编写说明

本书是《普通高中课程标准实验教科书·数学第三册(必修)》的教师教学用书. 编写时按教科书分章、节安排，每章首先阐述了该章的教学目标、教材说明、教学建议、课时安排建议，然后按教科书分节编写，每节内容包括教材线索、教学目标、教材分析、教学建议、参考例题、相关链接，在每章的最后给出教科书中练习、习题和复习题的参考解答.

编写此书的目的是为了帮助教师更好地把握教科书，包括教材线索、教学目标、教材分析、内容结构及教学中应予以关注的重点和难点，所提教学建议及参考例题仅供教师在教学过程中参考. 在相关链接中所提供的短文是编者精心撰写并与该章、节相关的内容，旨在扩大教师的知识视野，使教师用较高的观点把握教材，不要求学生掌握.

希望本书能成为教师使用教科书的好帮手，恳请广大教师在使用过程中提出宝贵意见和建议. 谢谢!

编　者

目　　录

第 6 章　立体几何初步

一、教学目标

通过观察具体实例，尤其是从整体观察入手，引导学生认识空间图形，了解一些简单几何体的表面积和体积的计算方法.

1. 能认识柱、锥、台、球及简单几何体的结构特征.

2. 能画出简单空间图形的三视图，会用斜二测画法画出它们的直观图.

3. 了解柱、锥、台、球的表面积和体积的计算公式（不要求记忆）.

4. 借助长方体模型，在直观认识和理解空间点、线、面的位置关系的基础上，抽象出空间线、面位置关系的定义，并了解本章中的四个公理.

5. 通过直观感知、操作确认，掌握线面、面面平行及垂直的判定定理和性质定理.

6. 能运用已获得的结论证明一些空间位置关系的简单命题.

二、教材说明

一、本模块的内容与地位作用

几何学是研究现实世界中物体的形状、大小与位置关系的数学学科. 立体几何是几何学的重要组成部分. 为了使学生能够从现实世界中的具体实物抽象出几何图形，建立点、直线和平面的概念，培养他们的空间观念和想象能力，以及运用这些几何知识解决问题的能力，《普通高中数学课程标准（实验稿）》把立体几何的教学分成两部分. 第一部分是在必修课程的立体几何初步中，将从现实世界中具体实物的整体观察入手，认识最基本的空间几何图形（柱、锥、台、球）及其直观图的画法，并了解这些简单几何体的表面积与体积的计算方法. 然后，再以长方体为载体，直观认识和理解空间点、直线、平面的概念及其相互位置关系；通过直观感知、操作确认、思辨论证，认识和理解有关直线和平面平行、垂直的性质与判定，论证一些有关空间直线和平面位置关系的简单命题. 第二部分是在选修课程的系列 2－1 中，与空间中向量的学习相结合，进一步论证和解决一些有关空间图形的位置关系和度量问题.

本册教科书的第六章的第一部分（即 6.1），通过较多的实例，引导学生观察自己身边现实世界中的建筑和实际物体，认识它们都是由柱、锥、台、球及其简单组合体构成的立体图形，并引导学生认识柱、锥、台、球的结构特征，让学生能够运用这些特征去描述现实生活中简单物体的结构. 在这一部分中，还要求学生学习绘制简单空间图形的三视图和直观

图，了解柱、锥、台、球的表面积和体积计算公式，目的是为了帮助学生进一步发展空间观念和想象能力，画图的要求不像学习机械制图那样严格，计算公式也不要求学生记忆.

本册教科书的第六章的第二部分中，改变了以往教学立体几何的顺序，没有从抽象的概念出发，推导点、直线和平面的相互位置关系，而是借助直观具体的实物或长方体模型，让学生通过一系列的实际活动，直观感知、操作确认、思辩论证，认识点、直线和平面的垂直与平行等相互位置关系. 使学生经历了从直观到抽象，从特殊到一般的学习过程，既学习了立体几何的知识，发展空间观念，又循序渐进地培养了学生的抽象思维和逻辑推理能力.

二、编写中考虑的几个问题

1. 立体几何的内容安排，遵循从整体到局部、具体到抽象的原则. 先从现实生活中的实物讲空间几何体，再从空间几何体的整体结构，讲构成空间几何体的点、直线、平面之间的位置关系.

与以往教学立体几何的内容体系相比，本册教科书立体几何的内容体系结构有重大改革. 以往立体几何教学，常从研究点、直线和平面开始，先讲它们之间的位置关系和有关公理、定理，再研究由它们组成的几何体的结构特征、几何体的体积、表面积等等，基本上是从局部到整体. 现在，是先从对空间几何体的整体感受入手，再研究组成空间几何体的点、直线和平面. 这种安排有助于发展学生的空间观念、培养学生的空间想象能力、几何直观能力，适当减轻几何论证的难度，降低立体几何学习入门的门槛，提高学生学习立体几何的兴趣. 本教材在讲点、直线和平面的关系时也不是从元素入手，而是从关系入手，教材的两大节的标题分别是“平行关系”和“垂直关系”. 这些都和传统教材不一样.

第一部分（即 6.1）和第二部分（即 6.2）是一个有机的整体，第二部分讲完后，可引导学生从点、直线、平面的角度重新认识空间几何体，把握空间几何体的结构特征，对空间几何体的结构特征有更本质的认识.

2. 强调几何直观，渗透公理化思想，进行适当的几何推理

立体几何实际上与学生的联系非常密切，很多实物都可以看成是各式各样的空间几何体，这些物体的棱与棱、棱与面、面与面之间的关系，实际上就是直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系. 学习时，一方面要引导学生从生活实际出发，把知识与周围的实物联系起来，另一方面，要引导学生经历从现实的生活中抽象出空间图形的过程，注重探索空间图形位置关系，抽象概括它们的判定与性质. 比如，在有关直线与直线、直线与平面以及平面与平面的平行或垂直的判定定理的教学中，要注重引导学生通过观察、操作、有条理的思考和推理等活动，从多种角度认识有关直线与直线、直线与平面以及平面与平面的平行或垂直的关系；在性质定理的教学中，同样不能忽视学生从实际问题出发，进行探究的过程. 要引导学生借助图形直观，通过归纳、类比等合情推理，来探索直线、平面的平行与垂直等性质及其证明，然后再一步步地过渡到比较严格的证明. 尤其是在 6.1 的教学中要特别注意，这里所涉及到的平行、垂直等都是直观的、模糊的，不要提前在理论上去深究.

立体几何在构建直观、形象的数学模型方面有其独特作用．图形的直观，不仅为学生感受、理解抽象的概念提供了有力的支撑，而且有助于培养学生的合情推理和演绎推理能力．

欧几里得公理体系把几何与逻辑结合起来，几何就与演绎推理结下了不解之缘，很久以来几何学就成为训练逻辑推理的素材．然而就推理来说，既有合情推理，又有演绎推理，而且从数学自身发展的过程来看，即使演绎推理也并非“几何”所独有，它广泛存在于数学的各个分支中．20 世纪 80 年代以来，国际数学教育对几何推理的要求发生了一些变化，从纯粹的演绎推理转向较少的演绎推理，更多地强调从具体情境或前提出发，进行合情推理；从单纯强调几何的逻辑推理，转向更全面地体现几何的教育价值，特别是几何在发展学生空间观念，以及观察、操作、试验、探索、合情推理等“过程性”方面的教育价值．本册教科书的第一、二两部分（即 6.1 和 6.2 两大节）就特别注意，使学生一步一步地从特殊到一般，从具体到抽象，认识空间直线和平面的位置关系，并在推理过程中逐步渗透公理化思想，养成言必有据的理性思维精神，但同时，本章对推理论证的要求又比传统教材要求要低．

三、教学建议

1．认真把握《普通高中数学课程标准（实验）》的教学要求

与以往的立体几何教学要求相比，本册教科书在几何推理证明方面的教学要求大大降低了，削弱了以演绎推理为主要形式的定理证明，减少了定理的数量，删去了大量的几何证明题，淡化了几何证明的技巧，对于直线、平面平行和垂直的判定定理只需通过直观感知、操作确认、思辩论证的方式归纳得出，不进行系统的推理证明．同时大大地加强了对于空间图形的整体认识和把握，从看实物到想图形、再从三视图或直观图到想象空间图形；然后从空间图形的整体，到把握直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系，更加强调发展学生的空间想象能力，以及联系实际运用几何知识，观察和解决现实世界中有关图形的问题．

2．承上启下，注意相关知识内容的联系．通过不同数学内容的联系与启发，强调类比、推广、特殊化、化归等思想方法的运用

本册内容的起点是义务教育阶段“空间与图形”的相关知识，特别是“空间几何体”的内容．在《全日制义务教育数学课程标准（实验稿）》“空间与图形”的视图与投影内容中包括：(1) 会画基本几何体（直棱柱、圆柱、圆锥、球）的三视图（主视图、左视图、俯视图），会判断简单物体的三视图，能根据三视图描述基本几何体或实物原型；(2) 了解直棱柱、圆锥的侧面展开图，能根据展开图判断和制作立体模型；(3) 了解基本几何体与其三视图、展开图（球除外）之间的关系，通过典型实例，知道这种关系在现实生活中的应用（如物体的包装）；(4) 通过实例了解中心投影和平行投影．

教学时，应适当回顾上述知识内容，在义务教育阶段学习的基础上，进一步提高对空间几何体的认识．按照“画法”→“算法”→“证法”展开知识内容．

在每章“小结”中，利用数学内容的内在联系，使不同的数学内容相互沟通，提高学生对数学的整体认识水平．特别地，在教科书中强调类比、推广、特殊化、化归等思想方法．

3. 关注现代信息技术的运用

(1) 通过现代信息技术，如计算机、网络等展示丰富的图片，让学生感受大量的实物，抽象出空间几何体及其结构特征.

(2) 运用现代信息技术和有关软件，制作一些课件，如动态演示空间点、直线、平面之间的位置关系，空间中的平行与垂直关系，等等，我们在本章特别安排了数学建模和数学实验的内容供学生阅读，有条件的学校，老师可以给学生演示或让学生利用计算机进行具体的实验.

4. 需要注意的问题：

(1) 本章主要内容是借助长方体研究空间的线线、线面、面面的位置关系，在位置关系中着重研究的是平行和垂直关系. 一定要借助实物模型（教具或者充分利用我们身处的教室以及学生的课桌、椅子、粉笔盒等）或计算机软件呈现空间几何体，去认识其结构特征，反过来，运用这些特征描述现实生活中简单物体的结构.

(2) 通过实际模型的认识，注意将自然语言转化为图形语言和符号语言. 例如，在对长方体直观感知的基础上，认识空间中一般的点、线、面的位置关系，通过图形的观察、实验和说理，进一步了解平行、垂直关系的基本性质及判定方法.

(3) 关于线线、线面、面面位置关系的判定定理和性质定理是本章的主要内容，运用这些定理时，要弄清定理的题设和结论，要敢于将题设和结论换位思考或部分换位多角度思考，从而熟练地掌握这些定理，并能灵活运用.

(4) 立体几何问题中的点、线、面关系，往往通过在某些特定的面上来研究，从而将空间问题转化为我们熟悉的平面问题来解决，这种转化的思想方法在本章显得尤其重要.

(5) 教材删除了传统意义上重要的三垂线定理（实际上可以通过线面垂直与线线垂直进行转换）等许多内容，直线与平面平行的判定定理等许多传统的重要定理也没有要求掌握证明了. 我们必须丢掉过去那些传统的内容，不要花过多精力去补充，否则就偏离了新课改的方向.

5. 关注“观察与思考”、“多知道一点”、“想象与思考”、“观察、想象与思考”、“问题探索”、“数学实验”和“数学建模”等栏目以及边空和边空小字的作用

本套教科书在体例结构上有重大改革，增添了许多栏目，教学中要注意发挥这些栏目以及边空的作用.

问题是创新的关键，在知识形成过程的“关键点”上，在运用数学思想方法产生解决问题策略的“关节点”上，在数学知识之间联系的“联结点”上，在数学问题变式的“发散点”上，在学生思维的“最近发展区”内，通过“观察与思考”、“多知道一点”、“想象与思考”、“观察、想象与思考”、“问题探索”等栏目，提出恰当的、对学生数学思维有适度启发的问题，引导学生的思考和探索活动，使他们经历观察、实验、猜测、推理、交流、反思等理性思维的基本过程，切实改进学生的学习方式.

设置“数学实验”和“数学建模”等栏目，为学生提供丰富的具有思想性、实践性、挑

战性的，反映数学本质的选学材料，拓展学生的数学活动空间，发展学生“做数学”、“用数学”的意识.

在边空中，提出数学知识形成过程中的具体问题，以旁白方式强调重要的数学思想方法或知识点.

四、课时安排建议

本章教学时间约需 **20** 课时，具体分配如下（仅供参考）：

6.1　空间的几何体

6.1.1　几类简单的几何体	2 课时
6.1.2　在平面上画立体图形	2 课时
实习作业	2 课时
6.1.3　面积和体积公式	2 课时

6.2　空间的直线和平面

6.2.1　点、线、面的位置关系	3 课时
6.2.2　平行关系	3 课时
6.2.3　垂直关系	3 课时
小结与复习	3 课时

6.1 空间的几何体

6.1.1 几类简单的几何体

教材线索

本小节在观察现实生活中的实际照片的基础上，在回忆小学和初中的相关几何知识中引入，通过寻找实际图片上类似于我们知道的几何体开始，引入有关概念. 本节的所有概念都是观察出来的，更多的是学生通过观察总结出来，最初允许学生的说法不够严密，要大胆鼓励学生用自己的语言说出来，在此基础上再逐步规范化和严密化. 实际上有些概念是暂时无法严密化的，比如平面的平行我们暂时就无法严格的说.

教学目标

1. 要能较准确地识别所给出的几何体.
2. 知道几种常见几何体的定义.

教材分析

1. 重点：学生在小学及初中学习的基础上，归纳出各种几何体的较准确的概念，并能够准确地判断给出的各种几何体.

2. 难点：从在实际生活中的各种物体中抽象出一般性的几何体的概念，以及对有关几何体的判断.

3. 本节所涉及到的几类简单的几何体，学生在小学或初中时已经有所了解，本节要做的是进一步严格的定义，但又不完全是严格的定义，比如平面的平行我们暂时就无法严格的定义.

教学建议

本节的重点和难点都在于概念，为此，在给出定义时，要先让学生观察各种实际中的物体，除教材上的照片外，老师可以多找些照片或者实物给学生观察，引导学生通过观察后大胆地猜测，归纳出一般的几何体的概念，在这个过程中老师不能心急，不要急于说出结论，要不断引导学生修正不全面或不完善的说法.

参考例题

例 1　指出棱柱、棱锥、棱台之间的关系.

提示： 棱柱的下底不变上底缩小就可以变成棱台，再变小为一点就是棱锥. 建议用电脑动画或实物展示帮助理解.

例 2　指出圆柱、圆锥、圆台之间的关系.

提示： 圆柱的下底不变上底缩小就可以变成圆台，再变小为一点就是圆锥. 建议用电脑动画或实物展示帮助理解.

例 3　将一块正方体豆腐切 3 刀，最少被分成几块，最多能被分成几块？

提示： 最少被分成 4 块（3 刀平行地从一个方向切），最多被分成 8 块（3 刀从 3 个不同的方向切，使每刀都能够将原来的豆腐一分为二）.

例 4　一刀切一个正方体，切口最多边时是几边？

提示： 当这刀切到正方体的 6 个面时是 6 边形.

相关链接

平面几何与立体几何的类比

类比是根据两个对象在某些方面的相同或相似，推出它们在其他方面的相同或相似点的一种推理方法.

由于类比推理所得结论的真实性并不可靠，因此它不能作为严格的数学推理方法，但它是提出新问题和获得新发现取之不竭的源泉.

平面几何和立体几何在研究对象和方法、构成图形的基本元素等方面是相同或相似的，因此，在两者之间进行类比是研究它们性质的一种非常有效的方法.

为了对二者进行类比，可以在它们的基本元素之间建立如下的类比关系：

平面		空间
点	⟶	点或直线
直线	⟶	直线或平面
平面图形	⟶	平面图形或立体图形

（1）由平面几何定理类比到立体几何命题，再尝试判断该命题是否成立.

例，如图 6－1，对勾股定理进行类比.

（2）由立体几何问题，用类比的方法构造辅助的平面几何问题，通过这个问题的解决，类比猜想立体几何问题的解决方法.

例，如图 6－2，求证：正四面体内任一点到四个面的距离之和为定值.

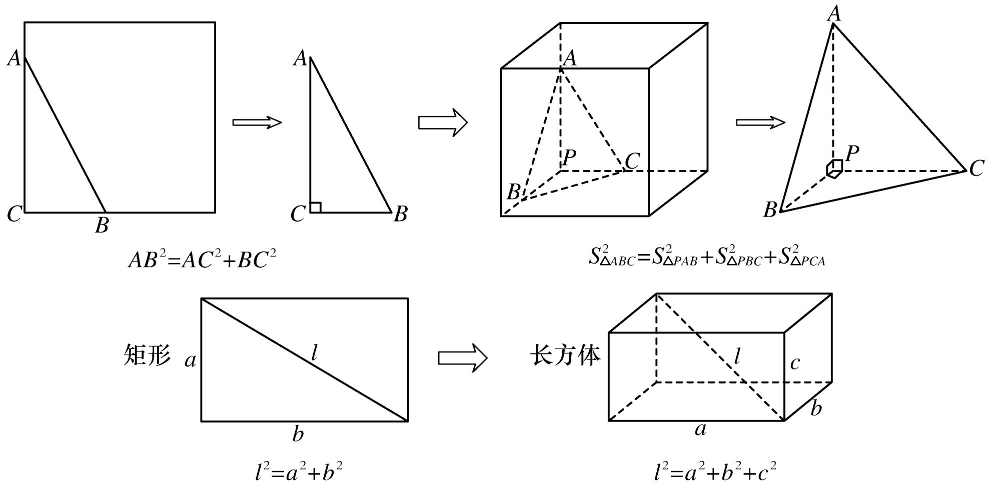


图 6－1

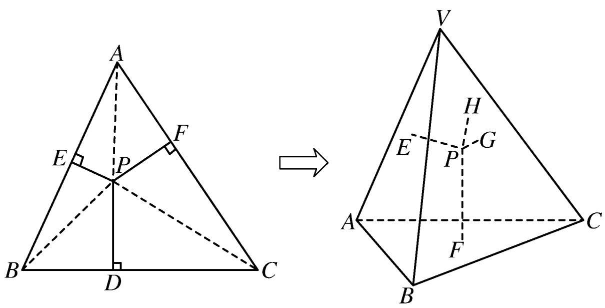


图 6－2

第一步　类比构造一个辅助平面几何问题“求证：正三角形内任意一点到三边的距离之和为定值”.

第二步　通过分割的方法，利用面积的关系解决平面几何问题.

即　$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PCA}$，

$\frac{1}{2}a\cdot h=\frac{1}{2}a\cdot PE+\frac{1}{2}a\cdot PD+\frac{1}{2}a\cdot PF$，

∴　$PE+PD+PF=h$.

其中 h 为三角形高.

第三步　类比猜想，所给立体几何问题是否也可以通过分割的方法，利用体积的关系来证明？

这个猜想是正确的，证明如下：

∵　$V_{V\text{-}ABC}=V_{P\text{-}ABV}+V_{P\text{-}ABC}+V_{P\text{-}ACV}+V_{P\text{-}BCV}$，

即　$\frac{1}{3}h\cdot S=\frac{1}{3}PE\cdot S+\frac{1}{3}PF\cdot S+\frac{1}{3}PH\cdot S+\frac{1}{3}PG\cdot S$.

∴　$PE+PF+PH+PG=h$.

其中 h 为正四面体的高，S 为一个侧面正三角形的面积.

勤于运用类比推理去探索和研究问题，有利于创造性思维能力的培养.

6.1.2 在平面上画立体图形

教材线索

三视图是学生在初中学习过的，在复习三视图的基础上，引导学生画直观图．在画直观图时，是先具体地画，然后再总结出一般性的方法．本节还包括中心投影和平行投影，这两部分也是学生在初中已经知道的，本节是进一步理论化，但是又没有去很系统和十分完善，目的还是让学生了解有关知识就是了．

教学目标

1．会画三视图和直观图；

2．能够判断中心投影和平行投影．

教材分析

1．重点：通过师生具体的画图掌握用斜二侧画法画直观图，并归纳出画法的规则．

2．难点：通过三视图认识立体图，仅给出三视图学生要能够想象出立体图大概是怎么样的，初中画三视图时是定性而没有定量地画，对接受能力较强的同学要让他们注意各边的长短和各角的大小．

教学建议

由于三视图是学生在初中学习过的，一定要在复习三视图的基础上，引导学生画直观图，最好是先让学生画三视图，并且选题比初中时难些，还要有给出三视图后让学生口头说出其大概形状和摆法的训练．在画直观图时，一定是先具体地画，最好是老师先画一个，再让同学依样类似地画一个，然后再同同学一起总结出一般性的方法．在总结时一定要给学生足够的时间，要有耐心逐步地修改学生的说法，千万不要直接由老师给出，为此，最好不要让学生先看书，而是上完课后再让学生看书．

在讲解中心投影和平行投影时，要多结合实际生活进行讲解，比如手电筒，太阳光，日光灯等，对这些学生身边的东西进行分析，学生更能理解和接受．这部分虽然是在进一步理论化，但是仍然是在理论上不要过度地深化提高，重在直观，在感性认识．

参考例题

例 1　画一个有手柄的水杯的三视图．

例 2 画一个三棱锥的三视图（拿一个具体的模型，建议用正四面体）.

注意：由于三棱锥具体放置方向不同，其三视图也有区别，尤其是定量的分析时更要注意，无论我们怎么摆放，实际上我们的三视图都是没有原三棱锥的任何一个面的，因为我们所得的三角形的高都是原来的三棱锥的高.

例 3 画一个长、宽、高分别为 4 cm，3 cm，5 cm 的长方体的直观图.

例 4 画一个三棱锥的直观图.

注意：怎样将边分解为平行于 x 轴和平行于 y 轴．然后确定相应的点，再连接出有关线段.

以下两例要用正等测画法：

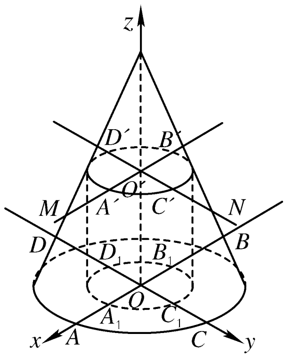
例 5 一个圆锥的底面半径是 1.6 cm，在它的内部有一个底面半径为 0.7 cm，高为 1.5 cm 的内接圆柱．画出它们的直观图.

画法：（1）画轴　取 x 轴、y 轴、z 轴，使它们两两相交成 120°角，如图 6 - 3（甲）.

（2）画底面　以 O 为中心，按 x 轴、y 轴画半径等于 1.6 cm 的圆的直观图.

（3）画内接圆柱　以 O 为中心，按 x 轴、y 轴画一个半径等于 0.7 cm 的圆的直观图，然后在 z 轴上，取线段 $OO'=1.5$ cm，过点 O' 作 $O'M\parallel x$ 轴，$O'N\parallel y$ 轴，再以 O' 为中心，按 $O'M$，$O'N$ 画一个半径相同的圆的直观图．画圆柱的两条母线，使它们与这两个椭圆相切.

（4）成图　画圆锥的两条母线与椭圆 ACB 和 $A'C'B'$ 相切，再加以整理，就得到所要画的直观图，如图 6 - 3（乙）.



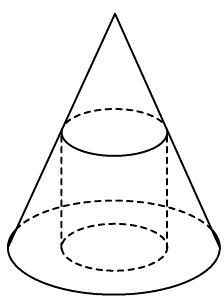


图 6 - 3

球的直观图，一般也采用正等测画法，这时球的轮廓是一个圆.

例 6 画半径为 R 的球的直观图.

画法：（1）画轴　经过点 O 画 x 轴、y 轴、z 轴，轴间角为 120°，如图 6 - 4.

（2）画大圆　以 O 为中心，分别按 x 轴、y 轴，y 轴、z 轴，z 轴、x 轴画半径为 R 的圆的直观图（三个椭圆）.

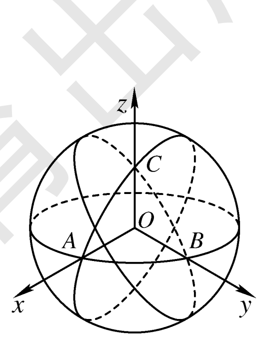


图 6 - 4

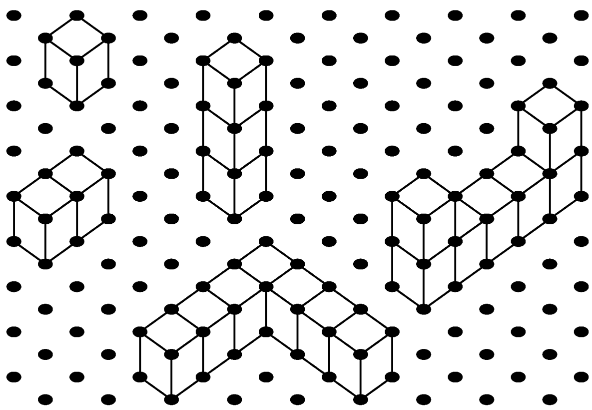
(3) 成图　以点 O 为圆心画一个圆与三个椭圆都相切，最后经过整理，就得到球的直观图.

相关链接

三维空间的表示

我们经常需要把物体画在纸上，作三维空间的表示. 从 15 世纪开始，就有艺术家研究这个问题，因而发展出投影几何，即研究透视图的数学. 后来又发展出绘制建筑物及其结构的标准方法，供建筑师及工程师使用. 本课题可供学生做工艺及设计的练习.

透视法



(1) 请查阅意大利画家乌切罗 (Paolo Uccello)，及德国艺术家丢勒 (Albrecht Dürer) 等人早期使用透视法的例子.

(2) 画出某些物体的透视图，例如由正方形瓷砖铺成的地板的透视图.

(3) 正方形的影子可以变成什么形状?

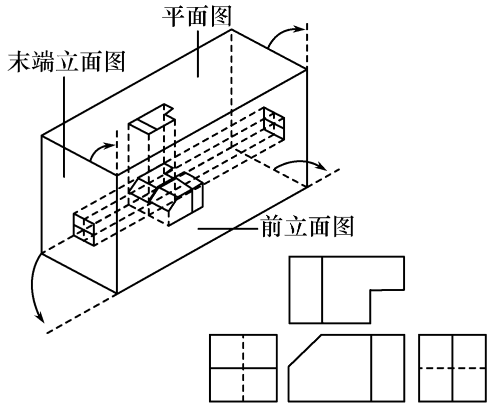
等距画法

第二种表示立体物体的常用方法就是在等距图纸 (等边三角形的格子) 上绘图.

课题：利用互相连接的立方体，探寻有多少种方法可以组合 4 个立方体，并把它们画在等距图纸上. 更难一点的课题：以 5 个立方体重做此题.

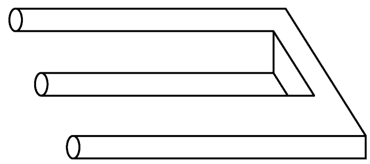
平面图及立面图

建筑师及工程师所使用的平面图及立面图的标准方法，是在 1795 年由法国人蒙日 (Gaspard Monge) 发明的. 他把物体想象成置于玻璃盒子内，然后将投影画在盒子的各面上.



课题：设计一栋房屋，画出其平面图及立面图.

不可能的物体



我们的眼睛很容易被二维的图欺骗，上图就是一个很著名的例子.

荷兰画家埃舍尔（M. C. Escher）据此曾创作了一些有趣的图画，可参考埃舍尔的画集（The Graphic Work of M. C. Es-cher），找出一些不可能的物体的图，并试画几个.

实习作业　画建筑物的视图与直观图

教材线索

本节没有具体的内容，主要是老师根据学校的具体情况，选实物让学生画，锻炼学生的实物与几何图形的相互转化的关系，锻炼学生认识几何图形的能力，为后面学习打下基础.

教学建议

建议老师在可能的情况下用相机拍些相片，在相片上突出棱角，与学生画出的图形进行比较. 在评价学生的作品时要多肯定，切不要全盘否定；重点看学生作品中的线条的相互关系是否妥当，是否适当注意了比例关系等.

6.1.3 面积和体积公式

教材线索

本节内容先讲面积，后讲体积. 在讲解时，对棱柱、棱锥和棱台的面积，又没有给出具体的面积公式，只是说明了如何通过“分割”达到各个击破：“先求侧面和底面，后求和”这种转化的方法. 在圆柱、圆锥和圆台部分，通过“展开”将侧面转化为平面图形来求侧面积，还归纳了圆柱、圆锥和圆台的侧面积之间的关系. 在体积部分，先给出拟柱体的体积公式，用拟柱体来统一棱柱、棱锥和棱台的体积，它们都是特殊的拟柱体，这样可以有效地回避掉判断是否是棱台的问题. 在圆柱、圆锥和圆台以及球体部分，把圆柱和圆锥归结为特殊的圆台. 所有的面积和体积的计算公式都没有要求掌握公式的推导，只要求会直接利用公式求解，本部分特别注重“分割”的转化思想，为此，在最后安排了一个求较复杂的图形的体积的例题.

教学目标

1. 了解圆柱、圆锥和圆台以及棱柱、棱锥和棱台的表面积公式；

2. 了解圆柱、圆锥和圆台以及棱柱、棱锥和棱台的体积公式；

3. 理解和掌握通过“分割”达到各个击破这种转化方式在求复杂问题（面积、体积）中的作用和一些常见技巧.

教材分析

1. 重点：面积和体积公式的理解和应用以及如何通过“分割”求一些组合图形的面积和体积.

2. 难点：球的表面积和体积公式的理解，“分割”的方法.

3. 本节教材比较枯燥，内容多，在讲解时，关键要学生理解和掌握好通过“分割”达到各个击破这种转化方式在求复杂问题（面积、体积）中的作用和一些常见技巧. 面积部分的许多公式学生初中时都知道，在这里要进一步让学生体会它们的相互关系，尤其是教材 P. 20 的图表所体现的圆柱、圆锥和圆台的侧面积公式之间的关系，这种关系是由图形本身的特点所决定的. 也可以引申到棱柱、棱锥和棱台之间的关系上.

在体积部分本书与传统教材不一样，本书直接给出拟柱体，用拟柱体来统一棱柱、棱锥和棱台的体积，实际上我们知道，现实生活中要判断是否为棱台是比较麻烦的，而拟柱体又是更普遍的，教材 P. 21 的图 6－23 就是取自《课程标准》给出的例题，它就不是棱台. 当然，学生如果已经掌握了棱柱、棱锥和棱台的体积的计算方法，对能够直接肯定是棱柱、棱

锥和棱台的，还是建议直接用它们各自的体积公式进行计算.

教学建议

由于所有的面积和体积都没有要求掌握公式的推导，只要求会直接利用公式求解，为此，建议老师不要花过多精力于推导上，但可以适当介绍推导思路而不具体推导. 注意通过例题让学生体会通过“分割”达到各个击破这种转化方式在求复杂问题（面积、体积）中的作用和一些常见技巧. 直接给出拟柱体是本书的一大特色，教材 P.21 的“观察与思考”中的图 6-23，可以引导学生先思考判断是不是棱台，进而点出本节教材安排拟柱体的好处.

参考例题

例 1 已知直角三角形 ABC 的两直角边 $AC=6$，$BC=8$. 将此直角三角形绕斜边 AB 所在直线旋转一周形成一个几何体，求该几何体的表面积和体积.

