qquad\qquad}.
\end{aligned}
$$

一般地，单项式与单项式相乘，把它们的系数、同底数幂分别相乘.

例 8 计算：

(1) $(-2x^3y^2) \cdot (3x^2y)$； (2) $(2a)^3 \cdot (-3a^2b)$；

(3) $(2x^{n+1}y) \cdot \left(-\dfrac{1}{4}x^ny^2\right)$ (n是正整数).

解 (1) $(-2x^3y^2) \cdot (3x^2y)$

$=[(-2) \cdot 3](x^3 \cdot x^2)(y^2 \cdot y)$

$=-6x^5y^3$.

(2) $(2a)^3 \cdot (-3a^2b)$

$=[2^3 \cdot (-3)](a^3 \cdot a^2)b$

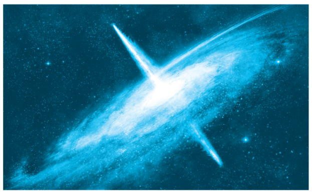
$=-24a^5b$.

(3) $(2x^{n+1}y) \cdot \left(-\dfrac{1}{4}x^ny^2\right)$

$=\left[2 \cdot \left(-\dfrac{1}{4}\right)\right](x^{n+1} \cdot x^n)(y \cdot y^2)$

$=-\dfrac{1}{2}x^{2n+1}y^3$.

例 9 天文学上计算星球之间的距离是用“光年”做单位的，1 光年就是光在 1 年内所走过的距离. 光的速度约为 3×10^8 m/s，1 年约为 3×10^7 s. 计算 1 光年约多少米.



教学目标

能通过简单的单项式与单项式相乘，结合运算律探究得到单项式与单项式相乘的法则.

教学重点、难点

单项式与单项式相乘的法则.

$4xy \cdot (-3xy^2)$

$=4 \cdot (-3)(x \cdot x)(y \cdot y^2)$

(利用乘法交换律及结合律)

$=-12x^2y^3$.

本小节是建立在前几节的基础上，教师应引导学生利用运算律及幂的运算法则，单项式的乘法便可以顺利完成. 所以，运算法则不要求学生死记硬背，只要求学生会计算.

教材关于运算法则的表述，与传统的表述相比，省略了像“对于只在一个单项式里含有的字母，关于连同它的指数作为积的一个因式”之类的语句. 事实上，单项式的乘法只包含两个运算：系数相乘及同底数幂的指数相加. 至于只在一个单项式里含有的字母，显然不变地写在积里，这点学生不难理解.

练习

1. (1) $-\frac{1}{2}x^3y^3z$.

(2) $16x^5y^4$.

2. (1) 不对，应为$12x^5$.

(2) 不对，应为$-4x^4$.

3. (1) $-6x^{2n+1}$.

(2) $x^{2n+1}y^4$.

教学目标

能根据分配律和单项式与单项式相乘的法则探究得到单项式与多项式相乘的法则.

通过具体实例并结合单项式与多项式相乘的法则，总结多项式与多项式相乘的法则.

教学重点、难点

单项式与多项式、多项式与多项式相乘的法则.

解 根据题意，得

$$\begin{aligned}&3\times10^8\times3\times10^7\\=&(3\times3)\times(10^8\times10^7)\\=&9\times10^{15}\ (\mathrm{m}).\end{aligned}$$

答：1 光年约 9×10^{15} m.

练习

1. 计算：

(1) $(2x^2y)\left(-\frac{1}{4}xy^2z\right)$；　　(2) $(-2x^2y)^2\cdot4xy^2$.

2. 下面的计算对不对？如果不对，应怎样改正？

(1) $4x^2\cdot3x^3=12x^6$；　　(2) $-x^2\cdot(2x)^2=4x^4$.

3. 计算（其中 n 是正整数）：

(1) $(-2x^{n+1})\cdot3x^n$；　　(2) $\left(-\frac{1}{2}x^ny\right)^2\cdot4xy^2$.

2.1.4 多项式的乘法

动脑筋

怎样计算单项式 $2x$ 与多项式 $3x^2-x-5$ 的积？

可以运用乘法对加法的分配律.

$$\begin{aligned}&2x\cdot(3x^2-x-5)=2x\cdot3x^2+2x\cdot(-x)+2x\cdot(-5)\\&=6x^3-2x^2-10x.\end{aligned}$$

一般地，单项式与多项式相乘，先用单项式乘多项式中的每一项，再把所得的积相加.

在熟悉了单项式的乘法之后，利用乘法对加法的分配律即可完成单项式与多项式相乘的运算，本节课并没有新的知识点，在教师的指导下，根据学生的情况适时补充几个案例，学生是能够掌握单项式与多项式相乘的算理的.

例 10 计算：

（1）$2x^2\cdot\left(4xy-\frac{1}{2}x+1\right)$；　　（2）$\left(\frac{1}{2}b^2-4a^2\right)\cdot(-4ab)$.

解　（1）$2x^2\cdot\left(4xy-\frac{1}{2}x+1\right)$

$=2x^2\cdot4xy+2x^2\cdot\left(-\frac{1}{2}x\right)+2x^2\cdot1$

$=8x^3y-x^3+2x^2$.

（2）$\left(\frac{1}{2}b^2-4a^2\right)\cdot(-4ab)$

$=\frac{1}{2}b^2\cdot(-4ab)-4a^2\cdot(-4ab)$

$=-2ab^3+16a^3b$.

例 11 求 $-\frac{1}{2}x^2\cdot(2xy-4y^2)-4x^2\cdot(-xy)$ 的值，其中 $x=2$，$y=-1$.

解　$-\frac{1}{2}x^2\cdot(2xy-4y^2)-4x^2\cdot(-xy)$

$=\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\cdot2xy-\frac{1}{2}x^2\cdot(-4y^2)-4x^2\cdot(-xy)$

$=-x^3y+2x^2y^2+4x^3y$

$=3x^3y+2x^2y^2$.

当 $x=2$，$y=-1$ 时，

原式的值为 $3\times2^3\times(-1)+2\times2^2\times(-1)^2=-24+8=-16$.

练习

1. 计算：

（1）$-2x^2\cdot(x-5y)$；　　（2）$(3x^2-x+1)\cdot4x$；

（3）$(2x+1)\cdot(-6x)$；　　（4）$3a\cdot(5a-3b)$.

2. 先化简，再求值：

$-2xy\left[3xy^2-\frac{1}{2}x\left(4y^2-\frac{1}{2}x\right)\right]$，其中 $x=-2$，$y=\frac{1}{2}$.

本小节的例题是前几节知识的综合运用，同时也为下节课学习多项式与多项式相乘打下基础. 教师应足够重视.

在利用乘法分配律时，一定要注意单项式的符号和多项式中每一项的符号，学生在计算中往往容易发生符号错误，教师须提醒学生引起足够的重视，可以借助例 11，详细讲解清楚.

补充例题

先化简，再求值：

（1）$(3x+1)(2x-3)-(6x-5)(x-4)$，其中 $x=2$；

（2）$(y-2)(y^2-6y-6)-(y^2-2y-15)$，其中 $y=1$.

练习

1. （1）$-2x^3+10x^2y$.

（2）$12x^3-4x^2+4x$.

（3）$-12x^2-6x$.

（4）$15a^2-9ab$.

2. 原式可化简为 $-2x^2y^3-\frac{1}{2}x^3y$.

当 $x=-2$，$y=\frac{1}{2}$ 时，原式的值为 1.

本节课学习多项式与多项式的乘法.

为了让学生直观地理解 $(a+b)\cdot(c+d)$ 的结果的正确性，教材通过“动脑筋”栏目设计了用三种不同的方法来计算同一套居室的面积. 先让学生直观地得到结论，再两次运用乘法分配律验证. 在教学中，要启发学生真正“动脑筋”，展开必要的交流讨论，使学生在轻松、活泼的情境中，自然而然地得到正确结果.

运算时先要把 $(m+n)$ 看成一个单项式，因学生过去接触不多，可能不易理解，但这又是一个很重要的数学思想和方法. 可具体结合“动脑筋”的计算过程，把 $(m+n)$ 看成东西向的长度，应用一次乘法分配律，得 $a(m+n)+b(m+n)$，再运用一次分配律，得到结果 $am+an+bm+bn$.

动脑筋

有一套居室的平面图如图 2-1 所示，怎样用代数式表示它的总面积呢？

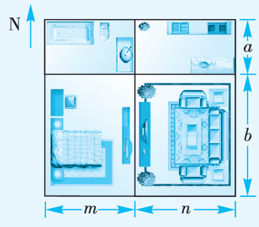


图 2-1

南北向总长为 $a+b$，东西向总长为 $m+n$，所以居室的总面积为：

$(a+b)\cdot(m+n)$； ①

北边两间房的面积和为 $a(m+n)$，南边两间房的面积和为 $b(m+n)$，所以居室的总面积为：

$a(m+n)+b(m+n)$； ②

四间房(厅)的面积分别为 am，an，bm，bn，所以居室的总面积为：

$am+an+bm+bn$. ③

这三个代数式之间有什么关系呢？

上面三个代数式都正确表示了该居室的总面积，因此有

$$(a+b)(m+n)=a(m+n)+b(m+n)=am+an+bm+bn.$$

撇开上述式子的实际意义，想一想，这几个代数式为什么相等呢？它们利用了乘法运算的什么性质？事实上，由代数式①到代数式②，是把 $m+n$ 看成一个整体，利用乘法分配律得到 $a(m+n)+b(m+n)$，继续利用乘法分配律，就得到结果 $am+an+bm+bn$. 这个运算过程可表示为：

$$(a+b)(m+n)=\underset{\text{Ⅰ}}{am}+\underset{\text{Ⅱ}}{an}+\underset{\text{Ⅲ}}{bm}+\underset{\text{Ⅳ}}{bn}.$$

38 数学 七年级下册

要引导学生，通过教材中箭头的指示，用自己的语言来表述出多项式与多项式相乘的法则.

学生在具体做题时，容易发生“漏乘”的错误，务必引起教师注意. 可配合后面的练习第 1 题进行教学. 在运用法则得到乘积的结果后，一定要注意观察是否有同类项，如有同类项还必须合并，才能得到最后的运算结果.

一般地，多项式与多项式相乘，先用一个多项式的每一项分别乘另一个多项式的每一项，再把所得的积相加.

例 12 计算：(1) $(2x+y)(x-3y)$；

(2) $(2x+1)(3x^2-x-5)$；

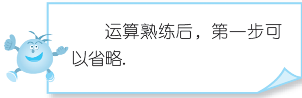
(3) $(x+a)(x+b)$.

解 (1) $(2x+y)(x-3y)$

$=2x\cdot x+2x\cdot(-3y)+y\cdot x+y\cdot(-3y)$

$=2x^2-6xy+yx-3y^2$

$=2x^2-5xy-3y^2$.



(2) $(2x+1)(3x^2-x-5)$

$=6x^3-2x^2-10x+3x^2-x-5$

$=6x^3+x^2-11x-5$.

(3) $(x+a)(x+b)$

$=x^2+bx+ax+ab$

$=x^2+(a+b)x+ab$.

第(3)小题的直观意义如图 2-2.

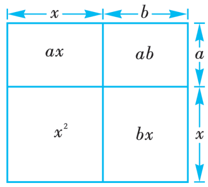


图 2-2

例 13 计算：

(1) $(a+b)(a-b)$；　　(2) $(a+b)^2$；

(3) $(a-b)^2$.

解 (1) $(a+b)(a-b)$

$=a^2-ab+ba-b^2$

$=a^2-b^2$.

(2) $(a+b)^2$

$=(a+b)(a+b)$

$=a^2+ab+ba+b^2$

$=a^2+2ab+b^2$.

(3) $(a-b)^2$

$=(a-b)(a-b)$

$=a^2-ab-ba+b^2$

$=a^2-2ab+b^2$.

如果学生对于多项式乘法运算不熟练，可以不必急于像例 12 那样省略第一步，可仍然按例 11 那样做，对此，应视学生的接受情况而定.

例 13 实际上是为下节要学习的乘法公式做铺垫的，所以此处切不可直接运用后面的乘法公式.

