编写说明

本书是《普通高中课程标准实验教科书·数学第四册(必修)》的教师教学用书. 编写时按教科书分章、节安排，每章首先阐述了该章的教学目标、教材说明、课时安排建议、教学建议、评价建议，然后按教科书分节编写，每节内容包括教材线索、教学目标、教材分析、教学建议、参考例题、相关链接，在每章的最后给出教科书中练习、习题和复习题的参考解答.

编写此书的目的是为了帮助教师更好地把握教科书，包括教材线索、教学目标、教材分析、内容结构及教学中应予以关注的重点和难点，所提教学建议及参考例题仅供教师在教学过程中参考. 在相关链接中所提供的短文是编者精心撰写并与该章、节相关的内容，旨在扩大教师的知识视野，使教师用较高的观点把握教材，不要求学生掌握.

希望本书能成为教师使用教科书的好帮手，恳请广大教师在使用过程中提出宝贵意见和建议. 谢谢!

编　者

第 8 章　解三角形

一、教学目标

1. 知识目标：

(1)要求学生掌握正弦定理、余弦定理及其证明.

(2)掌握正弦定理和三角形面积公式，并能运用这两组公式求解斜三角形.

(3)熟记正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$（$R$ 为 $\triangle ABC$ 的外接圆的半径）及其变形形式.

(4)能把一些简单的实际问题转化为数学问题，并能综合运用正弦定理、余弦定理等知识和方法解决与测量学、航海问题等有关的实际问题；体会数学建模的基本思想，掌握求解实际问题的一般步骤；能够从阅读理解、信息迁移、数学化方法、创造性思维等方面，多角度培养学生分析问题和解决问题的能力.

2. 能力目标：

(1)通过对实际问题的探索，培养学生数学地观察问题、提出问题、分析问题、解决问题的能力.

(2)增强学生的协作能力和数学交流能力.

(3)发展学生的创新意识和创新能力.

3. 情感态度与价值观：

(1)通过学生自主探索、合作交流，亲身体验数学规律的发现，培养学生勇于探索、善于发现、不畏艰辛的创新品质，增强学习的成功心理，激发学习数学的兴趣.

(2)通过实例的社会意义，培养学生的爱国主义情感和为祖国努力学习的责任心.

二、教材说明

1. 数学思想方法的重要性.

数学思想方法的教学是中学数学教学中的重要组成部分，有利于学生加深数学知识的理解和掌握.

本章需重视与内容密切相关的数学思想方法的教学，并且在提出问题、思考解决问题的策略等方面对学生进行具体示范、引导. 本章的两个主要数学结论是正弦定理和余弦定理，它们都是关于三角形的边角关系的结论. 在初中，学生已经学习了相关边角关系的定性知识，如“在任意三角形中有大边对大角，小边对小角”，“如果已知两个三角形的两条对应边及其所夹的角

相等，那么这两个三角形全等”等.

教科书在引入正弦定理内容时，让学生从问题探索中的一个实际问题出发，提出探究性问题：“我们是否能从三角形的边、角及面积之间的关系得到一些新结论?”，在引入余弦定理内容时，提出探究性问题“如何从已知的两边和它们的夹角计算出三角形的另一边”. 设置这些问题，都是为了加强数学思想方法的教学.

2. 注意加强前后知识的联系.

加强与前后各章教学内容的联系，注意复习和应用已学内容，并为后续章节教学内容做好准备，能使整套教科书成为一个有机整体，提高教学效益，并有利于学生对于数学知识的学习和巩固.

本章内容安排在《普通高中课程标准实验教科书 · 数学必修 4》第一章中，处理三角形中的边角关系，与初中学习的三角形的边与角的基本关系，已知三角形的边和角相等判定三角形全等的知识有着密切联系.

在证明了余弦定理及其推论以后，教科书从余弦定理与勾股定理的比较中，提出了一个思考问题“余弦定理的这种证明方法是几何问题代数化的证明方法，即解析法，你能给出其他的证明方法吗?”，并进而指出，“你是否记得在第四章‘向量’中，也推导过余弦定理? 从余弦定理以及余弦函数的性质可知，如果一个三角形两边的平方和等于第三边的平方，那么第三边所对的角是直角；如果小于第三边的平方，那么第三边所对的角是钝角；如果大于第三边的平方，那么第三边所对的角是锐角. 从上可知，余弦定理是勾股定理的推广.”