解 $\because$ $CD=\dfrac{AC\cdot BC}{AB}=4.8$，

表面积是两个底面半径为 4.8，高之和为 10 的圆锥的侧面积之和.

体积是两个底面半径为 4.8，高之和为 10 的圆锥的体积之和.

$\therefore$ $S=\pi\cdot 4.8\times 14=211$，

$V=\dfrac{1}{3}\times 4.8^2\cdot\pi\times 10\approx 241.15.$

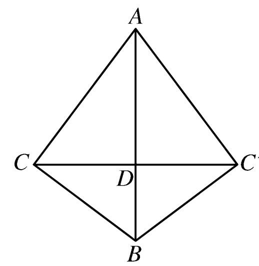


图 6-5

例 2 已知一个圆锥的底面半径为 20，高为 20，内有一个高为 x 的内接圆柱.

(1) 求圆柱的侧面积（用 x 表示）；

(2) x 为多少时圆柱的侧面积最大，并求此最大面积.

解 由相似三角形得

$HM=\dfrac{BD\cdot AM}{AD}=20-x$，

$\therefore$ $S_{侧}=2(20-x)\cdot\pi\cdot x=-2\pi x^2+40\pi x$

$=-2\pi(x-10)^2+200\pi.$

$\therefore$ 当 $x=10$ 时，侧面积最大，此最大值为 $200\pi\approx 628$.

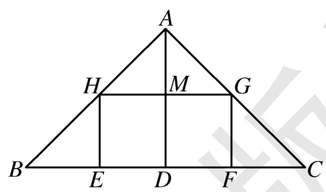


图 6-6

例 3 一个倒置的圆锥形容器，它的轴截面是正三角形，在容器内放一个半径为 10 的铁球，并向容器内注水（容器内铁球的下面部分也注满水），使水面刚好与铁球面相切. 求将球取出后容器内水的高度.

分析 本题的本质是球与圆锥相切的问题，作出截面使空间问题平面化是关键，基本思路是：

(1) 如图 6-7 所示，作出圆锥的轴截面，$\triangle ABC$ 为正三角形，圆 O 是球的大圆，它内切于 $\triangle ABC$.

(2) 设球在容器中时水面的高为 CD，当球从容器中取出后水面高为 CE，圆台 $MNBA$ 的体积 $V_{台}$ 等于球 O 的体积 $V_{球}$，从而知 $V_{CMN}=V_{CAB}-V_{MNBA}=V_{CAB}-V_{球}$，而 $V_{CMN}:V_{CBA}=CE^3:CD^3$.

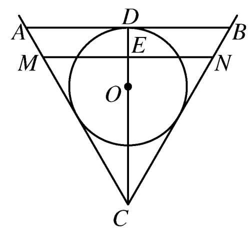


图 6－7

解 已知圆 O 是球的大圆，它内切于 $\triangle ABC$，又球的半径为 r，则 $DO=r$，$AD=\sqrt{3}r$，$AB=AC=BC=2\sqrt{3}r$，所以 $CD=3r$.

$$\frac{V_{圆锥CMN}}{V_{圆锥CAB}}=\frac{\frac{1}{3}\pi\cdot ME^2\cdot CE}{\frac{1}{3}\pi\cdot AD^2\cdot CD}=\frac{CE^3}{CD^3},$$

由题设知，$V_{圆锥CMN}=V_{圆锥CAB}-V_{球O}$

$$=\frac{\pi}{3}AD^2\cdot CD-\frac{4}{3}\pi r^3$$

$$=\frac{\pi}{3}(\sqrt{3}r)^2\cdot 3r-\frac{4}{3}\pi r^3$$

$$=\frac{5}{3}\pi r^3,$$

所以 $\frac{5\pi r^3}{3}:3\pi r^3=CE^3:(3r)^3$，可得 $CE=\sqrt[3]{15}r$，即球从容器中取出后，水面高度为 $\sqrt[3]{15}r$.

特别地，当 $r=10$ 时，$h=\sqrt[3]{15}\times 10\approx 24.6$.

例 4 如图 6－8（1）中有面积关系：$\frac{S_{\triangle PA'B'}}{S_{\triangle PAB}}=\frac{PA'\cdot PB'}{PA\cdot PB}$，则有图 6－8（2）中有体积关系：$\frac{V_{P\text{-}A'B'C'}}{V_{P\text{-}ABC}}=$________.

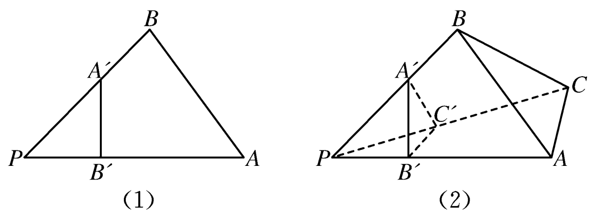


图 6－8

分析 利用公式并结合类比、猜想作答，首先若大胆猜想，可以填写 $\frac{PA'\cdot PB'\cdot PC'}{PA\cdot PB\cdot PC}$；若结合推理，则可把三角形 $PA'B'$、PAB 作为三棱锥的底，有 $\frac{V_{P\text{-}A'B'C}}{V_{P\text{-}ABC}}=\frac{\frac{1}{3}S_{\triangle PA'B'}\cdot d_1}{\frac{1}{3}S_{\triangle PAB}\cdot d_2}=\frac{PA'\cdot PB'\cdot d_1}{PA\cdot PB\cdot d_2}$，其中 d_1，d_2 分别是 C'、C 到面 $PA'B'$（PAB）的距离，由线面垂直的知识有 $\frac{d_1}{d_2}=\frac{PC'}{PC}$，故有 $\frac{V_{P\text{-}A'B'C'}}{V_{P\text{-}ABC}}=\frac{PA'\cdot PB'\cdot PC'}{PA\cdot PB\cdot PC}$.

例 5 求棱长为 1 的正四面体外接球的体积.

分析 关键是找出四面体的棱与球的半径的关系，从而求出半径，如图 6－9.

解 设 SO_1 为正四面体 $S-ABC$ 的高，由外接球的球心 O 在 SO_1 上，设外接球半径为 R，$AO_1=r$，则在$\triangle ABC$ 中，用解直角三角形知识得 $r=\frac{\sqrt{3}}{3}$，从而 $SO_1=\sqrt{SA^2-AO_1^2}=\sqrt{1-\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$.

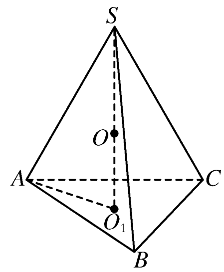


图 6－9

在 $\mathrm{Rt}\triangle AOO_1$ 中，由勾股定理得

$$R^2=\left(\sqrt{\frac{2}{3}}-R\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2,$$

解得 $R=\frac{\sqrt{6}}{4}$.

$$\therefore\quad V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^3=\frac{\sqrt{6}}{8}\pi.$$

相关链接

祖暅原理及平均面积法求体积

取一摞书或一摞纸张堆放在桌面上，将它如图 6－10 那样改变一下形状，这时高度没有改变，每页纸的面积也没有改变，因而这摞书或纸张的体积与变形前相等.

我国齐梁时代的数学家、祖冲之的儿子祖暅（公元前 5 到 6 世纪）提出一条原理：“幂势既同，则积不容异.”这里“幂”指水平截面的面积，“势”指高. 因此，这句话的意思是：两等高的几何体若在所有等高处的水平截面的面积相等，则这两个几何体的体积相等（如图 6－11）.

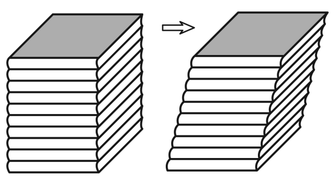


图 6－10

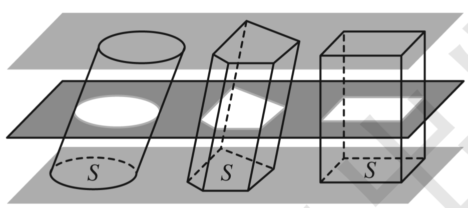


图 6－11

祖暅不仅首次明确地提出了这一原理，还成功地将其应用于球体积的推算. 我们把这条原理称为祖暅原理.

祖暅原理在西方文献中称“卡瓦列利原理”，它在 1635 年由意大利数学家卡瓦列利（B. Cavalieri，1598～1647）独立提出，对微积分的建立有重要影响.

以长方体体积公式和祖暅原理为基础，我们就可以求出柱、锥、台、球等几何体的

体积.

根据祖暅原理，易得如下求体积的近似方法：

平均面积法　如果几何体的剖面由一种形状逐渐变化为另一种形状，这时可用两头面积的平均值来估算.

如图 6－12，该几何体的体积为

$$V\approx\frac{A_1+A_2}{2}\times l.$$

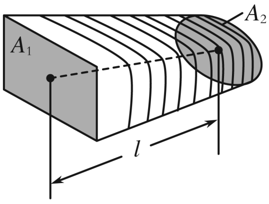


图 6－12

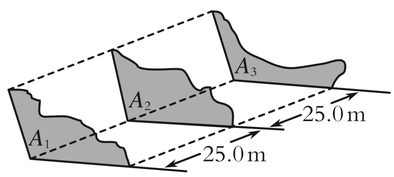


图 6－13

例　图 6－13 显示了某路段的三个横断面，其面积分别为 $A_1=46.2\ \text{m}^2$，$A_2=52.7\ \text{m}^2$，$A_3=35.3\ \text{m}^2$，相邻两个横断面的间距为 25.0 m. 筑路时需将这部分沙土清除掉，试估算这部分沙土的体积.

解　先计算 A_1 和 A_2 之间的体积，

$$\begin{aligned}V_1&\approx\frac{1}{2}\times(A_1+A_2)\times l\\&=\frac{1}{2}\times(46.2+52.7)\times 25\\&=1\ 236.25(\text{m}^3).\end{aligned}$$

再计算 A_2 和 A_3 之间的体积，

$$\begin{aligned}V_2&\approx\frac{1}{2}\times(A_2+A_3)\times l\\&=\frac{1}{2}\times(52.7+35.3)\times 25\\&=1\ 100(\text{m}^3).\end{aligned}$$

因此，需清运沙土的体积约为

$$1\ 236.25+1\ 100\approx 2\ 336.25(\text{m}^3).$$

6.2 空间的直线与平面

6.2.1 点、线、面的位置关系

教材线索

本节通过和初中平面几何的类比以及对现实生活中的一些现象的归纳和总结得出立体几何的 4 个公理（包括推论）和一个定理，除了以问题探索的形式给出了定理的证明以外，其余的都是说明，没有进行严格的证明. 除此以外，还通过例题等形式得到了一些有用的结论，教材中都用黑体字加以表示.

教学目标

借助长方体模型，在直观认识和理解空间点、线、面的位置关系的基础上，抽象出空间线、面位置关系的定义，并了解四个公理.

教材分析

1. 重点：点、线、面的位置关系的理解和掌握，包括表述及书写，了解四个公理和一个定理以及三个推论.

2. 难点：异面直线的理解和判断.

3. 本节在开始的时候首先介绍一些基本的常识和表示方法，这些是后续学习所必需的，我们知道公理是不需要逻辑证明就被公认的命题（或称不证自明的命题），几何中我们也连同基本概念（或某些概念的定义）一起作为推理论证的基础. 在讲解公理、定理以及它们的推论时，教材没有进行过多的论证及说明，往往是通过现象进行总结的，尤其是充分利用长方体模型，还有就是结合现实生活进行说明.

平面是一个不加定义，只需要理解的一个最基本的原始概念，要注意它和我们通常所说的平面图形相区别：平面是无限延伸的，没有大小，没有厚薄之分，而我们生活中所说的平面图形是有限的，是一些具体的图形，只是给我们平面的感觉，平面几何中的平面图形是有大小之分的.

公理 1 反映的是直线和平面的关系，由有两点在平面内推出整条直线都在平面内，可用于判断直线是否在平面内以及点是否在平面内.

公理 2 是用来确定平面的根据，这里要强调“不共线三点”，如果三点在一条直线上，

那么就不能确定一个平面，确定（即有且只有）的意思是这样的图形（平面）存在而且只唯一存在，即表达了存在性又表达了唯一性．三个推论也是类似的．

公理3是初中的定理的适用范围的推广，初中也有这样的结论，但适用于三线在一个平面内，本公理不再要求三线共面．

公理4实际上可以看成是对平面无限延伸的理解，要强调两个平面没有单纯的共点存在，只要共点则就有一条相交线，这里尤其要学生注意在用一些具体的平面图形表示平面时要特别注意这个结论，不要因为一些具体的图形而造成错觉．

教学建议

1．在立体几何中我们画图的原则是“眼见为实，眼不见为虚”，即凡是我们能够直接看见的线条，不管是已知的还是辅助线都用实线，凡是直接看不见的不管是已知的还是辅助线都用虚线．

2．画平面时我们通常用平行四边形，但许多时候也要根据具体情况，就用具体图形的面来表示其所在平面，而不再需要把平面画出来．

3．本节在证明中用到了“反证法”，其基本思路是直接证明不好证时，考虑结论的反面，如果结论的反面我们能够证明是假的，则所要证明的结论就是真的．在用反证法时，要特别注意反面是什么，也就是要能够准确地否定结论，比如“都是”的反面许多学生会认为是“都不是”，这是错误的，应该是“不都是”、“不全是”．“大于”的反面不是“小于”，而是“不大于”或“小于或等于”等，要让学生仔细体会．

4．在用字母表示时有一些基本原则，包括点、线、面用不同类别的字母表示以及相互关系中用到的一些集合符号一定要理解和灵活应用．我们知道，数学符号语言的恰当应用也是非常重要的，要逐步掌握好几何中的三种语言（文字语言、符号语言、图形语言）以及三种语言之间的转化．

本节使用了$\in$、$\notin$、$\subset$、$\not\subset$、$\cap$等符号，它们都源于集合中的符号，在读法上仍用几何语言．

比如，$A\in l$读作“点A在直线l上”，$A\notin l$读作“点A不在直线l上”；$l\subset\alpha$读作“直线l在平面α内”，$l\not\subset\alpha$读作“直线l不在平面α内”；$\alpha\cap\beta=l$读作“平面α、β相交于直线l”．本章中有关这类符号，在读法上都这样处理．

常见的集合符号所表示的意思总结如下：

数学符号表示	数学语言表达
$A\in a$	点A在直线a上
$A\notin a$	点A在直线a外
$A\in\alpha$	点A在平面α内
$A\notin\alpha$	在A在平面α外
$a\subset\alpha$	直线a在平面α内
$a\cap b=A$	直线a、b相交于点A
$a\cap\alpha=A$	直线a与平面α相交于A
$\alpha\cap\beta=a$	平面α、β相交于直线a

需要指出的是，使用这些符号原则上与集合符号的含义是一致的，但为了方便起见，个别地方的用法与集合符号略有不同．比如直线 a 与 b 相交于点 A，记作 $a\cap b=A$，而不记作 $a\cap b=\{A\}$．这里的 A 既是一个点，又可以理解为只含一个元素（点）的集合．

参考例题

例 1　空间中有 5 点，无三点共线，可以确定多少个平面？

解　本题要分情况讨论：

1．如果 5 点在一个平面内，则只能确定一个平面．

2．如果有 4 点在一个平面内则可以确定 7 个平面：比如用 A，B，C，D，E 这 5 个字母表示 5 个点，不妨假设 A，B，C，D 四点共面，则确定的平面共有：$ABCD$、ABE、ACE、ADE、BCE、BDE 和 CDE．

3．如果无 4 点共面，则确定的平面共有 10 个：ABC、ABD、ACD、BCD、ABE、ACE、ADE、BCE、BDE 和 CDE．（实际上，前 4 个是将第 2 小问的 $ABCD$ 分出来的，因为已经没有 4 点共面了，后 6 个就是第 2 小问的后 6 个）

注意：在讲解此题时要注意给学生灌输分类讨论的思想，同时告诉学生分类的基本原则是不重不漏，为此要找准分类的标准和方法．

例 2　（1）一个平面将空间分成几部分？

（2）两个平面将空间分成几部分？

（3）三个平面将空间分成几部分？画出图形（要求：至少有两种情况有画法过程）．

解　（1）一个平面将空间分成两部分．

（2）两个平面平行时，将空间分成三部分；两个平面相交时，将空间分成四部分．

（3）本小题情况比较复杂，需分类予以处理．

①当平面 α、平面 β、平面 γ 互相平行（即 $\alpha/\!/\beta/\!/\gamma$）时，将空间分成四个部分，其图形如图 6－14．

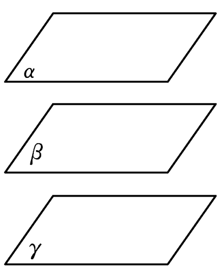


图 6－14

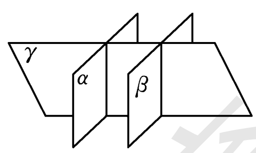
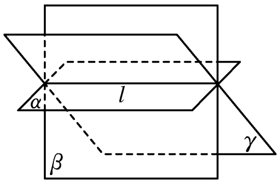


图 6－15

②当平面 α 与平面 β 平行，平面 γ 与它们相交（即 $\alpha/\!/\beta$，γ 与其相交）时，将空间分成六部分，其图形如图 6－15．

③当平面 α、平面 β、平面 γ 都相交，且三条交线重合（即 $\alpha\cap\beta=l$ 且 $\alpha\cap\gamma=l$）时，将空间分成六部分，其图形如图 6－16．



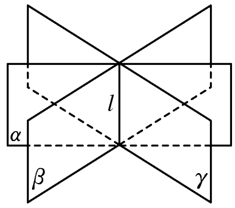


图 6－16

④平面 α、平面 β、平面 γ 都相交且三条交线共点，但互不重合（即 $\alpha\cap\beta=l$，且 γ 与 α、β 都相交，三条交线共点）时，将空间分成八部分，其图形如图 6－17.

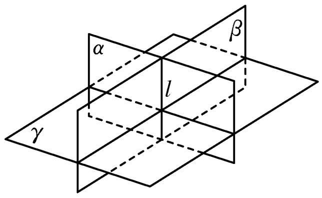
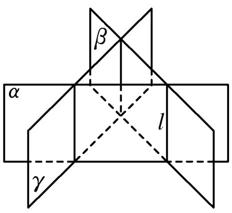


图 6－17

⑤平面 α、平面 β、平面 γ 两两相交且三条交线平行（即 $\alpha\cap\beta=l$，γ 与 α、β 都相交且三条交线平行）时，将空间分成七部分，其图形如图 6－18.



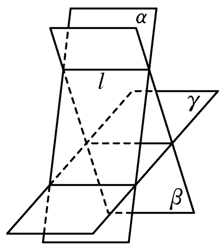


图 6－18

例 3　已知△ABC 在平面 α 外，$AB\cap\alpha=P$，$AC\cap\alpha=R$，$BC\cap\alpha=Q$，如图 6－19.

求证：P、Q、R 三点共线.

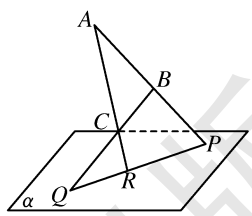


图 6－19

证明　$\because$　$AB\cap\alpha=P$，

$\therefore$　$P\in AB$，$P\in$ 平面 α.

又 $AB\subset$ 平面 ABC，

$\therefore$　$P\in$ 平面 ABC.

$\therefore$　由公理可知：点 P 在平面 ABC 与平面 α 的交线上.

同理，可证 Q、R 也在平面 ABC 与平面 α 的交线上.

$\therefore$　P、Q、R 三点共线.

例 4　如图 6－20，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E、F 分别为 CC_1 和 AA_1 上的中点，画出平面 BED_1F 与平面 $ABCD$ 的交线.

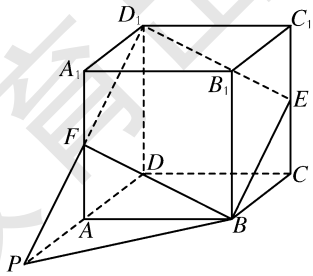


图 6－20

解　在平面 AA_1D_1D 内，延长 D_1F，

$\because$　D_1F 与 DA 不平行，

因此 D_1F 与 DA 必相交于一点，设为 P.

则 $P\in FD_1$，$P\in DA$.

又∵ $FD_1\subset$平面 BED_1F，$AD\subset$平面 $ABCD$ 内，

∴ $P\in$平面 BED_1F，$P\in$平面 $ABCD$.

又 B 为平面 $ABCD$ 与平面 BED_1F 的公共点，

∴ 连结 PB，PB 即为平面 BED_1F 与平面 $ABCD$ 的交线.

相关链接

两条异面直线所成的角

直线 a、b 是异面直线. 经过空间任一点 O，分别引直线 $a'\parallel a$，$b'\parallel b$，因为两条相交直线和另外两条相交直线分别平行时，两组直线所成锐角（或直角）相等，所以直线 a'和 b'所成的锐角（或直角）的大小，只由直线 a、b 的相互位置来确定，与点 O 的选择无关. 我们把直线 a'和 b'所成的锐角（或直角）叫做**异面直线 a 和 b 所成的角**（图 6－21).

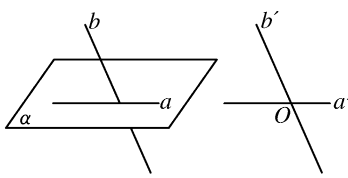


图 6－21

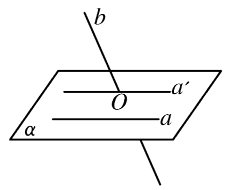


图 6－22

为了简便，点 O 常取在两条异面直线中的一条上. 例如，取在直线 b 上，然后经过点 O 作直线 $a'\parallel a$（图 6－22)，那么 a'和 b 所成的角就是异面直线 a、b 所成的角.

如果两条异面直线所成的角是直角，我们就说这**两条异面直线互相垂直**. 两条异面直线 a、b 互相垂直，记成"$a\perp b$". 为了和两条相交直线互相垂直相区别，我们在记两条相交直线互相垂直时，一般应说明它们的垂足. 如相交直线 c 与 d 垂直，记作"$c\perp d$，垂足为 A"，或"$c\perp d$，$c\cap d=A$".

图 6－23 中，正方体的棱 AA'和 $B'C'$所在的直线是两条异面直线，直线 $A'B'$和它们都垂直相交. 我们把和两条异面直线都垂直相交的直线叫做**两条异面直线的公垂线**.

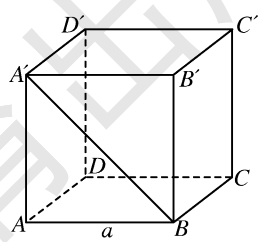


图 6－23

两条异面直线的公垂线在这两条异面直线间的线段的长度，叫做**两条异面直线的距离**. 图 6－23 中，线段 $A'B'$的长度就是异面直线 AA'和 $B'C'$的距离.

例 设图 6－23 中的正方体的棱长为 a.

(1) 图中哪些棱所在的直线与直线 BA' 成异面直线？

(2) 求直线 BA' 和 CC' 所成的角的大小；

(3) 求异面直线 BC 和 AA' 的距离.

解 (1) ∵ $A' \notin$ 平面 BC'，而点 B、直线 CC' 都在平面 BC' 内，且 $B \notin CC'$，

∴ 直线 BA' 和 CC' 是异面直线.

同理，直线 $C'D'$、$D'D$、CD、AD、$B'C'$ 都和直线 BA' 成异面直线.

(2) ∵ $CC' /\!/ BB'$，

∴ BA' 和 BB' 所成的锐角就是 BA' 和 CC' 所成的角.

∵ $\angle A'BB' = 45°$，

∴ BA' 和 CC' 所成的角是 $45°$.

(3) ∵ $AB \perp AA'$，$AB \cap AA' = A$，

$AB \perp BC$，$AB \cap BC = B$，

∴ AB 是 BC 和 AA' 的公垂线段.

∵ $AB = a$.

∴ BC 和 AA' 的距离是 a.

关于直线垂直，我们有如下定理：

定理 如果直线 a 垂直于直线 b，那么直线 a 与平行于直线 b 的任意一条直线 b' 互相垂直.

证明 过 a 上任一点 A 作 b 的平行线 b_1，则 a、b_1 的夹角为直角，又因 $b /\!/ b'$，$b /\!/ b_1$，故 $b_1 /\!/ b'$，因而 a、b' 的夹角与 a、b_1 的夹角相等. 因此 a、b' 也互相垂直.

思考题 1. 垂直于同一直线的两条直线，有几种位置关系.

2. 两条异面直线的公垂线可能有两条吗？

6.2.2 平行关系

教材线索

本节内容包括直线与平面平行和平面与平面平行两部分，教材首先由直线与平面平行的定义分析出了直线与平面平行的性质，并对性质进行了严格的证明，证明性质后发现是“线线平行”与“线面平行”的转化，于是猜测直线与平面平行的判断定理，由于判断定理课程标准没有要求证明，教材采用“观察与思考”的形式得出来，这也不是一个严格的证明，在直线与平面平行部分，关键是理解和准确应用性质及判定定理，教材为此安排了三个例题和四个练习.

在平面与平面平行部分，也完全同直线与平面平行类似地得出性质和判定定理，只是这里是“面面平行”与“线线平行”的转化以及“线面平行”与“面面平行”的转化.

教学目标

理解和掌握直线与平面平行和平面与平面平行的性质和判断定理，并能够较准确地应用来论证一些较简单的问题.

教材分析

1. 重点：直线与平面平行和平面与平面平行的性质和判断定理的理解和应用.

2. 难点：如何准确地通过“线线平行”与“线面平行”的相互转化和“面面平行”与“线线平行”的转化以及“线面平行”与“面面平行”的转化来理解和应用直线与平面平行和平面与平面平行的性质和判断定理.

3. 教材首先由直线与平面的平行的定义分析出了直线与平面的平行的性质，并对性质进行了严格的证明. 而在这里，定理是以纯文字的形式给出的，为此，在证明时要分析清条件和结论，要引导学生画出图形和写出正确的已知和求证，这实际上也是本书第一次正规的严格证明定理，因此，要给学生强调，公理是不证自明的，严格的说，定理是必须要证明的，本书虽然有许多定理都没有证明但并不是不证，仅仅是本书不要求掌握证明.

定理 2 实现了“线面平行”与“线线平行”的转化，定理中的“任一平面与此平面的交线”很容易想到有无数条交线，于是学生就容易想到“平面内有无数条直线和这条已知直线平行”，但要注意的是，直线与平面平行不是直线与平面内的所有直线平行，这里的无数条直线并不是平面内的所有直线，实际上只是相互平行的一个平行线系列.

定理 3 实现“线线平行”与“线面平行”的转化，在实际应用中它远比直线与平面的平行的定义用来判断“直线与平面的平行”要好用得多，要具体得多，这也是我们用来判断“直线与平面的平行”最主要的方法.

定理 4 是平面与平面平行的性质定理，它实现了“面面平行”与“线线平行”的转化，教材在定理 4 之前先安排了例 4，目的是好类比归纳出定理 4，例 4 和定理 4 都是同定理 2 一样是纯文字的形式给出的，仍然要引导学生分析清条件和结论，要画出图形和写出正确的已知和求证. 这种要求不是学生一下就能够掌握好的.

定理 5 是平面与平面平行的判断定理，它实现了“线面平行”与“面面平行”的转化，这个定理没有严格的证明，而是采用“观察与思考”的形式得出来的. 在讲解时把重点放在理解和应用上.

教学建议

1. 在定理的讲解时，由于定理是以纯文字的形式给出的，一定要引导学生分析清条件和结论，要画出图形和写出正确的已知和求证. 这个过程不要急，在讲了定理 2 后，后面的

定理的讲解最好让学生来完成，哪怕逐步给学生修改完善也行，不要老师一个人讲完.

2. 证明中都采用了数学语言，尤其是用到许多集合符号，前一节我们已经作了归纳，但在具体应用时仍然要分析讲解清楚，让学生在用的过程中逐步掌握好.

3. 本节 4 个定理实现了四个转化：“线面平行”与“线线平行”的转化、“线线平行”与“线面平行”的转化、“面面平行”与“线线平行”的转化和“线面平行”与“面面平行”的转化. 要给学生强调，实际上我们学数学和做数学题时，许多时候都是在寻求转化，只是我们没有那么明确提出而已，在立体几何中，这种转化显得特别明显和重要，尤其是“立体问题平面化”是我们解决立体几何问题的关键.

4. 在讲解 4 个定理时一定要分清其作用和意义，同时要讲清楚哪是性质定理，哪是判断定理：性质定理是先有这个事实存在，然后能够得到什么结论，而判断定理是当满足什么条件时，这个事实才成立，比如“直线与平面平行的性质定理”说的是“在直线与平面平行的前提下，我们还能够得到什么结论”，而“直线与平面平行的判断定理”说的是“在什么前提下，我们才能够得到直线与平面平行的结论”.

5. 在讲解时，尽可能多应用身边的实物，比如我们的课桌、教室、书本以及粉笔盒等，也可以用较厚的纸张折叠出各种模型，帮助学生理解各种关系，帮助学生理解空间结构而建立空间观念.

参考例题

例 1 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，E、F 分别为 AA_1、CC_1 的中点.

求证：$BF \mathrel{\underline{\parallel}} ED_1$.

证明 如图 6-24，取 BB_1 的中点 G，连结 GC_1、GE.

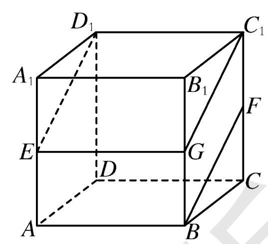


图 6-24

$\because$ F 为 CC_1 的中点，$\therefore$ $BG \mathrel{\underline{\parallel}} C_1F$.

$\therefore$ 四边形 BGC_1F 为平行四边形，

$\therefore$ $BF \mathrel{\underline{\parallel}} GC_1$.

又$\because$ $EG \mathrel{\underline{\parallel}} A_1B_1$，$A_1B_1 \mathrel{\underline{\parallel}} C_1D_1$，$\therefore$ $EG \mathrel{\underline{\parallel}} D_1C_1$，

$\therefore$ 四边形 EGC_1D_1 为平行四边形，

$\therefore$ $ED_1 \mathrel{\underline{\parallel}} GC_1$.

$\therefore$ $BF \mathrel{\underline{\parallel}} ED_1$.

例 2 已知 E、E_1 分别是正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 AD、A_1D_1 的中点.

求证：$\angle BEC=\angle B_1E_1C_1$.

证明 如图 6-25，连结 EE_1.

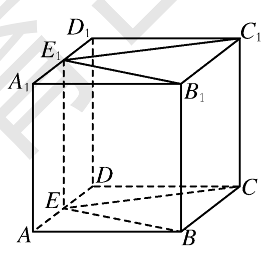


图 6-25

$\because$ E_1、E 分别为 A_1D_1、AD 的中点，

$\therefore$ $A_1E_1 \mathrel{\underline{\parallel}} AE$，

$\therefore$ A_1E_1EA 为平行四边形.

$\therefore$ $A_1A \mathrel{\underline{\parallel}} E_1E$.

又∵ $A_1A \mathrel{\underline{\parallel}} B_1B$，∴ $E_1E \mathrel{\underline{\parallel}} B_1B$，

∴ 四边形 E_1EBB_1 是平行四边形.

∴ $E_1B_1 /\!/ EB$. 同理 $E_1C_1 /\!/ EC$.

又$\angle C_1E_1B_1$ 与$\angle CEB$ 对应边的方向相同.

∴ $\angle C_1E_1B_1 = \angle CEB$.

例 3 如图 6-26，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E_1、F_1 分别是棱 A_1B_1 和 D_1C_1 上的点，求证：$E_1F_1 /\!/$ 平面 AC.

分析 只需在平面 AC 内找一条线段与 E_1F_1 平行即可.