资源拓展

法国数学家帕斯卡

帕斯卡（1623—1662 年）是法国数学家、物理学家和哲学家. 他 16 岁时就发现了著名的“帕斯卡定理”，即“圆锥曲线内接六边形的三组对边的交点共线”. 19 岁时，发明了世界上第一台机械式的计算机. 帕斯卡对数学最大的贡献是创立概率论. 为了解决概率论中的问题，帕斯卡广泛应用算术三角形（即二项式定理系数表，西方称帕斯卡三角，我国称杨辉三角），并深入研究了二项展开式的系数规律.

二项式定理：$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^ra^{n-r}b^r+\cdots+C_n^nb^n=\sum\limits_{r=0}^{n}C_n^ra^{n-r}b^r(n\in\mathbf{N}^*)$.

练习

1. （1）不对，应为$6a^2+ab-b^2$.

（2）不对，应为$-x^2-2x+3$.

2. （1）x^2+x-6.

（2）x^2+6x+5.

（3）x^2-x-20.

（4）x^2-6x+9.

3. （1）$x^2+4xy+4y^2$.

（2）$2m^2-3mn-2n^2$.

（3）$9a^2-4b^2$.

（4）$9a^2-12ab+4b^2$.

习题2.1

A组

1. （1）a^5.

（2）x^8.

2. （1）a^6.

（2）$-x^{5m}$.

（3）$-8x^6y^3$.

（4）$p^{2n}q^n$.

3. （1）$-a^5$.

（2）x^3.

（3）$-x^5$.

（4）a^6.

提醒学生注意符号的运算.

4. （1）$6a^4b$.

（2）$-6x^3y^3$.

（3）6×10^{11}.

（4）3×10^{11}.

（5）$ab\times10^6$.

5. 3.6×10^{16} m.

6. 这个长方体的体积和表面积分别为 2.16×10^{10} cm^3，1.026×10^8 cm^2.

练习

1. 下列计算对不对？如果不对，应怎样改正？

(1) $(3a-b)(2a+b)=3a\cdot2a+(-b)\cdot b=6a^2-b^2$;

(2) $(x+3)(1-x)=x\cdot1+x\cdot x+3-3\cdot x=x^2-2x+3$.

2. 计算：

(1) $(x-2)(x+3)$;　　(2) $(x+1)(x+5)$;

(3) $(x+4)(x-5)$;　　(4) $(x-3)^2$.

3. 计算：

(1) $(x+2y)^2$;　　(2) $(m-2n)(2m+n)$;

(3) $(3a+2b)(3a-2b)$;　　(4) $(3a-2b)^2$.

习题 2.1

A 组

1. 填空：

(1) $a^2\cdot a^3=$ ________;　　(2) $x\cdot x^3\cdot x^4=$ ________.

2. 计算：

(1) $(a^2)^3$;　　(2) $-(x^m)^5$(m 是正整数);

(3) $-(2x^2y)^3$;　　(4) $(p^2q)^n$ (n 是正整数).

3. 计算：

(1) $(-a)^3\cdot a^2$;　　(2) $x\cdot(-x)^2$;

(3) $(-x)^2\cdot(-x)^3$;　　(4) $(-a)^3\cdot(-a)^2\cdot(-a)$.

4. 计算：

(1) $2a^3\cdot3ab$;　　(2) $3x^2y\cdot(-2xy^2)$;

(3) $(2\times10^5)(3\times10^6)$;　　(4) $(1.2\times10^4)(2.5\times10^7)$;

(5) $(1.25a\times10^4)(0.8b\times10^2)$.

5. 光的速度约为 3×10^8 m/s. 从太阳系外距地球最近的一颗恒星(比邻星)发出的光，需要 4 年时间才能到达地球，1 年以 3×10^7 s 计算，求这颗恒星与地球的距离.

6. 长方体的长是 2.4×10^4 cm，宽是 1.5×10^3 cm，高是 0.6×10^3 cm，求这个长方体的体积及表面积.

40 数学 七年级下册

7. 计算：

(1) $(-2a^2)\left(4ab-\frac{1}{2}ab^2+1\right)$；　(2) $(2x^2y-xy)\cdot 3xy$；

(3) $3x^2(-2xy)^2-x^3(xy^2-2)$；　(4) $4m(m^2n-mn^2)-3mn(5m^2+mn)$.

8. 下列计算对不对？如果不对，应怎样改正？

(1) $(3m+2n)(7m-6n)=21m^2-18m+14n-12n^2$；

(2) $(-xy+2y^2)(2xy-3y^2)=2x^2y^2-3xy^3+4xy^3-6y^4=2x^2y^2+xy^3-6y^4$.

9. 计算：

(1) $(x+2)(x-2)$；　(2) $(2x+1)(2x-1)$；

(3) $(3m+n)^2$；　(4) $(x-2)^2$.

10. 计算：

(1) $2x\cdot(x^2-4x)-(x^2+1)(2x-3)$；

(2) $(4a+3b)(a-2b)-(3a-2b)\cdot a$.

11. 先化简，再求值：$(2x-1)(3x+2)-(4x-3)(2x-5)$，其中$x=-\frac{1}{2}$.

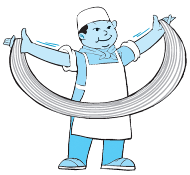
B 组

12. 填空：

(1) $x^{2m}\cdot x^{m-1}=$________（m 是正整数）；

(2) $y\cdot y^n\cdot y^{2n+1}=$________（$n$ 是正整数）；

(3) $-a^2\cdot(-a)^3\cdot(-a)=$________.



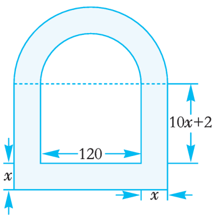
13. 制作拉面需将长条形面团摔匀拉伸后对折，并不断重复若干次这组动作. 随着不断地对折，面条根数不断增加. 若一碗面约有 64 根面条，则面团需要对折多少次？若一个拉面店一天能卖出 2 048 碗拉面，用底数为 2 的幂表示拉面的总根数.

14. 计算：

(1) $(2x^2+y^2)(2x^2-y^2)$；

(2) $(x-y)(x^2+xy+y^2)$.

15. 求如图所示的窗户的边框面积（上部为半圆）.（单位：cm）



（第 15 题图）

7. (1) $-8a^3b+a^3b^2-2a^2$.

(2) $6x^3y^2-3x^2y^2$.

(3) $11x^4y^2+2x^3$.

(4) $-11m^3n-7m^2n^2$.

8. (1) 不对，应为 $21m^2-4mn-12n^2$.

(2) 不对，应为 $-2x^2y^2+7xy^3-6y^4$.

9. (1) x^2-4.

(2) $4x^2-1$.

(3) $9m^2+6mn+n^2$.

(4) x^2-4x+4.

本题中各小题可用乘法公式计算，现在让学生根据多项式乘法来计算是为下一节做铺垫. 学生在下一节学了乘法公式后再来解本题，便可进一步体会利用乘法公式的便捷.

10. (1) $-5x^2-2x+3$.

(2) $a^2-3ab-6b^2$.

11. 原式可化简为$-2x^2+27x-17$，

当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，原式的值为-31.

B组

12. (1) x^{3m-1}.

(2) y^{3n+2}.

(3) $-a^6$.

13. 6 次，2^{17}.

14. (1) $4x^4-y^4$.

(2) x^3-y^3.

15. $\left(22+\frac{\pi}{2}\right)x^2+(124+60\pi)x$.

教学目标

能根据特殊形式的多项式相乘，推导出平方差公式，了解公式的几何背景，并能进行简单的计算.

教学重点、难点

掌握平方差公式的结构特征，理解公式中字母的含义，并能正确地运用公式.

2.2 乘法公式

2.2.1 平方差公式

动脑筋

计算下列各式，你能发现什么规律：

$(a+1)(a-1)=a^2-a+a-1^2=$________，

$(a+2)(a-2)=a^2-2a+2a-2^2=$________，

$(a+3)(a-3)=a^2-3a+3a-3^2=$________，

$(a+4)(a-4)=a^2-4a+4a-4^2=$________.

我们用多项式乘法来推导一般情况

$$(a+b)(a-b)=a^2-ab+ab-b^2=a^2-b^2.$$

我们把

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

叫做平方差公式（difference of square formula），即两个数的和与这两个数的差的积等于这两个数的平方差.

说一说

如图 2-3（a），将边长为 a 的大正方形剪去一个边长为 b 的小正方形，并将剩余部分沿虚线剪开，得到两个长方形，再将这两个长方形拼成如图 2-3（b）. 你能用这两个图来解释平方差公式吗？

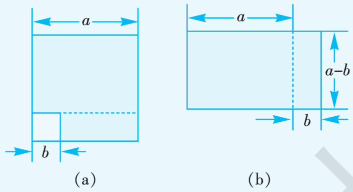


图 2-3

把具有特殊形式的多项式相乘的结果直接应用，这就是乘法公式. 本节介绍的两个乘法公式是最基本、最常用的公式. 必须让学生掌握并灵活运用.

能正确而熟练地运用乘法公式，关键是掌握每个公式的结构特征. 为此，本节安排了三个小节，2.2.1 节与 2.2.2 节是直接套用公式，而 2.2.3 节则必须通过变形后才能使用乘法公式，即乘法公式的灵活运用. 在教学时，教师必须把握好两个层次，只有当学生能较熟练地直接套用公式后，才有可能利用变形加以灵活运用.

“动脑筋”栏目的设计与 2.1 节“做一做”栏目的设计思路是一致的.

先让学生观察算式的特征，猜想出一般形式，最后进行验证. 教材总是在合适的内容里渗透“观察—抽象—猜想—论证”这一数学思维方式，教师应予以高度重视，此设计对于培养学生经历归纳推理的过程，获得归纳思维的活动经验，建立数学直观是极为有益的. 同时，应适时提醒学生，用不完全归纳法得出的结论必须逻辑推理验证，这对于培养学生科学、严谨的数学素养是有利的.

公式的语言表述，有利于对公式的理解及运用.

“说一说”栏目是为了强调平方差公式的几何背景，教师可指导学生用纸片实际操作、计算，并解释平方差公式，以进一步理解公式.

对于满足平方差公式特征的多项式的乘法，可以利用该公式进行简便计算.

例 1 运用平方差公式计算：

(1) $(2x+1)(2x-1)$；　　(2) $(x+2y)(x-2y)$.

分析 第(1)题，可以把“$2x$”看成平方差公式中的“a”，“1”看成“b”；第(2)题，可以把“x”看成平方差公式中的“a”，“$2y$”看成“b”.

解 (1) $(2x+1)(2x-1)$

$=(2x)^2-1^2$

$=4x^2-1$.

(2) $(x+2y)(x-2y)$

$=x^2-(2y)^2$

$=x^2-4y^2$.

例 2 运用平方差公式计算：

(1) $\left(-2x-\frac{1}{2}y\right)\left(-2x+\frac{1}{2}y\right)$；　　(2) $(4a+b)(-b+4a)$.

解 (1) $\left(-2x-\frac{1}{2}y\right)\left(-2x+\frac{1}{2}y\right)$

$=(-2x)^2-\left(\frac{1}{2}y\right)^2$

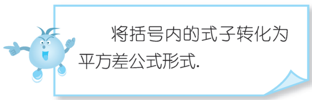
$=4x^2-\frac{1}{4}y^2$.

(2) $(4a+b)(-b+4a)$

$=(4a+b)(4a-b)$

$=(4a)^2-b^2$

$=16a^2-b^2$.



例 3 计算：$1\,002\times998$.

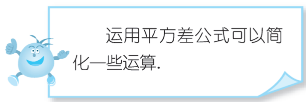
解 $1\,002\times998$

$=(1\,000+2)(1\,000-2)$

$=1\,000^2-2^2$

$=1\,000\,000-4$

$=999\,996$.



要使学生理解公式中的字母的含义，它可以是一个字母，也可以是一个数，还可以是一个代数式. 如例 1 中，$2x$ 是单项式，1 是数；例 3 中，1 000 与 2 都是数.

补充例题

运用平方差公式计算：

(1) $(x+1)(x-1)-(x+2)(x-2)$；

(2) 105×95.

练习

1. (1) 不对，应为x^2-4.

(2) 不对，应为$-4x^2+1$.