3. 重视加强意识和数学实践能力.

学数学的最终目的是应用数学，而如今比较突出的两个问题是，学生应用数学的意识不强，创造能力较弱. 学生往往不能把实际问题抽象成数学问题，不能把所学的数学知识应用到实际问题中去，对所学数学知识的实际背景了解不多，虽然学生机械地模仿一些常见数学问题解法的能力较强，但当面临一种新的问题时却办法不多，对于诸如观察、分析、归纳、类比、抽象、概括、猜想等发现问题、解决问题的科学思维方法了解不够. 针对这些实际情况，本章重视从实际问题出发，引入数学课题，最后把数学知识应用于实际问题.

三、课时安排建议

8.1	正弦定理	**2** 课时
8.2	余弦定理	**2** 课时
8.3	解三角形的应用举例	**2** 课时
	实习作业	**1** 课时
小结与复习		**1** 课时

四、教学建议

从新课程教学论的观点看：教学过程既是学生的认识过程，又是学生的发展过程. 数学教

师的主要任务就是为学生设计学习的情境，提供全面、清楚的有关信息，引导学生在教师创设的教学情境中，自己开动脑筋进行探究学习，发现和掌握数学知识.在学生思考问题时，不到有所领悟时，不告诉他答案，使学生的思考“跳一跳，够得着”，使学生体验到学习的快乐.因而需注意以下几点：

1.结合实例，激发动机.

数学源于现实，从学生日常生活中的实际问题引入，激发学生的学习兴趣，引导启发学生利用已有的知识去解决新的问题，让学生在解决问题中发现新知识，提出猜想，使学生在观察、实验、猜想、验证、推理等活动中，逐步形成创新意识.

2.开展数学实验，验证猜想.

通过特例检验，让学生动手实验，提高学生实验操作、分析思考和抽象概括的能力，激发学生的好奇心和求知欲望，体会到数学实验的归纳和演绎推理的两个侧面.

3.证明猜想，得出定理.

引导启发学生从不同角度进行证明定理，展示自己的知识，培养学生解决问题的能力，增强学生的兴趣、爱好，在知识的形成、发展过程中展开思维，培养推理的意识.

4.熟悉定理，灵活运用.

解斜三角形是中学数学的重点之一，而其中“已知两边和其中一边的对角”解斜三角形又是一个难点，教学上必须充分重视.解斜三角形不仅有实际应用的意义，还由于它要求学生综合运用正弦定理、余弦定理和内角和定理等众多基础知识解决几何问题和实际问题，有助于培养学生分析问题、解决问题的能力，所以一向为数学教育所重视.其中用正弦定理解已知两边及其中一边对角的三角形，由于已知边、角取值不同，问题有无解、一解和两解各种情况，使学生不易掌握，教学上应处理得当.

五、评价建议

1.在本章的教学中，应该根据教学实际，启发学生不断提出问题，研究问题.在对于正弦定理和余弦定理的证明的探究过程中，应该因势利导，根据具体教学过程中学生思考问题的方向来启发学生得到自己对于定理的证明.如对于正弦定理，可以启发得到有应用向量方法的证明，对于余弦定理则可以启发得到三角方法和解析法.在应用两个定理解决有关的解三角形和测量问题的过程中，由于一个问题也常常有多种不同的解决方案，因此应该鼓励学生提出自己的解决办法，并对于不同的方法进行必要的分析和比较.对于一些常见的测量问题甚至可以鼓励学生设计应用程序，得到在实际中可以直接应用的算法.

2.适当安排一些实习作业，目的是让学生进一步巩固所学的知识，提高学生分析问题的解决实际问题的能力、动手操作的能力以及用数学语言表达实习过程和实习结果能力，增强学生应用数学的意识和数学实践能力.教师要注意对于学生实习作业的指导，包括对于实际测量问题的选择，及时纠正实际操作中的错误，解决测量中出现的一些问题.