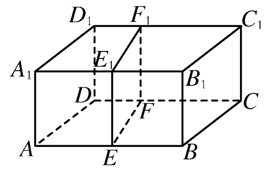


图 6-26

证明 分别在 AB、CD 上截取 $AE = A_1E_1$，$DF = D_1F_1$，连结 EE_1、FF_1、EF.

∵ 长方体 AC_1 的各个面是矩形，

∴ $A_1E_1 \mathrel{\underline{\parallel}} AE$，$D_1F_1 \mathrel{\underline{\parallel}} DF$.

故四边形 AEE_1A_1、DFF_1D_1 是平行四边形.

∴ $EE_1 \mathrel{\underline{\parallel}} AA_1$，$FF_1 \mathrel{\underline{\parallel}} DD_1$.

∵ $AA_1 \mathrel{\underline{\parallel}} DD_1$，∴ $EE_1 \mathrel{\underline{\parallel}} FF_1$.

∴ 四边形 EFF_1E_1 是平行四边形.

∴ $E_1F_1 /\!/ EF$.

∵ $EF \subset$ 平面 AC，$E_1F_1 \not\subset$ 平面 AC，

∴ $E_1F_1 /\!/$ 平面 AC.

例 4 试证经过平面外一点有且只有一个平面和已知平面平行.

已知：点 $A \notin$ 平面 α.

求证：过 A 有且只有一个平面 $\beta /\!/ \alpha$.

证明 在平面 α 内任作两条相交直线 a 和 b，则由 $A \notin \alpha$ 知，$A \notin a$，$A \notin b$，点 A 和直线 a 可确定一个平面 M，点 A 和直线 b 可确定一个平面 N. 在平面 M、N 内过 A 分别作直线 $a' /\!/ a$、$b' /\!/ b$，故 a'、b' 是两条相交直线，可确定一个平面 β.

∵ $a' \not\subset \alpha$，$a \subset \alpha$，$a' /\!/ a$，∴ $a' /\!/ \alpha$.

同理 $b' /\!/ \alpha$.

又 $a' \subset \beta$，$b' \subset \beta$，$a' \cap b' = A$，∴ $\beta /\!/ \alpha$.

所以过点 A 有一个平面 $\beta /\!/ \alpha$.

假设过 A 点还有一个平面 $\gamma /\!/ \alpha$，

则在平面 α 内取一直线 c，$A \notin c$，点 A、直线 c 确定一个平面 ρ，由公理 2 知：

$\beta \cap \rho = m$，$\gamma \cap \rho = n$，

∴ $m /\!/ c$，$n /\!/ c$，

又 $A \in m$，$A \in n$，

这与过一点有且只有一条直线与已知直线平行相矛盾，因此假设不成立，所以平面 β 只

有一个.

所以过平面外一点有且只有一个平面与已知平面平行.

例 5 如图 6－27，B 为 $\triangle ACD$ 所在平面外一点，M、N、G 分别为 $\triangle ABC$、$\triangle ABD$、$\triangle BCD$ 的重心.

(1) 求证：平面 $MNG /\!/$ 平面 ACD；

(2) 求 $S_{\triangle MNG} : S_{\triangle ADC}$.

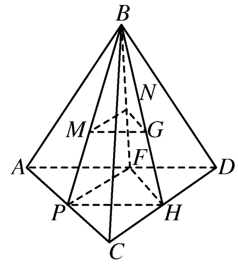


图 6－27

(1) **分析** 要证明平面 $MNG /\!/$ 平面 ACD，由于 M、N、G 分别为 $\triangle ABC$、$\triangle ABD$、$\triangle BCD$ 的重心，因此可想到利用重心的性质找出与平面平行的直线.

证明 连结 BM、BN、BG 并延长分别交 AC、AD、CD 于 P、F、H.

∵ M、N、G 分别为 $\triangle ABC$、$\triangle ABD$、$\triangle BCD$ 的重心，

则有：$\dfrac{BM}{MP}=\dfrac{BN}{NF}=\dfrac{BG}{GH}=2$.

连结 PF、FH、PH 有 $MN /\!/ PF$，

又 $PF \subset$ 平面 ACD，∴ $MN /\!/$ 平面 ACD.

同理：$MG /\!/$ 平面 ACD，$MG \cap MN=M$，

∴ 平面 $MNG /\!/$ 平面 ACD.

(2) **分析** 因为 $\triangle MNG$ 所在的平面与 $\triangle ACD$ 所在的平面相互平行，因此，求两三角形的面积之比，实则求这两个三角形的对应边之比.

解 由 (1) 可知：$\dfrac{MG}{PH}=\dfrac{BG}{BH}=\dfrac{2}{3}$，

∴ $MG=\dfrac{2}{3}PH$，

又 $PH=\dfrac{1}{2}AD$， ∴ $MG=\dfrac{1}{3}AD$.

同理：$NG=\dfrac{1}{3}AC$，$MN=\dfrac{1}{3}CD$，

∴ $\triangle MNG \backsim \triangle ACD$，其相似比为 1∶3，

∴ $S_{\triangle MNG} : S_{\triangle ACD}=1:9$.

相关链接

间接证法

间接证法是指不直接证明论题的真实性，而是通过证明反论题不真，或者证明与论题等效的命题的真实性，或者在互逆命题等效的条件下，通过证明论题的逆命题的真实性，从而

肯定论题的真实性的证明方法.

反证法与同一法是两种常用的间接证法. **反证法**是通过论证命题的矛盾判断的虚假性，从而确定命题真实性的一种证明方法，反证法的逻辑依据是排中律，两个互相矛盾的判断不能都是假的. 用反证法证明命题的一般步骤是：(1) 分清命题的条件与结论，并假设命题的结论不成立；(2) 从所作的否定结论的假设，应用正确的推理方法，导出矛盾的结果（与已知的公理、定义或定理矛盾；或与已知条件矛盾；或与所作的假设矛盾；或自相矛盾）；(3) 断定产生矛盾结果的原因，在于所作的与命题结论相矛盾的假定不真，于是原结论为真，从而间接证明了命题为真. 如果与命题结论相矛盾的方面只有一种情况，这时反证法又称**归谬法**；如果与命题结论相矛盾的方面不止一种情况，这时需要将它们逐一加以否定，命题才能得证，这种反证法又叫**穷举法**.

同一法的理论依据是同一原理：当一个命题的条件和结论所确定的对象都唯一存在时，这个命题和它的逆命题等效. 同一法常用于证明符合同一原理的几何命题. 应用同一法证明几何命题的一般步骤是：(1) 作出符合命题结论的图形；(2) 证明所作的图形符合命题的条件；(3) 根据由条件所确定的图形的唯一性，断定所作的图形就是已知图形；(4) 断定命题的真实性.

例 1　定理（两个平面平行的判定）如果一个平面内有两条相交直线都平行于另一个平面，那么这两个平面平行.

已知：在平面 β 内，有两条相交直线 a、b 和平面 α 平行.

求证：$\beta /\!/ \alpha$.

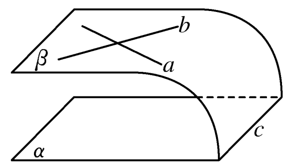


图 6－28

证明　假设 $\alpha \cap \beta = c$.

$\because$　$a /\!/ \alpha$，$a \subset \beta$，

$\therefore$　$a /\!/ c$.

同理 $b /\!/ c$.

$\therefore$　$a /\!/ b$.

这与题设 a 与 b 是相交直线矛盾，

$\therefore$　$\alpha /\!/ \beta$.

本例即是用反证法证明.

例 2　求证直角三角形斜边上的中线长等于斜边的一半.

已知，如图 6－29，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB = 90°$，$BD = AD$.

求证：$CD = \frac{1}{2}AB$.

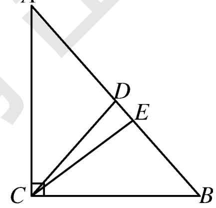


图 6－29

证明　如图，作 $\angle BCE = \angle B$，交 AB 于 E.

$\therefore$　$CE = BE$，

$\because$　$\angle A + \angle B = 90° = \angle ACB$，

$\therefore$　$\angle A = \angle ACE$，$\therefore$　$CE = AE$，

∴　$CE=\frac{1}{2}AB$，且 E 是 AB 的中点，

又 D 是 AB 的中点，

∴　D、E 重合，即 $CD=\frac{1}{2}AB$.

此题的证法即是同一法.

6.2.3　垂直关系

教材线索

本节内容包括直线与平面的垂直和平面与平面的垂直两部分，教材首先给出了直线与平面的垂直的定义，并紧接着给出了异面直线的垂直的定义（本教材根据课标的要求没有给出普通的异面直线的夹角的定义），进而分析出了直线与平面的垂直的判定定理，没有对判定定理进行了严格的证明，这里又是“线线垂直”与“线面垂直”的转化，在讲解例题后又得到了另一个判断定理，然后还类比证明了两条直线平行的另一个判断定理（也即是线面垂直的一个性质定理）.

在平面与平面垂直部分，也完全同直线与平面垂直类似地得出判断和性质定理，只是这里是“线面垂直”与“面面垂直”的转化以及“面面垂直”与“线面垂直”的转化.

教学目标

理解和掌握直线与平面垂直和平面与平面垂直的性质和判定定理，并能够较准确地应用来论证一些较简单的问题.

教材分析

1. 重点：直线与平面垂直和平面与平面垂直的性质和判定定理的理解和应用.

2. 难点：如何准确地通过“线线垂直”与“线面垂直”的相互转化和“面面垂直”与“线面垂直”的转化以及“线面垂直”与“面面垂直”的转化来理解和应用直线与平面垂直和平面与平面垂直的性质和判断定理.

3. 教材首先由我们熟悉的日常生活中给我们以直线与平面的垂直的形象入手，然后定义了直线与平面的垂直，并紧接着给出了异面直线的垂直的定义，在进行分析的基础上得出了直线与平面的垂直的判断定理. 定理仍然是以纯文字的形式给出的，且没有对判断进行严格的证明，在讲解时要给学生分析条件和结论以及定理的功用，同时强调这里又是“线线垂

直”与“线面垂直”的转化.

定理 6 实现了“线面垂直”与“面面垂直”的转化，定理中的“平面内的两条相交直线”，重点在相交上，如果不是相交直线，就无法得到，因此，在实际应用时一定要有能够体现出相交的内容. 结合定义很容易想到“平面内所有直线都和这条已知直线垂直”. 注意这里和直线与平面平行是不一样的，在讲解时要对比讲解.

第 48 页定理 7 之前的黑体字实际上是又一个直线与平面垂直的判断定理，通过实现“线线平行”与“线面垂直”递推出了新的“线面垂直”，这既像平行的传递也像垂直的传递.

定理 7 是直线与平面垂直的性质定理，它实现了“线面垂直”与“线线平行”的转化，定理一样是纯文字的形式给出的，仍然要引导学生分析清条件和结论，要画出图形和写出正确的已知和求证. 同时，本定理还是采用反证法进行证明的.

定理 8 是平面与平面垂直的判断定理，它实现了“线面垂直”与“面面垂直”的转化，这个定理也没有严格的证明，在讲解时把重点放在理解和应用上.

定理 9 是平面与平面垂直的性质定理，它实现了“面面垂直”与“线面垂直”的转化，这个定理是用直线与平面垂直的判断定理进行严格的证明，也可以看成是又一个直线与平面垂直的判断定理. 在讲解时仍然是把重点放在理解和应用上.

教学建议

1. 垂直关系是在平行关系之后讲解的，因此，要多对比平行关系，进行类比讲解. 在条件允许的学校，尤其是学生情况较好的情况下，建议老师不要让学生急于看书，也不要急于讲出结论，而是在复习前面平行的基础上，先让学生类比猜测垂直的判断和有关结论. 如果学生自己猜出来了，那对学生的能力提高和增加学生学习数学的热情是有帮助的，学生没有猜出，老师再讲也没有关系.

2. 直线与平面的垂直的判断定理书上没有证明，可以要求学有余地的学生课外思考，肯定有部分学生能够自己完成的，这个证明较难，但对定理和定义的理解有帮助，对训练学生的推理论证能力也很有好处.

3. 同前面 6.2.2 一样，要多借助模型帮助学生理解和掌握.

参考例题

例 1 如图 6 - 30，已知 $PA\perp\odot O$ 所在的平面，AB 是 $\odot O$ 的直径，C 是 $\odot O$ 上任意一点，过 A 作 $AE\perp PC$ 于 E.

求证：$AE\perp$ 平面 PBC.

证明 $\because$ $PA\perp$ 平面 ABC，$\therefore$ $PA\perp BC$.

又 $\because$ AB 是 $\odot O$ 的直径，$\therefore$ $BC\perp AC$.

而 $PA\cap AC=A$，$\therefore$ $BC\perp$ 平面 PAC.

又 $\because$ $AE\subset$ 平面 PAC，$\therefore$ $BC\perp AE$.

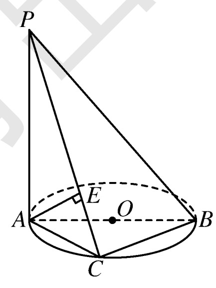


图 6 - 30

$\because$ $PC \perp AE$ 且 $PC \cap BC = C$，$\therefore$ $AE \perp$ 面 PBC.

例 2 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P 为 DD_1 的中点，O 为底面 $ABCD$ 的中心. 求证：$B_1O \perp$ 平面 PAC.

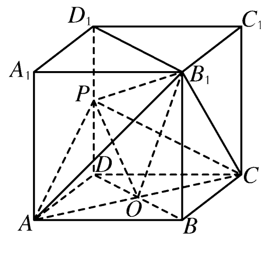


图 6－31

证明 如图 6－31，连结 AB_1，CB_1，设 $AB=1$，

$\because$ $AB_1 = CB_1 = \sqrt{2}$，$AO = CO$，$\therefore$ $B_1O \perp AC$.

连结 PB_1，$\because$ $OB_1^2 = OB^2 + BB_1^2 = \frac{3}{2}$，

$PB_1^2 = PD_1^2 + B_1D_1^2 = \frac{9}{4}$，$OP^2 = PD^2 + DO^2 = \frac{3}{4}$，

$\therefore$ $OB_1^2 + OP^2 = PB_1^2$，$\therefore$ $B_1O \perp PO$，

根据直线和平面垂直判定定理，$\therefore$ $B_1O \perp$ 平面 PAC.

例 3 如图 6－32，正方形 $ABCD$、$ABEF$ 的边长都是 1，而且平面 $ABCD$、$ABEF$ 互相垂直，点 M 在 AC 上移动，点 N 在 BF 上移动，若 $CM = BN = a$（$0 < a < \sqrt{2}$）.

（1）求 MN 的长；

（2）当 a 为何值时，MN 的长最小.

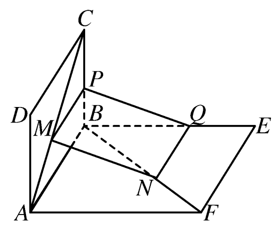


图 6－32

（1）**解法 1** 作 $MP // AB$ 交 BC 于点 P，$NQ // AB$ 交 BE 于点 Q，连结 PQ，依题意可得：$MP // NQ$，且 $MP = NQ$.

即 $MNQP$ 是平行四边形.

$\therefore$ $MN = PQ$.

由已知，$CM = BN = a$，$CB = AB = BE = 1$，

$\therefore$ $AC = BF = \sqrt{2}$.

$\frac{CP}{1} = \frac{a}{\sqrt{2}}$，$\frac{BQ}{1} = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

$$\therefore\ MN = PQ = \sqrt{(1-CP)^2 + BQ^2}$$

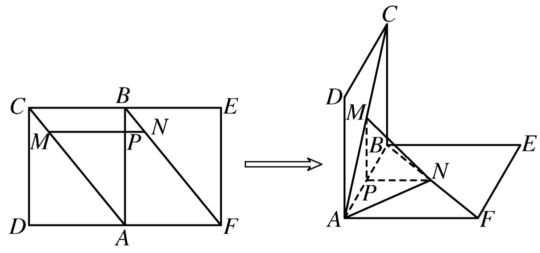
$$= \sqrt{\left(1-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{a^2 - \sqrt{2}a + 1} = \sqrt{\left(a-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}}\ (0 < a < \sqrt{2}).$$

解法 2 原图可看作由矩形（图 6－33（1））$CDFE$（$CD=1$，$DA=AF=CB=BE=1$）沿 AB 折成的直二面角，设 MN 交 AB 于 P，依题设得 $MP = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}-a)$，$PN = \frac{\sqrt{2}}{2}a$，折成直二面角后的平面角为 $\angle MPN$. 如图 6－33(2).

$$\therefore\ MN = \sqrt{MP^2 + NP^2} = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{2}-a)^2 + \frac{1}{2}a^2}$$

$$= \sqrt{a^2 - \sqrt{2}a + 1} = \sqrt{\left((a-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}}\ (0 < a < \sqrt{2}).$$



（1）　　　（2）

图 6－33

解法 3 易得 $AM=FN=\sqrt{2}-a$，延长 AN 交 BE 于 K 点（图 6－34）.

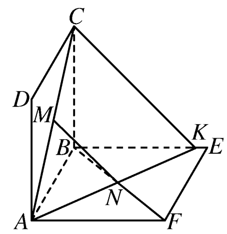


图 6－34

$\because$ $BE/\!/AF$，$\therefore$ $\dfrac{BN}{NF}=\dfrac{BK}{AF}$，$\dfrac{AN}{NK}=\dfrac{NF}{BN}=\dfrac{\sqrt{2}-a}{a}$，

$\therefore$ $BK=\dfrac{a}{\sqrt{2}-a}$. 又$\dfrac{AM}{MC}=\dfrac{\sqrt{2}-a}{a}$，$\therefore$ $\dfrac{AN}{NK}=\dfrac{AM}{MC}$，

$\therefore$ $\dfrac{MN}{KC}=\dfrac{AM}{AC}$，$\therefore$ $MN=KC\cdot AM\cdot\dfrac{1}{AC}$. 又易知 $CB\perp BE$，

$\therefore$ $KC=\sqrt{BC^2+BK^2}=\sqrt{1+\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}-a}\right)^2}$，

$$\therefore\ MN=\sqrt{1+\left(\frac{a}{\sqrt{2}-a}\right)^2}\cdot(\sqrt{2}-a)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$=\sqrt{a^2-\sqrt{2}a+1}\,(0<a<\sqrt{2}).$$

解法 4 （同一法）过点 M 作 $MH\perp AB$，垂足为 H，过点 N 作 $NK\perp AB$,垂足为 K(图 6－35)，则在 $\mathrm{Rt}\triangle AMH$ 中，$AH=\cos 45^\circ(\sqrt{2}-a)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot(\sqrt{2}-a)=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$，同理在 $\mathrm{Rt}\triangle BKN$ 中，有 $BK=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$. $\therefore$ $AH+BK=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a+\dfrac{\sqrt{2}}{2}a=AB$.

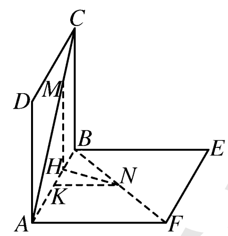


图 6－35

$\therefore$ H、K 二垂足重合，即作 $MH\perp AB$，连 HN，则 $HN\perp AB$.（下略）

（2）由（1）中解法 1，得 $MN=\sqrt{\left(a-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}}$.

$\therefore$ 当 $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时,$MN=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

即 M、N 分别移动到 AC、BF 的中点时，MN 的长最小，最小值为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

例 4 如图 6－36，在四面体 $ABCD$ 中，$BD=\sqrt{2}a$，$AB=AD=CB=CD=AC=a$，求证：平面 $ABD\perp$ 平面 BCD.

证明 ∵ $\triangle ABD$ 与 $\triangle BCD$ 是全等的等腰三角形，

∴ 取 BD 的中点 E，连结 AE、CE，则 $AE\perp BD$，$BD\perp CE$，

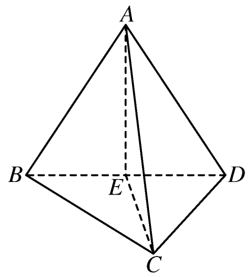


图 6－36

在 $\triangle ABD$ 中，$AB=a$，$BE=\frac{1}{2}BD=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，

∴ $AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，

同理：$CE=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，

在 $\triangle AEC$ 中，$AE=CE=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，$AC=a$，

由于 $AC^2=AE^2+CE^2$，

∴ $AE\perp CE$，

∵ $AE\perp BD$，∴ $AE\perp$ 平面 BCD.

∴ 平面 $ABD\perp$ 平面 BCD.

相关链接

1. 直线和平面垂直的判定定理的证明

定理（直线和平面垂直的判定）**如果一条直线和一个平面内的两条相交直线都垂直，那么这条直线垂直于这个平面.**

已知：$m\subset\alpha$，$n\subset\alpha$，$m\cap n=B$，$l\perp m$，$l\perp n$.

求证：$l\perp\alpha$.

证明 设 g 是平面 α 内的任意一条直线，要证明 $l\perp\alpha$，根据定义，只要证明 $l\perp g$ 就可以了.

先证明直线 l、g 都通过点 B 的情况（图 6－37）.

在直线 l 上点 B 的两侧分别取点 A、A'，使 $AB=A'B$，那么直线 m、n 都是线段 AA' 的垂直平分线. 为了证明 $l\perp g$，可证明直线 g 也是线段 AA' 的垂直平分线.

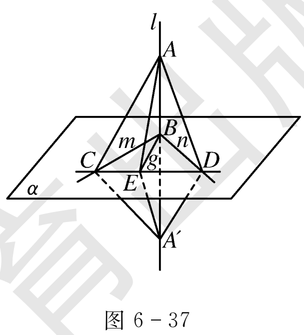


图 6－37

当 g 与 m（或 n）重合时，根据已知 $l\perp m$（或 n），可知 $l\perp g$ 成立. 当 g 与 m、n 都不重合时，在平面 α 内作一条直线 CD，与直线 m、n、g 分别交于点 C、D、E. 连结 AC、$A'C$、AD、$A'D$、AE、$A'E$，则有：

$$AC=A'C,\ AD=A'D.$$

$$\triangle ACD\cong\triangle A'CD.$$

得 $$\angle ACE=\angle A'CE.$$

∴ $$\triangle ACE\cong\triangle A'CE.$$

得 $$AE=A'E.$$

∴ g 是 AA' 的垂直平分线.

∴ $$l\perp g.$$

如果直线 l、g 中有一条或两条不经过点 B（图 6－38），那么可过点 B 引它们的平行直线 l_1、g_1. 由于过点 B 的这样两条直线所成的角，就是直线 l 与 g 所成的角，同理可证这两条直线垂直. 因而 $l\perp g$.

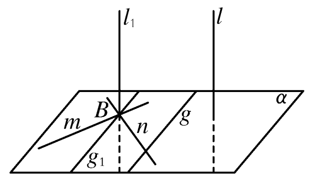


图 6－38

综上所述，可得

$$l\perp\alpha.$$

2. 二面角

在日常生活中，我们常说山坡的坡面和水平平面成多少度角；水坝面和水平平面成多少度角；在发射人造地球卫星时，也说卫星的轨道平面和地球的赤道平面成某个角度（图 6－39）. 这个角的概念就是我们要研究的两个平面所成的角——二面角.

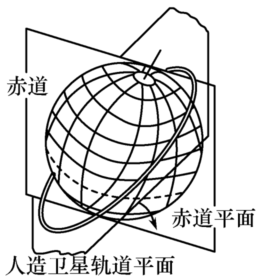


图 6－39

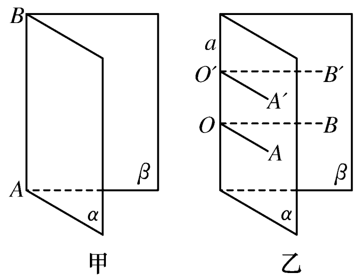


图 6－40

一个平面内的一条直线，把这个平面分成两部分，其中的每一部分都叫做**半平面**. 从一条直线出发的两个半平面所组成的图形叫做**二面角**（图 6－40（甲）），这条直线叫做**二面角的棱**，这两个半平面叫做**二面角的面**.

棱为 AB、面为 α，β 的二面角，记作二面角 $\alpha-AB-\beta$，如果棱用 a 表示，则记作 $\alpha-a-\beta$. 如果 P、Q 分别为 α，β 内的点，但不是 a 上的点，则二面角也可记作 $P-a-Q$ 或 $P-AB-Q$.

如图 6－40（乙），在二面角 $\alpha-a-\beta$ 的棱 a 上任取一点 O，在半平面 α 和 β 内，从点 O 分别作垂直于棱 a 的射线 OA、OB，射线 OA 和 OB 组成 $\angle AOB$，在棱 a 上另取任意一点 O'，按同样方法作 $\angle A'O'B'$. 因为 OA 和 $O'A'$、OB 和 $O'B'$ 都垂直于棱 a，且分别在同一平面内，所以 $\angle AOB$ 和 $\angle A'O'B'$ 的两边分别平行且方向相同，因此，$\angle AOB=A'O'B'$. 可见 $\angle AOB$ 的大小与点 O 在棱上的位置无关.

以二面角的棱上任意一点为端点，在两个面内分别作垂直于棱的两条射线，这两条射线所成的角叫做**二面角的平面角**.

二面角的大小，可以用它的平面角来度量，二面角的平面角是几度，就说这个二面角是几度.

平面角是直角的二面角叫**直二面角**.

木工用活动角尺测量工件的两个面所成的角时，实际上就是测量这两个面所成二面角的平面角（图 6－41）. 我国发射的第一颗人造地球卫星的倾角是 68.5°. 就是说卫星轨道平面与地球赤道平面所成的二面角的平面角是 68.5°.

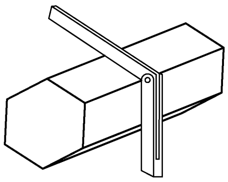


图 6－41

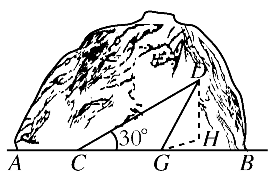


图 6－42

例 如图 6－42，山坡的倾斜度（坡面与水平平面所成二面角的度数）是 60°，山坡上有一条直道 CD，它和坡脚的水平线 AB 的夹角是 30°，沿这条路上山，行走 100 米后升高多少米？

解 已知 $CD=100$ 米，设 DH 垂直于过 BC 的水平平面，垂足为 H，线段 DH 的长度就是所求的高度. 在平面 DBC 内，过点 D 作 $DG\perp BC$，垂足是 G，连接 GH.

∵ $DH\perp$ 平面 BCH，$BC\subset$ 平面 BCH，

∴ $DH\perp BC$.

又∵ $DG\perp BC$，DH 与 DG 相交于 D，

∴ $BC\perp$ 平面 DGH.

从而有 $BC\perp GH$.

因此，$\angle DGH$ 就是坡面 DGC 和水平平面 BCH 所成的二面角的平面角，$\angle DGH=60°$，由此得

$$\begin{aligned} DH &= DG\sin 60° \\ &= CD\sin 30°\sin 60° \\ &= 100\sin 30°\sin 60° \\ &= 25\sqrt{3} \\ &\approx 43.3\ (\text{米}). \end{aligned}$$

答：沿直线前进 100 米，升高约 43.3 米.

小结与复习

教材线索

教材按照“指导思想”、“内容提要”、“学习要求和需要注意的问题”对本章进行了较全面的总结，在“内容提要”中罗列了本章的主要公理和定理，但没有进行再次的分析．在最后给出了两个较综合的例题．

教学目标

归纳总结本章内容，并适当综合提高．

教学建议

1．以教材总结为线索，引导学生总结提高．比如，在回忆到公理1时，要求学生说出条件和结论，书写出在具体应用中的符号表示，其它公理和定理也如此．在总结到面积体积时，要学生能够说出教材线索，说出相互之间的关系，总结出“分割”的具体应用．同时，由于在第一部分学习几何体的定义时还没有讲到点、线、面的位置关系，现在回过头再来看它们的定义，我们是否可以更严格地说或者能够更深地理解．

2．一定要注意一些重要的思想方法的归纳和总结．比如“线线平行”与“线面平行”的相互转化、“面面平行”与“线线平行”的转化、“线面平行”与“面面平行”的转化、“线线垂直”与“线面垂直”的相互转化、“面面垂直”与“线面垂直”的转化以及“线面垂直”与“面面垂直”的转化，还有“立体问题平面化”的转化等转化思想的总结．

3．注意在重要的思想方法的指导下的一些常见的解题方法的归纳和总结．在解法的总结时，不要有口诀，不要过细也不能总结得太绝对．

4．注意在本章中一些易混淆的东西的区别总结，注意在本章学习中对学生曾经犯的一些常见错误的总结，以进一步提醒学生不要再犯．

5．注意学生在学习本章中所表现出来的闪光点的归纳总结，以激励学生进一步学习和钻研的热情和树立学生的自信．

参考例题

例1 如图，三棱锥 $P-ABC$ 中，已知 $PA\perp BC$，$PA=BC=l$，$PA\perp DE$，$BC\perp DE$，

且 $DE=h$，求三棱锥 $P-ABC$ 的体积.

分析 直接求三棱锥 $P-ABC$ 的体积比较困难. 考虑到 $PA\perp$ 平面 EBC，可把原棱锥分割成两个三棱锥 $P-EBC$ 和 $A-EBC$，利用 $PA\perp$ 截面 EBC，且 $\triangle EBC$ 的面积易求，从而体积可求.

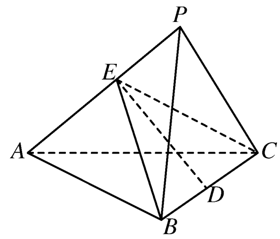


图 6－43

解 如图 6－43，连结 BE、CE.

$\because$ $PA\perp DE$，$BC\perp DE$，

又 $PA\perp BC$，$\therefore$ $PA\perp$ 截面 EBC.

$\therefore$ $V_{P\text{-}EBC}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle EBC}\cdot PE$，

$V_{A\text{-}EBC}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle EBC}\cdot AE$.

$\because$ $DE\perp BC$，

$\therefore$ $S_{\triangle EBC}=\dfrac{1}{2}BC\cdot DE=\dfrac{1}{2}lh$，

$\therefore$ $V_{P\text{-}ABC}=V_{P\text{-}EBC}+V_{A\text{-}EBC}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle EBC}\cdot(PE+AE)=\dfrac{1}{3}PA\cdot S_{\triangle EBC}=\dfrac{1}{6}l^2h$.

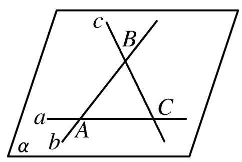
评注 本例的解法称为分割法，把原三棱锥分割为两个三棱锥，它们有公共的底面 $\triangle EBC$，而高的和恰为 PA，因而计算简便. 本题也可将三棱锥补成三棱柱求体积. 想一想，怎样做？

例 2 设 a、b、c 为空间中三条互不重合的直线，试讨论它们之间的位置关系.

解 这三条直线的位置关系如下：

一、若三条直线之间有三个交点：

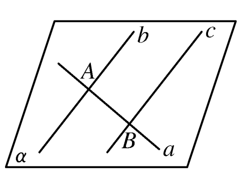
如图(1)，$a\cap b=A$，$b\cap c=B$，$c\cap a=C$，则由这三条直线只能确定一个平面.



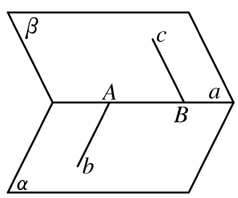
(1)

二、若三条直线之间有两个交点：

(Ⅰ) 如图(2)，$a\cap b=A$，$a\cap c=B$，$b/\!/c$，则这三条直线只能确定一个平面.