2. (1) m^2-4n^2.

(2) $9a^2-b^2$.

(3) $\frac{1}{4}x^2-y^2$.

(4) $1-25a^2$.

3. (1) 39 996.

(2) 2 499.96.

练习

1. 下面各式的计算对不对？如果不对，应怎样改正？

(1) $(x-2)(x+2)=x^2-2$；

(2) $(-2x-1)(2x-1)=4x^2-1$.

2. 运用平方差公式计算：

(1) $(m+2n)(m-2n)$；　　(2) $(3a+b)(3a-b)$；

(3) $\left(\frac{1}{2}x-y\right)\left(\frac{1}{2}x+y\right)$；　　(4) $(-1+5a)(-1-5a)$.

3. 计算：

(1) 202×198；　　(2) 49.8×50.2.

2.2.2 完全平方公式

动脑筋

计算下列各式，你能发现什么规律？

$(a+1)^2=(a+1)(a+1)=a^2+a+a+1^2=a^2+2\cdot a\cdot1+1^2$,

$(a+2)^2=$________$=$________$=a^2+$______$+2^2$,

$(a+3)^2=$________$=$________$=a^2+$______$+$__^{2},

$(a+4)^2=$________$=$________$=a^2+$______$+$__^{2}.

我们用多项式乘法来推导一般情况

$$\begin{aligned}(a+b)^2&=(a+b)(a+b)\\&=a^2+ab+ab+b^2\\&=a^2+2ab+b^2.\end{aligned}$$

做一做

$(a-b)^2=$？

把$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$中的“b”换做“$-b$”，试试看.

44 数学 七年级下册

教学目标

能根据多项式的乘法发现规律，进一步归纳出完全平方公式，了解公式的几何背景，并能进行简单计算.

教学重点、难点

掌握完全平方公式的结构特征，理解公式中字母的含义，并能正确地运用公式.

本小节的“动脑筋”栏目仍是按照“观察—抽象—猜想—论证”的思路进行设计的. 对此，教师应引起足够重视，鼓励学生自主探索，发现规律并论证，在获得基础知识的同时积累基本活动经验.

“做一做”栏目是对完全平方公式的补充.

得到完全平方公式后，应鼓励学生用自己的语言描述完全平方公式，以加深对公式的理解.

$$(a-b)^2=[a+(-b)]^2=a^2+2a(-b)+(-b)^2$$
$$=a^2-2ab+b^2.$$

我们把

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,\quad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

都叫做**完全平方公式**（complete square formula）. 即两数和（或差）的平方，等于它们的平方和，加（或减）它们的积的 2 倍.

说一说

把一个边长为 $a+b$ 的正方形按图 2-4 分割成 4 块，你能用这个图来解释完全平方公式吗？

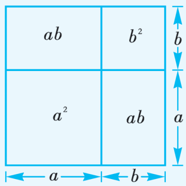


图 2-4

利用完全平方公式，可以对形如两数和(或差)的平方的乘法进行简便运算.

例 4 运用完全平方公式计算：

(1) $(3m+n)^2$；　　(2) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$.

解 (1) $(3m+n)^2$
$=(3m)^2+2\cdot 3m\cdot n+n^2$
$=9m^2+6mn+n^2$.

把“$3m$”看成完全平方公式中的“a”.

(2) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$
$=x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2$
$=x^2-x+\frac{1}{4}$.

“说一说”栏目中的图 2-4 可以阐释完全平方公式 $(a+b)^2$ 的几何背景，但不要反过来把它作为推导公式的背景，教师应照教材 P44 “动脑筋”栏目的设置，以“观察—抽象—猜想—论证”的思路来开展教学活动，切实落实培养学生的基本活动经验，这对于提高学生的基本数学素养是极其有利的.

补充例题

如果 $(ax^2y)^2=4x^4y^2$，$(bxy^2)^3=-\frac{1}{8}x^3y^6$，那么 $(ab)^3$ 的值是多少？

练习

1. （1）不对，应为x^2+4x+4.

（2）不对，应为$a^2+2ab+b^2$.

2. （1）$x^2+8x+16$.

（2）$4a^2-12a+9$.

（3）$25m^2-5m+\frac{1}{4}$.

3. 略.

本节课是对完全平方公式的综合应用，教师应先复习完全平方公式，再展开本节课的教学.

在计算过程中，会出现多种算法，教师应鼓励学生尽可能将自己的算理与做法说出来，加深对公式的理解并灵活应用.

练习

1. 下面各式的计算对不对？如果不对，应怎样改正？

（1）$(x+2)^2=x^2+4$；　　（2）$(-a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

2. 运用完全平方公式计算：

（1）$(x+4)^2$；　　（2）$(2a-3)^2$；　　（3）$\left(5m-\frac{1}{2}\right)^2$.

3. 自编两个可以利用完全平方公式计算的题，并与同学交流解题过程.

说一说

$(a-b)^2$ 与 $(b-a)^2$，$(a+b)^2$ 与 $(-a-b)^2$ 相等吗？为什么？

相等.

因为 $(b-a)^2=[-(a-b)]^2=(a-b)^2$，所以 $(a-b)^2=(b-a)^2$；

又因为 $(-a-b)^2=[-(a+b)]^2=(a+b)^2$，所以 $(a+b)^2=(-a-b)^2$.

用完全平方公式将它们分别展开，可得……

例 5 运用完全平方公式计算：

（1）$(-x+1)^2$；　　（2）$(-2x-3)^2$.

解 （1）$(-x+1)^2$

$=(-x)^2+2(-x)\cdot 1+1^2$

$=x^2-2x+1$.

（2）$(-2x-3)^2$

$=[-(2x+3)]^2$

$=(2x+3)^2$

$=4x^2+12x+9$.

第(1)题我是这样做的：

$(-x+1)^2$

$=(1-x)^2$

$=1^2-2\cdot 1\cdot x+x^2$

$=1-2x+x^2$.

对吗？

例 6 计算：

(1) $(a+b)^2-(a-b)^2$；　　(2) $(a+b+1)^2$.

解 (1) $(a+b)^2-(a-b)^2$

$=a^2+2ab+b^2-(a^2-2ab+b^2)$

$=a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2$

$=4ab$.

(2) $(a+b+1)^2$

$=[(a+b)+1]^2$

$=(a+b)^2+2(a+b)+1$

$=a^2+2ab+b^2+2a+2b+1$.

例 7 计算：

(1) 104^2；　　(2) 198^2.

解 (1) $104^2=(100+4)^2$

$=100^2+2\times100\times4+4^2$

$=10\ 000+800+16$

$=10\ 816$.

(2) $198^2=(200-2)^2$

$=200^2-2\times200\times2+2^2$

$=40\ 000-800+4$

$=39\ 204$.

运用完全平方公式可以简化一些运算.

练习

1. 运用完全平方公式计算：

(1) $(-2a+3)^2$；　　(2) $\left(-3x+\frac{1}{2}\right)^2$；

(3) $(-x^2-4y)^2$；　　(4) $(1-2b)^2$.

2. 计算：

(1) $(x+2y)^2-(x-2y)^2$；　　(2) $(a-b+1)^2$.

3. 计算：

(1) 103^2；　　(2) 297^2.

练习

1. (1) $4a^2-12a+9$.

(2) $9x^2-3x+\frac{1}{4}$.

(3) $x^4+8x^2y+16y^2$.

(4) $4b^2-4b+1$.

2. (1) $8xy$.

(2) $a^2+b^2-2ab+2a-2b+1$.

3. (1) $10\ 609$.

(2) $88\ 209$.

补充例题

1. 已知 $a+b=3$，$ab=-12$，求下列各式的值：

(1) a^2+b^2；　　(2) a^2-ab+b^2.

2. 计算：(1) $1\ 002^2$；　(2) 99^2.

教学目标

会用乘法公式进行计算.

教学重点、难点

能灵活运用乘法公式进行计算.

本小节是综合运用所学的乘法公式进行计算. 在运算过程中会出现多种算法，也会出现各种错误的做法. 在鼓励算法多样性的同时，要紧扣使算法简捷这个思路. 同时结合错误案例进行点拨、提示，以使学生获得基本的运算技能.

2.2.3 运用乘法公式进行计算

动脑筋

(1) $(x+1)(x^2+1)(x-1)=?$　　(2) $(x+y+1)(x+y-1)=?$

对于问题(1)，如果直接按从左至右的运算顺序进行计算，计算过程很繁琐，而且容易出错. 通过观察，发现$(x+1)$与$(x-1)$可以凑成平方差公式，然后再与(x^2+1)相乘，可以简化运算.

$$\begin{aligned}&(x+1)(x^2+1)(x-1)\\=&(x+1)(x-1)(x^2+1)\quad（交换律）\\=&(x^2-1)(x^2+1)\\=&x^4-1.\end{aligned}$$

对于问题(2)，通过观察，发现可以把 $x+y$ 看做一个整体，这样就可以用平方差公式来计算.

$$\begin{aligned}&(x+y+1)(x+y-1)\\=&[(x+y)+1][(x+y)-1]\\=&(x+y)^2-1\\=&x^2+2xy+y^2-1.\end{aligned}$$

遇到多项式的乘法时，我们要先观察式子的特征，看能否运用乘法公式，以达到简化运算的目的.

例 8 运用乘法公式计算：

(1) $[(a+3)(a-3)]^2$；　　(2) $(a-b+c)(a+b-c)$.

解 (1) $[(a+3)(a-3)]^2$

$$\begin{aligned}&=(a^2-9)^2\\&=(a^2)^2-2\cdot a^2\cdot 9+9^2\\&=a^4-18a^2+81.\end{aligned}$$

(2) $(a-b+c)(a+b-c)$

$=[a-(b-c)][a+(b-c)]$

$=a^2-(b-c)^2$

$=a^2-(b^2-2bc+c^2)$

$=a^2-b^2+2bc-c^2.$

做一做

运用乘法公式计算：$(a+b+c)^2$.

$(a+b+c)^2$

$=[(a+b)+c]^2$

$=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$

$=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$

$=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$

例 9 一个正方形花圃的边长增加到原来的 2 倍还多 1 m，它的面积就增加到原来的 4 倍还多 21 m²，求这个正方形花圃原来的边长.

解 设正方形花圃原来的边长为 x m.

由数量关系，得

$$(2x+1)^2=4x^2+21,$$

化简，得

$$4x^2+4x+1=4x^2+21,$$

即 $$4x=20,$$

解得 $$x=5.$$

答：这个正方形花圃原来的边长为 5 m.

练习

1. 运用乘法公式计算：

(1) $(x-2)(x+2)(x^2+4)$； (2) $(a+2b-1)(a+2b+1)$；

(3) $(2m+n-1)(2m-n+1)$； (4) $(x+1)^2(x-1)^2$.

2. 计算：$(a-b-c)^2$.

3. 一个正方形的边长增加 2 cm，它的面积就增加 16 cm²，求这个正方形原来的边长.

练习

1. (1) x^4-16.

(2) $a^2+4ab+4b^2-1$.

(3) $4m^2-n^2+2n-1$.

(4) x^4-2x^2+1.

提醒学生灵活应用公式.

2. $a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ac$.

3. 设原来的边长为 x cm，则有 $(x+2)^2=x^2+16$. 解得 $x=3$.

补充例题

一个正方形的边长为 $m+n$，现将一边长增加 a，并将它的邻边长减少 a，得到一个长方形，求这个长方形的面积.

习题2.2

A组

1. (1) $4x^2-y^2$.

(2) a^2-b^2.

(3) $0.04x^2-0.01$.

(4) 9 996.

2. (1) $25a^2+40ab+16b^2$.

(2) $9x^2-12xy+4y^2$.

(3) $4m^2+4m+1$.

(4) 99.600 4.

3. (1) $-x^2+4$.

(2) $2x-1$.

(3) $2a$.

(4) $-x^2-2x-1$.

4. (1) $-5x^2+3y^2$.

(2) $4ab-2b^2$.

B组

5. (1) $x^2-4y^2+12yz-9z^2$.

(2) $x^2+4y^2+4xy-2x-4y+1$.

提醒学生恰当地将某两项看作一个整体.

6. 原式可化简为$16x^4-y^4$. 当$x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{3}$时，原式的值为$\frac{80}{81}$.