8.1 正弦定理

教材线索

整体上关注数学情境的建立,充分挖掘现实世界和实际生活中的有关数学实例,力求问题的引入能够反映一定的生活背景,激发学生学习数学的兴趣,并体会数学的应用价值.

教学目标

(1)要求学生掌握正弦定理及其证明.

(2)会初步应用正弦定理解斜三角形,培养数学应用意识.

(3)熟记正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$($R$为$\triangle ABC$的外接圆的半径)及其变形形式.

(4)掌握正弦定理和三角形面积公式,并能运用这两组公式求解斜三角形和解决实际问题,在问题解决中,培养学生的自主学习和自主探索能力.

教材分析

1.教学重点:

(1)正弦定理的推导及其证明过程.

(2)利用三角函数的定义和外接圆法证明正弦定理.

(3)应用正弦定理和三角形面积公式解题.

2.教学难点:

(1)正弦定理的猜想的提出过程.

(2)正弦定理的推导及其证明过程.

3.正弦定理最常用的四种证明方法“几何法、面积法、外接圆法和向量法”,教科书是利用第二种方法:面积法.因为几何法是通过作BC边上的高AD将任意三角形中的角边关系转化为直角三角形中的角边关系,由于垂足D位置不同,所以要进行分类说明,因此教科书没用几何法而是用解析法,即建立直角坐标系方法利用面积相等来证明的.而其他证明方法则分别说明如下:

几何法:若C为锐角(图8-1),过点A作$AD\perp BC$于D,此时有$\sin B=\frac{AD}{c}$,$\sin C=\frac{AD}{b}$,

所以 $c\sin B=b\sin C$，即 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$. 同理可得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，

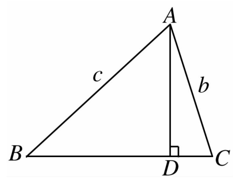


图 8－1

所以 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

若 C 为钝角（图 8－2），过点 A 作 $AD\perp BC$，交 BC 的延长线于 D，此时也有 $\sin B=\frac{AD}{c}$，且 $\sin C=\sin(180^\circ-C)=\frac{AD}{b}$. 同样可得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$. 综上可知，结论成立.

面积法是计算三角形面积时选择底与高的不同但结果一样即等积法得出的.

外接圆法则是在直角三角形与外接圆这种特例中引申出的一种将任意三角形转化为直角三角形的方法，如图 8－3 所示.

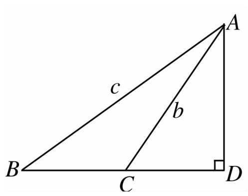


图 8－2

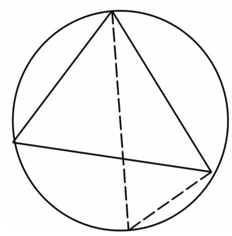


图 8－3

到这里我们就证明完了 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$（其中 R 为外接圆半径），并还能给出它的几个简单变式与结论.

最后的向量法是将三角形中的向量等式转化为数量等式，在向量的数量积中，由向量的投影可产生三角函数，从而得到相应的角边关系. 在 $\triangle ABC$ 中，有 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$. 设 C 为最大角，过点 A 作 $AD\perp BC$ 于 D（图 8－4），于是 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$. 设 $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{AD}$ 的夹角为 α，则 $0=|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{AD}|\cdot\cos(90^\circ+B)+|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{AD}|\cos\alpha$，其中，当 $\angle C$ 为锐角或直角时，$\alpha=90^\circ-C$；当 $\angle C$ 为钝角时，$\alpha=C-90^\circ$. 故可得 $c\sin B-b\sin C=0$，

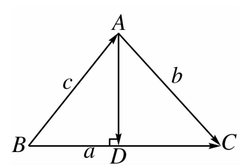


图 8－4

即 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$. 同理可得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$. 因此 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

教科书中的五个例题对照起来看，都是利用正弦定理解决三角形边角问题，但例 1、例 3、例 4 解的唯一性与例 2 的多解形成了一个对比. 例 5 的结论可以看作三角形的面积公式. 在这里对于三角形解的个数问题作了详细的讲解，目的让学生明白产生两解的原因及其具体地怎么判断增解. 由此总结出利用正弦定理，可以解决以下两个斜三角形的问题：

（1）已知两角及任一边，求其它两边和一角；

（2）已知两边及其中一边的对角，求另一边的对角，进而进一步求出其它的边和角.