(2)

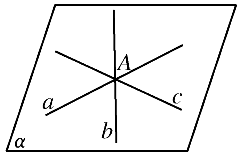


(3)

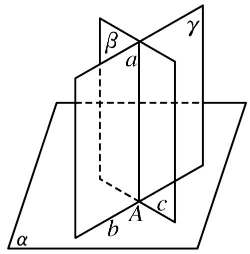
(Ⅱ) 如图(3)，$a\cap b=A$，$a\cap c=B$，b、c 异面，则由这三条直线可能确定两个平面(由 a、b 确定平面 α，由 a、c 确定平面 β).

三、若三条直线之间有一个交点：

(Ⅰ) 如图(4)，$a\cap b\cap c=A$，且 $a\subset$ 由 b、c 所确定的平面 α，则由这三条直线只能确定一个平面.



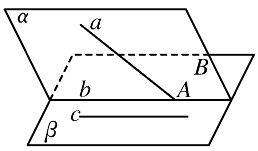
(4)



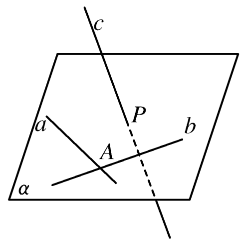
(5)

（Ⅱ）如图(5)，$a\cap b\cap c=A$，且 $a\not\subset$ 由 b、c 所确定的平面，则由这三条直线可确定三个平面（由 b、c 确定平面 α，由 c、a 确定平面 β，由 a、b 确定平面 γ）.

（Ⅲ）如图(6)，$a\cap b=A$，且 $b/\!/c$，a、c 异面，则由这三条直线可确定两个平面（由 a、b 确定平面 α，由 b、c 确定平面 β）.



(6)



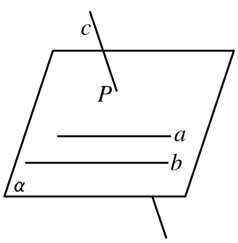
(7)

（Ⅳ）如图(7)，$a\cap b=A$，b、c 异面，a、c 异面，则由这三条直线只能确定一个平面（由 a、b 确定平面 α）.

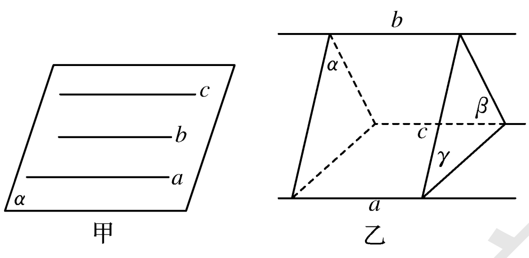
四、若三条直线之间没有交点：

（Ⅰ）如图(8)，$a/\!/b$，a、c 异面，则由这三条直线只能确定一个平面（由 a、b 确定平面 α）.

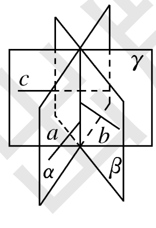
（Ⅱ）如图(9)，$a/\!/b/\!/c$，则由这三条直线或只能确定一个平面，或可能确定三个平面（即 a、b，c 共一个面 α，如图甲所示；或由 a、b 确定平面 α，由 b、c 确定平面 β，由 c、a 确定平面 γ，如乙所示）.



(8)



(9)



(10)

（Ⅲ）如图(10)，a、b 异面，b、c 异面，由这三条直线无法确定平面.

例 3 已知平面 $\alpha/\!/\beta$，$A\in\alpha$，$B\in\alpha$，$C\in\beta$，$D\in\beta$，AC，BD 是异面直线，点 E、F 分别是 AC、BD 的中点，求证：$EF/\!/\alpha$.

证明 如图 6-44，过点 E 作直线 $A_1C_1/\!/BD$. A_1C_1 与平面 α、β 分别交于点 A_1、C_1，

连结 AA_1，A_1B，CC_1，C_1D.

∵ $\alpha /\!/ \beta$，平面 $A_1C_1DB \cap \alpha = A_1B$，

平面 $A_1C_1DB \cap \beta = C_1D$，

∴ $A_1B /\!/ C_1D$.

又∵ $BD /\!/ A_1C_1$，

∴ 四边形 A_1BDC_1 为平行四边形.

∵ $\alpha /\!/ \beta$，平面 $A_1AC_1C \cap \alpha = AA_1$，平面 $A_1AC_1C \cap \beta = CC_1$，

∴ $A_1A /\!/ CC_1$.

又∵ $AE = CE$，∴ $A_1E = C_1E$，即点 E 为 A_1C_1 的中点.

∵ 四边形 A_1C_1DB 为平行四边形，且点 E，F 分别为对边 A_1C_1，BD 的中点.

∴ $EF /\!/ A_1B$.

∴ $EF /\!/ \alpha$.

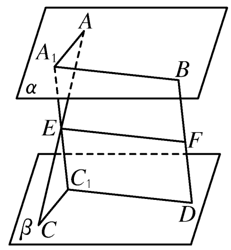


图 6-44

例 4 已知在空间四边形 $ABCD$ 中，$AD \perp BC$，$AB \perp CD$，点 O 是△BCD 的垂心，求证：$AO \perp$ 平面 BCD，$AC \perp BD$.

证明 如图 6-45，作△BCD 的高 BE、CG、DF，它们必交于一点 O.

∵ $BC \perp AD$，$BC \perp DF$，∴ $BC \perp$ 平面 AOD.

∴ $AO \perp BC$.

同理 $CD \perp$ 平面 AOB，$AO \perp CD$.

∴ $AO \perp$ 平面 BCD.

∴ $BD \perp AO$.

∵ $BD \perp CG$，∴ $BD \perp$ 平面 AOC.

∴ $AC \perp BD$.

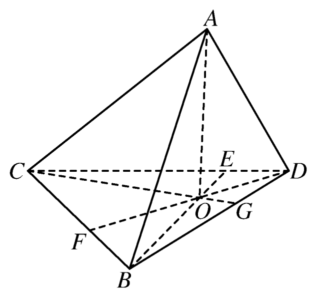


图 6-45

例 5 三射线 SX、SY、SZ 两两垂直相交于 S，平面 P 截三射线于 A、B、C，则 S 在平面 P 上的射影为△ABC 的垂心.

证明 如图 6-46，设 O 为 S 在平面 ABC 上的射影，连结 AO 延长交 BC 于 E，连结 SE.

∵ $SO \perp$ 平面 ABC，$BC \subset$ 平面 ABC，∴ $SO \perp BC$.

∵ $SA \perp SB$，$SA \perp SC$，

∴ $SA \perp$ 平面 SBC. 又 $BC \subset$ 平面 SBC，

∴ $SA \perp BC$. ∴ 又 $SO \perp BC$，

∴ $BC \perp$ 平面 AOS. 又 $AE \subset$ 平面 AOS，

∴ $BC \perp AE$.

同理可证△ABC 的其他两高也经过 O 点.

∴ O 为△ABC 的垂心.

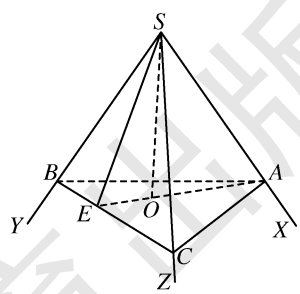


图 6-46

例 6 在空间四边形 $ABCD$ 中，设 $AB = BC = CD = DA$，E、F、G、H 分别为四边

AB、BC、CD、DA 的中点，M、N 分别为对角线 AC、BD 的中点，试证明如下结论成立：

（1）$AC\perp BD$；（2）$AC\perp$ 平面 BMD；（3）E、F、G、H 四点共面，$AC /\!/$ 平面 $EFGH$；（4）MN 垂直于平面 $EFGH$.

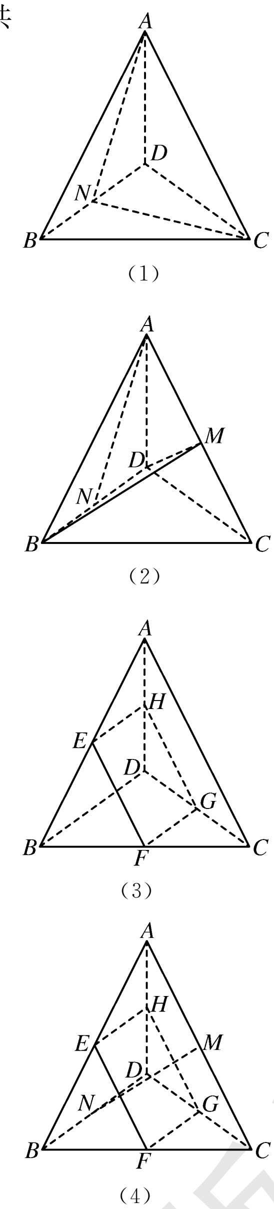


图 6－47

证　（1）连接 AN，CN.

∵　$AB=AD$，$BC=CD$，

　且 N 是 BD 中点，

∴　$AN\perp BD$，$CN\perp BD$，

∴　$BD\perp$ 平面 ACN，

∵　$AC\subset$ 平面 ACN，

∴　$BD\perp AC$.

（2）连 BM、DM.

∵　$AB=BC$，$AD=CD$，

又∵　M 为 AC 中点，

∴　$DM\perp AC$，$BM\perp AC$.

∴　$AC\perp$ 平面 BDM.

（3）顺次连接 E、F、G、H，

∵　E 是 AB 中点，F 是 BC 中点.

∴　在△ABC 中，$EF /\!/ AC$.

同理：$GH /\!/ AC$.

∴　$EF /\!/ GH$.

∴　E、F、G、H 共面.

∴　$AC /\!/$ 平面 $EFGH$.

（4）已证 $NM\perp AC$，$MN\perp BD$，$FG /\!/ BD$，$EF /\!/ AC$.

∴　$MN\perp EF$，$MN\perp FG$.

∴　$MN\perp$ 平面 $EFGH$.

例 7　一个球内切于一个圆锥，已知球与圆锥侧面相切圆的半径为 r，圆锥底面半径为 r'，求此球的表面积.

解　如图 6－48，△VAB 是圆锥的轴截面，其中 O'是内切球的球心，球与圆锥侧面相切于 C、D.

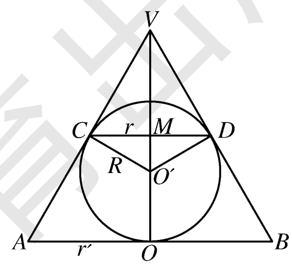


图 6－48

由题意，有

圆锥的底面半径为 $OA=OB=r'$，

球与圆锥相切圆的半径为 $CM=DM=r$.

又设内切球 O'的半径为 R，

设 $VC=x$，又知 $AC=OA=r'$，

由 $\mathrm{Rt}\triangle VCM \backsim \mathrm{Rt}\triangle VAO$，得 $\dfrac{VC}{VA}=\dfrac{r}{r'}$，即 $\dfrac{x}{x+r'}=\dfrac{r}{r'}$，

得 $x=\dfrac{r'r}{r'-r}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle VCM$ 中，$VM=\sqrt{VC^2-CM^2}=\sqrt{x^2-r^2}=\sqrt{\left(\dfrac{r'r}{r'-r}\right)^2-r^2}$

$$=\frac{r}{r'-r}\sqrt{2r'r-r^2}.$$

由 $\mathrm{Rt}\triangle VCM \backsim \mathrm{Rt}\triangle VO'C$，得 $\dfrac{O'C}{VC}=\dfrac{CM}{VM}$，即

$$O'C=R=\frac{VC\cdot CM}{VM}=\frac{r\cdot\dfrac{r'r}{r'-r}}{\dfrac{r}{r'-r}\sqrt{2r'r-r^2}}=\frac{r'r}{\sqrt{2r'r-r^2}}.$$

那么内切球的表面积是 $S_{\text{球}}=4\pi R^2=\dfrac{4\pi r'^2r^2}{2r'r-r^2}=\dfrac{4\pi r'^2r}{2r'-r}$.

例 8 如图 6－49 所示，AB 为直角三角形 ABC 的斜边，$PA\perp$ 平面 ABC，$AM\perp PB$ 于 M，$AN\perp PC$ 于 N.

(1) 求证：$BC\perp$ 面 PAC；

(2) 求证：$PB\perp$ 面 ANM；

(3) 若 $PA=AB=4$，设 $\angle BPC=\theta$，试用 $\tan\theta$ 表示 $\triangle AMN$ 的面积. 当 $\tan\theta$ 取何值时，$\triangle AMN$ 的面积最大？最大面积是多少？

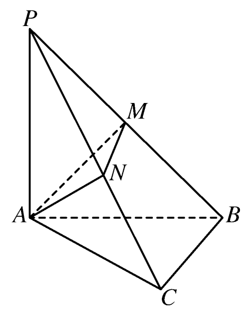


图 6－49

分析 证明线面垂直，一般是用线面垂直的判定定理，或用面面垂直的性质定理.

解 (1) $\because$ $PA\perp$ 平面 ABC，$BC\subset$ 平面 ABC，$\therefore$ $PA\perp BC$.

由于 AB 为斜边，$\therefore$ $BC\perp AC$. 又 $PA\cap AC=A$，

$\therefore$ $BC\perp$ 平面 PAC.

(2) $\because$ $BC\perp$ 平面 PAC，$AN\subset$ 平面 PAC，$\therefore$ $BC\perp AN$.

又 $AN\perp PC$，且 $BC\cap PC=C$，$\therefore$ $AN\perp$ 平面 PBC.

又 $PB\subset$ 平面 PBC，$\therefore$ $AN\perp PB$.

又 $PB\perp AM$，$AM\cap AN=A$，

$\therefore$ $PB\perp$ 平面 AMN.

(3) 在 $\mathrm{Rt}\triangle PAB$ 中，$PA=AB=4$，

$\therefore$ $PB=4\sqrt{2}$.

$\because$ $AM\perp PB$，$\therefore$ $AM=PM=BM=\dfrac{1}{2}PB=2\sqrt{2}$.

又 $PB\perp$ 平面 AMN，$MN\subset$ 平面 AMN，

$\therefore$ $PB\perp MN$.

则 $MN=PM\cdot\tan\theta=2\sqrt{2}\tan\theta$.

$\because$ $AN\perp$平面 PBC，$MN\subset$平面 PBC，$\therefore$ $AN\perp MN$.

则 $AN=\sqrt{AM^2-MN^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-8\tan^2\theta}=\sqrt{8-8\tan^2\theta}$，

$\therefore$ $S_{\triangle AMN}=\dfrac{1}{2}AN\cdot MN=\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{1-\tan^2\theta}\cdot 2\sqrt{2}\tan\theta$

$$=4\sqrt{-\left(\tan^2\theta-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}},$$

$\therefore$ 当 $\tan^2\theta=\dfrac{1}{2}$，即 $\tan\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时，$S_{\triangle AMN}$有最大值为 2.

$\therefore$ 当 $\tan\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时，$\triangle AMN$ 的面积最大，最大值为 2.

相关链接

三垂线定理

自一点向平面引垂线，垂足叫做**这点在这个平面上的射影**．这个点与垂足间的线段叫做**这点到这个平面的垂线段**.

一条直线和一个平面相交，但不和这个平面垂直，这条直线叫做**这个平面的斜线，**斜线和平面的交点叫做**斜足**．斜线上一点与斜足间的线段叫做**这点到这个平面的斜线段**.

过斜线上的一点向平面引垂线，过垂足和斜足的直线叫做**斜线在这个平面上的射影**，垂足与斜足间的线段叫做这点到平面的**斜线段在这个平面上的射影**．斜线上任意一点在平面上的射影，一定在斜线的射影上.

如图 6-50，对于平面 α，直线 AB 是垂线，垂足 B 是点 A 的射影；直线 AC 是斜线，点 C 是斜足，直线 BC 是斜线 AC 的射影；线段 AB 是垂线段，线段 AC 是斜线段，线段 BC 是斜线段 AC 的射影.

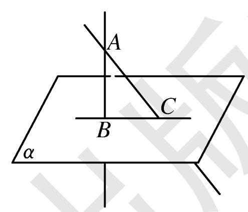


图 6-50

从平面外一点向这个平面所引的垂线段、斜线段和斜线段的射影，正好构成一个直角三角形，而且其中有一条边（即垂线段）是垂直这个平面的，因而平面内的一条直线，必然和这个直角三角形的一条边垂直．如果再垂直其余两条边之一（斜线或射影），就一定也垂直这两条边的另一条（射影或斜线）.（为什么?）

把这个结论总结为两个定理.

三垂线定理　在平面内的一条直线，如果和这个平面的一条斜线的射影垂直，那么它也和这条斜线垂直.

三垂线定理的逆定理　在平面内的一条直线，如果和这个平面的一条斜线垂直，那么它也和这条斜线的射影垂直.（如图 6－51）

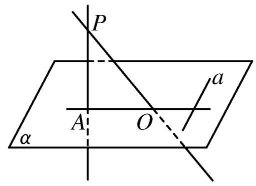


图 6－51

三垂线定理及其逆定理，可以改写成：**平面内的一条直线和这个平面的一条斜线垂直的充要条件是，平面内的这条直线和斜线在平面上的射影垂直.**

思考题　一条直线和平面的斜线垂直，那么这条直线和斜线在平面内的射影垂直吗？这个命题的逆命题成立吗？

例 1　如果一个角所在平面外一点到角的两边距离相等，那么这一点在平面上的射影，在这个角的平分线上.

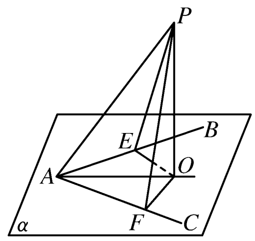


图 6－52

如图 6－52，已知$\angle BAC$在平面α内，点$P\notin\alpha$，$PE\perp AB$，$PF\perp AC$，$PO\perp\alpha$，垂足分别是E、F、O，$PE=PF$.

求证：$\angle BAO=\angle CAO$.

证明

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}PE=PF\\PO\perp\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow OE=OF\\ \left.\begin{array}{l}OP\perp\alpha\\PE\perp AB\\PF\perp AC\\AB\subset\alpha\\AC\subset\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}OE\perp AB\\OF\perp AC\end{array}\right.\end{array}\right\}\Rightarrow\angle BAO=\angle CAO.$$

思考题　例 1 的逆命题是什么？它成立吗？如何将原命题和逆命题写成充要条件的形式？

例 2　在公路旁有一条河，河对岸有高为a米的电塔AB，当公路与电塔底点B都在水平面上时，如果只有测角器和皮尺作测量工具，能否求出电塔顶与道路的距离？

解　如图 6－53，在道边取一点C，使BC与道边所成的水平角为$90°$. 再在道边上取一点D，使水平角$\angle CDB$等于$45°$，测得CD的距离为b米.

∵　BC是AC在平面CDB上的射影，且$CD\perp BC$，

$CD\subset$平面BCD，

∴　$CD\perp AC$.

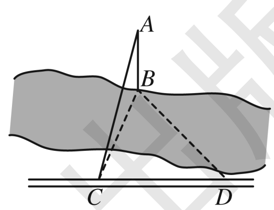


图 6－53

因此斜线AC的长度就是电塔顶与道路的距离.

∵　$\angle CDB=45°$，$CD\perp BC$，$CD=b$米，

∴　$BC=b$米.

由 Rt$\triangle ABC$得

$$AC^2=AB^2+BC^2,$$

$$AC^2=\sqrt{a^2+b^2}.$$

答：电塔顶与道路的距离是$\sqrt{a^2+b^2}$米.

例 3 一个等腰三角形 ABC 的底边在平面 α 上，它的腰在平面上的射影长等于 20 cm，顶点到平面的距离等于 30 cm，底边长20 cm. 求这个三角形的面积.

解 如图 6-54，设点 A 在平面 α 上的射影为 O，AD 是 $\triangle ABC$ 的高，连结 OA、OB、OD，则

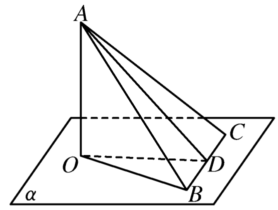


图 6-54

$AO=30$ cm，$OB=20$ cm，$BC=20$ cm.

$\because$ $AO\perp\alpha$，$BC\subset\alpha$，$AD\perp BC$，

$\therefore$ $OD\perp BC$.

$\because$ 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$AD\perp BC$，

$\therefore$ $BD=DC=\dfrac{1}{2}BC=10$ cm.

得 $OD^2=OB^2-BD^2=20^2-10^2=300$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AOD$ 中，$AD=\sqrt{AO^2+OD^2}=\sqrt{900+300}=20\sqrt{3}$（cm）.

故 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AD\cdot BC=200\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$.

思考题 在三垂线定理及其逆定理中，和斜线或它在平面上的射影垂直的直线是否一定要在平面内？为什么？

习题参考答案

6.1.1　练习（教材 P.9）

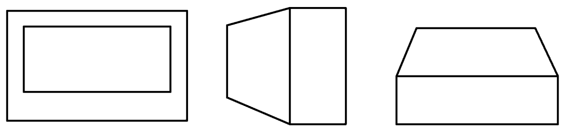
（略）

习题 1（教材 P.10）

（略）

6.1.2　练习（教材 P.13）

1. 主视图、左视图、俯视图分别是（本题只要求画出大概轮廓就算合格，如果学生画得很复杂，只要没有大错误也要肯定）



2. （1）不正确，应该是平行四边形；
（2）不正确，应该是相交直线；
（3）不正确，应该是不垂直.
3. 本题两小题均给出了具体的长度，学生在画图时要求按照给出的长度来画，否则都不能认为是全对. 图形略.

练习（教材 P.16）

（略）

习题 2（教材 P.16）

本习题的 1、2、3、5 题均给出了具体的长度，学生在画图时要求按照给出的长度来画，否则都不能认为是全对. 图形略.

4. 作图略

6.1.3　练习（教材 P.21）

1. 上、下底面积分别是 $16\pi\ \text{cm}^2$，$36\pi\ \text{cm}^2$，母线长为$\sqrt{(6-4)^2+4^2}=2\sqrt{5}$ cm，侧面积是 $20\sqrt{5}\pi\ \text{cm}^2$，全面积为$(52+20\sqrt{5})\pi\ \text{cm}^2$.
2. 侧高为 4 cm，侧面积为 $6\times\frac{1}{2}\times4(9+5)=288\ \text{cm}^2$，上、下底面积分别是 $6\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times9^2=$

$\frac{243}{2}\sqrt{3}\ \text{cm}^2$，$6\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times15^2=\frac{675}{2}\sqrt{3}\ \text{cm}^2$，全面积为$(288+459\sqrt{3})\text{cm}^2$.

练习（教材 P. 25）

1. 需要挖的体积是$\frac{(1.8+0.8)\times1.6}{2}\times1.5\times1\ 000=3\ 120(\text{m}^3)$.

需要工人数为 $3120\div30\div2=52$ 人.

2. $(6\sqrt{3}-\pi)\text{cm}^3$.

习题 3（教材 P. 26）

1. 设球的半径为 r，则 $4\pi r^2=144\pi$，解得 $r=6$.
2. 设圆柱的底面半径为 r，则 $2\pi r^2+8\times2\pi r=130\pi$，即：$r^2+8r-65=0$，解得 $r_1=5$，$r_2=-13$（舍去）. 即圆柱的底面半径为 5 cm.
3. 底座的全面积为 $S_1=10\times8+20\times16+2\times\sqrt{20}\times\frac{10+20}{2}+2\times\sqrt{29}\times\frac{8+16}{2}$

$$=400+60\sqrt{5}+24\sqrt{29}$$
$$\approx663.41.$$

柱的侧面积为 $S_2=2\times(8\times20+4\times20)=480$.

球的面积为 $S_3=4\cdot\pi\cdot2^2\approx50.24$.

$\therefore\ S=S_1+S_2+S_3\approx1\ 193.65$.

4. 设两底边长为 $5x$，$8x$，则 $1720=\frac{1}{3}\times20(25x^2+64x^2+5x\cdot8x)=860x^2$

$\therefore\ x^2=2$.

$\therefore$ 两底面积分别为 $50\ \text{cm}^2$，$128\ \text{cm}^2$.

5. $2\pi r=a$，$r=\frac{a}{2\pi}$，$V=\pi r^2\cdot a=\frac{a^3}{4\pi}$.
6. $120\%\cdot90\%=1.08$. 即体积比为 1.08∶1.
7. $r_{上}=16$，$r_{下}=12$，$h=35$，$h_1=\frac{35}{4}$.

由相似形知识得 $r_{水上}=13$.

$\therefore\ r=\frac{1}{3}\times\pi\times\frac{35}{4}(13^2+12^2+13\times12)=\frac{16\ 415}{12}\pi$.

$\therefore$ 降雨量为$\frac{\frac{164\ 152}{12}\pi}{\pi\cdot16^2}\approx5.34\ \text{cm}=53.4\ \text{mm}$.

8. 个数为$\frac{\frac{4}{3}\pi\times5^3}{\frac{4}{3}\pi\times1^3}=125$ 个.

9. 略

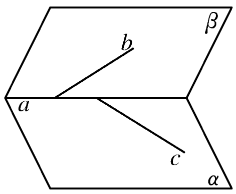
6.2.1 练习（教材 P.31）

1.

位置关系	是否共面	公共点情况
相交直线	共面	有且只有一个公共点
平行直线	共面	没有公共点
异面直线	不共面	没有公共点

2. 不是

3.



练习（教材 P.33）

1. 提示：充分利用教室和教室中的各种线条.
2. 提示：画得该直线和两个平面的交线平行.

练习（教材 P.35）

1. 折的上下的两条线段平行且相等，是平行四边形.
2. 证明：方法一：$AA' \parallel BB'$，$AA'=BB'$，$AA'B'B$ 是平行四边形，$AB=A'B'$，$AB \parallel A'B'$，同理：$BC=B'C'$，$BC \parallel B'C'$. 所以，$\angle ABC=\angle A'B'C'$，由边角边定理得 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C$.

   方法二：再证明 $AC=A'C'$，由边边边定理证明.

习题 4（教材 P.36）

1. 提示：(1) 都画得和两个平面的交线平行；(2) 都画得和两个平面的交线相交于同一个点；(3) 只要不是 (1)、(2) 的情况都可以.
2. 相对的脚底各拉一条线，看两条线是否相交，如果相交则在同一平面内，不相交则不在.
3. 有 AB、DC、AA'、DD'共 4 条.
4. 是
5. 与 AA'相交的平面有上下两个面（即面 $ABCD$，$A'B'C'D'$）；与 AA'平行的平面有面 $DCC'D'$和面 $BCC'B'$共两个；AA'所在的平面有 $ABB'A'$和面 $ADD'A'$共两个.
6. 过 P 画直线 MN 和 BC 平行，因为 $MN \parallel BC$，$BC \parallel B'C'$，由平行线的传递性知 $MN \parallel B'C'$.

7. 因为 $AE /\!/ A_1E_1$，$AE=A_1E_1$，所以 AEE_1A_1 是平行四边形，所以 $EE_1 /\!/ AA_1$ 且 $EE_1=AA_1$. 同理，$FF_1 /\!/ AA_1$ 且 $FF_1=AA_1$，故 $EE_1 /\!/ FF_1$，$EE_1=FF_1$. 即 EE_1F_1F 是平行四边形，所以 $EF /\!/ E_1F_1$.

8. P、Q、R 都在$\triangle ABC$ 所在平面与平面 α 的交线上.

6.2.2　练习（教材 P.40）

1. （1）$A_1B_1C_1D_1$ 和 DCC_1D_1.

（2）B_1C_1CB 和 DCC_1D_1.

（3）$A_1B_1C_1D_1$ 和 B_1C_1CB.

2. （1）正确，因为过这点可以做该平面内的任何直线的平行线.

（2）正确. 因为过这点可以做该直线的平行线，而过该平行线的平面可以有无数个.

3. 对，因为始终有 $AB /\!/ CD$.

4. 因为 $AC /\!/ BD$，所以 $ABDC$ 共面. 又 $AB /\!/ \alpha$，平面 $ABCD\cap\alpha=CD$，所以 $AB /\!/ CD$，即 $ABDC$ 是平行四边形，所以 $AB=CD$.

练习（教材 P.43）

1. （1）错，因为这两条直线可能相互平行.

（2）错，有无数条平行线.

（3）对.

2. （1）AC，BD 分别是平面 PBD 与平面 α，β 的交线，所以 $AC /\!/ BD$.

（2）由（1）得$\dfrac{PA}{PB}=\dfrac{PC}{PD}$，所以 $PD=\dfrac{PB\cdot PC}{PA}=\dfrac{27}{4}$ cm.

3. 显然 $BD /\!/ B_1D_1$ 和 $A_1B /\!/ D_1C$. 所以结论成立.

习题 5（教材 P.44）

1. （1）错，如果一个平面刚好过已知的这两条直线就不能说直线与该平面平行，其余均可.

（2）错.

（3）错.

2. 提示：交线都和 AB 平行，它们就相互平行.

3. 由 $a /\!/ b$ 得 $a /\!/$ 面 β，所以 $a /\!/ l$. 同理 $b /\!/ l$.

4. 过 a 作一个平面与平面 α，β 都相交，设交线为 b，c，则 $b /\!/ c /\!/ a$，由 3 题知 $b /\!/ l$，所以 $a /\!/ l$.

5. 过其中一条直线上一点可以作另一条直线的平行线，过这条平行线和直线的平面和另一条直线平行.

6. 直线 $a /\!/$ 面 α，可以在面 α 内作直线 $b /\!/ a$，平面 $\alpha /\!/ \beta$，所以直线 $b /\!/$ 面 β，所以在面 β 内有

直线 c，满足 $c\parallel b$，所以 $c\parallel a$，所以直线 $a\parallel$ 面 β.

7. 由练习 2 题的方法很容易得到$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{PA}{PA'}=\dfrac{AC}{AC'}=\dfrac{PC}{PC'}=\dfrac{CB}{CB'}$，进而结论成立.

8. 证：$AB\parallel A'B'$，$CB\parallel C'B'$.

9. 证：$DE\parallel AB_1$，$DF\parallel AC_1$.

6.2.3　练习（教材 P.47）

1. 折痕垂直于两条相交直线.
2. 不一定，当这两条直线相交时肯定垂直，当平行时，可以不垂直.
3. $\because VA=VC$，点 D 为 AC 的中点，

   $\therefore AC\perp VD$.

   同理 $AC\perp BD$.

   又 $VD\cap BD=D$，

   $\therefore AC\perp$ 平面 VBD.

练习（教材 P.48）

1. 4 m（由三角形的中位线知道）
2. 过 A，B 分别作平面的垂线，由矩形的性质可得.

练习（教材 P.52）

1. 教室的门始终与地面垂直，因为门始终过地面的垂线（门所转动的轴）.
2. 已知：直线 $a\parallel$ 平面 α，直线 $a\perp$ 平面 β，求证：平面 $\alpha\perp$ 平面 β.

   证明：因为直线 $a\parallel$ 平面 α，

   所以可以在平面 α 内作直线 b，使 $a\parallel b$.

   因为直线 $a\perp$ 平面 β，

   所以可以在平面 β 内作相交直线 c，d，使 $a\perp c$，$a\perp d$.

   所以 $b\perp c$，$b\perp d$.

   故平面 $\alpha\perp$ 平面 β.
3. 可能平行也可能相交，比如正方体的侧面都垂直于底面，但侧面之间既有平行又有相交（垂直）.

习题 6　（教材 P.53）

1. 提示：用定理 6.
2. 已知：直线 $a\parallel$ 面 α，直线 $b\perp$ 面 α.

   求证：$a\perp b$.

证明：由于直线 $b\perp$ 面 α，不妨设 $b\cap\alpha=A$，过点 A 与直线 a 作平面 β，设 $\alpha\cap\beta=$ 直线 c，则 $b\perp c$，直线 $a\parallel$ 面 α 知，$c\parallel a$，所以 $a\perp b$.