7. 面积为：

$$(b+2a)\left(a-\frac{1}{2}b\right)\times\frac{1}{2}$$
$$=\left(a+\frac{1}{2}b\right)\left(a-\frac{1}{2}b\right)$$
$$=a^2-\frac{1}{4}b^2.$$

8. $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab=49+2\times18=85$.

9. 由题意可得甲、乙、丙三数分别为$2a$，$4a+3$，$4a-3$，则三数的积为$2a(4a+3)(4a-3)=32a^3-18a$. 当$a=-\frac{1}{3}$时，这三个数的积为$\frac{130}{27}$.

习题 2.2

A 组

1. 运用平方差公式计算：

(1) $(2x+y)(2x-y)$； (2) $(-a-b)(-a+b)$；

(3) $(0.2x-0.1)(0.1+0.2x)$； (4) 102×98.

2. 运用完全平方公式计算：

(1) $(5a+4b)^2$； (2) $(3x-2y)^2$；

(3) $(-2m-1)^2$； (4) 9.98^2 .

3. 运用乘法公式计算：

(1) $(-x-2)(x-2)$； (2) $x^2-(x-1)^2$；

(3) $\left(a+\frac{1}{2}\right)^2-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2$； (4) $(-x-1)(x+1)$.

4. 计算：

(1) $(2x-y)(2x+y)-(3x+2y)(3x-2y)$；

(2) $(2a-b)(2a+b)-(2a-b)^2$.

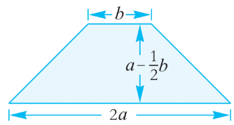
B 组

5. 运用乘法公式计算：

(1) $(x+2y-3z)(x-2y+3z)$； (2) $(x+2y-1)^2$.

6. 先化简后求值：$(2x+y)(2x-y)(4x^2+y^2)$，其中$x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{3}$.

7. 求下图的面积：



(第 7 题图)

8. 已知$(a-b)^2=49$，$ab=18$，求代数式a^2+b^2的值.

9. 已知甲数为$2a$，乙数比甲数的2倍多3，丙数比甲数的2倍少3，求甲、乙、丙三数的积. 当$a=-\frac{1}{3}$时，积是多少？

小结与复习

回顾

1. $a^m \cdot a^n$，$(a^m)^n$，$(ab)^n$ 分别怎么计算？
2. 单项式与单项式相乘，怎么乘？多项式与多项式相乘，怎么乘？
3. 本章学习了哪几个乘法公式？你能从图形的角度来解释乘法公式吗？

本章知识结构

- 整式的乘法
  - 幂的运算
  - 单项式的乘法
  - 多项式的乘法
  - 乘法公式
    - 平方差公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
    - 完全平方公式 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

注意

1. 同底数幂的乘法和幂的乘方容易混淆，运算时要注意区分.
2. 多项式与多项式相乘注意不要漏乘.
3. 运用乘法公式进行运算，关键是要把握公式的特征，灵活选用公式.

小结与复习旨在让学生通过思考与交流，梳理本章所学知识，加深对本章学习内容的理解，形成知识体系. 同时，让学生在梳理的过程中提高自己的归纳、概括能力.

在“回顾”栏目中，教材通过问题的形式引导学生复习本章各节中的主要内容，教师应让学生独立回顾思考，用自己的语言来表述，而不是简单重复教材的内容，只要学生说得合理，教师都应给予充分肯定，然后再与学生交流.

教材通过框图的形式呈现出本章的知识结构，这样便于学生掌握本章所学知识的脉络与相互联系.

“注意”栏目中列举了学习本章知识时要留意的地方，这些在前面的学习中教师和教材都有强调，在这里重提这些注意问题，便于学生整体回顾. 建议教师在小结与复习中以列举实例来说明要注意的事项，而不是空洞地说明.

需指出的是，在本章学习过程中，涉及了数形结合、转化、类比、分类讨论等重要的数学思想和方法，在复习课教学中，教师要通过具体的问题给予进一步的提示和渗透.

复习题2

A组

1. (1) $-b^4$.

(2) a^9.

(3) $-x^3$.

(4) $-8a^6b^3$.

(5) $-10x^2y$.

(6) $-\frac{4}{3}x^3y^4$.

2. (1) $-2x^2y+3xy^2$.

(2) $-15m^2+\frac{3}{2}m^2n$.

(3) $2a^2+3a-5$.

3. (1) x^2-4.

(2) $-9a^2+1$.

(3) $4m^2+20m+25$.

(4) $4y^2-12y+9$.

4. (1) $-6x-18$.

(2) $-x^2y^2+z^2$.

(3) x^2-4y^2+4y-1.

5. (1) 原式可化简为 $6x^2-4xy$.

当 $x=-1$，$y=2$ 时，原式的值为 14.

(2) 原式可化简为$4xy-8y^2$.

当 $x=-2$，$y=\frac{1}{2}$ 时，原式的值为-6.

6. 1.

7. 三数的和与积分别为$5a$，$4a^3-a$，当 $a=-\frac{5}{2}$时，三数的和与积分别为$-\frac{25}{2}$，-60.

8. $a^2b-4ab^2+4b^3$.

提醒学生先确定纸盒的底面边长和高.

复习题 2

A 组

1. 计算：

(1) $-b\cdot b^3$；

(2) $a^2\cdot a^3\cdot(-a)^4$；

(3) $-x\cdot(-x)^2$；

(4) $(-2a^2b)^3$；

(5) $5x\cdot(-2xy)$；

(6) $\left(-\frac{1}{3}xy^2\right)\cdot(-2xy)^2$.

2. 计算:

(1) $6xy\left(-\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y\right)$；

(2) $\left(5m-\frac{1}{2}mn\right)\cdot(-3m)$；

(3) $(2a+5)(a-1)$.

3. 计算:

(1) $(x+2)(x-2)$；

(2) $(-3a-1)(-1+3a)$；

(3) $(2m+5)^2$；

(4) $(-3+2y)^2$.

4. 计算：

(1) $(x+3)(x-3)-(x+3)^2$；

(2) $(xy+z)(-xy+z)$；

(3) $(x+2y-1)(x-2y+1)$.

5. 先化简，再求值.

(1) $4x^2-2x(-x+2y)$，其中 $x=-1$，$y=2$；

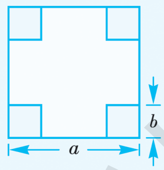
(2) $(x-2y)(x+2y)-(x-2y)^2$，其中 $x=-2$，$y=\frac{1}{2}$.

6. 运用乘法公式计算：

$$500^2-499\times501.$$

7. 已知甲数是 a，乙数比甲数的 2 倍多 1，丙数比乙数少 2，试求甲、乙、丙三数的和与积，并计算当 $a=-\frac{5}{2}$ 时的和与积分别是多少.

8. 如图，把边长为 a 的正方形的四角，各剪去一个边长为 $b\left(b<\frac{a}{2}\right)$的正方形，然后把它折成一个无盖的纸盒，求纸盒的容积.（结果要求用关于 a，b 的多项式表示.）



（第 8 题图）

B 组

9. 已知$(a+b)^2=9$，$(a-b)^2=4$．求：

(1) ab 的值；　　(2) a^2+b^2 的值.

10. 计算：

(1) $2x^3-2x[x^2-2(x-3)]$；　　(2) $(x-1)(x^2+x+1)$.

11. 解下列方程（组）：

(1) $(x-1)(1+x)-(x+2)(x-3)=2x-5$；

(2) $\begin{cases}(2x+1)(y-2)=2xy,\\ x-2y=4.\end{cases}$

12. 先化简，再求值：

(1) $xy-2x\left[2y-\frac{1}{2}(x+y)\right]$，其中 $x=-3$，$y=\frac{2}{3}$；

(2) $2(a+b)(a-b)-(a+b)^2+(a-b)^2$，其中 $a=2$，$b=\frac{1}{2}$.

C 组

13. 解方程：$(x+2)^2-5(x-1)^2=-4x^2+9x-2$.

14. 计算：

(1) $(a+b)(a^2-ab+b^2)$；　　(2) $(a-b)(a^2+ab+b^2)$；

(3) $(a+b)^3$；　　(4) $(a-b)^3$.

15. 求值：

(1) 已知 $a+\frac{1}{a}=3$，求 $a^2+\frac{1}{a^2}$ 和 $a^4+\frac{1}{a^4}$ 的值；

(2) 已知 $a-b=2$，$ab=1$，求 a^2+b^2 的值.

16. 把一个边长为 $a+b+c$ 的正方形按如图所示分割成 9 块，你能用这个图来解释 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$ 吗？

	a	b	c
a	a^2	ab	ac
b	ba	b^2	bc
c	ca	cb	c^2

（第 16 题图）

B组

9. (1) $\frac{5}{4}$.

(2) $\frac{13}{2}$.

10. (1) $4x^2-12x$.

(2) x^3-1.

11. (1) $x=10$.

(2) $\begin{cases}x=-\frac{8}{7},\\ y=-\frac{18}{7}.\end{cases}$

12. (1) 原式可化简为x^2-2xy.

当 $x=-3$，$y=\frac{2}{3}$时，原式的值为 13.

(2) 原式可化简为$2a^2-4ab-2b^2$.

当 $a=2$，$b=\frac{1}{2}$时，原式的值为$\frac{7}{2}$.

提醒学生注意化简时，算法不同，运算过程的简繁程度也不同.

C组

13. $x=-\frac{1}{5}$.

14. (1) a^3+b^3.

(2) a^3-b^3.

(3) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

(4) $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

15. (1) $a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2\cdot a\cdot\frac{1}{a}=9-2=7$，$a^4+\frac{1}{a^4}=\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)^2-2\cdot a^2\cdot\frac{1}{a^2}=49-2=47$，

(2) $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab=2^2+2\times1=6$.

16. 略.

Ⅲ. 本章相关链接

从平方差公式谈数形结合

平方差公式是代数中一个重要的公式. 教学时，辅以图形说明，能起到不错的效果. 这可以看作是数形结合的典型案例.

数与形是数学中的两个最古老，也是最基本的研究对象，它们在一定条件下可以相互转化. 数形结合就是把抽象的数学语言、数量关系与直观的几何图形、位置关系结合起来，通过“以形助数”或“以数解形”，使复杂问题简单化，抽象问题具体化，达到优化解题的目的. 著名数学家华罗庚总结道：“数形结合百般好，隔裂分家万事非.”

要掌握数形结合这一数学思想方法，没有太多捷径，只能平时多积累、多总结. 如何研究数形结合呢？很多人不知如何下手. 你很难相信有时仅仅是将系数做了简单的转换，就能发现一些新的东西.

下面我们就从平方差公式讲起，并给出其他一些有代表性的例子. 这些例子给我们启示：同一样东西，从不同角度去看，可以看得更全面一些. “横看成岭侧成峰”这句古诗在数学中亦有体现.

例 1　平方差公式

关于 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ 的图形的直观表示，有多种构造方法，但是我们用图形来表示代数式是为了方便理解和记忆，这就要求我们所构造的图形要尽量简单，好记忆，否则就不能起到预期的效果.

如图 1，由 $S_{ABCD}-S_{EFGH}=4S_{ABFE}$ 得　$a^2-b^2=4\times\dfrac{a+b}{2}\times\dfrac{a-b}{2}$.

如图 2，由 $S_{ABCD}-S_{AEFG}=2S_{EBCF}$ 得　$a^2-b^2=2\times\dfrac{a+b}{2}\times(a-b)$.

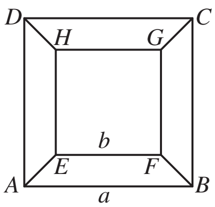


图 1

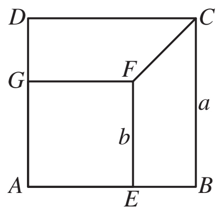


图 2

如图 3，由 $S_{ABCD}-S_{AEFG}=S_{GIJD}$ 得 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

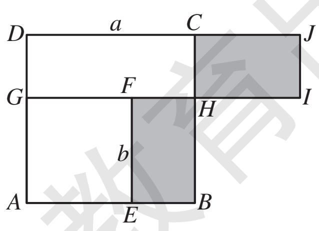


图 3

比较三种图形的构造，从美观性来说，图 1 构造巧妙，对称性最强，比较漂亮；图 3 向外凸出一块，不太好看；图 2 则介于二者之间. 从表达式的复杂程度来说，图 1 分解块数最多，较复杂；图 3 将剩余部分合成一个长方形，使得表达式简单；图 2 则介于二者之间. 综合考虑，用图 2 表达平方差

公式最好，无需动脑筋构造，只需从 a^2-b^2 联想到大正方形减去小正方形即可，容易作图且比较美观.