教学建议

本节课可采用“探究式”教学模式，即在教学过程中，在教师的启发引导下，以学生独立自主和合作交流为前提，以“正弦定理的发现”为基本探究内容，以周围世界和生活实际为参照对象，为学生提供充分自由表达、质疑、探究、讨论问题的机会，让学生通过个人、小组、集体等多种解难释疑的尝试活动，将自己所学知识应用到对任意三角形性质的深入探讨中，让学生在“活动”中学习，在“主动”中发展，在“合作”中增知，在“探究”中创新. 设计思路如下：

创设情境 布疑激趣	→	观察实验 建立模型	→	探寻特例 提出猜想	→	深入思考 证明猜想	→	简单应用 总结评估

探索 1　我们前面学习过直角三角形中的边角关系，因此，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，设 $C=90°$，则 $\sin A=\frac{a}{c}$，$\sin B=\frac{b}{c}$，$\sin C=1$，即 $c=\frac{a}{\sin A}$，$c=\frac{b}{\sin B}$，$c=\frac{c}{\sin C}$，因此，我们有下列结论：

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

探索 2　对于任意三角形，这个结论还成立吗？

探索 3　这个结论对于任意三角形可以证明是成立的.

探索 4　充分挖掘三角形中的等量关系，可以探索出不同的证明方法.

学生在不知正弦定理内容和证明方法的前提下，在教师预设的思路中，学生积极主动参与一个个相关联的探究活动过程，通过“观察——实验——归纳——猜想——证明”的数学思想方法发现并证明定理，让学生经历知识形成的过程，感受创新的快乐，激发学生学习数学的兴趣. 其次，以问题为导向设计教学情境，促使学生去思考问题，去发现问题. 因此做好本节内容的教学，有利于学生通过对任意三角形中正弦定理的探索、发现和证明，感受“类比——猜想——证明”的科学研究问题的思路和方法，体会由“定性研究到定量研究”这种数学地思考问题和研究问题的思想，养成大胆猜想、善于思考的品质和勇于求真的精神.

参考例题

例 1　在 $\triangle ABC$ 中，AD 是 $\angle BAC$ 的平分线，用正弦定理证明：$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$.

证明　如图 8－5，设 $\angle BAD=\alpha$，$\angle BDA=\beta$，则 $\angle CAD=\alpha$，$\angle CDA=180°-\beta$. 在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 中分别运用正弦定理，

得 $\frac{AB}{BD}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$，$\frac{AC}{DC}=\frac{\sin(180°-\beta)}{\sin\alpha}$.

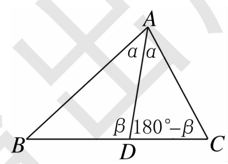


图 8－5

又 $\sin(180°-\beta)=\sin\beta$，所以 $\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{DC}$，即 $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$.

例 2　在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\frac{a}{\cos A}=\frac{b}{\cos B}=\frac{c}{\cos C}$，判断 $\triangle ABC$ 的形状.

解　令 $\frac{a}{\sin A}=k$，由正弦定理，得 $a=k\sin A, b=k\sin B, c=k\sin C$. 代入已知条件，得 $\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\sin B}{\cos B}=\frac{\sin C}{\cos C}$，即 $\tan A=\tan B=\tan C$. 又 $A, B, C\in(0, \pi)$，所以 $A=B=C$，从而 $\triangle ABC$ 为正三角形.

说明　(1)判断三角形的形状特征，必须深入研究边与边的大小关系：是否两边相等？是否三边相等？或研究角与角的大小关系：是否两角相等？是否三角相等？有无直角？有无钝角？

(2)此类问题常用正弦定理(或将学习的余弦定理)进行代换、转化、化简、运算，揭示出边与边或角与角的关系，或求出角的大小，从而作出正确的判断.