3. 由 $PO\perp\alpha$，$a\subset\alpha$ 知，$PO\perp a$，又 $OA\perp a$，所以 $a\perp$ 面 POA，故 $a\perp PA$.

4. 已知 $\alpha\cap\beta=c$，$a\cap b=A$，$a\perp\alpha$，$b\perp\beta$，$d\cap a=B$，$d\cap b=C$. 求证：$c\perp d$.

证明：$a\perp\alpha$，$c\subset\alpha$ 知 $a\perp c$，$b\perp\beta$，$c\subset\beta$ 知 $b\perp c$，又 $a\cap b=A$，所以 c 垂直 a 与 b 所确定的平面，由 $d\cap a=B$，$d\cap b=C$ 得 $c\perp d$.

5. 设 P 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 内的射影是 O，由 $PA=PB=PC$ 得 $OA=OB=OC$，所以 O 是 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 的外心，与斜边 AB 的中点 D 重合，所以 $PD\perp$ 平面 ABC.

6. 证明：由 $BB_1\perp$ 面 $ABCD$，得 $BB_1\perp EF$，又显然 $EF\perp BD$，所以 $EF\perp$ 面 BB_1D，所以 $B_1D\perp EF$，同理 $B_1D\perp GE$，故 $B_1D\perp$ 面 EFG.

7. 由本节习题 1 和定理 8 即得结论.

8. 证明：设平面 $\alpha\cap\beta\cap\gamma=A$，过 A 作直线 $AB\perp\gamma$，由 $\alpha\perp\gamma$，$\beta\perp\gamma$，知 AB 同时在平面 α，平面 β 内. 所以 AB 就是它们的交线 a，所以 $a\perp\gamma$.

9. 提示：由于 $\alpha\perp\beta$，故可在平面 α 内作直线 b，使 $b\perp\beta$，再由 $a\perp\beta$ 可得 $a\parallel b$. 而 $b\subset\alpha$，$a\not\subset\alpha$. 根据直线和平面平行的判定定理，可得 $a\parallel\alpha$.

10. (1) 因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $PA\perp BD$，又 $ABCD$ 是正方形，$AC\perp BD$，所以 $BD\perp$ 平面 PAC，$BD\perp PC$.

(2) $PC\perp BE$，$PC\perp BD$ 得 $PC\perp$ 平面 BDE，故平面 $BDE\perp$ 平面 PBC.

11. 已知：平面 α，β，γ，且 $\alpha\cap\beta=a$，$\alpha\cap\gamma=b$，$\beta\cap\gamma=c$，

求证：$a\parallel b\parallel c$ 或 $a\cap b\cap c=A$.

证明：(1) 如果 $a\parallel b$，则由 $\alpha\cap\gamma=b$，得 $b\in\gamma$，所以 $a\parallel$ 平面 γ，又 $\alpha\cap\beta=a$，$\beta\cap\gamma=c$ 知 $a\parallel c$，即 $a\parallel b\parallel c$.

(2) 如果 $a\cap b=A$，则由 $\alpha\cap\beta=a$ 知 $A\in\alpha\subset\beta$，由 $\alpha\cap\gamma=b$，知 $A\in b\subset\gamma$，所以 $A\in\beta\cap\gamma=c$，故 $a\cap b\cap c=A$.

综上，$a\parallel b\parallel c$ 或 $a\cap b\cap c=A$.

复习题六（教材 P. 63）

1. 略

2. 略

3. 侧面梯形面积为 $\dfrac{10+15}{2}\cdot\sqrt{9^2-\left(\dfrac{15-10}{2}\right)^2}=\dfrac{25}{4}\sqrt{299}$，

侧面积为 $\dfrac{75}{2}\sqrt{299}$，

上、下底面积之和为 $6\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}(10^2+15^2)=\dfrac{975}{2}\sqrt{3}$，

$\therefore$全面积为$\frac{75}{2}\sqrt{299}+\frac{975}{2}\sqrt{3}$.

4. 体积为三部分体积之和：

$V=10\times8\times6+5\times4\times20+\frac{4}{3}\pi\cdot3^3=880+36\pi\approx993.04$.

面积为底坐的全面积加中间长方体的侧面积再加球面积，

$S=2\times10\times6+2\times8\times6+2\times10\times8+2(5+4)\times20+4\pi\cdot3^2$

$=216+160+360+36\pi$

$=849.04$.

5. 球的直径为长方体的对角线$\sqrt{3^2+4^2+5^2}=\sqrt{50}$，

$S=4\pi R^2=4\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{50}}{2}\right)^2=50\pi\approx150.7$.

6. 提示：用反证法，假设平行，则可确定一个平面α，则易得两条异面直线都在面α内，矛盾.

7. 证明：连结GC，$\because BF=EF$，$BG=GA$，$\therefore GF \underline{\underline{/\!/}} \frac{1}{2}AE$.

$\because AE\perp$平面ABC，$\therefore FG\perp$平面ABC.

$\because DC\perp$平面ABC，$\therefore AE/\!/DC$.

$\because AE=2a$，$DC=a$，$\therefore FG \underline{\underline{/\!/}} DC$.

$\therefore DCGF$是平行四边形，$\therefore DF/\!/CG$.

$\therefore FD/\!/$平面ABC.

8. 提示：垂直，证$A_1C_1\perp B_1D_1$，$A_1C_1\perp BB_1$.

9. 提示：连结A_1D，连结B_1C，证$OM/\!/A_1D$，$A_1D/\!/B_1C$，而得$OM/\!/B_1C$.

从而$OM/\!/$面BB_1C_1C.

10. 提示：$\because AD/\!/BC$，$\angle BCD=90^\circ$，$\therefore CD\perp AD$，

$\because PD\perp CD$，

$\therefore CD\perp$面PAD.

$\therefore PA\perp CD$.

$\because PA\perp AB$，又$\because CD \not\parallel AB$，

$\therefore PA\perp$面$ABCD$.

$\therefore$面$PAB\perp$平面$ABCD$.

11. 见教师教学用书中“小结与复习”的参考例题2.

12. 垂直，因为AB是底面圆直径，E是圆上一点，所以$AE\perp BE$，而显然$DA\perp BE$. 故$BE\perp$面DAE，从而面$DAE\perp$面DBE.

第 7 章　解析几何初步

解析几何是十七世纪数学发展的重大成果之一．它通过引进直角坐标系，建立起了点与坐标、曲线与方程之间的对应关系，从而将几何问题转化为代数问题．其本质就是用代数方法研究几何问题．解析几何充分体现了数形结合的数学思想．

一、教学目标

通过本章的学习，应使学生了解解析几何的思想方法，认识几何图形与代数方程的辨证统一关系．学会在平面直角坐标系中建立直线和圆的代数方程，通过研究方程的有关性质来研究直线和圆的相关几何性质以及相互之间的位置关系．在建立直线和研究其性质的过程中注意向量方法发挥的重要的工具作用．了解空间直角坐标系，体会数形结合思想，初步形成用代数方法解决几何问题的能力．

1．通过对位置向量在基 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$ 方向上的分解，得出点所对应的实数对（x，y），了解坐标与点、与向量（原点出发）的一一对应关系．会用点 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$的坐标表示向量$\overrightarrow{AB}$的坐标，掌握两点间距离公式及定比分点坐标公式．

2．由特殊到一般，了解二元一次方程与直线的对应关系，掌握直线的一般方程，会用法向量方法求直线的一般方程，了解直线的两点式方程．

3．理解利用直线的法向量研究直线位置关系的方法，掌握定理 2，会根据所给两直线的方程判断位置关系，会求交点及夹角．

4．掌握点到直线的距离公式，并能熟练运用其解题．理解利用法向量推导点到直线距离公式及三角形、平行四边形面积公式的方法．了解三角形及平行四边形面积公式．

5．准确掌握倾斜角、斜率的定义，掌握斜率公式，了解利用斜率研究直线方程的方法，了解直线的点斜式方程和斜截式方程．

6．掌握圆的定义及圆的标准方程，使学生会用待定系数法求圆的标准方程．

7．掌握圆的一般方程，弄清方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 表示圆的条件，使学生能够熟练地将圆的一般方程化为标准方程．

8．理解并掌握判断直线与圆的位置关系的两种方法，理解并掌握判断两圆位置关系的方法．

9．了解解析几何用代数方法解决几何问题的基本思想方法，掌握几何问题的代数方法解题的基本思路，能运用几何问题的代数方法求解简单的几何问题．

10．理解空间直角坐标系的概念，掌握空间两点间距离公式，能够灵活运用．

二、教材说明

本章内容实际上可划分为直线与方程、圆与方程、空间直角坐标系三部分. 直线与方程部分的编写突出了向量的作用. 向量是近代数学最重要和最基本的概念之一，是沟通几何、代数、三角等内容的桥梁，具有丰富的实际背景和广泛的应用.

从点的坐标开始，本章就体现了向量的方法. 将位置向量在基 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$ 方向上的分解所得的有序实数对（x，y）称为点的坐标. 将两点 A、B 间的距离看作是向量的模$|AB|$，从而根据模的定义推出平面上两点间的距离.

在推导直线 l 的一般方程 $Ax+By+C=0(A^2+B^2\neq0)$时，记 $\boldsymbol{n}=(A,B)$为直线 l 的法向量，利用法向量及待定系数法求得直线的一般方程.

在利用直线方程解决具体问题以及研究两直线位置关系时，依然采用法向量方法.

圆与方程部分的处理，实际突出了解析几何研究问题的一般方法. 即建立平面直角坐标系，求出曲线上动点运动的规律——曲线的方程，再通过曲线方程研究曲线的性质. 这为后续学习圆锥曲线打下良好的基础.

本章着重体现了数形结合思想. 解析几何本身是数形结合的典范，教学中充分体现数形结合思想，不仅有助于学生更加直观地理解曲线与方程的关系，而且有助于学生掌握解析几何的基本方法. 比如，方程组的解与曲线的交点，利用圆心到直线的距离判断直线与圆的位置关系，都很好地反映出“形”的直观性和“数”的严谨性. 教学中注意贯彻落实数形结合思想，有利于学生整合和升华旧有知识体系，也为后续学习直线和圆锥曲线的位置关系奠定思想基础.

教师教学用书设置的“相关链接”栏目，旨在帮助教师引导学生进一步思考、钻研和提高，增长学生知识，开拓思路，发展提高. “相关链接”的部分内容，体现了数学的文化价值，如通过对解析几何创始人笛卡儿生平的介绍，对学生进行科学态度和人文精神的熏陶.

三、教学建议

1. 注意新旧知识的联系，体现新课程的模块化特点

加强与前后各章教学内容的联系，注意复习和应用已学内容，并为后续章节教学内容做好准备，能使整套教科书成为一个有机整体，提高教学效益. 本教材在研究直线方程时，突出了向量方法，紧紧扣住直线的法向量与直线方程中 x、y 的系数的关系，利用待定系数法求直线的方程，而淡化了传统的研究直线倾斜角和斜率的做法. 通过对求圆的标准方程和一般方程及通过方程研究圆的性质，体现了解析几何的一般思想方法，为选修中的圆锥曲线模块的学习做好准备.

2. 注意应用意识培养，教学中体现从特殊到一般的思维模式

新课程体系中增加了推理与证明，与传统数学教学中只重视推理证明不同，引进了合情推理，从特殊到一般的思维模式是归纳推理的一种，符合思维规律，是培养创造性思维和创

新的重要途径．课本中很多结论的产生，都采用了这种先解决具体问题，然后再归纳结论的模式，应当很好地利用和体现．课前的很多引例，来源于实践，有助于学生了解问题背景，便于学生理解数学知识，能够帮助学生运用数学知识解决实际问题．

3．体现数形结合思想

数形结合既是重要的数学思想，又是重要的数学方法．数与形是数学的两个最基本的研究对象，但是，在数学的早期发展历史上，人们对数与形的研究是相对独立和隔离的，从中发展出相对独立的代数学和几何学，直到解析几何学的产生，才使数与形这两个对象完美地结合起来．本章主要内容属于解析几何学的基础知识，学生初次接触借助于坐标方法研究图形．教科书注意渗透数形结合这一解析几何学中反映出来的重要数学思想方法．在本章的一些参考例题和习题中都注意配备了能比较明显体现数形结合这一重要数学思想方法的问题．

四、课时安排建议

本章教学时间约需 **17** 课时，具体分配如下（仅供参考）：

7.1　点的坐标	1 课时
7.2　直线的方程	
7.2.1　直线的一般方程	2 课时
7.2.2　两条直线的位置关系	2 课时
7.2.3　点到直线的距离	2 课时
7.2.4　直线的斜率	1 课时
7.3　圆与方程	
7.3.1　圆的标准方程	1 课时
7.3.2　圆的一般方程	1 课时
7.3.3　直线与圆、圆与圆的位置关系	3 课时
7.4　几何问题的代数解法	1 课时
7.5　空间直角坐标系	1 课时
小结与复习	2 课时

7.1 点的坐标

教材线索

本小节以初中平面直角坐标系为基础，运用位置向量及平面向量基本定理为工具，给出了平面上两点 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$ 间距离 $|AB|$ 的概念及向量 $\overrightarrow{AB}$ 长度的概念，并给出了两点间距离公式、定比分点坐标公式及任意一点出发的向量用坐标表示的方法.

教学目标

通过对位置向量在基 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$ 方向上的分解，得出点所对应的实数对（x，y），了解坐标与点、与向量（原点出发）的一一对应关系．掌握用点 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$ 的坐标表示向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标的方法，掌握两点间距离公式及定比分点坐标公式.

教材分析

1. 重点：

(1) 两点间距离公式；

(2) 定比分点坐标公式及中点坐标公式.

2. 难点：

(1) 定比分点分有向线段所成的比的概念；

(2) 定比分点坐标公式的推导.

3. 坐标与点、与原点出发的向量是一一对应的

建立平面直角坐标系之后，坐标平面内的每一个点，可由一组有序实数对（x，y）表示；同时，任意一组有序实数对（x，y）对应坐标平面内的一个点．如果我们将该点与坐标原点相连，得到以原点为起点、该点为终点的向量，并以终点的坐标（x，y）作为此向量的坐标，则可以看到坐标与点、与原点出发的向量是一一对应的．如果向量 $\overrightarrow{AB}$ 的起点 A（x_1，y_1）不是原点 O，该向量的坐标当然不能用终点 B 的坐标（x_2，y_2）表示，其坐标为 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2, y_2)-(x_1, y_1)=(x_2-x_1, y_2-y_1)$，此即为将 $\overrightarrow{AB}$ 平移至 A 点与 O 重合时向量终点的坐标.

4. 两点间距离即为向量的长度

从图 7-1 中很容易看出，A，B 两点间距离就是向量 $\overrightarrow{AB}$ 或 $\overrightarrow{BA}$ 的长度．由平面向量知

识，很轻松得到$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$. 若利用勾股定理，也可以推导出此公式. 可以验证，当直线AB垂直x轴或垂直y轴时，公式也成立.

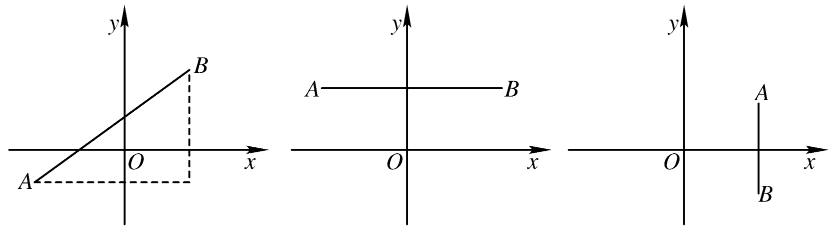


图 7－1

5. 定比分点分有向线段所成的比与定比分点坐标公式

定比分点P可能在有向线段AB内（内分点），也可能在AB或BA的延长线上（外分点）. 当P为内分点时，根据定义可知，$\lambda>0$；当P为外分点时，无论是在AB还是BA的延长线上，都有$\lambda<0$. 只是一侧$\lambda<-1$，另一侧为$-1<\lambda<0$. 但无论P运动到哪里，λ都不会等于-1，这与定比分点坐标公式中的要求一致.

教学建议

1. 学习本节内容之前，最好帮助学生回顾平面直角坐标系及平面向量的有关知识，使学生更深刻地理解坐标与点、坐标与向量的关系.

2. 充分展现数形结合思想，解题时尽量画出图形，帮助学生分析思路，并要求学生养成画图的习惯.

3. 注意定比分点公式的推导过程，而不是仅仅强调公式的记忆. 教材中将推导过程转化为一个探究定比分点坐标的例题，充分体现了探究过程，对培养学生的探究意识、探索精神和运用向量解决实际问题的能力都大有裨益.

4. 补充利用勾股定理推导两点间距离公式的方法（参见相关链接）.

参考例题

例 1 已知$\triangle ABC$的顶点坐标为$A(-1,5)$,$B(-3,-2)$,$C(5,8)$,求BC边上的中线AM的长.

解 设点M的坐标为(x, y)，因为点M是线段BC的中点，所以

$$x=\frac{-3+5}{2}=1,\ y=\frac{-2+8}{2}=3.$$

即M点的坐标为$(1, 3)$.

由两点间距离公式得

$$|AM|=\sqrt{[1-(-1)]^2+(3-5)^2}=2\sqrt{2}.$$

因此，BC边上的中线AM的长为$2\sqrt{2}$.

例 2 已知$\triangle ABC$是直角三角形，斜边BC的中点为M，建立适当的直角坐标系，证

明：$AM=\frac{1}{2}BC$.

证明 如图 7－2，以 Rt$\triangle ABC$ 的直角边 AB，AC 所在直线为坐标轴，建立直角坐标系，设 B，C 两点的坐标分别为（b，0），（0，c）.

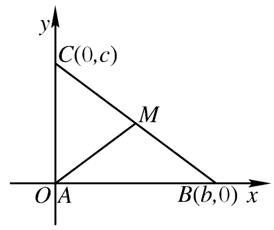


图 7－2

因为点 M 是 BC 的中点，故点 M 的坐标为 $\left(\frac{0+b}{2},\ \frac{0+c}{2}\right)$，即 $\left(\frac{b}{2},\ \frac{c}{2}\right)$.

由两点间距离公式得

$$BC=\sqrt{(0-b)^2+(c-0)^2}=\sqrt{b^2+c^2},$$

$$AM=\sqrt{\left(\frac{b}{2}-0\right)^2+\left(\frac{c}{2}-0\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2}.$$

所以，在 Rt$\triangle ABC$ 中，有 $AM=\frac{1}{2}BC$.

相关链接

两点间距离公式的勾股定理推导方法

一般地，已知两点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，求 A，B 两点间的距离.

如图 7－3，如果 $x_1\neq x_2$，$y_1\neq y_2$，过 A，B 分别向 y 轴、x 轴作垂线，两条直线交于 M 点，则点 M 的坐标为（x_2，y_1）.

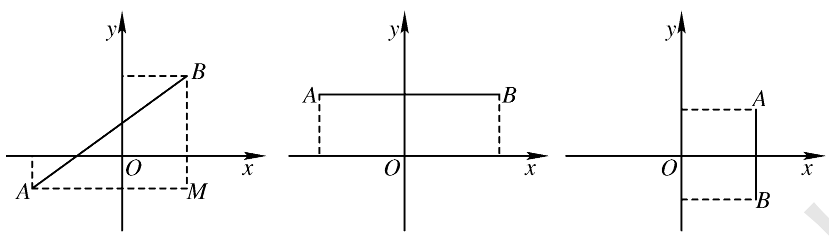


图 7－3

因为 $|AM|=|x_2-x_1|,|BM|=|y_2-y_1|,$

所以，在 Rt$\triangle ABM$ 中，$|AB|^2=|AM|^2+|BM|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$. （＊）

如果 $x_1=x_2$，那么 $|AB|=|y_2-y_1|$，（＊）也成立.

如果 $y_1=y_2$，那么 $|AB|=|x_2-x_1|$，（＊）仍然成立.

由此我们得到平面上 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 两点间的距离公式

$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

7.2 直线的方程

7.2.1 直线的一般方程

教材线索

本小节由一次函数的图象是直线，引出问题：1. 是否所有的二元一次方程的图象都是直线；2. 图象为直线的方程是否一定为二元一次方程. 再由特殊到一般，得出定理 1：任意一个二元一次方程 $Ax+By+C=0$（A，B 不全为 0）的图象是与 $\boldsymbol{n}=(A,B)$垂直的一条直线. 导出直线 l 的一般方程 $Ax+By+C=0$（A，B 不同时为 0），记 $\boldsymbol{n}=(A,B)$为 l 的法向量，并给出利用法向量及待定系数法求直线一般方程的方法，解决具体问题.

教学目标

由特殊到一般，了解二元一次方程与直线的对应关系，掌握直线的一般方程，会用法向量方法求直线的一般方程，了解直线的两点式方程.

教材分析

1. 重点：直线的一般方程及运用法向量方法求直线的一般方程.

2. 难点：具体问题中法向量的不同确定方法.

3. 方程与图象的对应

教材通过具体方程 $2x+3y-6=0$ 及一般方程 $Ax+By+C=0$（A，B 不全为 0）说明任意二元一次方程的图象是直线，且任意直线可用唯一的二元一次方程来表示. 更微观地看，直线上每一点的坐标都是方程的解，且以方程的任意一组解为坐标的点都在直线上. 故称直线为方程的直线，方程是直线的方程.

4. $A^2+B^2\neq 0$

二元一次方程 $Ax+By+C=0$ 表示直线的前提是 A，B 不同时为 0，即 $A^2+B^2\neq 0$. 若 A、B 同时为 0：①当 $C=0$ 时，方程表示整个坐标平面；②当 $C\neq 0$ 时，方程不表示任何点，当然不能表示直线. 从法向量的角度看，若 A、B 都为 0，法向量 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{0}$，方向不能确定，进而不能确定直线.

5. 特殊条件下法向量及方向向量的确定

使用配凑方法容易得到向量 $\boldsymbol{v}=(a,b)$的法向量 $\boldsymbol{n}=(b,-a)$或$(-b,a)$.（因为$(a,b)\cdot(b,-a)=0$，$(a,b)\cdot(-b,a)=0$）. 而欲求$\angle BAC$ 的角平分线$\overrightarrow{AE}$的方向向量，可分别在向量$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$上截取长度相等的向量$\overrightarrow{AB_1}$，$\overrightarrow{AC_1}$，从而可得$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{AC_1}$.

教学建议

1. 直线与二元一次方程的对应关系，让学生了解即可. 其证明过程可根据学生实际适度淡化. 使学生较为容易掌握的教法是按照教材的设计，先特殊后一般. 若学生水平较高，亦可直接证明方程 $Ax+By+C=0$（$A^2+B^2\neq 0$）与直线的对应关系.

2. 重点是要使学生掌握运用法向量及待定系数法求直线的一般方程. 包括如何确定向量 $\boldsymbol{v}=(a,b)$的法向量及一个角的角平分线的方向向量的办法，因而教学中应注意归纳总结，并通过训练熟练掌握.

参考例题

例 1 若方程 $Ax+By+C=0$ 表示 y 轴，则必有（　　）

A. $B\cdot C=0$　　　　B. $A\neq 0$

C. $B\cdot C=0$ 且 $A\neq 0$　　　　D. $B=C=0$ 且 $A\neq 0$

答案 D

例 2 如果 $AC<0$ 且 $BC<0$，那么直线 $Ax+By+C=0$ 不通过（　　）

A. 第一象限　　　　B. 第二象限

C. 第三象限　　　　D. 第四象限

解法一 由 $BC<0$ 和 $B\neq 0$，化直线方程为斜截式 $y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$. 因为 $AC<0$，$BC<0$，所以 $AB>0$，从而直线斜率$-\frac{A}{B}<0$，直线在 y 轴上的截距$-\frac{C}{B}>0$，所以直线不通过第三象限，故选 C.

解法二 取特殊值：$A=B=1$，$C=-1$ 知满足题设，此时方程为 $x+y-1=0$，由其图象知，A、B、D 选项不正确，故选 C.

例 3 依据下列条件，求直线的方程；

(1) 经过点 $P(2,-1)$，且与直线 $2x-3y+12=0$ 平行；

(2) 经过点 $Q(-1,3)$，且与直线 $x+2y-1=0$ 垂直.

解 (1) 直线 $2x-3y+12=0$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(2,-3)$，也就是所求直线的法向量，故可设所求直线为 $2x-3y+C=0$.

将$(2,-1)$代入，得　　$2\times 2-3\times(-1)+C=0$，$C=-7$，

故所求直线为　　　　$2x-3y-7=0$.

（2）由题设可知，直线 $x+2y-1=0$ 的法向量（1，2）即为所求直线的方向向量，容易凑出 $0=2\times1+(-1)\times2=(2,-1)\cdot(1,2)$，可得所求直线的法向量 $\boldsymbol{n}=(2,-1)$. 故所求直线的方程具有形式 $2x-y+C=0$.

将点 $(-1,3)$ 代入，得 $\qquad 2\times(-1)-3+C=0, C=5.$

故所求直线方程为 $\qquad 2x-y+5=0.$

例 4 已知直线过点 $P(-2,3)$，且与两坐标轴围成的三角形面积为 4，求直线的方程.

解 设所求直线法向量为 $\boldsymbol{n}=(A,1)$，则直线具有形式 $Ax+y+C=0$.

将 $(-2,3)$ 代入，$A\times(-2)+3+C=0, C=2A-3$.

故直线化为
$$Ax+y+2A-3=0.$$

令 $x=0$ 得，
$$y=3-2A.$$

令 $y=0$ 得，
$$x=\frac{3}{A}-2.$$

依题意，有
$$\frac{1}{2}|3-2A|\left|\frac{3}{A}-2\right|=4.$$

即
$$\left|\frac{9}{A}+4A-12\right|=8.$$

进而 $\frac{9}{A}+4A-12=8$ 或 $\frac{9}{A}+4A-12=-8$.

整理得：$4A^2-20A+9=0$ 或 $4A^2-4A+9=0$.

解方程 $4A^2-20A+9=0$ 得 $A=\frac{1}{2}$ 或 $A=\frac{9}{2}$.

解方程 $4A^2-4A+9=0$ 知此方程无解.

所以，所求直线方程为 $\frac{1}{2}x+y+2\times\frac{1}{2}-3=0$ 或 $\frac{9}{2}x+y+2\times\frac{9}{2}-3=0$.

即
$$x+2y-4=0 \text{ 或 } 9x+2y+12=0.$$

相关链接

曲线的方程与方程的曲线

建立平面直角坐标系之后，平面内的点和有序实数对之间就建立了一一对应关系．现在我们进一步研究平面内的曲线和含有两个变量的方程之间的关系．平面内的曲线是被理解为平面内适合某种条件的点的集合（或轨迹）．也就是说：

（1）曲线上的每个点都要具有某种条件；

（2）每个符合条件的点都要在这曲线上.

既然平面内的点与作为它的坐标的有序实数对建立了一一对应关系，那么对于具有某种

条件的一切点，它的坐标就是应该有所制约，也就是说，动点的横坐标与纵坐标之间受到某种条件的约束，所以探求满足某种条件的点的轨迹问题，就变为探求这些点的横坐标与纵坐标应受怎样的约束问题. 两个变量 x，y 的方程 $F(x,y)=0$ 就表示横坐标 x 与纵坐标 y 之间的约束关系. 这样，具有某种条件的点的集合，就变换到 x，y 的二元方程的解的集合. 这两个集合之间也存在一一对应的关系，并且满足：

(1) 曲线上的点的坐标都是这个方程的解；

(2) 以这个方程的解为坐标的点都在曲线上.

这样一来，一个二元方程可以看作是它的解所对应的点的全体组成的曲线；二元方程所表示的 x、y 之间的关系，就是以 x，y 为坐标的点所要适合的条件. 这样的方程就叫做曲线的方程；反过来，这条曲线就叫做方程的曲线.

特别地，对于二元一次方程和它所表示的直线，可以叫做直线的方程和方程的直线.

7.2.2 两条直线的位置关系

教材线索

本节内容研究了平面内两条直线的位置关系：平行、相交及重合. 其中对于相交，介绍了求两直线交点及夹角的方法，并研究了特殊的相交——垂直.

教学目标

理解利用直线的法向量研究直线位置关系的方法，掌握定理 2，会根据所给两直线方程判断位置关系，会求交点及夹角.

教材分析

1. 重点：定理 2、两直线位置关系的判定方法及求夹角的方法.

2. 难点：利用法向量方法判定两直线平行、重合及垂直.

3. 两直线夹角的范围

两直线的夹角 θ 的大小规定在 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ 的范围之内，因此当法向量的夹角 α 满足 $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，$\theta=\alpha$；当法向量的夹角 $\alpha>\frac{\pi}{2}$ 时，$\theta=\pi-\alpha$. 也就是说，两直线的夹角不取钝角.

教学建议

1. 应使学生明白，在平面解析几何中，两直线的位置关系有平行、相交、重合三种情

况，而垂直只是相交的特殊情形．在研究两直线相交的位置关系时，交点及两直线的夹角是我们通常考虑的两个研究角度．

2．在用定理 2 判断两直线平行时，可以用定理中的表现形式$\begin{cases}A_2=\lambda A_1,\\B_2=\lambda B_1,\\C_2\neq\lambda C_1,\end{cases}$也可以根据直线中对应系数的比来判断$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}\neq\dfrac{C_1}{C_2}$是否成立，进而得出是否平行的结论．

3．在利用法向量方法判定平行时，必须注意 $\boldsymbol{n}_1 /\!/ \boldsymbol{n}_2$ 只是 $l_1 /\!/ l_2$ 的必要条件，而不是充要条件．因为当 $\boldsymbol{n}_1 /\!/ \boldsymbol{n}_2$ 时，l_1 与 l_2 还可能重合，故需做进一步的判断．

4．两直线的三种位置关系：相交、平行、重合，对于相应的二元一次方程组的解的情况是：有唯一解、无解、无穷多解．这种数形之间的联系应该使学生在学习解析几何的过程中充分理解．

参考例题

例 1　直线 $2x+my=3$ 与直线 $x+3y=5$ 交于第四象限，求 m 的取值范围．

解　联立方程组$\begin{cases}2x+my=3,\\x+3y=5,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=\dfrac{9-5m}{6-m},\\y=\dfrac{7}{6-m}.\end{cases}$

所以交点坐标为$\left(\dfrac{9-5m}{6-m},\ \dfrac{7}{6-m}\right)$．

依题意，有$\begin{cases}\dfrac{9-5m}{6-m}>0,\\\dfrac{7}{6-m}<0,\end{cases}$即$\begin{cases}9-5m<0,\\6-m<0.\end{cases}$

解得 $m>6$．

故 m 的取值范围是 $m>6$．

例 2　已知直线 l_1：$x+my+6=0$，直线 l_2：$(m-2)x+3y+2m=0$，求 m 的值，使得：（1）$l_1\perp l_2$；（2）$l_1 /\!/ l_2$；（3）l_1 与 l_2 重合．

解　（1）令 $A_1A_2+B_1B_2=0$，即 $1\times(m-2)+m\times3=0$，

得：$m=\dfrac{1}{2}$．

故当 $m=\dfrac{1}{2}$时，$l_1\perp l_2$．

（2）令$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}$，即$\dfrac{1}{m-2}=\dfrac{m}{3}$．

化简得 $m^2-2m-3=0$，解得 $m=3$ 或 $m=-1$．

当 $m=-1$ 时，$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$，$l_1 /\!/ l_2$.

（3）由（2）知，当 $m=3$ 时，$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$，$l_1$ 与 l_2 重合.