单从代数式来看，仅仅是系数做了一些分配、结合的小动作，但对应的图形却截然不同. 这可以看作是数学中的文字游戏！不过我们可不能小看它. 下面给出的例子就能让大家感受到这种操作极具普遍性. 不但可以引出定理公式的多种证明，还能对解题方法进行化简.

例 2　三角形面积公式

三角形面积公式有不同的表达方式：$S=\frac{1}{2}ah=a\left(\frac{1}{2}h\right)=\left(\frac{1}{2}a\right)h=\frac{1}{2}(ah)$，与图 4 至图 7 一一对应，看似是乘法交换律、结合律的简单运用，但和图象结合起来就值得重视了.

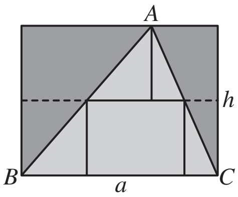


图 4

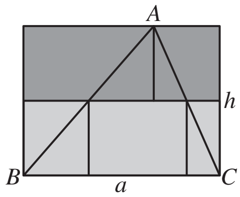


图 5

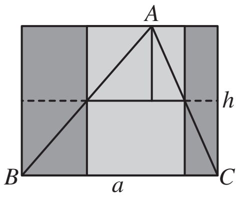


图 6

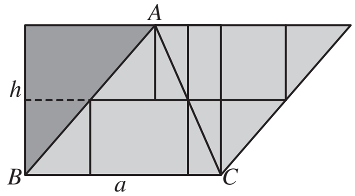


图 7

例 3　梯形面积公式

梯形面积公式 $S=\frac{1}{2}(a+b)h=\frac{(a+b)h}{2}=\frac{1}{2}ah+\frac{1}{2}bh$，既可以以腰上中点为旋转中心，旋转 180°后和原来的梯形拼成一个平行四边形（图 8），也可以直接作对角线，将梯形面积转化成两个三角形的面积和（图 9）.

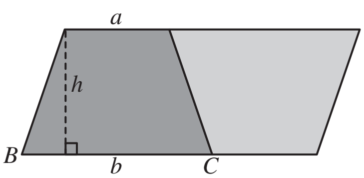


图 8

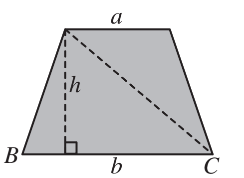


图 9

戴维·韦尔斯在《数学与联想》中曾有这样一句话：“如果一种语言没有不确定性与双重含义，那该有多平淡无味！”

对科学家而言，这几乎是自相矛盾的. 他们喜欢能够精确地说出他们所知道的东西；任何一个数学家应该能够解释他所引用数学语言所作的特殊陈述的含义，并且这种解释应该是清晰易懂的. 同时，这也是真的，同一个陈述可以作各种解释.

这里没有矛盾. 这也不是数学的弱点，完全相反！这恰是数学的一大优点，如果一个数学陈述永远只能用一种方式来解释，那该需要多少个陈述啊！

每一种陈述只提供那么一点点信息，但因为它们可以用很多方式来解释，所以它们更能增加知识，更有用，更强有力.

第 3 章　因式分解

Ⅰ. 概　述

一、课程内容

1. 理解因式分解的意义.

2. 会用提公因式法、公式法（直接用公式不超过两次）进行因式分解（指数是正整数）.

3. 能理解因式分解与整式乘法的区别与联系，以及因式分解在解决其他数学问题时所起的重要作用.

二、课时建议

3.1　多项式的因式分解	1 课时
3.2　提公因式法	2 课时
3.3　公式法	2 课时
小结与复习	1 课时

三、教材说明

把一个多项式分解成若干个因式的积就是因式分解，因式分解最重要的目的是：它是分式进行化简的必要步骤，同时也是解二次或二次以上方程的根本方法. 本章关于因式分解的内容是多项式因式分解中最基础的知识，也是最基本的方法，即提公因式法和公式法. 因此，本章的教学要给予足够的重视，要使学生切实掌握提公因式法和公式法.

本章首先从平方差公式出发，引导学生将 x^2-1变形为$(x+1)(x-1)$，再引出因式分解的概念，然后分析整式乘法和因式分解的区别与联系，最后重点介绍因式分解的两种基本方法——提公因式法和公式法，并运用这两种方法对多项式进行因式分解.

本章重点是因式分解的两种基本方法，即提公因式法和公式法. 因式分解的变化技巧性较灵活，如运用提公因式法时，要对整式进行观察，找出其公因式；又如运用公式法时，要根据整式的形式和特点，选用适当公式. 这些对学生来说，往往很不容易，因此找出公因式和选用什么样的公式是本章的难点.

根据知识间内在的逻辑性，本章的教学内容分为 3 个小节，顺序安排如下：

因式分解的概念 → 提公因式法分解因式 → 公式法分解因式

本章内容呈现的思路是：通过把整数分解成几个因数相乘和把学生所熟悉的整式 x^2-1写成$(x+1)\cdot(x-1)$的形式，让学生通过类比获得因式的直观感受，进一步提出因式分解的概念. 让学生通过探究和分析，归纳提公因式法和公式法. 为了使学生经历“提公因式法和公式法”的探究过程，教材设立了“说一说”、“动脑筋”和“议一议”等栏目. 其目的是培养学生分析问题的能力，提高学生的数学思维水平.

在课堂上要发挥学生的主体作用，要启发学生积极参与教学活动，引导他们得出提公因式法和公式法.

要切实掌握《课标》对因式分解的要求 . 按课标要求，对因式分解只讲两种方法，即提公因式法和公式法. 字母的指数都是正整数，直接用公式不超过两次 . 用公式法进行因式分解时，也只用平方差公式和完全平方公式. 对分组分解法和十字相乘法不做要求. 对于十字相乘法，教材在本章复习题 C 组中给出了其中的一种，即形如 $x^2+(a+b)x+ab$ 的多项式的因式分解，供学有余力的学生参考.

为激发学生的学习兴趣，教师可简单介绍怎样利用因式分解生成密码.

四、评价建议

1. 考查每个学生参与教学活动的情况. 在课堂上是否积极参与对提公因式法和公式法的探究，课后是否主动参与课外数学活动（包括按时完成作业以及与同学的交流）.

2. 要求每个学生写出本章学习小结，即进行自评.

3. 根据课标的要求进行一次评估测试，了解学生掌握知识和技能的情况.

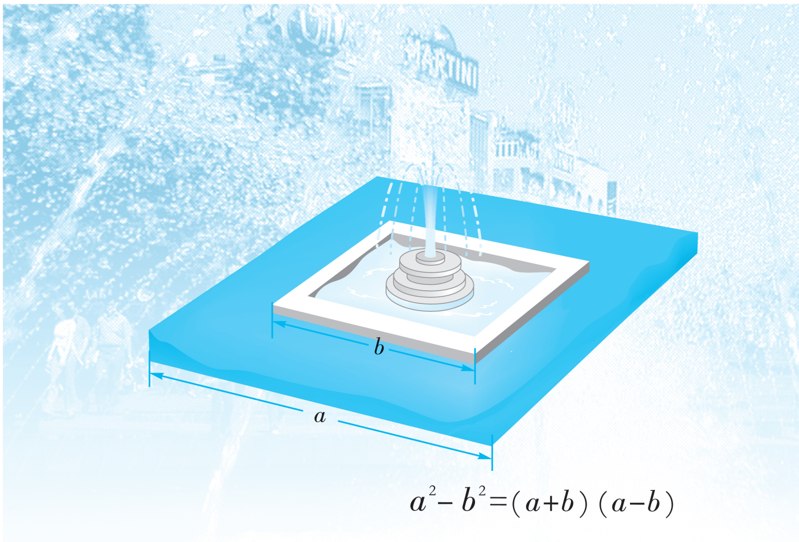
4. 给每个学生一个评价. 评价时，不能只看考试分数，还要评价学生参与教学活动和学生自评的情况.

Ⅱ. 教学建议

本章的章前图中提出了一个现实生活背景的面积计算问题. 当 $a=118$，$b=18$ 时，a^2-b^2 的值不容易计算，而将 a^2-b^2 写成 $(a+b)(a-b)$ 的形式将便于计算. 此案例可作为学习因式分解的引入 .

对学生而言，因式分解是一个没见过的新的变形，其实这种变形与整式乘法是互逆的，可引导学生先复习整式的乘法，再引入本章内容.

需注意的是：要提醒学生因式分解不仅仅是整式乘法的逆变形，它更是解二次和二次以上方程的根本方法（九上学习），以及对分式（八上学习）进行化简所必须的步骤.



第3章

因式分解

在一块边长为 a 的正方形空地中间，有一个边长为 b 的正方形水池，若在空地上种草，则草地面积为 a^2-b^2？若 $a=118$ m，$b=18$ m，如何较简便地计算出草地面积呢？

在上例中，我们可以应用平方差公式，将多项式 a^2-b^2 改写成 $(a+b)(a-b)$ 的形式，从而达到简化运算的效果. 事实上，在代数运算和解决实际问题的过程中，我们经常要将一个多项式写成若干个多项式相乘的形式，这个过程就叫做因式分解.

3.1 多项式的因式分解

说一说

(1) 21 等于 3 乘哪个整数?
(2) x^2-1 等于 $x+1$ 乘哪个多项式?

$21=3\times7$.

因为 $(x+1)(x-1)=x^2-1$,
所以 $x^2-1=(x+1)(x-1)$.

对于整数 21 与 3，有整数 7 使得 $21=3\times7$，我们把 3 叫做 21 的一个因数，同理 7 也是 21 的一个因数.

类似地，对于多项式 x^2-1 与 $x+1$，由整式的乘法有多项式 $x-1$ 使得 $x^2-1=(x+1)(x-1)$成立，我们把多项式 $x+1$ 叫做 x^2-1 的一个因式. 同理，$x-1$ 也是 x^2-1 的一个因式.

一般地，对于两个多项式[①] f 与 g，如果有多项式 h 使得 $f=gh$，那么我们把 g 叫做 f 的一个**因式**（factor）. 此时，h 也是 f 的一个因式.

把 x^2-1 写成$(x+1)(x-1)$的形式叫做把这个多项式因式分解.

一般地，把一个多项式表示成若干个多项式的乘积的形式，称为把这个多项式**因式分解**（factorization，factoring）.

① 在现代数学文献中，把单项式看成是只有一项的多项式.

教学目标

1. 理解因式分解的概念.

2. 了解因式分解在解决其他数学问题中的重要作用. 如解方程、简化计算等方面都常用因式分解.

教学重点、难点

理解因式分解的概念.

“说一说”栏目中的两个问题应启发学生完成.

为了使学生更好地理解因式分解的意义，教师还可以提出下面的问题让学生思考.

问题1 $x(x-1)=?$

$x^2-x=?$

问题2 $x(x-y)=?$

$x^2-xy=?$

在现代数学文献中，多项式包含单项式，因此整式的因式分解也可以理解为多项式的因式分解.

这里需指出的是：考虑到学生的认知水平，教材从整式的乘法出发引入因式分解的概念，因式分解是整式乘法的逆变形，但这一点不要过多强调，以免学生产生负迁移，在做因式分解的题时，将因式分解的结果又转回整式乘法.

教材的阅读材料中指出素数是正整数中的“基本建筑块”；在多项式组成的集合中，有些多项式也起着“基本建筑块”的作用.

例如：$x^2-1=(x+1)(x-1)$

多项式 $x+1$，$x-1$ 就是 x^2-1 的基本建筑块.

同时，因式分解是解二次和二次以上方程的根本方法，也是把分式进行化简的必要步骤.