例 **3**　如图 8－6，某登山队在山脚 A 处测得山顶 B 的仰角为 $35°$，沿倾斜角为 $20°$ 的斜坡前进 1 000 m 后到达 D 处，又测得山顶的仰角为 $65°$，求山的高度(精确到 1 m).

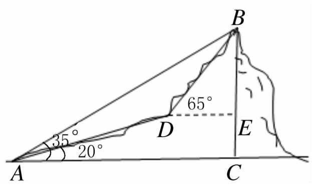


图 8－6

分析　要求 BC，只要求出 AB，为此考虑解 $\triangle ABD$.

解　过点 D 作 $DE\parallel AC$ 交 BC 于 E，因为 $\angle DAC=20°$，

所以 $\angle ADE=160°$，于是 $\angle ADB=360°-160°-65°=135°$.

又 $\angle BAD=35°-20°=15°$，所以 $\angle ABD=30°$.

在 $\triangle ABD$ 中，由正弦定理，得

$$AB=\frac{AD\sin\angle ADB}{\sin\angle ABD}=\frac{1\,000\sin 135°}{\sin 30°}=1\,000\sqrt{2}\,(\mathrm{m}).$$

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$BC=AB\sin 35°=1000\sqrt{2}\sin 35°\approx 811(\mathrm{m})$.

答：山的高度约为 811 m.

例 **4**　如图 8－7 所示，在等边三角形中，$AB=a$，O 为三角形的中心，过 O 的直线交 AB 于 M，交 AC 于 N，求 $\frac{1}{OM^2}+\frac{1}{ON^2}$ 的最大值和最小值.

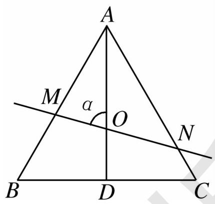


图 8－7

解　由于 O 为正三角形 ABC 的中心，$\therefore AO=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，

$\angle MAO=\angle NAO=\frac{\pi}{6}$，设 $\angle MOA=\alpha$，则 $\frac{\pi}{3}\leqslant\alpha\leqslant\frac{2\pi}{3}$.

在 $\triangle AOM$ 中，由正弦定理得：$\frac{OM}{\sin\angle MAO}=\frac{OA}{\sin\left[\pi-\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\right]}$，

$\therefore OM=\frac{\frac{\sqrt{3}}{6}a}{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}$，在 $\triangle AON$ 中，由正弦定理得：$ON=\frac{\frac{\sqrt{3}}{6}a}{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)}$，$\therefore \frac{1}{OM^2}+\frac{1}{ON^2}=$ $\frac{12}{a^2}\left[\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)+\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\right]=\frac{12}{a^2}\left(\frac{1}{2}+\sin^2\alpha\right)$，

$\because \frac{\pi}{3}\leqslant\alpha\leqslant\frac{2\pi}{3}$，$\therefore \frac{3}{4}\leqslant\sin^2\alpha\leqslant 1$，故当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时 $\frac{1}{OM^2}+\frac{1}{ON^2}$ 取得最大值 $\frac{18}{a^2}$，当 $\alpha=\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$ 时 $\sin^2\alpha=\frac{3}{4}$，此时 $\frac{1}{OM^2}+\frac{1}{ON^2}$ 取得最小值 $\frac{15}{a^2}$.

相关链接

正弦定理推证中的三个“副产品”

在教学中对正弦定理“等于 $2R$”推导的探究中，还可以利用常用的三角形的外接圆方法来推导. 在完成任务的同时还得到了几个非常优美的“副产品”.

如图 8－8，在 $\triangle BCD$ 中，$BC=CD\sin\angle BDC$，而 $\angle BDC=\angle BAC$，$\therefore a=2R\sin\angle BAC$（其中 R 为三角形外接圆的半径），$\therefore \frac{BC}{\sin\angle BAC}=2R$，同理可得 $\frac{AB}{\sin\angle ACB}=2R$，$\frac{AC}{\sin\angle ABC}=2R$，从而正弦定理得证. 只要稍稍注意一下，上述证明中只用到了边 BC，而与它相随相伴的另一条边 BD 却未受人注意. 事实上对边 BD 的探究，可以得到许多不错的结论.