例 3 已知直线 l_1：$y=\frac{1}{2}x+2$，直线 l_2 过点 $P(-2,1)$，且 l_1 与 l_2 的夹角为 $45°$，求 l_2 的方程.

解 l_1 的方程可化为 $$x-2y+4=0.$$

l_2 的方程可设为 $$x+By+C=0.$$

将点 $P(-2,1)$ 代入 l_2 方程得 $-2+B+C=0$，则 $C=2-B$. ……①

因为 l_1 与 l_2 夹角为 $45°$，故有

$$\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{|1\times 1-2\times B|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{1^2+B^2}}.$$

化简得：$3B^2-8B-3=0$，解得 $B=3$ 或 $B=-\frac{1}{3}$.

代入①得 $C=-1$ 或 $C=\frac{7}{3}$.

故 l_2 的方程为 $x+3y-1=0$ 或 $x-\frac{1}{3}y+\frac{7}{3}=0$.

例 4 求过点 $P(0,1)$ 的直线，使它夹在两已知直线 l_1：$2x+y-8=0$ 和 l_2：$x-3y+10=0$ 间的线段被 P 点平分.

解 设所求直线为 $$l:Ax+By+C=0.$$

依题意知 $B\neq 0$，故可设 $\boldsymbol{n}=(A_1,1)$，

∴ $$l:A_1x+y+C_1=0.$$

将点 $P(0,1)$ 代入 $A_1\times 0+1+C_1=0$，$C_1=-1$，

∴ $$l:A_1x+y-1=0.$$

联立 $\begin{cases}A_1x+y-1=0,\\2x+y-8=0,\end{cases}$ 解得 $x=\frac{7}{2-A_1}$.

联立 $\begin{cases}A_1x+y-1=0,\\x-3y+10=0,\end{cases}$ 解得 $x=\frac{-7}{3A_1+1}$.

由中点坐标公式，有 $$\frac{7}{2-A_1}+\frac{-7}{3A_1+1}=0,$$

解得：$A_1=\frac{1}{4}$.

∴ l 的方程为 $$\frac{1}{4}x+y-1=0.$$

即 $$x+4y-4=0.$$

相关链接

公式 $\cos\theta=\dfrac{|A_1A_2+B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$ 的推导

坐标系内两直线 $A_1x+B_1y+C_1=0$ 与 $A_2x+B_2y+C_2=0$ 所成夹角的余弦值，可由公式 $\cos\theta=\dfrac{|A_1A_2+B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$ 求出．其证明过程如下：

两直线的法向量分别是 $\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1)$ 和 $\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2)$，则两直线所成夹角即为向量 $\boldsymbol{n}_1$ 与 $\boldsymbol{n}_2$ 所成的角或其补角（当 $\boldsymbol{n}_1$、$\boldsymbol{n}_2$ 所成角为钝角时，两直线的夹角是其补角）．设 $\boldsymbol{n}_1$ 与 $\boldsymbol{n}_2$ 所成的角为 θ'．由向量数量积的定义，有

$$\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|\cos\theta',$$

进而
$$\cos\theta'=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|},$$

即
$$\cos\theta'=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

又 $\theta=\theta'$ 或 $\theta=\pi-\theta'$ 且 $0^\circ\leqslant\theta\leqslant90^\circ$，

故 $\cos\theta>0$，所以 $\cos\theta=\dfrac{|A_1A_2+B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$．

7.2.3 点到直线的距离

教材线索

本小节通过向量方法，导出了点到直线的距离公式，并利用向量方法得出以向量 (a_1,b_1)，(a_2,b_2) 为邻边的三角形和平行四边形的面积公式．

教学目标

1. 掌握点到直线的距离公式，并能熟练运用其解题．
2. 理解利用法向量推导点到直线距离公式及三角形、平行四边形面积公式的方法．
3. 了解三角形及平行四边形面积公式．

教材分析

1. **重点**：点到直线的距离公式及应用.

2. **难点**：公式的推导过程及方法.

3. 点到直线的距离公式的推导方法

点到直线的距离公式的推导方法有很多，体现了不同的数学思想. 概括起来大致有：将点到直线的距离转化为两点间的距离，或者转化为两条平行线间的距离；构造直角三角形利用等积法求点到直线的距离；直线上任取一点，求该点与已知点间距离的最小值，体现了函数思想. 本教材采用的是法向量的推导方法，将点到直线的距离看成是向量的模，相比较而言较为简捷. 但要求学生对向量的知识较为熟悉，如数量积，模的概念等. 需要注意的是，在利用这种方法推导以向量（a_1，b_1），（a_2，b_2）为邻边的三角形及平行四边形的面积公式时，所用的法向量 $\boldsymbol{n}$ 既不是单位法向量，也不是任意长度的法向量，而是与（a_1，b_1）长度相等的法向量，即 $\boldsymbol{n}=(-b_1, a_1)$.

4. 两条平行线间的距离公式

两条平行线间的距离公式，可以很轻松地由点到直线的距离公式导出，可得两直线 $Ax+By+C_1=0$ 及 $Ax+By+C_2=0$ 间的距离公式为：$d=\dfrac{|C_2-C_1|}{\sqrt{A^2+B^2}}$. 但课本并未将其列为公式，只要求学生掌握方法即可，如要作公式使用，须强调两直线方程中 x，y 的系数必须相等，而不仅仅是成比例，当然也要求 $A^2+B^2\neq0$，即 A，B 不同时为零.

教学建议

1. 根据学生的理解能力，遵循由特殊到一般的教学规律，先解决具体问题（例 1），再推导一般公式（例 2）.

2. 建议将例 1 中的（1）和（2）分开处理，先解决两点间距离，并由此推导两点间距离公式，进而利用公式解决相关问题. 下一节课再解决例 1 中的（2），即三角形的面积，进而推导一般情形的面积公式.

参考例题

例 1 求与直线 $x+2y=0$ 平行且与圆心在原点，半径为 1 的圆相切的直线方程.

分析 所求直线与已知直线 $x+2y=0$ 平行，故有相同的法向量，可设所求直线为 $x+2y+C=0$，用待定系数法求解.

解 设所求直线为 $$x+2y+C=0.$$

依题意，知：原点到直线 $x+2y+C=0$ 的距离等于圆的半径 1.

即 $$d=\frac{|0+2\times0+C|}{\sqrt{1^2+2^2}}=1,$$

解得：
$$C=\pm\sqrt{5}.$$

故所求直线方程为 $x+2y+\sqrt{5}=0$ 或 $x+2y-\sqrt{5}=0$.

说明 注意本题有两解.

例 2 已知点 $A(4,-3)$，$B(2,-1)$ 和直线 l：$4x+3y-2=0$，求一点 P，使 $|PA|=|PB|$ 且点 P 到 l 的距离等于 2.

解 由题设，得 $\overrightarrow{AB}=(-2,2)$，所以直线 AB 的垂直平分线的方程可设为
$$-2x+2y+C=0.$$

AB 的中点坐标为 $(3,-2)$，代入上式得
$$-2\times3+2\times(-2)+C=0, C=10.$$

故 AB 的垂直平分线方程为 $-2x+2y+10=0$，

即
$$x-y-5=0.$$

因为 $|PA|=|PB|$，故 P 在 AB 的垂直平分线上，设 $P(a,a-5)$. 由题设得
$$\frac{|4a+3(a-5)-2|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2,$$

解得：
$$a=1 \text{ 或 } a=\frac{27}{7}.$$

∴ P 点坐标为 $(1,-4)$ 或 $\left(\frac{27}{7},-\frac{8}{7}\right)$.

例 3 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点为 $A(5,4)$，$B(-1,6)$，$C(3,-4)$. 作直线 $l\parallel BC$ 分别交 AB，AC 于 D，E，并且 $\triangle ADE$ 的面积是 $\triangle ABC$ 的面积的一半，求直线 DE 的方程.

解法一 由
$$\overrightarrow{AB}=(-1,6)-(5,4)=(-6,2),$$
$$\overrightarrow{AC}=(3,-4)-(5,4)=(-2,-8),$$

得
$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|=\frac{1}{2}|48-(-4)|=26.$$

∵
$$DE\parallel BC,$$

∴ 设
$$\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AB}=(-6\lambda,2\lambda),$$
$$\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AC}=(-2\lambda,-8\lambda),$$

令
$$S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=13,$$

即
$$\frac{1}{2}|48\lambda^2+4\lambda^2|=13.$$

显然 $0<\lambda<1$，解得 $\lambda=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

∴ $\overrightarrow{AD}=(-3\sqrt{2},\sqrt{2})$，$\overrightarrow{AE}=(-\sqrt{2},-4\sqrt{2})$.

进而得 $D(5-3\sqrt{2},4+\sqrt{2})$，$E(5-\sqrt{2},4-4\sqrt{2})$.

由两点式得 DE 的方程：$5x+2y-33+13\sqrt{2}=0$.

解法二　由两点式得直线 BC 的方程为 $5x+2y-7=0$.

∵ $$DE \parallel BC,$$

∴ 设直线 DE 的方程为 $5x+2y+C=0$.

∵ $$S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC},$$

∴ A 到 DE 的距离 h_1 与到 BC 的距离 h_2 的比满足 $\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2=\frac{1}{2}$,

即 $$h_1=\frac{\sqrt{2}}{2}h_2.$$

∴ $$\frac{|5\times5+2\times4+C|}{\sqrt{5^2+2^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ \frac{|5\times5+2\times4-7|}{\sqrt{5^2+2^2}}.$$

解得：$$C_1=-33+13\sqrt{2},\ C_2=-33-13\sqrt{2}\text{（舍去）}.$$

∴ DE 的方程为 $5x+2y-33+13\sqrt{2}=0$.

说明　$C_2=-33-13\sqrt{2}$ 所对应的直线也与 BC 平行，但在 A 点的右侧，不与 AB，AC 相交，故应注意舍去.

相关链接

点到直线的距离公式推导方法举例

除课本上采用的利用法向量的模的长度求点到直线的距离外，尚有多种求点到直线的距离的方法，体现着不同的思想方法.

方法一　转化为两点间距离. 如图 7－4，过 P 作 l 的垂线，垂足为 Q，写出 PQ 所在直线的方程，求出 Q 的坐标，利用两点间距离公式解决问题.

此法为解析几何常规方法，但思维量虽小，计算量却大.

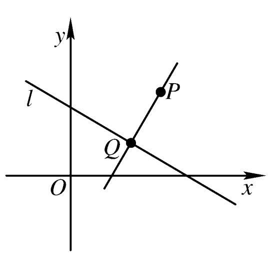


图 7－4

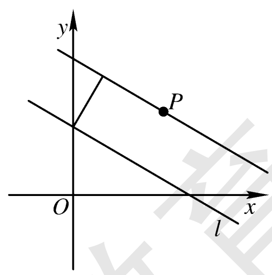


图 7－5

方法二　转化为两平行线间的距离，如图 7－5，过 P 作 l 的平行线，先求出两平行线在 y 轴上截得线段的长，再利用倾斜角求出两平行线间的距离.

此法与课本方法本质上相同，用到平面几何知识，减少了计算量. 今后求圆锥曲线上一点到已知直线的最短距离，就可以转化为平行于已知直线的切线同它之间的距离.

方法三 受方法二的启发，坐标轴上或平行于坐标轴的线段长度比较容易求得，因而过 $P(x_0, y_0)$ 分别作垂直于 x 轴和 y 轴的直线交已知直线于 R、S，如图 7－6. 求得 $|PR|$、$|PS|$、$|RS|$ 后，利用等积原理，求出 $|PQ|$.

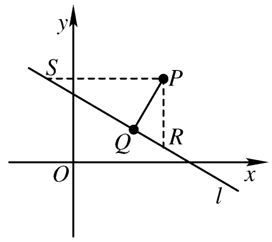


图 7－6

此法应为几何方法，较多用到平面几何知识，同样可以解决问题.

方法四 利用函数思想和动点轨迹思想，将直线 l 看作动点 Q 的轨迹，则 $|PQ|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ 的最小值即为点到直线的距离，由 $Q(x,y)$ 在 $l: Ax+By+C=0$ 上，可将 $|PQ|$ 表达式中的 y 换为 x，进而得到关于 x 的一元函数，然后配方求最小值. 推导过程如下：

设 $M(u,v)$ 是直线 l 上任意一点，则 $|PM|=\sqrt{(u-x_0)^2+(v-y_0)^2}$， ①

$$Au+Bv+C=0.$$

由于 A，B 不能同时为 0，因此不妨设 $B\neq 0$.

由 $Au+Bv+C=0$ 得：$A(u-x_0)+B(v-y_0)+(Ax_0+By_0+C)=0$.

记 $\triangle=Ax_0+By_0+C$，则 $v-y_0=-\dfrac{1}{B}[A(u-x_0)+\triangle]$，

代入①得：

$$|PM|=\sqrt{(u-x_0)^2+\frac{1}{B^2}[A(u-x_0)+\triangle]^2}$$

$$=\sqrt{\frac{A^2+B^2}{B^2}\left(u-x_0+\frac{A\triangle}{A^2+B^2}\right)^2+\frac{\triangle^2}{A^2+B^2}},$$

$\because \dfrac{A^2+B^2}{B^2}>0$，

$\therefore$ 当 $u=x_0-\dfrac{A\triangle}{A^2+B^2}=x_0-\dfrac{A(Ax_0+By_0+C)}{A^2+B^2}$，

$v=y_0-\dfrac{B(Ax_0+By_0+C)}{A^2+B^2}$ 时，

$|PM|$ 取得最小值 $|PM|_{\min}=\sqrt{\dfrac{\triangle^2}{A^2+B^2}}=\dfrac{|\triangle|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

$\therefore$ 点到直线的距离 $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

该法带字母的运算较为复杂，但不过多依赖图形，且不需要讨论 A、B 是否为 0，对问题中不是字母而是具体数字的问题不失为一种很好的方法.

例 求抛物线 $y=x^2$ 上的点到直线 $x-2y-2=0$ 的距离的最小值.

变式 在抛物线 $y=x^2$ 上找一点，使它到直线 $x-2y-2=0$ 的距离最短，求出该点坐标和最短距离.

让已知直线平行移动，设为 $x-2y+C=0$，最先遇到的抛物线上的点（切点）到已知直线的距离即为最短（如图 7-7）. 这种转化为平行线间距离的方法与前面的方法二遥相呼应.

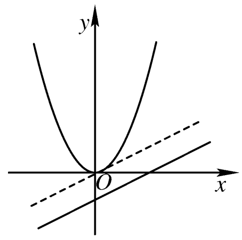


图 7-7

变式则是利用方法四中的函数思想，设抛物线上的动点坐标为 $(x_0,\ x_0^2)$，则 $d=\dfrac{|x_0-2x_0^2-2|}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\left|\left(x_0-\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{15}{16}\right|}{\sqrt{5}}$，由此得出点 $\left(\dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{16}\right)$ 到直线的距离最短，最短距离为 $\dfrac{3}{8}\sqrt{5}$，不仅求出了最短距离，而且找到了抛物线上的点.

7.2.4 直线的斜率

教材线索

本小节给出了表现直线倾斜程度的另外两个数学概念，即倾斜角和斜率，再根据它们的定义，得出用两点坐标表示的斜率公式，并由此得到直线的点斜式方程和斜截式方程.

教学目标

准确掌握倾斜角，斜率的定义，掌握斜率公式，了解利用斜率研究直线方程的方法，了解直线的点斜式方程和斜截式方程.

教材分析

1. 重点： 斜率的定义及斜率公式.

2. 难点： 倾斜角与斜率的关系.

3. 倾斜角与斜率

除利用法向量可以表示直线的方向外，直线的倾斜角和斜率也都可以反映直线的方向. 倾斜角和斜率都反映了直线相对于 x 轴正方向的倾斜程度，二者既有联系又有区别，倾斜角是几何概念，斜率是数，应当准确掌握它们的定义，并掌握斜率公式.

4. 倾斜角的定义

必须着重讲清倾斜角 α 定义中的几个条件：1. 若直线与 x 轴相交，则（1）x 轴逆时针旋转；（2）与直线重合；（3）取最小正角. 2. 若直线与 x 轴平行或重合，则规定 $\alpha=0$. 这说明倾斜角的范围是 $0°\leqslant\alpha<180°$. 这样定义倾斜角可以使平面上任何一条直线都有唯一一个倾斜角. 倾斜角的大小确定，则直线的方向也就确定了.

5．斜率及变化情况

在给出直线斜率的定义后，应说明斜率是一个数值，是一个比率，没有单位．提醒学生注意，当 $\alpha=90^\circ$时，直线没有斜率，对学有余力的同学，可以讲斜率随倾斜角增大的变化情况，即当 $0^\circ\leqslant\alpha<90^\circ$时，斜率随倾斜角的增大而增大，范围是 $[0,+\infty)$；当 $90^\circ<\alpha<180^\circ$时，斜率也随倾斜角的增大而增大，范围是 $(-\infty,0)$．

6．点斜式方程与斜截式方程的缺陷

点斜式方程与斜截式方程都要用到直线的斜率，而当倾斜角为 90°时，直线有倾斜角但无斜率，故不能将此时的直线表现为点斜式和斜截式．事实上，只有一般形式 $Ax+By+C=0$ 可以表示平面内的任意一条直线．

教学建议

1．本节内容相对较多，从基本概念到基本公式再到基本方法，跨度较大，如不多用一些课时，对相应知识点各个击破，学生难免囫囵吞枣，理解不透．

2．关于直线的点斜式方程和斜截式方程，不必死记方程形式，而均可由斜率公式 $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$导出，关键是掌握利用斜率研究直线方程的方法，包括利用斜率和截距研究两直线的位置关系．

3．在推导出过两点的直线的斜率公式后，应向学生指出：(1) 斜率公式与两点的顺序无关，即两点的纵坐标和横坐标在公式中的次序可以同时颠倒；(2) 斜率公式表明，直线对于 x 轴的倾斜程度，可以通过直线上任意两点的坐标表示，而不需求出直线的倾斜角，因而，使用时比较方便；(3) 斜率公式是研究直线方程各种形式的基本方法，应注意灵活运用．

参考例题

例 1　已知点 $A(-2,1)$，$B(3,2)$，直线 l 过点 $P(0,-2)$且与线段 AB 相交，求直线 l 的斜率 k 的取值范围．

解　直线 l 过定点 $P(0,-2)$，设 l 与 AB 的交点为 M．当 M 与点 A 重合时，l 的斜率 $k_{AP}=-\frac{3}{2}$；当点 M 与点 B 重合时，l 的斜率 $k_{BP}=\frac{4}{3}$．当点 M 在 AB 上变动时，k 的取值范围是 $k\geqslant\frac{4}{3}$或 $k\leqslant-\frac{3}{2}$．

例 2　已知直线 l：$(2a^2-7a+3)x+(a^2-9)y+3a^2=0$ 的倾斜角为$\frac{\pi}{4}$，求实数 a．

解　由题设知，直线 l 的斜率为 1，

∴ $$2a^2-7a+3=-(a^2-9).$$

即 $$3a^2-7a-6=0.$$

解得： $a=3$ 或 $a=-\frac{2}{3}$.

当 $a=3$ 时，$2a^2-7a+3=0$ 且 $a^2-9=0$，不合题意，舍去.

故 $a=-\frac{2}{3}$.

例 3 依据下列条件，写出下列直线的方程.

(1) 经过点 $P(2,-1)$，且与直线 $2x-3y+12=0$ 平行；

(2) 经过点 $Q(-1,3)$，且与直线 $x+2y-1=0$ 垂直.

解 (1) 直线 $2x-3y+12=0$ 可化为 $y=\frac{2}{3}x+4$.

因为所求直线与已知直线平行，故斜率也为$\frac{2}{3}$，由点斜式方程，可知所求直线方程为

$$y-(-1)=\frac{2}{3}(x-2),$$

化简得： $2x-3y-7=0$.

(2)直线 $x+2y-1=0$ 可化为 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

因为所求直线与已知直线垂直，故斜率为 2. 由点斜式方程可知，所求直线方程为 $y-3=2(x+1)$，化简得 $2x-y+5=0$.

相关链接

过两直线交点的直线系

设 l_1：$A_1x+B_1y+C_1=0$，l_2：$A_2x+B_2y+C_2=0$ 是相交的两条直线，m，n 是不同时为零的任意实数，那么

$$l：m(A_1x+B_1y+C_1)+n(A_2x+B_2y+C_2)=0 \quad ①$$

是经过 l_1 和 l_2 的交点的直线系方程.

下面分三步给出证明：

1. 证明方程①表示直线.

将方程①整理可得：

$$(mA_1+nA_2)x+(mB_1+nB_2)y+(mC_1+nC_2)=0. \quad ②$$

这是关于 x，y 的二元一次方程，且 x，y 的系数不同时为零，因为当 $mA_1+nA_2=0$ 且 $mB_1+nB_2=0$ 时，$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=-\frac{n}{m}$，说明 l_1 与 l_2 平行或重合，这与两直线相交矛盾. 故①表示直线.

2．证明方程①所表示的直线都过 l_1，l_2 的交点.

设 l_1 与 l_2 的交点是 $P(x_0, y_0)$，则有

$$A_1x_0+B_1y_0+C_1=0 \text{ 且 } A_2x_0+B_2y_0+C_2=0.$$

将 P 点坐标代入方程①，显然等式成立，所以直线系方程①表示的直线都过 l_1 与 l_2 的交点 $P(x_0, y_0)$.

3．证明所有通过 $P(x_0, y_0)$的直线都可以用方程①来表示.

设 $P_1(x_1, y_1)$是平面上不同于 P 的任意一点,且直线 PP_1 的方程可以写成

$$m(A_1x+B_1y+C_1)+n(A_2x+B_2y+C_2)=0. \quad ③$$

由于 P_1 和 P 不是同一点,故 $A_1x_1+B_1y_1+C_1=0$ 和 $A_2x_1+B_2y_1+C_2=0$ 不能同时成立,不妨设 $A_2x_1+B_2y_1+C_2\neq 0$,可得：

$$n=-\frac{A_1x_1+B_1y_1+C_1}{A_2x_1+B_2y_1+C_2}\cdot m.$$

在上式中,如给 m 以任意确定的值,就可以相应地求出 n 的值,因此,以一组 m,n 的值代入方程③,就得到 PP_1 的方程,也就是说,过 P 点的直线都包括在直线系 l 中,都具有方程①的形式.

如果 $m\neq 0$,设$\frac{n}{m}=\lambda$,那么方程①也可以写成 $A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$ 的形式，这直线系不包括 l_2（当 $m=0$ 时），只有一个参数 λ，应用较为方便.

7.3 圆与方程

7.3.1 圆的标准方程

教材线索

本节内容介绍了圆的定义，并根据此定义得出了圆的标准方程.

教学目标

掌握圆的定义及圆的标准方程，使学生会用待定系数法求圆的标准方程.

教材分析

1. 重点： 利用待定系数法求圆的方程.

2. 难点： 根据圆的定义推导圆的方程.

3. 确定一个圆需要三个独立的条件

由于方程$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$含有三个参数a，b，r，因此必须具备三个独立条件才能确定一个圆. 利用待定系数法求圆的方程学生必须熟练掌握，其中a，b，r的实际意义应当让学生清楚，还要注意方程中的“$-$”号. 反过来，根据圆的标准方程，可以写出圆心坐标和半径.

4. 注意数形结合思想的应用

教材例2的解法一中，可设圆心坐标为$M(a,2a-1)$，根据$|MA|=|MB|$，有$\sqrt{(a-6)^2+(2a-1)^2}=\sqrt{(a+2)^2+(2a-1-2)^2}$. 解得$a=3$，故圆心坐标为$(3,5)$，半径$r=|MA|=\sqrt{34}$，同样得到圆的标准方程$(x-3)^2+(y-5)^2=34$. 在解析几何的学习中应注意代数与几何这两方面的结合.

5. 由圆的定义推导圆的标准方程时，用到了求曲线方程的一般方法，即先建坐标系，设动点坐标为(x,y)，再找动点满足的等量关系，之后将其用坐标表示并化简，得出曲线方程. 此法可用于解决不知道曲线类型时求曲线方程的问题，具有一般性.

教学建议

待定系数法是求曲线方程的重要方法，教学中应该让学生反复练习，熟练运用.

参考例题

例 1 已知圆过 $P(4,-2)$，$Q(-1,3)$ 两点，且在 y 轴上截得的线段长为 $4\sqrt{3}$，求圆的方程.

解 设所求圆的方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

可知圆心到 y 轴的距离为 $|a|$，由勾股定理有：$a^2+(2\sqrt{3})^2=r^2$. ①

将点 $(4,-2)$，$(-1,3)$ 代入圆的方程，有

$$(4-a)^2+(-2-b)^2=r^2, \quad ②$$

$$(-1-a)^2+(3-b)^2=r^2. \quad ③$$

联立①、②、③解得 $\begin{cases}a=1,\\ b=0,\\ r=\sqrt{13}.\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=5,\\ b=4,\\ r=\sqrt{37}.\end{cases}$

故所求直线方程为 $(x-1)^2+y^2=13$ 或 $(x-5)^2+(y-4)^2=37$.

例 2 求圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 上的点到直线 $3x+4y+3=0$ 的距离的最大值和最小值.

解 圆心 $(1,1)$ 到直线 $3x+4y+3=0$ 的距离 $d=\dfrac{|3\times1+4\times1+3|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$.

∴圆上的点到直线 $3x+4y+3=0$ 的距离的最大值是 $r+d=3$，最小值是 $d-r=1$.

相关链接

圆的参数方程

由三角换元知，对方程 $x^2+y^2=r^2$，可令 $\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\end{cases}$ 这时 x，y 都是 θ 的函数，且对于 θ 的每一个允许值，由方程组所确定的点 $P(x,y)$ 都在圆 O 上，我们把方程组叫做圆心为原点，半径为 r 的圆的参数方程，θ 为参数.

一般地，对方程 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，可令 $\begin{cases}x-a=r\cos\theta,\\ y-b=r\sin\theta,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x=a+r\cos\theta,\\ y=b+r\sin\theta.\end{cases}$（$\theta$ 为参数）. 这是圆心在 (a,b)，半径为 r 的圆的参数方程，相对于参数方程来说，前面学过的直接给出曲线上点的坐标关系的方程，叫作普通方程.

在圆的某些问题中，借助于圆的参数方程，能使它们的解决变得容易.

例 已知点 P 是圆 $x^2+y^2=16$ 上的一个动点，点 A 是 x 轴上的定点，坐标为 $(12,0)$. 当点 P 在圆上运动时，线段 PA 的中点 M 的轨迹是什么？

解 设点 M 的坐标为（x，y）.

因为圆 $x^2+y^2=16$ 的参数方程是$\begin{cases}x=4\cos\theta,\\y=4\sin\theta,\end{cases}$

所以可设 P 点坐标为（$4\cos\theta$，$4\sin\theta$）.

由线段中点坐标公式得点 M 的轨迹参数方程为$\begin{cases}x=6+2\cos\theta,\\y=2\sin\theta.\end{cases}$

移项得
$$\begin{cases}x-6=2\cos\theta, & ①\\y=2\sin\theta. & ②\end{cases}$$

①②两式平方相加，消去参数 θ，有$(x-6)^2+y^2=4$.

所以，线段 PA 的中点 M 的轨迹是以点（6，0）为圆心，2 为半径的圆.

这里给出的解题方法通常叫参数法.

7.3.2 圆的一般方程

教材线索

本小节通过对两个二元一次方程的研究发现，表面不同的两个方程其实表示同一曲线，进而引出圆的一般方程，介绍了方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 表示圆的条件，以及标准方程与一般方程之间互化的方法.

教学目标

掌握圆的一般方程，弄清方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 表示圆的条件，使学生能够熟练地将圆的一般方程化为标准方程.

教材分析

1. 重点： 圆的一般方程与标准方程的互化，待定系数法求圆的一般方程.

2. 难点： 方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 表示圆的条件.

3. 用配方法求圆心和半径

对一般方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 配方可得 $\left(x+\dfrac{D}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{E}{2}\right)^2=\dfrac{D^2+E^2-4F}{4}$，当 $D^2+E^2-4F>0$ 时，方程表示圆，且圆心为$\left(-\dfrac{D}{2}，-\dfrac{E}{2}\right)$，半径 $r=\dfrac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$. 对此结果不必死记，而只要掌握配方的方法，即可得出圆心坐标和半径.

4. D，E，F 是三个待定系数

同圆的标准方程一样，一般方程也含有三个待定系数(D,E,F). 因此必须具备三个独立条件，才能确定一个圆，如果已知条件和圆心坐标或半径都无直接关系，通常选用圆的一般方程，再用待定系数法求出 D,E,F.

教学建议

无论是方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 表示圆的条件 $D^2+E^2-4F>0$，还是圆心坐标 $\left(-\frac{D}{2},\ -\frac{E}{2}\right)$，以及半径 $r=\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$，建议都不要让学生死记，而强调用配方法去求.

参考例题

例 1　求过圆 $x^2+y^2-2x+4y-15=0$ 上一点 $P(-1, 2)$ 的切线的方程.

解　将圆的方程 $x^2+y^2-2x+4y-15=0$ 化为标准方程得：$(x-1)^2+(y+2)^2=20$，可知圆心为 $C(1,-2)$.

半径 CP 的斜率是　$$k_{CP}=\frac{-2-2}{1-(-1)}=-2,$$

故所求切线斜率为　$$k=\frac{1}{2},$$

由点斜式方程有　$$y-2=\frac{1}{2}(x+1).$$

化简得：　$$x-2y+5=0.$$

例 2　求经过 $A(4,2)$,$B(-1,3)$ 两点，且在坐标轴上四个截距之和为 2 的圆的方程.

解　设所求圆的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$. 圆在 x 轴上的两个截距为 x_1，x_2，在 y 轴上的两个截距为 y_1，y_2.

令 $x=0$ 有 $y^2+Ey+F=0$，则 $y_1+y_2=-E$.

令 $y=0$ 有 $x^2+Dx+F=0$，则 $x_1+x_2=-D$.

依题意，有　$$x_1+x_2+y_1+y_2=2.$$

即　$$-D-E=2. \qquad ①$$

又将点 $(4,2)$ 及 $(-1,3)$ 代入圆的方程，有

$$16+4+4D+2E+F=0, \qquad ②$$

$$1+9-D+3E+F=0. \qquad ③$$

联立①②③式，解得：　$D=-2$，$E=0$，$F=-12$.

故所求圆的方程为　$$x^2+y^2-2x-12=0.$$

例 3　已知方程 $x^2+y^2-2(t+3)x+2(1-4t^2)y+16t^4+9=0$ 表示一个圆.

(1) 求 t 的取值范围；

(2) 求该圆半径的取值范围；

(3) 当 t 在上述范围变化时，求该圆圆心的轨迹方程.

解 将圆的一般方程化为标准方程，得：

$$(x-t-3)^2+[y-(4t^2-1)]^2=-7\left(t-\frac{3}{7}\right)^2+\frac{16}{7}.$$

(1)令 $$-7\left(t-\frac{3}{7}\right)^2+\frac{16}{7}>0,$$

解得 $$-\frac{1}{7}<t<1.$$

故 t 的范围是 $\left(-\frac{1}{7},1\right)$.

(2)圆的半径 $r=\sqrt{-7\left(t-\frac{3}{7}\right)^2+\frac{16}{7}}\leqslant\sqrt{\frac{16}{7}}=\frac{4\sqrt{7}}{7}$.

∴ 半径的取值范围是 $\left(0,\frac{4\sqrt{7}}{7}\right]$.

(3)设圆心为 $P(x_0,y_0)$,则 $\begin{cases}x_0=t+3,\\y_0=4t^2-1.\end{cases}$

消去参数 t,得 $$y_0=4(x_0-3)^2-1.$$

由 $-\frac{1}{7}<t<1$ 得 $$\frac{20}{7}<x_0<4.$$

∴圆心的轨迹方程是 $y=4(x-3)^2-1\left(\frac{20}{7}<x<4\right)$.