对于教材中的阅读材料，教师可指导学生自学，再适当归纳、总结，进一步帮助学生理解因式分解的意义与作用.

例1的内容设置很关键，其目的是帮助学生明白因式分解与多项式乘法的区别. 因为在接下来的学习中，学生很可能会将两者混淆，出现因式分解已经完成，却又继续做多项式乘法的错误. 这一点在教学过程中，教师需多加提醒.

为什么要把一个多项式因式分解呢?

我们来看一个例子，素(质)数①是正整数中的“基本建筑块”，我们可以把每一个大于 1 的正整数都表示成若干个素(质)数的乘积的形式. 例如

$$12=2\times2\times3, \quad ①$$

$$30=2\times3\times5. \quad ②$$

有了①式和②式，就容易求出 12 和 30 的最大公因数为 $2\times3=6$，

进而很容易把分数 $\frac{12}{30}$ 约分：分子与分母同除以 6，得 $\frac{12}{30}=\frac{2}{5}$.

类似的，我们应用因式分解的办法将多项式表示成若干个最基本的多项式的乘积的形式，这将为以后学习分式的约分，解一元二次方程等架起解决的桥梁.

例 1 下列各式由左边到右边的变形，哪些是因式分解，哪些不是，为什么?

(1) $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$;

(2) $m^2+m-4=(m+3)(m-2)+2$.

解 (1) 是. 因为从左边到右边是把多项式 $a^2+2ab+b^2$ 表示成了多项式 $a+b$ 与 $a+b$ 的积的形式.

(2) 不是. 因为 $(m+3)(m-2)+2$ 不是几个多项式乘积的形式.

例 2 检验下列因式分解是否正确.

(1) $x^2+xy=x(x+y)$;

(2) $a^2-5a+6=(a-2)(a-3)$;

(3) $2m^2-n^2=(2m-n)(2m+n)$.

分析 检验因式分解是否正确，只要看等式右边的几个多项式的乘积与左边的多项式是否相等.

① 素数都大于 1.

56 数学 七年级下册

补充例题

下列各式从左到右是因式分解的有（　　）个.

①$x^2-x=x(x-1)$；　②$a(a-b)=a^2-ab$；

③$(a+3)(a-3)=a^2-9$；　④$a^2-2a+1=a(a-2)+1$；

⑤$x^2-4x+4=(x-2)^2$.

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

解 （1）因为 $x(x+y)=x^2+xy$，

所以因式分解 $x^2+xy=x(x+y)$ 正确.

（2）因为 $(a-2)(a-3)=a^2-5a+6$，

所以因式分解 $a^2-5a+6=(a-2)(a-3)$ 正确.

（3）因为 $(2m-n)(2m+n)=4m^2-n^2 \neq 2m^2-n^2$，

所以因式分解 $2m^2-n^2=(2m-n)(2m+n)$ 不正确.

练习

1. 求 4，6，14 的最大公因数 .

2. 下列各式由左边到右边的变形，哪些是因式分解，哪些不是，为什么？

（1）$(x+1)(x+2)=x^2+3x+2$；

（2）$2x^2y+4xy^2=2xy(x+2y)$；

（3）$x^2-2=(x+1)(x-1)-1$；

（4）$4a^2-4a+1=(2a-1)^2$.

3. 检验下列因式分解是否正确.

（1）$-2a^2+4a=-2a(a+2)$；

（2）$x^3+x^2+x=x(x^2+x)$；

（3）$m^2+3m+2=(m+1)(m+2)$.

习题 3.1

A 组

1. 求 36 和 60 的最大公因数 .

2. 下列各式由左边到右边的变形，哪些是因式分解，哪些不是，为什么？

（1）$4x^2-8x-1=4x(x-2)-1$；

（2）$ax^2-bx^2-x=x(ax-bx-1)$；

第 3 章　因式分解　57

练习

1. 2.

2.（1）不是. 结果不是积的形式.

（2）是.

（3）不是. 结果不是积的形式.

（4）是.

3.（1）错.

（2）错.

（3）对.

习题3.1

A组

1. 12.

2.（1）不是. 结果不是积的形式.

（2）是.

补充例题

下列各式从左到右变形正确的是（　　）.

(A) $-a+b=-(a+b)$　　(B) $(x-y)^2=-(y-x)^2$

(C) $(a-b)^3=(b-a)^3$　　(D) $(m-1)(n-2)=(1-m)(2-n)$

（3）不是. 结果不是积的形式.

3.（1）错.

（2）错.

（3）对.

（4）错.

B组

4.（1）多项式乘法.

（2）多项式乘法.

（3）因式分解.

（4）因式分解.

5.（1）$ax+ay+az$，$a(x+y+z)$.

（2）略.

（3）略.

本题是一道开放题，设置的目的是让学生体会因式分解在运算中的作用.

（3）$x^2-y^2-1=(x+y)(x-y)-1$.

3. 检验下列因式分解是否正确.

（1）$x^2-7x-10=(x-2)(x-5)$；

（2）$4m^2-4m+1=4m(m-1)$；

（3）$10x^2y-5xy^2=5xy(2x-y)$；

（4）$a^3b^2-a^2b+a^2=a^2(ab^2-b)$.

B 组

4. 下列各式由左边到右边的变形，哪些是因式分解，哪些是多项式乘法？

（1）$(x+5)(x-1)=x^2+4x-5$；

（2）$(x+2)(x-2)=x^2-4$；

（3）$12ax-12ay=12a(x-y)$；

（4）$x^2-10xy+25y^2=(x-5y)^2$.

5. 小明在水果店里买了苹果、梨、葡萄各 a kg，这三种水果的单价分别为 x，y，z 元.

（1）用两种方法计算他共花了多少元.

（2）在你得到的两个式子中，分别要做多少次加法，多少次乘法？按照哪个式子计算较简便？

（3）你能从这个例子中体会到因式分解的用处吗？

3.2 提公因式法

说一说

下列每个式子含字母的因式有哪些？

xy，xz，xw.

xy 的因式有 x，y，…

xz 的因式有 x，z，…

xw 的因式有 x，w，…

由此看出，xy，xz，xw 有公共的因式 x.

几个多项式的公共的因式称为它们的**公因式**（common factor）.

如何把多项式 $xy+xz+xw$ 因式分解？

把乘法分配律从右到左地使用，便得出

$xy+xz+xw=x(y+z+w)$.

像上面那样，如果一个多项式的各项有公因式，可以把这个公因式提到括号外面，这种把多项式因式分解的方法叫做**提公因式法**.

例 1 把 $5x^2-3xy+x$ 因式分解.

分析 多项式各项均含有 x，因此公因式为 x. 第 3 项将 x 提出后，括号内的因式为 1.

解 $5x^2-3xy+x$

$=x(5x-3y+1)$.

教学目标

1. 理解公因式的概念，并会找出多项式的公因式.

2. 会用提公因式法分解因式.

教学重点、难点

教学重点：会用提公因式法.

教学难点：能准确找出多项式中各项的公因式.

在讲例 1 时，要提醒学生不要把因式 $5x-3y+1$ 错写成 $5x-3y$，而把 1 丢掉.

讲完例 1、例 2 后，应引导学生归纳找公因式的步骤：

（1）找公因式的系数，像例 1 中多项式系数为整数，则取各项系数绝对值的最大公因数作为公因式的系数.

（2）确定公因式的字母，应是各项中相同的字母，字母的指数取各项中次数最低的.

例 2 把 $4x^2-6x$ 因式分解.

分析 先确定公因式的系数，再确定字母. 这两项的系数为 4，6，它们的最大公约数是 2；两项的字母部分 x^2 与 x 都含有字母 x，且 x 的最低次数是 1，因此公因式为 $2x$.

解 $4x^2-6x$

$=2x(2x-3)$.

例 3 把 $8x^2y^4-12xy^2z$ 因式分解.

分析 公因式的系数是 8 与 12 的最大公约数 4；公因式含的字母是各项中相同的字母 x 和 y，它们的指数取各项中次数最低的，因此公因式为 $4xy^2$.

解 $8x^2y^4-12xy^2z$

$=(4xy^2)\cdot 2xy^2-(4xy^2)\cdot 3z$

$=4xy^2(2xy^2-3z)$.

例 3 中，多项式的字母较多，因此找出公因式后，要求学生把多项式的每一项写成公因式与其余因式的乘积的形式.

练习

1. 说出下列多项式中各项的公因式：

(1) $-12x^2y+18xy-15y$；　(2) $\pi r^2h+\pi r^3$；

(3) $2x^my^{n-1}-4x^{m-1}y^n$（m，n 均为大于 1 的整数）.

2. 在下列括号内填写适当的多项式：

(1) $3x^3-2x^2+x=x($　　　　$)$；

(2) $-30x^3y^2+48x^2yz=-6x^2y($　　　　$)$.

3. 把下列多项式因式分解：

(1) $3xy-5y^2+y$；　(2) $-6m^3n^2-4m^2n^3+10m^2n^2$；

(3) $4x^3yz^2-8x^2yz^4+12x^4y^2z^3$.

练习

1. (1) $3y$ 或 $-3y$.

(2) πr^2.

(3) $2x^{m-1}y^{n-1}$.

2. (1) $3x^2-2x+1$.

(2) $5xy-8z$.

3. (1) $y(3x-5y+1)$.

(2) $-2m^2n^2(3m+2n-5)$.

(3) $4x^2yz^2(x-2z^2+3x^2yz)$.

说一说

下列多项式中各项的公因式是什么？

(1) $2am(x+1)+4bm(x+1)+8cm(x+1)$；

(2) $2x(3a-b)-y(b-3a)$.

例 4 把下列多项式因式分解：

(1) $x(x-2)-3(x-2)$；　　(2) $x(x-2)-3(2-x)$.

解 (1) $x(x-2)-3(x-2)$

$=(x-2)(x-3)$.

(2) $x(x-2)-3(2-x)$

$=x(x-2)-3[-(x-2)]$

$=x(x-2)+3(x-2)$

$=(x-2)(x+3)$.

例 5 把 $(a+c)(a-b)^2-(a-c)(b-a)^2$ 因式分解.

解 $(a+c)(a-b)^2-(a-c)(b-a)^2$

$=(a+c)(a-b)^2-(a-c)(a-b)^2$

$=(a-b)^2[(a+c)-(a-c)]$

$=(a-b)^2(a+c-a+c)$

$=2c(a-b)^2$.

例 6 把 $12xy^2(x+y)-18x^2y(x+y)$ 因式分解.

解 $12xy^2(x+y)-18x^2y(x+y)$

$=6xy(x+y)(2y-3x)$.

议一议

因式分解时，如何确定多项式各项的公因式？

本节课学习的重点是，当公因式为多项式时，如何提取公因式.

在提取公因式的过程中，将添加括号，请适时提醒学生因式分解的过程和整式乘法的过程（去括号）是互逆的.

“议一议”环节可组织学生讨论如何确定多项式各项的公因式，以加深对提取公因式的理解.

补充例题

已知 $a-b-c=2$，求 $a(a-b-c)+b(c-a-b)+c(b-c-a)$ 的值.

练习

(1) $(x-y)(x+y)$.

(2) $-(x-y)^2$.

(3) $(a-b)(x-y)^2$.

(4) $2ab(a-b)(2a-3b)$.

习题3.2

A组

1. (1) $x-5+5y$.

(2) $h+2r$.

2. (1) $-2x(2x-5)$.

(2) $y(3y-5x-1)$.

(3) $3a^2b(5a-7b^2+2b)$.

(4) $2x(x^2+x+1)$.

(5) $(a+b)^2(b-a)$.

(6) $12a^2b^2(a+b^2)(2a-3b)$.

B组

3. (1) $(x-2)(y-3)$.

(2) $4xy(x+y)$.

(3) $x(x-y)(x-4)$.

4. $h=t\left(v_0+\dfrac{1}{2}gt\right)$

$=2.5\times\left(2.75+\dfrac{1}{2}\times9.8\times2.5\right)$

$=37.5$.

练习

把下列多项式因式分解：

(1) $y(x-y)+x(x-y)$；　(2) $y(x-y)+x(y-x)$；

(3) $a(x-y)^2-b(y-x)^2$；　(4) $4a^2b(a-b)-6ab^2(a-b)$.