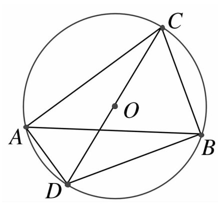


图 8－8

结论 1　在 $\triangle ABC$ 中，$\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos A+\cos B+\cos C}<2$.

证明　由图 8－8 易得 $BD=2R\cos\angle BAC$，同理得，$AD=2R\cos\angle ABC$，而 $AB=2R\sin\angle ACB$，在 $\triangle ABD$ 中，$AD+BD>AB$，所以 $2R\cos\angle BAC+2R\cos\angle ABC>2R\sin\angle ACB$，$\therefore \cos\angle BAC+\cos\angle ABC>\sin\angle ACB>0$.

同理可得　$\cos\angle ABC+\cos\angle BCA>\sin\angle BAC>0$，

$\cos\angle BAC+\cos\angle ACB>\sin\angle ABC>0$.

将以上的三式相加，并整理得 $\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos A+\cos B+\cos C}<2$.

当是锐角三角形时，在图 8－8 中若连接 BO，AO 并延长分别交圆 O 于 E，F，再连接 BF，FC，CE，EA，则得到图 8－9. 因为在 $\mathrm{Rt}\triangle ABF$ 中，$\angle AFB=\angle ACB$，则 $BF=2R\cos C$，同理 $FC=2R\cos B$，而 $BD=2R\cos A$. 在四边形 $CDBF$ 中，显然有 $DB+BF+FC>CD$；另一方面，六边形 $ADBFCE$ 的周长小于圆的周长，即

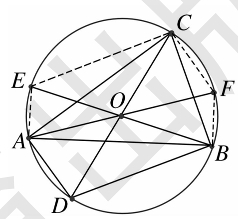


图 8－9

$4R(\cos A+\cos B+\cos C)<2\pi R$，即 $\cos A+\cos B+\cos C<\frac{\pi}{2}$. 于是有下面的结论 2 成立.

结论 2　在$\triangle ABC$中，$1<\cos A+\cos B+\cos C<\frac{\pi}{2}$.

当$\triangle ABC$为钝角三角形或直角三角形，可仿上法证得.

在图 8－8 的$\triangle ABD$中，由余弦定理得$AB^2=AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cos\angle ADB$，而$\angle ADB=\pi-\angle ACB$，

$\therefore(2R\sin\angle ACB)^2$

$=(2R\cos\angle BAC)^2+(2R\cos\angle ABC)^2+2(2R\cos\angle BAC)(2R\cos\angle ABC)\cos\angle ACB$，

即

$\sin^2\angle ACB=\cos^2\angle BAC+\cos^2\angle ABC+2\cos\angle BAC\cos\angle ABC\cos\angle ACB$，

适当变形，即可得到下面的结论 3.

结论 3　在$\triangle ABC$中，$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C=1$.

8.2 余弦定理

教材线索

余弦定理的研究是对初中数学中对于三角形的定性研究的进一步深化,从定量研究的角度去展开的,突出了函数和量化的数学思想.教科书中对余弦定理的证明是从两点之间的距离公式出发的,这样做的目的是体现从特殊到一般的归纳过程,一定程度上也反映了类比的思想.

教学目标

(1)掌握余弦定理及其证明.

(2)使学生能初步运用余弦定理解斜三角形.

(3)能熟练运用正弦定理、余弦定理及相关公式解决三角形的有关问题.

(4)能把一些简单的实际问题转化为数学问题,并能应用正弦定理、余弦定理及相关的三角公式解决这些问题.

教材分析

1.教学重点:

(1)余弦定理的证明及其运用.

(2)能灵活运用余弦定理解斜三角形.

2.教学难点:

能熟练应用正弦定理、余弦定理及相关公式解决三角形的有关问题,牢固掌握这两个定理,并使学生能应用自如,能判断何时有一解、何时有两解.