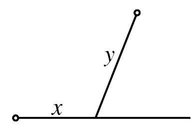
相关链接

《几何学》

《几何学》是法国数学家笛卡儿一生中所写的惟一的数学著作. 它是作为笛卡儿的名著《更好地指导推理和寻求科学真理的方法论》(或简称《方法论》) 的三个附录之一，于 1637 年出版的.

《几何学》在《方法论》中大约占 100 页，共分三卷，讨论的全是关于几何作图问题. 笛卡儿在这本书中，将逻辑、代数和几何方法结合到一起，勾画了解析几何的方法. 他说，“当我们想要解决任何一个问题时”，“给作图中要用到的线段以一个名字”，“用最自然的方法表示这些线段之间的关系，直到能找出两种方式来表示同一个量，这将构成一个方程”. 在第一卷中，笛卡儿对代数式的几何作了解释，而且比希腊人更进一步. 对希腊人来说，一个变量相当于某线段的长度，两个变量的乘积相当于某个矩形的面积，三个变量的乘积相当

于某个长方体的体积．三个变量以上的乘积，希腊人就没有办法处理了．笛卡儿不这么考虑，他认为：与其把 x^2 看作面积，不如把它看作比例式 $1:x=x:x^2$ 的第四项．这样，只给出一个单位的线段，我们就能用给出线段的长度来表达一个变量的任何次幂与多个变量的乘积．在这一部分中，笛卡儿把几何算术化了：如果在一个给定的轴上标出 x，在与该轴成固定角的另一直线上标出 y，就能做出其 x 的值和 y 值满足一定关系的点．



在第二卷中，笛卡儿根据代数方程的次数对几何曲线分了类，含 x 和 y 的一次和二次曲线是第一类；三次和四次方程对应的曲线是第二类；五次和六次方程对应的曲线是第三类，等等．

《几何学》的第三卷又回到了作图问题上，并且涉及了高于二次方程的解法．

笛卡儿还在《几何学》中确立了用前几个字母代表已知数（如 a、b、c 等），用末后的字母代表未知量（如 x、y、z）的习惯用法．他还引进了我们现在所使用的指数表示法（如 a^2、a^3 等）．在这本书里，还出现了待定系数法的最初使用．

尽管笛卡儿在这本书中，对解析几何的基本思想作了阐述，但这种阐述远非系统和清楚明了的．读者必须自己去从一大堆孤立的陈述中花费许多的时间来想出这些方法．原书中共有 32 个图形，但是我们找不出一个明确地摆出了坐标轴的图．笛卡儿在写这本书的时候，有意地使用了十分含糊的笔法，让人读起来十分地困难．他曾自吹说全欧洲几乎没有一个数学家能够读懂他的著作．他只是简略地指出作图法和证法，而把其余的细节都留给别人去考虑．他在一封信中，把他的工作比作建筑师的工作，即立下计划，指明什么是应该做的，而把手工操留给木工与瓦工．他还说："我没有做过任何漫不经心的删节，但我预见到：对那些自命为无所不知的人，我如果写得使他们能充分理解，他们将不失机会地说我写的都是他们已经知道的东西．"后来，有人为这本书写了许多评注，才使得它易于理解．

尽管在《几何学》中，笛卡儿表达了方程与曲线相结合这一显著的思想，但他只把它作为解决作图问题的一个手段．笛卡儿对几何作图问题的过分强调，反而掩盖了曲线和方程的主要思想．不过瑕不掩玉，笛卡儿所提出的方程与曲线的思想，最终被人们所逐渐接受，并且《几何学》也被认为是论述解析几何的一部经典之作．

7.3.3　直线与圆、圆与圆的位置关系

教材线索

本小节由平面几何中的直线与圆的位置关系，引出判断直线与圆的位置关系的两种方法；由平面几何中两圆的位置关系，引出用圆心距判断两圆位置关系的方法．

教学目标

理解并掌握判断直线与圆位置关系的两种方法，理解并掌握判断两圆位置关系的方法．

教材分析

1．重点：利用圆心到直线的距离判断直线与圆的位置关系．

2．难点：两圆的公切线及公共弦．

3．判断直线与圆的位置关系

教材介绍了两种判断直线与圆的位置关系的方法．一种是联立方程组，消元得到一元二次方程，通过判别式得出方程解的情况，进而得知直线与圆的交点个数，判断出直线与圆的位置关系．事实上，这一方法也可以用于判断直线与其它圆锥曲线的位置关系．另一种是根据圆的特殊性，利用平面几何知识，通过比较圆心到直线的距离与半径的大小，得出直线与圆的位置关系．这一方法较为简捷，必须很好地掌握．

4．过圆上一点的切线方程

关于教材中例3所得的切线方程 $x_0x+y_0y=r^2$，需向学生说明：（1）前提是点（x_0，y_0）在圆上，而过圆外一点的切线则不具有此形式．（2）方程为二元一次方程，x_0，y_0，r 只是常数．（3）不可将 r^2 错误地写成 r．（4）可以引导学生探讨过圆$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$上一点(x_0,y_0)的切线方程的形式是$(x-a)(x_0-a)+(y-b)(y_0-b)=r^2$．

5．公切线与公共弦所在直线的方程

当两圆相切或相交时，两圆的方程相减，所得二元一次方程表示两圆的内公切线方程或公共弦所在直线的方程．使用这一结论时必须注意前提条件．如果两圆相离，则不存在唯一内公切线或公共弦，此时两圆方程之差仍为二元一次方程，表示一条垂直两圆心连线的直线．

教学建议

1．教学中应注意突出数形结合思想，可以较多地利用平面几何知识帮助学生理解和解决问题．

2．通过探究两圆方程相减所得二元一次方程表示的曲线，培养学生的探究习惯和思维能力．

参考例题

例1 若直线 $ax+by=1$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 相交于不同两点，则点 $P(a,b)$的位置是(　　)

A．在圆上　　B．在圆外　　C．在圆内　　D．以上皆可能

答案 B

解析 由题设知，圆心 O 到直线 $ax+by=1$ 的距离小于半径，

则
$$\frac{|a\times0+b\times0-1|}{\sqrt{a^2+b^2}}<1,$$

即有
$$\sqrt{a^2+b^2}>1.$$

又
$$|OP|=\sqrt{a^2+b^2},$$

故点 P 在圆外.

例 2 自点 $A(-3,3)$发出的光线 l 射到 x 轴上，被 x 轴反射，其反射光线所在直线与圆 $x^2+y^2-4x-4y+7=0$ 相切，求光线 l 所在直线的方程.

解 将已知圆的方程化为标准方程，得：
$$(x-2)^2+(y-2)^2=1.$$
它关于 x 轴对称的圆的方程是
$$(x-2)^2+(y+2)^2=1.$$
由题设可知，直线 l 将与此圆相切.

设 l：$y-3=k(x+3)$ 即 $kx-y+3k+3=0$，

则
$$\frac{|2k-(-2)+3k+3|}{\sqrt{k^2+1}}=1.$$

解得 $k=-\frac{3}{4}$或 $k=-\frac{4}{3}$.

故所求直线方程为 $3x+4y-3=0$ 或 $4x+3y+3=0$.

例 3 已知圆 C：$(x-2)^2+(y-3)^2=4$，直线 l：$(m+2)x+(2m+1)y=7m+8$.

(1) 证明：不论 m 为何实数，直线 l 与圆 C 恒相交；

(2) 当直线 l 被圆 C 截得的弦长最短时，求 m 的值.

(1) **证明** 由$(m+2)x+(2m+1)y=7m+8$ 得
$$m(x+2y-7)+2x+y-8=0.$$

解$\begin{cases}x+2y-7=0,\\2x+y-8=0,\end{cases}$ 得$\begin{cases}x=3,\\y=2.\end{cases}$

即直线 l 恒过定点 $A(3,2)$.

由$|AC|=\sqrt{(3-2)^2+(2-3)^2}=\sqrt{2}<2$ 知点 A 在$\odot C$ 内部.

故直线 l 与$\odot C$ 恒相交.

(2) **解** 当直线 l 与直线 AC 垂直时，弦长最短.

而
$$k_{AC}=\frac{2-3}{3-2}=-1,$$

$\therefore$直线 l 的斜率为 1.

即有$-\frac{m+2}{2m+1}=1$，解得 $m=-1$.

例 4 求过直线 $2x+y+4=0$ 和圆 $x^2+y^2+2x-4y+1=0$ 的交点，且满足下列条件之

一的圆方程.

(1) 过原点；　　(2) 面积最小.

解　设所求圆的方程为 $x^2+y^2+2x-4y+1+\lambda(2x+y+4)=0$. 即

$$x^2+y^2+2(1+\lambda)x+(\lambda-4)y+(1+4\lambda)=0$$

(1) ∵　此圆过原点，∴　$1+4\lambda=0$.

解得
$$\lambda=-\frac{1}{4}.$$

故所求圆的方程为
$$x^2+y^2+\frac{3}{2}x-\frac{17}{4}y=0.$$

(2) **解法一**　当半径最小时，圆面积最小，对原方程左边配方得：$[x+(1+\lambda)]^2+\left(y+\frac{\lambda-4}{2}\right)^2=\frac{5}{4}\left(\lambda-\frac{8}{5}\right)^2+\frac{4}{5}$.

∴当 $\lambda=\frac{8}{5}$时，此圆面积最小，圆的方程是$\left(x+\frac{13}{5}\right)^2+\left(y-\frac{6}{5}\right)^2=\frac{4}{5}$.

解法二　当圆心在直线 $2x+y+4=0$ 上时，圆的面积最小.

圆心为$\left(-\lambda-1,\frac{4-\lambda}{2}\right)$，代入直线方程

得
$$2\times(-\lambda-1)+\frac{4-\lambda}{2}+4=0,$$

解得
$$\lambda=\frac{8}{5}.$$

故满足条件的圆的方程为　$x^2+y^2+\frac{26}{5}x-\frac{12}{5}y+\frac{37}{5}=0$.

说明　设直线 l：$Ax+By+C=0$ 与圆 C：$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 相交，则方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F+\lambda(Ax+By+C)=0$ 表示过直线 l 与圆 C 的两个交点的圆系方程. 本题的解答中应用了此圆系方程.

例 5　过圆外一点 $P(a,b)$引圆 $x^2+y^2=r^2$ 的两条切线，求经过两个切点的直线方程.

解　设两个切点为 A，B，以 OP 为直径的圆过 A，B 两点. 设 $C(x,y)$为此圆上任意一点，则有 $OC\perp PC$.

故
$$\frac{y}{x}=-\frac{x-a}{y-b}.$$

求得此圆方程为　$x(x-a)+y(y-b)=0$.　①

又　$x^2+y^2=r^2$，　②

②－①，得　$ax+by-r^2=0$.

此即为过两切点的直线方程.

相关链接

圆的一般方程式

由圆的标准方程$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$变形可得$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$，对比圆的一般方程可知，方程$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0(D^2+E^2-4F>0)$所表示的圆的圆心坐标为$\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$，半径$r=\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$，且有如下特点：

（1）x^2，y^2系数都为1；

（2）没有xy项；

（3）$D^2+E^2-4F>0$.

比较圆的一般方程$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$和二元二次方程的一般形式$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$可知，条件（1）和（2）仅是一般的二元二次方程表示圆的必要条件，再增加条件：

$$\left(\frac{D}{A}\right)^2+\left(\frac{E}{A}\right)^2-4\frac{F}{A}>0,\text{即 } D^2+E^2-4AF>0.$$

这样，与条件（1），（2）合起来，是二元二次方程表示圆的充要条件.

因此，可知一般的二元二次方程$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$表示圆的充要条件为：$\begin{cases}A=C\neq 0,\\ B=0,\\ D^2+E^2-4AF>0.\end{cases}$

与圆的标准方程一样，圆的一般方程也含有三个独立的参数，因此，必须具备三个独立的条件，才能确定圆的一般方程.

圆的一般方程和圆的标准方程从本质上讲并无区别，它们只是表达形式不同，它们也可互相转化.

如果由已知条件容易求得圆心坐标、半径或需利用圆心、半径来求解，则用圆的标准方程比较方便；否则，用圆的一般方程为好.

若圆的一条直径的两端点分别是$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则该圆的方程为$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$，可以用向量方法较方便地证明，证明过程如下：

设$P(x,y)$是圆上任意一点，因为$PA\perp PB$，所以$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(x-x_1,y-y_1)\cdot(x-x_2,y-y_2)=0$，即$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$. 我们称此方程为端点圆方程，端点圆方程在解析几何中有许多巧妙的应用.

7.4 几何问题的代数解法

教材线索

本小节明确指出解析几何的基本思想方法就是用代数方法解决几何问题. 通过三个例题的求解与证明来揭示几何问题的代数解法的基本思路与步骤，来展示“以数助形”的数形结合思想.

教学目标

1. 了解解析几何用代数方法解决几何问题的基本思想方法.
2. 掌握几何问题的代数方法解题的基本思路.
3. 能运用几何问题的代数方法求解简单的几何问题.

教材分析

1. 重点

(1) 几何问题的代数方法的基本思路与操作步骤.

(2) 问题解决过程中的代数推演（如例 1 中的向量运算. 例 3 中“①－②”等）的技巧选择与优化处理.

2. 难点

(1) 将几何问题中的点和曲线的几何性质用坐标和方程的代数性质来表示和处理.

(2) 用解析法解决问题时恰当建立平面直角坐标系的问题.

(3) 问题解决中的参数讨论问题（如教材例 2）.

3. 说明

(1) 例 1、例 2 中的平面直角坐标系的建立值得留心，事实上两例展示了约束坐标系（例 1 (1)、例 2）和自由坐标系（例 1 (2)）两种，在解题中要根据所要解决问题的特征，恰到好处地选择.

(2) 例 3 中的“①－②”是曲线与方程意义的具体体现，在解析几何解题中用好它会给问题的解决注入活力.

(3) 例 2 中对参数 λ 的讨论意味着求解轨迹问题要注意其纯粹性和完备性的检验.

教学建议

1. 例 1 的教学中还可以指导学生由 $k_{PB}\cdot k_{PA}=-1$ 立意思考求解.

2. 例 2 教学中还可指导学生以 BA 所在直线为 x 轴，以线段 AB 中点为坐标原点建立平面直角坐标系求解，并与课本建系方法比较，从而深化建系方法.

3. 例 3 教学中先让学生思考求法（很可能是求其交点，由两点式写 AB 的直线方程），再指导学生思考课本上的解法，让学生学会在比较中学习的学习方法.

参考例题

例 1　在等腰直角三角形 ABC 中，$\angle A=90°$，BD 是 AC 边上的中线，$AE\perp BD$ 交 BC 于 E，求证：$\angle ADB=\angle CDE$.

证明　建立如图 7－8 所示的直角坐标系，设 $|AB|=|AC|=a$，则有 $A(0,0)$，$B(0,a)$，$C(a,0)$，$D\left(\frac{a}{2},0\right)$.

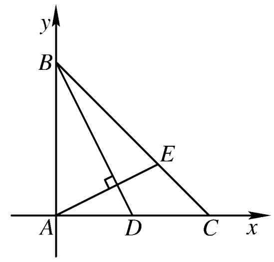


图 7－8

由斜率公式得
$$k_{BD}=\frac{a}{-\frac{a}{2}}=-2.$$

因为 $AE\perp BD$，故可得 AE 所在直线方程为 $y=\frac{1}{2}x$.

于是点 $E(x_0,y_0)$满足 $\begin{cases} y_0=\frac{1}{2}x_0, \\ \frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{a}=1, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x_0=\frac{2a}{3}, \\ y_0=\frac{a}{3}. \end{cases}$

则
$$k_{DE}=\frac{\frac{a}{3}-0}{\frac{2a}{3}-\frac{a}{2}}=\frac{2a}{4a-3a}=2.$$

即
$$\tan\angle CDE=2.$$

又
$$\tan\angle ADB=\tan(\pi-\angle CDB)=-\tan\angle CDB=-k_{BD}=-(-2)=2.$$

则
$$\tan\angle CDE=\tan\angle ADB.$$

又 $\angle CDE$ 和 $\angle ADB$ 都是锐角，

因此
$$\angle CDE=\angle ADB.$$

说明　建立约束直角坐标系的一般原则是，充分利用图形中垂直、平行、对称的特征，这样会使推演过程较为简捷.

例 2 求证：两条曲线$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$（其中 a，b 为常数，且 $a>b>0$）的四个交点在同一圆周上.

证明

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, & ①\\ \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1. & ②\end{cases}$$

①+②得
$$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)x^2+\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{a^2}\right)y^2=2,$$

即
$$x^2+y^2=\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}.$$

由此可以看出，两曲线的四个交点在以$(0,0)$为圆心，$\frac{ab\sqrt{2(a^2+b^2)}}{a^2+b^2}$为半径的圆周上.

说明：也可解出四个交点的坐标，证各点到原点的距离相等，但过程相对较为繁琐.

相关链接

构造图形证明不等式

几何问题的代数方法是解析几何的基本方法，体现了数形结合的思想. 反过来，也可以用几何方法较为简捷直观地解代数问题. 下面举出几个构造图形证明不等式的例子.

例 1 已知 a，b，c，$d\in\mathbf{R}$，求证：$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\geqslant\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$.

证明 如图 7－9，设 $A(a,b)$，$B(c,d)$，则$|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{a^2+b^2}$，$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{c^2+d^2}$，$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$. $\therefore|\overrightarrow{OA}|+|\overrightarrow{OB}|\geqslant|\overrightarrow{AB}|$，即$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\geqslant\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$

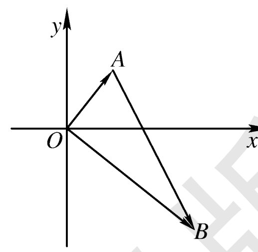


图 7－9

在例 1 中，利用不等式两端的代数式的几何意义——两点间的距离，较为简便地证明了不等式. 再看下面的例子.

例 2 设 a，b，$c\in\mathbf{R}^*$，求证：$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2-bc}\geqslant\sqrt{c^2+a^2+\sqrt{3}ca}$.

分析 本例所给的不等式中，后两个根式的被开方数不全是两数平方和形式，因而难以用与前面例题类似的方法来加以证明. 通过对后两个根式的被开方数的观察并联想到余弦定理，不难发现，根式$\sqrt{b^2+c^2-bc}$可以看做是边长分别为b，c，其夹角为 $60°$的三角形的第三边长；同样地，$\sqrt{c^2+a^2+\sqrt{3}ca}$可看做是边长分别为 c，a，其夹角为 $150°$的三角形的第三边长；又因为$\sqrt{a^2+b^2}$可看做是两直角边长分别是 a 和 b 的直角三角形的斜边长，再注意到三

个角度 60°，90°，150°之间的关系，于是可将直角三角形与有一个角为 60°的三角形拼成如图 7－10 所示的图形，则$\angle AOC=150°$. 由$|AB|+|BC|\geqslant|AC|$就可以得出所要证明的结论.

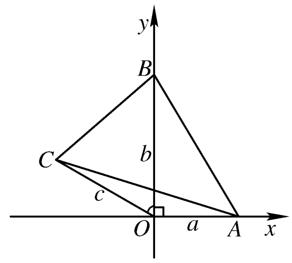


图 7－10

证明 如图 7－10，分别在 x 轴、y 轴的正半轴上取 A、B 两点，使$|OA|=a$，$|OB|=b$，在 150°的终边上取点 C，使得$|OC|=c$. 在$\triangle OAB$中，由勾股定理得$|AB|=\sqrt{a^2+b^2}$；在$\triangle OBC$中，由余弦定理得，$|BC|=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos 60°}=\sqrt{b^2+c^2-bc}$；在$\triangle OAC$中，由余弦定理得，$|AC|=\sqrt{c^2+a^2-2ca\cos 150°}=\sqrt{c^2+a^2+\sqrt{3}ca}$.

又由$|AB|+|BC|\geqslant|AC|$，得

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2-bc}\geqslant\sqrt{c^2+a^2+\sqrt{3}ca}.$$

例 3 求证：$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geqslant|ax+by|\cdot|bx+ay|$.

分析 由于不等式的左端含有 x^2+y^2，于是，联想到利用圆来证明该不等式.

证明 若 $a^2+b^2=0$ 或 $x^2+y^2=0$，则不等式显然成立.

下面证明$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\neq 0$ 的情形.

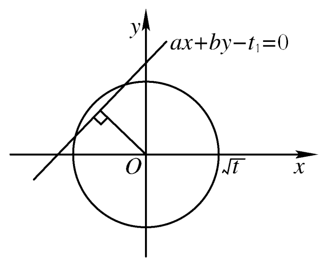


图 7－11

如图 7－11，设 $x^2+y^2=t$，$ax+by=t_1$，$bx+ay=t_2$，则点(x,y)既是圆 $x^2+y^2=t$ 上的点，又是直线 $ax+by=t_1$ 上的点，即圆 $x^2+y^2=t$ 与直线 $ax+by=t_1$ 有公共点，所以圆 $x^2+y^2=t$ 的圆心 O 到直线 $ax+by=t_1$ 的距离小于或等于圆 $x^2+y^2=t$ 的半径$\sqrt{t}$，即$\frac{|t_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}\leqslant\sqrt{t}$，同理$\frac{|t_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}\leqslant\sqrt{t}$.

两式相乘，得$\frac{|t_1|\cdot|t_2|}{a^2+b^2}\leqslant t$，即$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geqslant|ax+by|\cdot|bx+ay|$. 故原不等式成立.

7.5 空间直角坐标系

教材线索

本小节通过“怎样描述现实空间中轮船和飞机的位置”问题的提出与解决，同平面直角坐标系进行类比，引入了空间直角坐标系的概念. 根据空间直角坐标系中点 P 与三元有序实数组(x,y,z)的一一对应关系，借助长方体对角线长公式，推导出了空间直角坐标系中的两点间距离公式，并通过举例加以应用.

教学目标

1. 理解空间直角坐标系的概念.
2. 掌握空间两点间距离公式，并会灵活运用.

教材分析

1. 重点

（1）空间直角坐标系的概念.

（2）空间两点间的距离公式.

2. 难点

（1）空间直角坐标系概念的引入与建立.

（2）空间两点间距离公式的推导与应用.

（3）由例 1（3）引入了一般的长方体的对角线长公式，体现了从特殊到一般的教学思想. 空间两点间距离公式是通过构造长方体、利用长方体对角线公式进行推导的，这里体现了类比联想、图形构造、转化化归的数学思想方法.

教学建议

1. 空间直角坐标系是一个崭新的数学知识，为便于学生理解掌握，需要根据教材安排，启发学生通过实际问题分析，借助平面直角坐标系去类比思考，去体验.

2. 在研究空间两点间的距离公式前，学生已经知道平面上两点间距离公式和长方体等立体图形，注意引导学生回忆与类比，师生共同完成空间两点间距离公式的推导.

3. 在例 2、例 3 的教学中注意类比构造方法和转化化归思想的教学.

参考例题

例 1 已知点 $A(3,3,1)$,$B(1,0,5)$,求:

(1) 线段 AB 的中点坐标和长度;

(2) 到 A、B 两点距离相等的点 $P(x,y,z)$的坐标 x,y,z 满足的条件.

解 (1) 设 $M(x,y,z)$是 AB 的中点,则

$$\begin{cases} x=\dfrac{3+1}{2}=2, \\ y=\dfrac{3+0}{2}=\dfrac{3}{2}, \\ z=\dfrac{1+5}{2}=3. \end{cases}$$

故中点 M 的坐标是$\left(2,\dfrac{3}{2},3\right)$.

线段 AB 的长度$|AB|=\sqrt{(1-3)^2+(0-3)^2+(5-1)^2}=\sqrt{29}$.

(2) 设点 $P(x,y,z)$到 A、B 的距离相等,则$\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2+(z-1)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2+(z-5)^2}$,化简,得 $4x+6y-8z+7=0$.

此即为所求 P 点坐标满足的条件.

说明 由平面上线段的中点坐标公式类比得到空间线段的中点坐标公式,即如果空间直角坐标系中线段 AB 两端点的坐标为 $A(x_1,y_1,z_1)$、$B(x_2,y_2,z_2)$,则线段 AB 中点的坐标为$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2},\dfrac{z_1+z_2}{2}\right)$.

例 2 平面上到坐标原点的距离为 1 的点的轨迹是单位圆,其方程为 $x^2+y^2=1$,在空间中,到坐标原点的距离为 1 的点的轨迹是什么?试写出它的方程.

解 与坐标原点的距离为 1 的点 $P(x,y,z)$的轨迹是一个球面,满足$|OP|=1$.

即 $$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=1.$$

所以 $$x^2+y^2+z^2=1.$$

此即为所求的球面方程.

说明 这里运用了类比联想的数学思想方法,是从平面到空间发现新知识的有效手段.

相关链接

解析几何的创始人——笛卡儿

雷勒·笛卡儿,1596 年 3 月 31 日生于法国西部都兰群拉哈小城的一个贵族家庭. 他从

小身体孱弱，但好奇心强，勤学好问. 8 岁的时候，笛卡儿就被送进当时全欧洲著名的教会学校——拉夫雷士耶稣会学校. 校长非常喜欢笛卡儿，为了照顾他孱弱的身体，特许他不必到校上早课，可以在床上自学. 正是由于这个机会，笛卡儿利用每天早晨在床上自学的时间，阅读了大量数学、哲学等书籍，为后来他在数学和哲学上非凡的成就打下了坚实的基础.

笛卡儿毕业以后，又到普瓦蒂埃大学获得了法学博士学位. 接着就去了巴黎当律师. 由于厌烦巴黎花花世界的生活，笛卡儿躲避到巴黎僻静的郊区专心研究几何学. 这时的笛卡儿已经结识了当时不少有名的数学家如迈多治、梅森等人，并经常在一起钻研数学. 笛卡儿不满足于书本知识，决心要走向社会，去读世界这本大书. 1617 年，青年的笛卡儿投身军队，投入到社会当中，去寻求他自己所需要的科学. 在随军的旅行中，笛卡儿还在专心致志地思考着他的数学与哲学问题. 他已不满意欧几里得几何学和当时的代数学，他自己想去寻找另外一种包括这两门科学的优点而没有它们的缺点的方法. 昼有所思，夜有所悟. 1619 年 11 月 10 日的夜晚，笛卡儿连续作了 3 个奇特的梦. 第一个梦是：自己被风暴从教堂和学校驱逐到风力吹不到的地方；第二个梦是：自己得到了打开自然宝库的魔钥；第三个梦是：自己背诵奥生尼的诗句“我应该沿着哪条人生之路走下去?”正是因为这三个梦，笛卡儿明确了自己的人生之路，可以这样说，这一天是笛卡儿一生中思想上的转折点. 因而有人说，笛卡儿梦中的“魔钥”就是建立解析几何的线索. 事实上，笛卡儿试图用分析的方法解决“巴普士问题”是导致他发现解析几何原理的触发原因.

1621 年，笛卡儿脱离了军队. 1625 年回到巴黎专心研究数学，后移居荷兰埋头研究与著述长达 20 年之久，先后出版《形而上学的沉思》、《哲学原理》等书. 其中 1634 年所著的《论宇宙》，是一部以哥白尼学院为基础的著作. 由于种种原因，笛卡儿没有出版，而把这部著作的主要部分整理成三篇论文，即：《几何学》、《屈光学》及《论流星》. 其中《几何学》是笛卡儿公开发表的唯一的数学著作，这标志着解析几何学的诞生，是数学史上划时代的光辉巨著. 笛卡儿的“几何学”不同于现在的“几何学”，而是与“数学”同义. 这一本著作中，笛卡儿首先建立了直角坐标系，为利用代数的、解析的方法解决几何问题提供了必不可少的条件. 并且他使数学的两大基本要素“数”与“形”统一起来，用代数方法研究解决几何问题，也可以运用几何方法来解决代数问题. 这从根本上改变了从古希腊开始的代数与几何分离的趋向，从而推动了数学发展的进程. 笛卡儿的解析几何还传给牛顿、莱布尼茨一种新的武器，对他们后来建立微积分理论起着关键性的作用.

小结与复习

教学目标

通过本章的学习，学生应当达到下列能力目标：

（1）直线与方程

①在平面直角坐标系中，结合具体图形，确定直线位置的几何要素.

②掌握确定直线位置的几何要素，会求直线的方程，了解斜截式与一次函数的关系.

③能根据两条直线的斜率判定这两条直线平行或垂直.

④理解直线的倾斜角和斜率的概念，掌握过两点的直线斜率的计算公式.

⑤能用解方程组的方法求两直线的交点坐标.

⑥掌握两点间的距离公式、点到直线的距离公式，会求两条平行直线间的距离.

（2）圆与方程

①掌握确定圆的几何要素，掌握圆的标准方程与一般方程.

②能根据给定直线、圆的方程，判断直线与圆的位置关系；能根据给定两个圆的方程，判断两圆的位置关系.

③能用直线和圆的方程解决一些简单的问题.

④初步了解用代数方法处理几何问题的思想，初步了解本章内容中反映出的运动变化、对立统一等辩证思想和观点.

（3）空间直角坐标系

①了解空间直角坐标系，会用空间直角坐标表示点的位置.

②会推导空间两点间的距离公式.

教学建议

（1）在本章学习中，除要掌握直线和圆的方程的基础知识外，还要对所介绍的独特的数学方法——坐标法引起重视．我们是在平面直角坐标系中研究直线和圆的有关问题的．例如，在研究了直线方程的各种形式之后，还研究了两条直线平行与垂直的条件、两条直线的夹角、交点以及点到直线的距离等有关直线的基本问题．要注意学习如何借助于坐标系，用代数方法来研究几何问题，体会这种方法所体现的数形结合思想.

(2) 直线和圆是基本的几何图形，在初中几何里已经学习了一些有关知识，要注意在本章学习中综合已有知识；此外，还要注意综合运用三角函数、平面向量等与本章内容关系比较密切的知识. 在处理有关直线的许多问题中，向量是一种重要而有效的工具.

(3) 曲线方程是解析几何的重要概念，我们学习的曲线方程有两类. 一类是普通方程，它直接给出了曲线上点的纵、横坐标之间的关系；另一类是参数方程，它通过参数建立曲线上点的纵、横坐标之间的关系. 要根据实际问题确定选择哪一种形式的曲线方程有利于问题的解决. 在求曲线方程时，若不容易直接求得普通方程，可考虑选择合适的参数，先求出曲线的一种参数方程，然后消去参数求得普通方程.

参考例题

例 1 已知直线 l 垂直于直线 $3x-4y-7=0$，且直线 l 与两坐标轴围成的三角形的周长为 10，求直线 l 的方程.

答案 $4x+3y+10=0$ 或 $4x+3y-10=0$

例 2 一条光线经过点 $P(2,3)$，射到直线 $x+y+1=0$ 上反射后穿过点 $Q(1,1)$，求入射光线和反射光线所在的直线方程.

答案 入射光线所在的直线方程为 $5x-4y+2=0$；

反射光线所在的直线方程为 $4x-5y+1=0$.

例 3 已知△ABC 的顶点 $A(2,8)$，AB 边上的中线所在的直线方程为 $4x+7y-24=0$，$\angle B$ 的平分线 BE 所在的直线方程为 $x-2y+4=0$，求点 B，C 的坐标.

答案 $B(-4,0)$，$C(6,0)$

例 4 已知定点 $A(0,3)$，动点 B 在直线 l_1：$y=1$ 上，动点 C 在直线 l_2：$y=-1$ 上，且 $\angle BAC=90°$，求△ABC 面积的最小值.

答案 8

例 5 如图 7-12，圆 $x^2+y^2=8$ 内有一点 $P_0(-1,2)$，AB 为过点 P_0 且倾斜角为 α 的弦.