习题 3.2

A 组

1. 在下列括号内填写适当的多项式：

(1) $-2x^2+10x-10xy=-2x($　　　　　　　　$)$；

(2) $\dfrac{1}{3}\pi r^2h+\dfrac{2}{3}\pi r^3=\dfrac{1}{3}\pi r^2($　　　　　　　　$)$.

2. 把下列多项式因式分解：

(1) $-4x^2+10x$；　(2) $3y^2-5xy-y$；

(3) $15a^3b-21a^2b^3+6a^2b^2$；

(4) $(x-1)(x^2+x+1)+(x+1)(x^2+x+1)$；

(5) $a(a+b)(b-a)-b(a+b)(a-b)$；

(6) $24a^3b^2(a+b^2)-36a^2b^3(a+b^2)$.

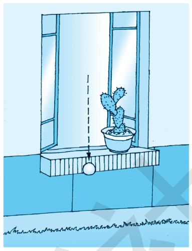
B 组

3. 把下列多项式因式分解：

(1) $x(y-3)-(2y-6)$；

(2) $(x+y)^3-(x-y)^2(x+y)$；

(3) $x(x^2-xy)-(4x^2-4xy)$.



4. 从一座楼房的房顶掉下一个小球，经过某个窗户下边框时的速度 $v_0=2.75$ m/s，再经过 2.5 s，小球着地. 已知小球降落的高度 h 满足公式：$h=v_0t+\dfrac{1}{2}gt^2$，其中 $g=9.8$ m/s²，t 为小球下落的时间. 求该窗户下边框离地的高度. 怎样计算较简便？

62　数学　七年级下册

3.3 公式法

动脑筋

如何把 x^2-25 因式分解？

我们学过平方差公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$，把这个乘法公式从右到左地使用，得 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

因此

$$\begin{array}{ccc} x^2-25=x^2-5^2 & = & (x+5)(x-5). \\ \updownarrow\ \ \updownarrow & & \updownarrow\qquad\updownarrow \\ \boxed{a^2-b^2} & = & \boxed{(a+b)(a-b)} \end{array}$$

像上面那样，把乘法公式从右到左地使用，就可以把某些形式的多项式进行因式分解，这种因式分解的方法叫做**公式法**.

例 1 把 $25x^2-4y^2$ 因式分解.

分析 $25x^2=(5x)^2$，$4y^2=(2y)^2$，$25x^2-4y^2=(5x)^2-(2y)^2$，原式即可用平方差公式进行因式分解.

解 $25x^2-4y^2$

$=(5x)^2-(2y)^2$

$=(5x+2y)(5x-2y)$.

例 2 把 $(x+y)^2-(x-z)^2$ 因式分解.

分析 将 $(x+y)$ 看成 a，$(x-z)$ 看成 b，原式即可用平方差公式进行因式分解.

解 $(x+y)^2-(x-z)^2$

$=[(x+y)+(x-z)][(x+y)-(x-z)]$

$=(2x+y-z)(y+z)$.

教学目标

1. 掌握平方差公式和完全平方公式的特点，能熟练地用公式对多项式进行因式分解.

2. 在引导学生逆用乘法公式的过程中，培养学生逆向思维的意识和能力.

教学重点、难点

在掌握平方差公式和完全平方公式的形式和特点的基础上，熟练地用公式对多项式进行因式分解.

公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$，$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ 都叫做平方差公式. 为了区别，我们把前者叫做乘法的平方差公式. 本节将乘法公式逆用，就得到因式分解的公式法.

教学时，要引导学生学会观察、分析，掌握平方差公式的结构特征，这样学生才能灵活运用.

例 1，例 2 的讲解，先让学生观察，题中哪一项相当于公式中的 a^2，哪一项相当于公式中的 b^2.

例 3 把 x^4-y^4 因式分解.

解 x^4-y^4

$=(x^2)^2-(y^2)^2$

$=(x^2+y^2)(x^2-y^2)$

$=(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$.

在因式分解时，必须进行到每一个因式都不能分解为止.

例 4 把 $x^3y^2-x^5$ 因式分解.

分析 $x^3y^2-x^5$ 有公因式 x^3，应先提出公因式，再进一步进行因式分解.

解 $x^3y^2-x^5$

$=x^3(y^2-x^2)$

$=x^3(y+x)(y-x)$.

练习

1. 填空：

(1) $9y^2=(\quad)^2$；　　(2) $\frac{36}{25}x^2=(\quad)^2$；

(3) $\frac{9}{4}t^2=(\quad)^2$.

2. 把下列多项式因式分解：

(1) $9y^2-4x^2$；　　(2) $1-25x^2$；

(3) $\frac{9}{25}m^2-16n^2$；　　(4) $(x+y)^2-(y-x)^2$；

(5) x^4-16；　　(6) $9x^4-36y^2$；

(7) a^3-ab^2.

3. 计算：

(1) $49.6^2-50.4^2$；

(2) $13.3^2-11.7^2$.

4. 手表表盘的外圆直径 $D=3.2$ cm，内圆直径 $d=2.8$ cm，在外圆与内圆之间涂有防水材料. 试求涂上防水材料的圆环的面积（结果保留 π）. 怎样计算较简便？

在例 3 中，$(x^2)^2$ 相当于公式中的 a^2，$(y^2)^2$ 相当于公式中的 b^2，x^2+y^2 在实数范围内不能再分解了，但 x^2-y^2 还可以分解. 讲完这个例题后，应让学生理解，分解因式时，要分到每一个因式都不能再分解为止.

例 4 可先用提公因式法，再用公式法进行分解.

练习

1. (1) $\pm3y$.

(2) $\pm\frac{6}{5}x$.

(3) $\pm\frac{3}{2}t$.

2. (1) $(3y+2x)(3y-2x)$.

(2) $(1+5x)(1-5x)$.

(3) $\left(\frac{3}{5}m+4n\right)\left(\frac{3}{5}m-4n\right)$.

(4) $4xy$.

(5) $(x+2)(x-2)(x^2+4)$.

(6) $9(x^2+2y)(x^2-2y)$.

(7) $a(a+b)(a-b)$.

3. (1) -80.

(2) 40.

4. $\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2-\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2$

$=\pi\left(\frac{D}{2}+\frac{d}{2}\right)\left(\frac{D}{2}-\frac{d}{2}\right)$

$=\pi(1.6+1.4)(1.6-1.4)$

$=0.6\pi(\text{cm}^2)$.

动脑筋

你能将多项式 $a^2+2ab+b^2$ 或 $a^2-2ab+b^2$ 进行因式分解吗?

我们学过完全平方公式

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,\quad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

将完全平方公式从右到左地使用,就可以把形如这样的多项式进行因式分解.

例如,$x^2+4x+4=x^2+2\cdot x\cdot 2+2^2=(x+2)^2.$

$$\boxed{a^2+2\cdot a\cdot b+b^2}=\boxed{(a+b)^2}$$

例 5 把 $9x^2-3x+\dfrac{1}{4}$ 因式分解.

分析 $9x^2=(3x)^2$,$\dfrac{1}{4}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$,$3x=2\cdot 3x\cdot\dfrac{1}{2}$,原式即可用完全平方公式进行因式分解.

解 $9x^2-3x+\dfrac{1}{4}$

$=(3x)^2-2\cdot 3x\cdot\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

$=\left(3x-\dfrac{1}{2}\right)^2.$

例 6 把 $-4x^2+12xy-9y^2$ 因式分解.

解 $-4x^2+12xy-9y^2$

$=-(4x^2-12xy+9y^2)$

$=-[(2x)^2-2\cdot 2x\cdot 3y+(3y)^2]$

$=-(2x-3y)^2.$

例 7 把 $a^4+2a^2b+b^2$ 因式分解.

解 $a^4+2a^2b+b^2$

$=(a^2)^2+2\cdot a^2\cdot b+b^2$

$=(a^2+b)^2.$

公式 $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$,$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$ 都叫做完全平方公式. 为了区别,我们把前者叫做乘法的完全平方公式. 完全平方公式是应用较多的一个公式. 教学时,要引导学生学会观察、分析,掌握完全平方公式的结构特征,在理解其意义的基础上掌握一类三项式的因式分解.

在例 5 中,要找出哪一项相当于公式中的 a^2,哪一项相当于公式中的 b^2 和 $2ab$,并把要分解的式子写成 $a^2-2ab+b^2$ 的形式.

用完全平方公式分解因式时,如果含字母的平方项是负的,先得把"-"号提出来,如例 6,先把"-"号提出来,再用完全平方公式分解.

在讲例 8 时，要提醒学生，$(x^2-1)^2$ 还可以继续分解.

练习

1. 略.

2. (1) $\left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2$.

(2) $(4y-3)^2$.

(3) $\left(x+\dfrac{1}{3}\right)^2$.

(4) $3x^2(x+y^2)^2$.

习题3.3

A组

1. (1) $(x+9)(x-9)$.

(2) $\left(\dfrac{1}{2}a+b\right)\left(\dfrac{1}{2}a-b\right)$.

(3) $(3x-3y+5)(3x-3y-5)$.

(4) $(x^2+y-2)(x^2-3y+2)$.

(5) $(x+3)(x-3)(x^2+9)$.

(6) $3x^2(x+1)(x-1)(x^2+1)$.

(7) $(a+1)(a-1)(a^2-4b+1)$.

例 8 把 x^4-2x^2+1 因式分解.

解 x^4-2x^2+1

$=(x^2)^2-2\cdot x^2\cdot 1+1^2$

$=(x^2-1)^2$

$=[(x+1)(x-1)]^2$

$=(x+1)^2(x-1)^2$.

练习

1. 填空（若某一栏不适用，填入“不适用”）：

多项式	能否表示成$(a+b)^2$或$(a-b)^2$的形式	a，b各表示什么
$x^2-10x+25$		
x^2+2x+4		
$1+y+\dfrac{y^2}{4}$		
$4x^2-12xy+9y^2$		

2. 把下列多项式因式分解：

(1) $x^2+5x+\dfrac{25}{4}$；　(2) $16y^2-24y+9$；

(3) $x^2+\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{9}$；　(4) $3x^4+6x^3y^2+3x^2y^4$.

习题 3.3

A 组

1. 把下列多项式因式分解：

(1) x^2-81；　(2) $\dfrac{1}{4}a^2-b^2$；

(3) $9(x-y)^2-25$；　(4) $(x^2-y)^2-(2y-2)^2$；

(5) x^4-81；　(6) $3x^6-3x^2$；

(7) $(a^2-2b)^2-(1-2b)^2$.

2. 把下列多项式因式分解：

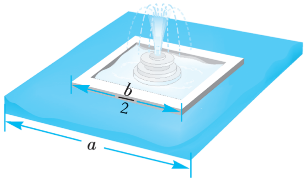
(1) $x^2+7x+\frac{49}{4}$；　(2) $m^2-10m+25$；

(3) $25x^2+20xy+4y^2$；　(4) $p^2-pq+\frac{1}{4}q^2$；

(5) $-x^2+14xy-49y^2$；　(6) $x^4-8x^2y^2+16y^4$；

(7) x^4+4x^2+4.

3. 如图，在边长为 a 的正方形空地的中间，有一个边长为 $\frac{b}{2}\left(a>\frac{b}{2}\right)$ 的正方形水池. 若在空地上种草，试问：草地的面积是多少？如果 $a=124$ m，$b=48$ m，那么草地的面积是多少？怎样计算较简便？



(第 3 题图)

B 组

4. 把下列多项式因式分解：

(1) $4x^2-(y^2-2y+1)$；

(2) $(x^4+4x^2+4)-4y^2$；

(3) $(x-4)(x+1)+3x$；

(4) $(x+y)^2+12(x+y)+36$.

5. 已知 $9m^2+xm+16$ 可以用完全平方公式进行因式分解，求 x.

6. 在日常生活中，如取款、上网都需要密码. 有一种用因式分解产生的密码，方便记忆. 其原理是：对于多项式 x^4-y^4，其因式分解的结果是 $(x^2+y^2)\cdot(x+y)(x-y)$，若取 $x=9$，$y=9$，则各个因式的值是 $x^2+y^2=162$，$x+y=18$，$x-y=0$，于是就把"162180"作为一个六位数的密码. 对于多项式 x^3-xy^2，若取 $x=21$，$y=5$，用上述方法产生的密码是多少？

2. (1) $\left(x+\frac{7}{2}\right)^2$.