教师应引导学生观察余弦定理公式的特征和规律帮助记忆公式,同时要求学生用语言叙述余弦定理,促进对公式的记忆.

3.余弦定理:

三角形任何一边的平方等于其他两边平方的和减去这两边与它们夹角的余弦值乘积的两倍.

即

$$\boxed{\begin{aligned}&a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,\\&b^2=c^2+a^2-2ac\cos B,\\&c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.\end{aligned}}$$

在余弦定理中，令 $C=90°$，这时 $\cos C=0$，所以 $c^2=a^2+b^2$.

由此可知余弦定理是勾股定理的推广. 利用余弦定理，可以解决以下两类有关三角形的问题：

(1)已知三边，求三个角；

(2)已知两边和它们的夹角，求第三边和其他两个角.

下面对余弦定理进行证明.

(方法一，即教材中采用的解析法)建立如图 8-10 的直角坐标系，则 $A(0,0)$，$B(c\cos A,c\sin A)$，$C(b,0)$，则

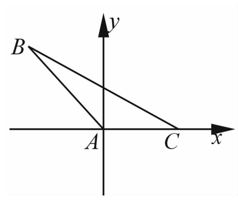


图 8-10

$$\begin{aligned}a^2&=(c\cos A-b)^2+(c\sin A)^2\\&=c^2\cos^2A+c^2\sin^2A-2bc\cos A+b^2\\&=b^2+c^2-2bc\cos A,\end{aligned}$$

即 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

同理可证：$b^2=c^2+a^2-2ac\cos B$，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

这一方法的优点是不必对 A 是锐角、直角、钝角进行分类讨论.

思考：尝试用其它方法证明余弦定理.

(方法二)若 A 是锐角，如图 8-11，过点 B 作 $BD\perp AC$ 于点 D，则 $AD=c\cos A$，所以

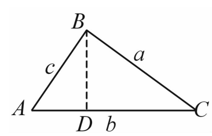


图 8-11

$$\begin{aligned}a^2&=CD^2+BD^2=(AC-AD)^2+BD^2\\&=AC^2+AD^2-2AC\cdot AD+BD^2\\&=AC^2+(AD^2+BD^2)-2AC\cdot AD\\&=b^2+c^2-2bc\cos A,\end{aligned}$$

即 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

类似地，可以证明当 A 为钝角时，结论也成立，而当 A 为直角时显然结论成立.

同理可证：

$b^2=c^2+a^2-2ac\cos B$，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

(方法三)由正弦定理，得 $a=2R\sin A=2R\sin(B+C)$，

所以

$$\begin{aligned}a^2&=4R^2\sin^2(B+C)\\&=4R^2(\sin^2B\cos^2C+2\sin B\sin C\cos B\cos C+\cos^2B\sin^2C)\\&=4R^2[\sin^2B(1-\sin^2C)+(1-\sin^2B)\sin^2C+2\sin B\sin C\cos B\cos C]\\&=4R^2[\sin B+\sin^2C+2\sin B\sin C\cos(B+C)]\\&=4R^2\sin^2B+4R^2\sin^2C-2(2R\sin B)(2R\sin C)\cos A\\&=b^2+c^2-2bc\cos A,\end{aligned}$$

即 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

同理可证：

$b^2=c^2+a^2-2ac\cos B$，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

余弦定理也可以写成下面的形式：

$$\boxed{\begin{aligned}\cos A&=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\\ \cos B&=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac},\\ \cos C&=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.\end{aligned}}$$

教科书中的例 1 说明了余弦定理作用之一：已知三角形的三条边长，可求出三个内角的大小；例 2 说明了余弦定理作用之二：已知三角形的两边及夹角，可求出第三边；例 5 说明了余弦定理作用之三：将角的余弦值用边表示.