(1) 当 $\alpha=\frac{3\pi}{4}$ 时，求 AB 的长；

(2) 当弦 AB 被点 P_0 平分时，写出直线 AB 的方程.

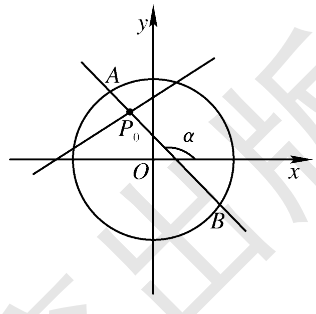


图 7-12

解 (1) 当 $\alpha=\frac{3\pi}{4}$ 时，直线 AB 的斜率为

$$k=\tan\frac{3\pi}{4}=-1.$$

直线 AB 的方程为

$$y-2=-(x+1),$$

即 $$y=-x+1. \quad ①$$

把①代入 $x^2+y^2=8$，得 $$x^2+(-x+1)^2=8,$$

即 $$2x^2-2x-7=0,$$

解此方程得 $$x=\frac{1\pm\sqrt{15}}{2}.$$

所以，$|AB|=\dfrac{|x_1-x_2|}{\cos\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}|x_1-x_2|=\sqrt{2}\times\sqrt{15}=\sqrt{30}.$

(2) 当弦 AB 被点 P_0 平分时，$OP_0\perp AB$. 直线 OP_0 的斜率为 -2，所以直线 AB 的斜率为$\frac{1}{2}$. 根据点斜式，直线 AB 的方程为

$$y-2=\frac{1}{2}(x+1),$$

即 $$x-2y+5=0.$$

例 6 求证:到圆心距离为 $a(a>0)$的两个相离定圆的切线长相等的点的轨迹是直线.

证明 如图 7-13，建立平面直角坐标系，设圆 O 以原点 O 为圆心，r 为半径，圆 A 以点 $A(a,0)$为圆心,半径为 R. 过点 $P(x,y)$的直线 PB 与圆 O 相切于点 B,直线 PC 与圆 A 相切于点 C,且 $PB=PC$.

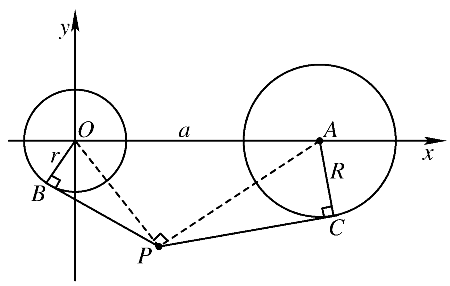


图 7-13

圆 O 的方程为 $x^2+y^2=r^2$，圆 A 的方程为$(x-a)^2+y^2=R^2$.

∵ $$PB=PC,$$

∴ $$PB^2=PC^2.$$

由勾股定理得 $$PO^2-OB^2=PA^2-AC^2,$$

即 $$x^2+y^2-r^2=(x-a)^2+y^2-R^2,$$

化简得 $$x=\frac{a^2+r^2-R^2}{2a}(a>0).$$

这就是点 P 的轨迹方程，它表示一条垂直于 x 轴的直线.

例 7 求经过 A (2, -1)，和直线 $x+y=1$ 相切，且圆心在直线 $y=-2x$ 上的圆的方程.

解 因为圆心在直线 $y=-2x$ 上，所以可设圆心坐标为$(a,-2a)$，根据题意，

$$\sqrt{(a-2)^2+(-2a+1)^2}=\frac{|a-2a-1|}{\sqrt{2}}.$$

所以 $$(a-2)^2+(1-2a)^2=\frac{1}{2}(1+a)^2.$$

解这个方程，得 $$a=1.$$

所以，圆心为$(1,-2)$，半径为$\sqrt{2}$. 从而所求的圆的方程为

$$(x-1)^2+(y+2)^2=2,$$

即 $$x^2+y^2-2x+4y+3=0.$$

例 8 已知定点 $A(2,0)$，P 点在 $x^2+y^2=1$ 上运动，$\angle AOP$ 的平分线交 PA 于点 M，求点 M 的轨迹方程.

解 设点 $M(x,y)$，$P(x_1,y_1)$，

由角平分线的知识得：$\dfrac{|PM|}{|MA|}=\dfrac{|OP|}{|OA|}=\dfrac{1}{2}$，

∴ $\overrightarrow{MA}=2\overrightarrow{PM}$，

由定比分点坐标公式有$\begin{cases}x=\dfrac{2x_1+2}{3},\\ y=\dfrac{2y_1}{3},\end{cases}$可得$\begin{cases}x_1=\dfrac{3x}{2}-1,\\ y_1=\dfrac{3y}{2}.\end{cases}$

点 $P(x_1,y_1)$在圆 $x^2+y^2=1$ 上运动，将其坐标代入 $x^2+y^2=1$，得：

$$\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+y^2=\frac{4}{9},$$

即为所求的点 M 的轨迹方程.

例 9 过点 $A(0,1)$和 $B(4,m)$，并且与 x 轴相切的圆有且只有一个，求 m 的值.

解 设圆心为 $P(a,b)$，由题意可得$|PA|=|PB|=|b|$，

即 $$a^2+(b-1)^2=(a-4)^2+(m-b)^2=|b|^2,$$

$$\begin{cases}a^2-2b+1=0,\\ a^2-8a+m^2-2mb+16=0,\end{cases}$$

整理得： $$(1-m)a^2-8a+m^2-m+16=0,$$

当 $m=1$ 时，得 $a=2$(符合条件).

当 $m\neq1$ 时，应有 $\Delta=0$，才能确保 a 有唯一的值.

∴ $$m(m^2-2m+17)=0,$$

而 $m^2-2m+17$ 恒大于 0，∴ $m=0$.

综上所述：$m=1$ 或 0 为所求.

例 10 已知圆 C 经过点$(4,1)$且和直线 $x+y-3=0$ 相切，并同时和圆$(x-6)^2+(y-5)^2=8$ 外切，其圆心 C 在直线 $2x-3y=0$ 上.

(1) 求圆 C 的方程；

(2) 若 M 为圆 C 上的点，延长 MO 到点 P，使$|MO|\cdot|PO|=6$，求动点 P 的轨迹方程.

解 (1) $(x-3)^2+(y-2)^2=2$(过程略).

(2) 设点 P 的坐标为(x,y)，而点 P，M 在同一直线上，

∴ $$M(kx,ky)(k\geqslant0).$$

高中数学教师教学用书

由 $$|MO|\cdot|PO|=6,$$

可得 $$\sqrt{(kx)^2+(ky)^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}=6,$$

即 $$k(x^2+y^2)=6. \quad ①$$

又 $M(kx,ky)$在圆 C 上，则 $$(kx-3)^2+(ky-2)^2=2 \quad ②$$

由①、②消去 k 得：$11x^2+11y^2-36x-24y+6=0$，即为所求.

例 11 P 是直线 $2x+y+10=0$ 上一点，PA，PB 与圆 $x^2+y^2=4$ 分别相切于 A，B 两点，求四边形 $PAOB$ 的面积的最小值，并求此时 P 点的坐标.

解 由于点 P 在直线 $2x+y+10=0$ 上，∴ 设 P 点坐标为$(x,-10-2x)$.

$S_{四边形PAOB}=2S_{\triangle POB}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot|PB|\cdot|OB|=2|PB|$,

$|PB|^2=|OP|^2-|OB|^2=|OP|^2-4$,

∴ 要使 $S_{四边形PAOB}$取得最小值，只需$|PB|$取得最小值，即$|OP|$取得最小值，

∴ $|OP|_{\min}$为点 O 到直线 $2x+y+10=0$ 的距离，

即 $|OP|_{\min}=d=\frac{|10|}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$.

∴ $S_{四边形PAOB}=2|PB|=8$.

而直线 $2x+y+10=0$ 的斜率 $k=-2$，

∴ $k_{OP}=\frac{1}{2}$，即$\frac{-10-2x}{x}=\frac{1}{2}$，得 $x=-4$，

∴ 点 P 的坐标为$(-4,-2)$.

习题参考解答

7.1 练习（教材 P.71）

1. $(1,3)$
2. $D(-4,-1)$
3. $(0,0)$或$(0,8)$
4. 略

练习（教材 P.73）

1. $\left(-\frac{3}{2}, \frac{19}{4}\right)$
2. $(-2,1)$
3. $a=3$，$b=2.5$

习题 1（教材 P.74）

1. $(-3+\sqrt{15},0)$或$(-3-\sqrt{15},0)$
2. $\left(-1-\frac{\sqrt{34}}{2}, 1+\frac{\sqrt{34}}{2}\right)$
3. $\left(1, \frac{7}{3}\right)$
4. $\frac{\sqrt{26}}{2}$，$\frac{\sqrt{26}}{2}$，$2\sqrt{2}$
5. $(1,-6+3\sqrt{3})$或$(1,-6-3\sqrt{3})$
6. $C(-10,6)$，$D(-11,1)$
7. $a=3$，$b=-3.5$

7.2.1 练习（教材 P.77）

1. $2x+3y-6=0$
2. $4x-2y+5=0$
3. $2x-3y-4=0$

练习（教材 P.80）

(1) $4x+3y-24=0$

(2) $22x+4y-7=0$

(3) $11x+2y-41=0$

(4) $(-2+4\sqrt{5})x+(11+3\sqrt{5})y+12-24\sqrt{5}=0$ 也可写成 $(20-2\sqrt{5})x+(15+11\sqrt{5})y+12\sqrt{5}-120=0$(注:两个方程形式看似并不相同,实质是表示同一直线).

习题 2(教材 P. 81)

1. $x-y-3=0$
2. $2x+3y-18=0$
3. $2x+3y-13=0$
4. (1) $4x-3y-24=0$

   (2) $22x-4y-7=0$

   (3) $11x-2y-41=0$

   (4) $(2-4\sqrt{5})x+(11+3\sqrt{5})y+24\sqrt{5}-12=0$,也可写成 $(41-25\sqrt{5})x+38y+150\sqrt{5}-246=0$
5. (1) $4x+3y+24=0$

   (2) $22x+4y+7=0$

   (3) $11x+2y+41=0$

   (4) $(2-4\sqrt{5})x-(11+3\sqrt{5})y+12-24\sqrt{5}=0$,也可写成 $(25\sqrt{5}-41)x+38y+150\sqrt{5}-246=0$,
6. 4,5 两题各小题所求直线分别关于 y 轴对称,故只需将第 4 题中各方程中的 x 用 $-x$ 替换即可得第 5 题各小题的结果.

7.2.2 练习(教材 P. 84)

1. $\left(-\frac{7}{5},\ -\frac{13}{5}\right)$
2. (1) 平行;(2) 垂直;(3) 重合.

习题 3(教材 P. 84)

1. $(1,\ -1)$
2. (1) $a=-1$;(2) $a=0$;(3) $a=1$.
3. $\frac{8\sqrt{65}}{65}$
4. $2x+y-12=0$
5. $a=0$ 或 $a=\sqrt{3}$
6. $-4<k<2$

7.2.3　练习（教材 P. 90）

1. 0

2. $\dfrac{7\sqrt{5}}{10}$

3. $2x-y+3\sqrt{5}=0$ 或 $2x-y-3\sqrt{5}=0$

4. 7

习题 4（教材 P. 90）

1. $\dfrac{11\sqrt{13}}{13}$

2. $\dfrac{\sqrt{10}}{20}$

3. $3x+2y+2\sqrt{13}-5=0$ 或 $3x+2y-2\sqrt{13}-5=0$

4. $|AB|=2-(-3)=5$，

   AB 边上的高 $h=2-(-3)=5$，

   故$\triangle ABC$ 的面积为$\dfrac{1}{2}\times5\times5=\dfrac{25}{2}$(面积单位).

5. $x-y+3\sqrt{2}-1=0$ 或 $x-y-3\sqrt{2}-1=0$

6. 设$(a_1,b_1)=(5,7)-(4,2)=(1,5)$,$(a_2,b_2)=(-3,4)-(4,2)=(-7,2)$,

   代入平行四边形面积公式,有$|a_1b_2-a_2b_1|=|1\times2-5\times(-7)|=37$(面积单位).

   注：已知平行四边形的三个顶点，第四个顶点可能有三种不同的位置情况，但其面积的大小是唯一确定的.

7. 两平行线间距离的变化范围是$(0,3\sqrt{10}]$，最大值为 $3\sqrt{10}$，就是 A、B 两点间的距离，此时两平行线都垂直于直线 AB，其方程分别是 $3x+y-20=0$ 及 $3x+y+10=0$.

7.2.4　练习（教材 P. 98）

1. $\dfrac{3}{2}$

2. 设直线方程为 $y=2x+b$，将点（2，3）坐标代入，求得 $b=-1$.

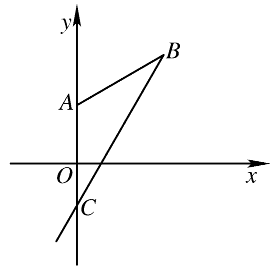
   故所求直线方程为 $y=2x-1$.

3. 已知直线 $x-\sqrt{3}y+3=0$ 的斜率为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，故其倾斜角为 $30°$，进而知所求直线倾斜角为 $60°$，斜率为$\sqrt{3}$.代入点斜式方程有：$y-2=\sqrt{3}(x-3)$，即$\sqrt{3}x-y+2-3\sqrt{3}=0$.

4. $x+y-5=0$

习题 5（教材 P. 99）

1. $\sqrt{3}x-y+2\sqrt{3}+2=0$
2. $3x-2y-11=0$
3. $y=-\frac{4}{3}x$
4. $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$
5. 略.



6. 直线 BC 的斜率为$\sqrt{3}$，倾斜角为 $60°$．因为$\angle A=120°$，所以$\angle B=\angle C=30°$（如图）．故另外两边所在直线的倾斜角分别为 $90°$ 和 $30°$．

   直线方程分别为 $x=0$ 及 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+2$.

7. $y=\frac{3}{4}x+\frac{7}{4}$，$y=-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}$，$y=-\frac{4}{3}x+\frac{13}{3}$.

8. $y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

9. 直线 l_1：$y=k_1x+b_1$ 与 l_2：$y=k_2x+b_2$ 的方向向量分别是（1，k_1），（1，k_2）．故可得：

   $l_1 /\!/ l_2 \Leftrightarrow k_1=k_2$ 且 $b_1\neq b_2$；

   l_1 与 l_2 重合$\Leftrightarrow k_1=k_2$ 且 $b_1=b_2$；

   l_1 与 l_2 相交$\Leftrightarrow k_1\neq k_2$；

   $l_1\perp l_2\Leftrightarrow k_1\cdot k_2=-1$.

   l_1 与 l_2 的夹角的余弦 $\cos\theta=\frac{|k_1k_2+1|}{\sqrt{k_1^2+1}\cdot\sqrt{k_2^2+1}}$.

7.3.1　练习（教材 P. 101）

（1）$x^2+y^2=1$

（2）$(x-1)^2+(y-2)^2=25$

（3）$(x-1)^2+(y-2)^2=2$

（4）$(x-4)^2+y^2=29$

7.3.2　练习（教材 P. 105）

1. （1）是　圆心为$(-1,-2)$,半径为 2.

   （2）不是　表示点$\left(-\frac{1}{5},-\frac{2}{5}\right)$.

   （3）是　圆心为$\left(\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right)$，半径为$\frac{\sqrt{7}}{5}$.

（4）不是　表示点（-1，-2）.

2. $x^2+y^2-4y-1=0$，圆心是（0，2），半径为$\sqrt{5}$.

3. 四点共圆. 由任意三点可求得圆的方程为 $x^2+y^2-4y-1=0$，再将第四个点的坐标代入，方程同样成立.

7.3.3　练习（教材 P. 108）

1. $m=2$

2. $2x-y+5=0$ 或 $2x-y-5=0$

3. 设所求直线方程为 $y+4=k(x-6)$，即 $kx-y-6k-4=0$……①

圆 $x^2+y^2=20$ 的半径是 $2\sqrt{5}$，

圆心到直线①的距离是 $d=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-(3\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}=\dfrac{|-6k-4|}{\sqrt{k^2+1}}$，

解得 $k=-1$ 或 $k=-\dfrac{7}{17}$.

代入①化简得：$x+y-2=0$ 或 $7x+17y+26=0$.

练习（教材 P. 110）

1. 略

2. $2x-3y+4=0$

习题 6（教材 P. 110）

1. （1）$x^2+y^2-2x-2y=0$

（2）$x^2+(y-3)^2=9$ 或 $x^2+(y+3)^2=9$

（3）$(x-4)^2+y^2=9$ 或 $(x+4)^2+y^2=9$

（4）$(x-4)^2+(y-4)^2=25$ 或 $(x+3)^2+(y+3)^2=25$

2. （1）是. 圆心是（2，3），半径为$\sqrt{13}$.

（2）是. 圆心是$\left(-\dfrac{5}{2}，3\right)$，半径为$\dfrac{\sqrt{141}}{2}$.

（3）不是.

（4）不是.

3. $x^2+y^2-\dfrac{15}{2}x+\dfrac{5}{4}y=0$，圆心是$\left(\dfrac{15}{4},-\dfrac{5}{8}\right)$，半径为$\dfrac{5\sqrt{37}}{8}$.

4. 不在同一圆上，因为 A、B、C 三点共线.

5. （1）相交，（2）外切，（3）相交.

6. $3x-y-9=0$

7. $4x-3y+5=0$ 或 $x=1$

8. 圆 $x^2+y^2-2x=0$ 可化为 $(x-1)^2+y^2=1$

圆心在 $(1,0)$，半径是 1，设圆 C 方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，依题意，有

$$\begin{cases} r+1=\sqrt{(a-1)^2+b^2}, \\ (3-a)^2+(-\sqrt{3}-b)^2=r^2, \\ \dfrac{b-(-\sqrt{3})}{a-3}=\sqrt{3}, \end{cases} \text{解得：} \begin{cases} a=4, \\ b=0, \\ r^2=4, \end{cases} \text{或} \begin{cases} a=0, \\ b=-4\sqrt{3}, \\ r^2=36. \end{cases}$$

故所求圆 C 方程为 $(x-4)^2+y^2=4$ 或 $x^2+(y+4\sqrt{3})^2=36$.

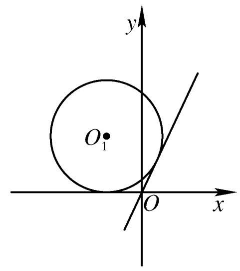
9. 解：(1) 因为圆心在直线 $x+y-1=0$ 上，故可设圆心坐标为 $(a,\ 1-a)$.

依题意，有 $r=\sqrt{(a+1)^2+(1-a-4)^2}=\sqrt{(a-1)^2+(1-a-2)^2}$

解得：$a=-1$，故 $r=2$，圆心为 $(-1,2)$.

∴ 该圆方程为 $(x+1)^2+(y-2)^2=4$.

(2) 设直线 $y=kx$ 与该圆相切，则圆心 $(-1,\ 2)$ 到 $kx-y=0$ 的距离 $d=\dfrac{|-k-2|}{\sqrt{k^2+1}}=2$，解得 $k=0$ 或 $k=\dfrac{4}{3}$.



故 OP 斜率的范围是 $(-\infty,\ 0]\cup\left[\dfrac{4}{3},\ +\infty\right)$.

10. (1) $3<r<9$

(2) $r=3$ 外切 $r=9$ 内切

(3) $0<r<3$

11. 圆心 $O(0,0)$ 到直线 $ax+by+c=0$ 的距离等于半径时，直线与圆相切，即

$$\frac{|a\times 0+b\times 0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=1.$$

化简得：$c^2=a^2+b^2$. 故三角形为直角三角形.

若相离，有 $c^2>a^2+b^2$，则此三角形为钝角三角形.

若相交，有 $c^2<a^2+b^2$，则此三角形为锐角三角形.

7.4 练习（教材 P. 114）

1. $x\pm y=0$ 是第一、三象限的角平分线及第二、四象限的角平分线.
2. 计算 $\overrightarrow{CP}$，$\overrightarrow{AB}$，由 $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ 得 $CP\perp AB$.

习题 7（教材 P. 114）

1. 证明略
2. 由点到直线的距离公式得 $x\pm y=0$.
3. 由相关点法求得 $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{4}$

4. 在菱形 $ABCD$ 中证明：$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$，$\overrightarrow{AC}$中点与$\overrightarrow{BD}$中点合一.

7.5 练习（教材 P.120）

1. （1）x 轴上；（2）y 轴上；
（3）平面 Oyz 上；（4）平面 Oxz 上.
2. $5\sqrt{2}$.

习题 8（教材 P.120）

1. $|AB|=3,|AC|=\sqrt{14},|BC|=\sqrt{21}$.
2. $C(1,2,0),B_1(1,0,3),C_1(1,2,3),D_1(0,2,3)$；$\sqrt{14}$.
3. $P(0,1,-2)$
4. $|AB|=2\sqrt{5},|AC|=\sqrt{5},|BC|=5$，
则$|AB|^2+|AC|^2=|BC|^2$.

复习题七（教材 P.126）

1. 解：因 B 点在直线 $y=x+1$ 上，可设点 B 坐标为 $B(x,x+1)$.
由两点间距离公式有$|AB|=\sqrt{(x-3)^2+(x+1-4)^2}=6\sqrt{2}$
$\Rightarrow\sqrt{2}|x-3|=6\sqrt{2}$
$\Rightarrow|x-3|=6$
$\Rightarrow x=-3$ 或 9.
故点 B 坐标为$(-3,-2)$或$(9,10)$.
2. 解：设 AC 中点为 $E(m,n)$，
因$\overrightarrow{AB}=(-7,7)$且 $4\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{BC}\Rightarrow\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\frac{7}{3}\overrightarrow{AB}$.
又 E 为 AC 中点，有$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{7}{6}\overrightarrow{AB}=\left(-\frac{49}{6},\frac{49}{6}\right)$.
故有$\begin{cases}n-1=\frac{49}{6},\\m-8=-\frac{49}{6},\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=-\frac{1}{6},\\n=\frac{55}{6}.\end{cases}$ 即 E 点坐标为$\left(-\frac{1}{6},\frac{55}{6}\right)$.
3. 解：直线 AB 的斜率 $k_{AB}=\frac{2-(-2)}{1-(-3)}=1$，
又由题设有 C 在直线 AB 上且$|AC|=2|CB|$，故 C 点分线段 AB 的分比 $\lambda=2$ 或 -2.
∴ C 点坐标由定比分点公式可知$\begin{cases}x_C=\frac{1+2(-3)}{1+2},\\y_C=\frac{2+2\cdot(-2)}{1+2},\end{cases}$或$\begin{cases}x_C=\frac{1+(-2)(-3)}{1-2},\\y_C=\frac{2+(-2)(-2)}{1-2}.\end{cases}$

即 C 点坐标为 $\left(-\frac{5}{3},-\frac{2}{3}\right)$ 或 $(-7,-6)$.

又 $k_{AB}=1$,

∴ 过 C 且与 AB 垂直的直线方程为 $\left(y+\frac{2}{3}\right)=-1\left(x+\frac{5}{3}\right)$ 或 $(y+6)=-1(x+7)$.

即 $3x+3y+7=0$ 或 $x+y+13=0$.

4. 由等腰直角三角形性质可知 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CB}$ 且 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CB}|$.

设 B 点坐标为 (x,y),

而 $\overrightarrow{AB}=(x,y-4)$, $\overrightarrow{CB}=(x-6,y)$,

所以 $\begin{cases}x\cdot(x-6)+(y-4)\cdot y=0,\\ \sqrt{x^2+(y-4)^2}=\sqrt{(x-6)^2+y^2}.\end{cases}$

化简后得 $\begin{cases}x^2-6x+y^2-4y=0,\\ 3x-2y-5=0.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=5,\\ y=5.\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=1,\\ y=-1.\end{cases}$

即 B 点坐标为 (5, 5) 或 (1, −1).

当 B 点坐标为 (5, 5) 时, $\triangle ABC$ 三边所在直线的方程: 直线 AC 为 $2x+3y-12=0$, 直线 AB 为 $x-5y+20=0$, 直线 BC 为 $5x+y-30=0$.

当 B 点坐标为 (1, −1) 时, $\triangle ABC$ 三边所在直线的方程: 直线 AC 为 $2x+3y-12=0$, 直线 AB 为 $5x+y-4=0$, 直线 BC 为 $x-5y-6=0$.

5. 解: 在两坐标轴上截距相等的直线要么斜率为 −1, 要么过原点.

∴ 当直线过原点时, 方程为: $y=2x$.

当直线斜率为 −1 时, 方程为: $y-2=-(x-1)$, 即 $x+y-3=0$.

6. 解: 要确定一个圆, 只要确定圆心与半径即可.

圆心即为三角形的外心, 可由两中垂线交点求之,

$A(-3,1)$, $B(1,2)$, $C(5,2)$.

$\left.\begin{array}{l}AB\text{ 中垂线方程为 } l_1: 8x+2y+5=0,\\ BC\text{ 中垂线方程为 } l_2: x=3,\end{array}\right\}$ 交点即为圆心 $O\left(3,-\frac{29}{2}\right)$.

半径 $r=|OA|=\sqrt{6^2+\left(\frac{31}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{1105}}{2}$.

∴ 外接圆方程为 $(x-3)^2+\left(y+\frac{29}{2}\right)^2=\frac{1105}{4}$.

7. 解: 直线 AB 即为过 P 点且垂直于 PO (O 为圆心) 的直线,

又 O 的坐标为 (2, −1), $k_{PO}=1$.

∴ $k_{AB}=-1$.

∴ AB 的方程为 $(y+2)=-(x-1)$, 即 $x+y+1=0$.

8. 解：圆 C 半径为 5，设过点 A 且被$\odot C$ 截弦长为 6 的直线为 l.

由题知 l 到圆心 $O(4,0)$ 的距离为 4.

i）当 k_l 不存在时，l：$x=0$，可见满足要求.

ii）当 k_l 存在时，设 l:$y=kx+1$,有 $d=\dfrac{|4k+1|}{\sqrt{k^2+1}}=4\Rightarrow k=\dfrac{15}{8}$，

此时直线 l 的方程为 $15x-8y+8=0$.

综上,所求直线方程为 $x=0$ 或 $15x-8y+8=0$.

9. 解：设 B 点坐标为 (x_0, y_0)，由题设可知，A 为 OB 的中点，

则 A 点坐标可表示为$\left(\dfrac{x_0}{2}, \dfrac{y_0}{2}\right)$.

圆 C 的方程为 $(x-2)^2+y^2=4$，A 点在圆 C 上，故 A 点坐标$\left(\dfrac{x_0}{2}, \dfrac{y_0}{2}\right)$满足圆的方程，

将其代入得$\left(\dfrac{x_0}{2}-2\right)^2+\left(\dfrac{y_0}{2}\right)^2=4$，即 $(x_0-4)^2+{y_0}^2=16$.

由此可得：满足条件的点 B 坐标满足方程 $(x-4)^2+y^2=16$，也就是说点 B 的轨迹是以点 $(4,0)$ 为圆心，半径为 4 的圆.

10. 解：设内心坐标为$(-r,r)$,$|OB|=15$,$|OA|=8$,$|AB|=17$,由题意可得 $r=\dfrac{8+15-17}{2}=3$,即内心坐标为$(-3,3)$.

11. 解：(1) $l_1 /\!/ l_2 \Leftrightarrow k_{l_2}=k_{l_1}$ 且两直线在 y 轴上截距不一.

于是$\dfrac{a}{2}=\dfrac{1}{a}$且$-\dfrac{2}{a}\neq\dfrac{1}{2}\Rightarrow a=\pm\sqrt{2}$.

此时两直线距离为$\dfrac{4\sqrt{3}\pm\sqrt{6}}{6}$.

(2) 显然 $a=0$ 时两线垂直.

若 $a\neq0$，则$\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{1}{a}=-1$，显然不可能.

∴ 当且仅当 $a=0$ 时 $l_1\perp l_2$.

12. 证明：设直线 l_1 与 l_2 相交于点 $P(x_0, y_0)$，由题意得

$$A_1x_0+B_1y_0+C_1=0,$$
$$A_2x_0+B_2y_0+C_2=0.$$

把点 P 的坐标 (x_0, y_0) 代入方程 $A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$ 的左边，得

$$A_1x_0+B_1y_0+C_1+\lambda(A_2x_0+B_2y_0+C_2)=0+0=0,$$

即点 P 的坐标满足方程

$$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0,$$

所以，点 P 在方程 $A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$ 表示的直线上.

又方程 $A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$ 可以整理成

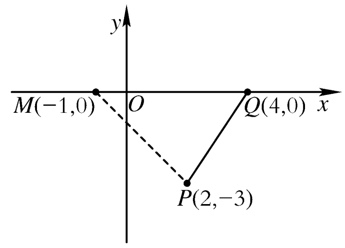
$$(A_1+\lambda A_2)x+(B_1+\lambda B_2)y+(C_1+\lambda C_2)=0,$$

$A_1+\lambda A_2$ 与 $B_1+\lambda B_2$ 不同时为零（因为 l_1 与 l_2 相交，$\dfrac{A_1}{A_2}\neq\dfrac{B_1}{B_2}$）.

这是关于 x，y 的二元一次方程，表示一条直线，

所以，方程 $A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$ 表示过 l_1 与 l_2 的交点的直线.

13. 解：如右图，易知 $k_{MP}=-1$，$k_{MQ}=0$.



∴ k 的范围是$[-1,0]$.

14. 解：首先易知过 A、B、O 三点的圆方程为：$(x-2)^2+(y+1)^2=5$.

将 C 点坐标代入有$(1-2)^2+(-3+1)^2=5$.

故 C 点在圆上.

∴ A、B、C、O 四点共圆，圆的方程为$(x-2)^2+(y+1)^2=5$.

15. 解：圆 $x^2+y^2-4x-4y+7=0$，即$(x-2)^2+(y-2)^2=1$，

设 l 方程为 $y-3=k(x+3)$，显然 l 斜率存在，故 $k\neq0$.

其与 x 轴交点为$\left(-\dfrac{3k+3}{k},0\right)$，故反射线为 $y=-k\left(x+\dfrac{3k+3}{k}\right)$，即 $kx+y+3k+3=0$.

因其与圆$(x-2)^2+(y-2)^2=1$ 相切，有$\dfrac{|2k+2+3k+3|}{\sqrt{k^2+1}}=1\Rightarrow k=-\dfrac{4}{3}$或$-\dfrac{3}{4}$.

∴ 光线 l 方程为$(y-3)=-\dfrac{4}{3}(x+3)$或$(y-3)=-\dfrac{3}{4}(x+3)$.

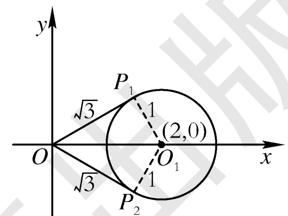
即 $4x+3y+3=0$ 或 $3x+4y-3=0$.

16. 解：圆心坐标为（$3m$，$m-1$），

即$\begin{cases}x_0=3m,\\ y_0=m-1,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=\dfrac{x_0}{3},\\ m=y_0+1.\end{cases}\Rightarrow y_0+1=\dfrac{x_0}{3}\Rightarrow x_0-3y_0-3=0.$

即圆心恒在直线 $x-3y-3=0$ 上.

17. 解：如右图，$\dfrac{y}{x}=\dfrac{y-0}{x-0}$即点 P（x，y）与点 O（0，0）连线之斜率.



当点 P 与点 O 的连线 OP 与$\odot O_1$ 相切时，$\dfrac{y}{x}$有最值.

$\left(\dfrac{y}{x}\right)_{\max}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\left(\dfrac{y}{x}\right)_{\min}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.