(2) $(m-5)^2$.

(3) $(5x+2y)^2$.

(4) $\left(p-\frac{1}{2}q\right)^2$.

(5) $-(x-7y)^2$.

(6) $(x+2y)^2(x-2y)^2$.

(7) $(x^2+2)^2$.

3. $a^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2=\left(a+\frac{b}{2}\right)\left(a-\frac{b}{2}\right)$

$=(124+24)(124-24)$

$=14\ 800(\mathrm{m}^2)$.

B组

4. (1) $(2x+y-1)(2x-y+1)$.

(2) $(x^2+2y+2)(x^2-2y+2)$.

(3) $(x+2)(x-2)$.

(4) $(x+y+6)^2$.

5. ± 24.

6. $x^3-xy^2=x(x+y)(x-y)$.

当 $x=21$，$y=5$ 时. 密码为 212616.

讲解此题时，可介绍因式分解的一个应用就是生成密码.

小结与复习

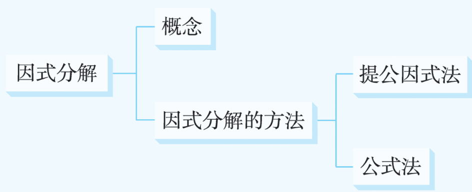
回顾

1. 什么叫多项式的因式分解？因式分解与多项式的乘法有什么关系？

2. 什么叫公因式？怎样确定公因式？

3. 因式分解有哪些方法？写出公式法分解因式时所用的公式.

本章知识结构



注意

1. 运用整式乘法可以检验因式分解的结果是否正确.

2. 提公因式时，如果多项式的首项为负数，一般先把负号提出来，并把括号内的各项变号.

3. 因式分解一定要进行到每一个因式都不能再分解为止. 如 x^4-1 可以分解为 $(x^2+1)(x^2-1)$，但是 x^2-1 还可以分解为 $(x+1)(x-1)$，于是 $x^4-1=(x^2+1)(x+1)(x-1)$.

小结与复习旨在让学生通过思考与交流，梳理本章所学知识，加深对本章学习内容的理解，形成知识体系. 同时，让学生在梳理的过程中提高自己的归纳、概括能力.

在“回顾”栏目中，教材通过问题的形式引导学生复习本章各节中的主要内容，教师应让学生独立回顾思考，用自己的语言来表述，而不是简单重复教材的内容，只要学生说得合理，教师都应给予充分肯定，然后再与学生交流.

教材通过框图的形式呈现出本章的知识结构，这样便于学生掌握本章所学知识的脉络与相互联系.

“注意”栏目中列举了学习本章知识时要留意的地方，这些在前面的学习中教师和教材都有强调，在这里重提这些注意问题，便于学生整体回顾. 建议教师在小结与复习中通过列举实例来说明要注意的事项，而不是空洞地说明.

教师在给学生讲评时，应给学生归纳因式分解的以下几个特点：

(1) 结果一定是几个因式积的形式；

(2) 每个因式必须是整式；

(3) 各因式要分解到不能再分解为止.

还要使学生理解，因式分解与整式乘法是互逆的变形. 这一点是本章教学的关键.

复习题 3

A 组

1. 把下列多项式因式分解：

（1）x^2-xy+x；（2）m^2n-mn^2+mn；

（3）$9x^3y^3-21x^3y^2+12x^2y^2$；（4）$x^2(x-y)+y^2(x-y)$.

2. 把下列多项式因式分解：

（1）x^2-9；（2）$49m^2-81n^2$；

（3）$x^2-\frac{1}{144}$；（4）$\frac{1}{9}a^2-\frac{1}{25}b^2$.

3. 把下列多项式因式分解：

（1）$4x^2+20x+25$；（2）x^4+6x^2+9；

（3）x^4-18x^2+81；（4）$(x-y)^2+2(x-y)w+w^2$；

（5）$4a^4+12a^2b^2+9b^4$.

4. 把下列多项式因式分解：

（1）$-6x^2+12x-6$；（2）$-9x^2+24xy-16y^2$；

（3）$a^2(a-b)+2ab(a-b)+b^2(a-b)$；（4）$(x+y+1)^2-(x-y+1)^2$；

（5）x^4-16；（6）x^4-16y^4.

5. 计算：

（1）$17\times0.11+37\times0.11+46\times0.11$；（2）$256^2-156^2$.

B 组

6. 把下列多项式因式分解：

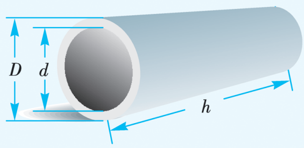
（1）$y^2-(x^2-10x+25)$；（2）$(a^2-9b^2)+(a-3b)$；

（3）$(x^3-x^2)+(x-1)$；（4）$ax-bx-ay+by$.

7. 把下列多项式因式分解：

（1）$(a-b)(x-y)-(b-a)(x+y)$；（2）$x^3z-4x^2yz+4xy^2z$.

8. 一种混凝土排水管，其形状为空心的圆柱体，它的内径 $d=68$ cm，外径 $D=88$ cm，长 $h=200$ cm. 浇制一节这样的排水管需要多少立方米的混凝土（结果保留 π）？怎样计算较简便？



（第 8 题图）

复习题3

A组

1. （1）$x(x-y+1)$.

（2）$mn(m-n+1)$.

（3）$3x^2y^2(3xy-7x+4)$.

（4）$(x-y)(x^2+y^2)$.

2. （1）$(x+3)(x-3)$.

（2）$(7m+9n)(7m-9n)$.

（3）$\left(x+\frac{1}{12}\right)\left(x-\frac{1}{12}\right)$.

（4）$\left(\frac{1}{3}a+\frac{1}{5}b\right)\left(\frac{1}{3}a-\frac{1}{5}b\right)$.

3. （1）$(2x+5)^2$.

（2）$(x^2+3)^2$.

（3）$(x+3)^2(x-3)^2$.

（4）$(x-y+w)^2$.

（5）$(2a^2+3b^2)^2$.

4. （1）$-6(x-1)^2$.

（2）$-(3x-4y)^2$.

（3）$(a-b)(a+b)^2$.

（4）$4y(x+1)$.

（5）$(x+2)(x-2)(x^2+4)$.

（6）$(x+2y)(x-2y)(x+4y^2)$.

5. （1）11.

（2）41 200.

B组

6. （1）$(y+x-5)(y-x+5)$.

（2）$(a-3b)(a+3b+1)$.

（3）$(x-1)(x^2+1)$.

（4）$(a-b)(x-y)$.

7. （1）$2x(a-b)$.

（2）$xz(x-2y)^2$.

8. $\frac{\pi}{4}h(D^2-d^2)$

$=\frac{\pi}{4}h(D+d)(D-d)$

$=\frac{\pi}{4}\times200\times156\times20$

$=156\,000\pi(\text{cm}^3)$.

9. 原式$=4a^2$.

当 $a=\frac{1}{2}$，$b=1$ 时，原式$=1$.

10. 4.

C组

11. （1）$(x+2y)(x-2y+1)$.

（2）$(x+y-2)^2$.

（3）$x^{n-1}(x-1)^2$.

12. （1）不能.

（2）$1\times6=2\times3=6$，$5=2+3$.

（3）x^2+5x+6

$=x^2+(2+3)x+2\times3$

$=(x+2)(x+3)$.

（4）关键在于找到两个数2，3，使得 $2+3=5$，$2\times3=6$.

（5）因为 $1+(-2)=-1$，$1\times(-2)=-2$.

所以 $x^2-x-2=(x+1)(x-2)$.

《课标》的内容设置中没有“十字相乘法”，考虑到与高中阶段的衔接，我们在复习题的C组第12题中简单介绍“十字相乘法”，供学有余力的学生学习.

限于篇幅的限制，教材只介绍了形如 $x^2+(a+b)x+ab$ 的多项式的因式分解.

9. 先化简，再求值：

$(a+b)^2+2(a+b)(a-b)+(a-b)^2$，其中 $a=\frac{1}{2}$，$b=1$.

10. 已知 $2x-1=3$，求代数式 $(x-3)^2-2(x-3)+1$ 的值.

C 组

11. 把下列多项式因式分解：

（1）x^2-4y^2+x+2y；

（2）$(x+y)^2-4(x+y-1)$；

（3）$x^{n+1}-2x^n+x^{n-1}$（n 是大于1的正整数）.

12. 你能把多项式 x^2+5x+6 因式分解吗？

（1）上式能利用完全平方公式进行因式分解吗？

（2）常数项6是哪两个因数的乘积？一次项系数5是否等于6的某两个因数的和？

（3）由多项式乘法，$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$，将该式从右到左地使用，即可对形如 $x^2+(a+b)x+ab$ 的多项式进行因式分解.

多项式 $x^2+(a+b)x+ab$ 的特征是二次项系数为1，常数项为两数之积，一次项系数为这两数之和.

你能据此将 x^2+5x+6 写成两个一次多项式的乘积吗？

$x^2+(\_\_\_\_+\_\_\_\_)x+\_\_\_\_\times\_\_\_\_$

$=(x+\_\_\_\_)(x+\_\_\_\_)$.

请把填上数后的两个一次多项式相乘，验证乘积是否等于 x^2+5x+6.

（4）从第(3)题，你能看出把 x^2+5x+6 进行因式分解的关键步骤是什么吗？

（5）你能运用上述方法将多项式 x^2-x-2 进行因式分解吗？

Ⅲ. 本章相关链接

因式分解

如果多项式 A 能被多项式 B 整除（$B\neq 0$），也就是说存在一个多项式 C，使等式 $A=B\times C$ 成立，那么多项式 B，C 就叫做多项式 A 的因式.

如果一个多项式 A 是在给定的数域上研究的，并且 d 是这个数域上的一个不等于零的数，那么 $A=d\left(\dfrac{1}{d}\times A\right)$. 这就是说，在给定的数域上，每个不等于零的数 d，以及每一个与给定的多项式 A 只差一个非零数字因数的多项式，都是多项式 A 的因式，这些因式叫做多项式 A 的当然因式；多项式 A 的一切其他因式叫做非当然因式.

如果一个次数大于零的多项式在给定的数域上只有当然因式，就说这个多项式在这个数域上是既约的. 例如 $a+b$，$a-b$，a^2+b^2 等在有理数域上是既约的.

因式分解的定义：把一个多项式化成几个既约多项式的积的形式，叫做因式分解.

因式分解要求达到以下两个标准：

（1）因式必须都是既约多项式，也就是当分解得到的因式还能分解时，就要继续分解下去，直到每一个因式都不能分解为止.

这里，一个多项式是否既约，与在什么数域上讨论有关. 例如，在有理数范围内多项式 a^2-5 是既约的，而在实数范围内不是既约的，因为它能分解为 $(a+\sqrt{5})(a-\sqrt{5})$；a^2+5 在有理数、实数范围内都是既约的，但在复数范围内不是既约的，因为它能分解为 $(a+\mathrm{i}\sqrt{5})(a-\mathrm{i}\sqrt{5})$.

（2）各因式必须是多项式. 由于我们可以把单项式看成是多项式的特殊情况，所以有的因式也可以是单项式. 例如 $4a^2+8ab-12a=4a(a+2b-3)$，$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ 等都是符合要求的，但是像 $a^2-b^2=(a+b)^2\times\dfrac{a-b}{a+b}$ 或 $a^2-b^2=(a+b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ 等都不符合要求，因为上述二式中有的因式已经不是多项式了.

当我们把 $6x^2+13x+6$ 分解因式时，可以写成如下各种形式：

$$6x^2+13x+6=6\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)$$

$$6x^2+13x+6=(2x+3)(3x+2)$$

$$6x^2+13x+6=-3(-2x-3)\left(x+\frac{2}{3}\right)$$

……

这些等式右边的每一个因式都是既约多项式，但这些不同形式的因式分解中的既约多项式或者对应相等，或者只相差数字因数，一般认为这样的分解结果是相同的. 从这个意义上讲，尽管把一个多项式分解因式的方法不同，但是同一个数域上化为既约因式以后，结果是唯一的.