教学建议

建构主义提倡情境式教学，认为多数学习应与具体情境有关，只有在解决与现实世界相关联的问题中，所建构的知识才将更丰富、更有效和易于迁移. 教师的作用是创设学生能够独立探究的情境，引导学生去思考，参与知识获得的过程. 因此，做好“余弦定理”的教学，不仅能复习巩固旧知识，使学生掌握新的有用的知识，体会联系、发展等辩证观点，而且能培养学生的应用意识和实践操作能力，以及提出问题、解决问题等研究性学习能力. 本节中，应立足于所创设的情境，通过学生自主探索、合作交流，亲身经历提出问题、解决问题、应用反思的过程，使他们成为余弦定理的“发现者”和“创造者”，让他们切身感受到创造的苦与乐. 因此，知识目标、能力目标、情感目标才能得到较好的落实，为今后的“定理教学”提供了一些有用的借鉴. 创设数学情境是“情境 · 问题 · 反思 · 应用”教学的基础环节，教师必须对学生的身心特点、知识水平、教学内容、教学目标等因素进行综合考虑，对可用的情境进行比较，选择具有较好的教育功能的情境.

“情境 · 问题 · 反思 · 应用”的教学模式主张以问题为“红线”组织教学活动，以学生作为提出问题的主体. 而如何引导学生提出问题是教学成败的关键. 教学实践证明，学生能否提出数学问题，不仅受其数学基础、生活经历、学习方式等自身因素的影响，还受其所处的环境、教师对提问的态度等外在因素的制约. 因此，教师不仅要注重创设适宜的数学情境（不仅要具有丰富的内涵，而且还要具有“问题”的诱导性、启发性和探索性），而且要真正转变对学生提问的态度，提高引导水平，一方面要鼓励学生大胆地提出问题，另一方面要妥善处理学生提出的问题. 关注学生学习的结果，更关注学生学习的过程；关注学生数学学习的水平，更关注学生在数学活动中所表现出来的情感与态度；关注是否给学生创设了一种情境，是否能使学生亲身经历数学活动过程，把“质疑提问”，培养学生的数学问题意识，提高学生提出数学问题的能力作为教与学活动的起点与归宿.

参考例题

例 1　在长江某渡口处，江水以 5 km/h 的速度向东流，一渡船从长江南岸的 A 码头出发，预定要在 0.1 h 后到达长江北岸 B 码头，设 $\overrightarrow{AN}$ 为正北方向，已知 B 码头在 A 码头的北偏东 15°，并与 A 码头相距 1.2 km 处. 该渡船应按什么方向航行？速度是多少（角度精确到 0.1°，速度精确到 0.1 km/h）？

解　如图 8－12，船按 $\overrightarrow{AD}$ 方向开出，$\overrightarrow{AC}$ 方向为水流方向，以 AC 为一边、AB 为对角线作平行四边形 $ACBD$，其中 $AB=1.2(\text{km})$，$AC=5\times 0.1=0.5(\text{km})$.

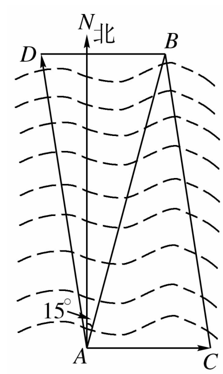


图 8－12

在△ABC 中，由余弦定理，得

$BC^2=1.2^2+0.5^2-2\times 1.2\times 0.5\cos(90°-15°)\approx 1.38$，

所以　$AD=BC\approx 1.17(\text{km})$. 因此，船的航行速度为 $1.17\div 0.1=11.7(\text{km/h})$.

在△ABC 中，由正弦定理，得 $\sin\angle ABC=\dfrac{AC\sin\angle BAC}{BC}=\dfrac{0.5\sin 75°}{1.17}\approx 0.4128$，

所以　$\angle ABC\approx 24.4°$.

所以　$\angle DAN=\angle DAB-\angle NAB=\angle ABC-15°\approx 9.4°$.

答：渡船应按北偏西 9.4°的方向，并以 11.7km/h 的速度航行.

例 2　在△ABC 中，已知 $\sin A=2\sin B\cos C$，试判断该三角形的形状.

解　由正弦定理及余弦定理，得 $\dfrac{\sin A}{\sin B}=\dfrac{a}{b}$，$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，

所以　$\dfrac{a}{b}=2\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，整理得　$b^2=c^2$.

因为 $b>0$，$c>0$，所以 $b=c$. 因此，△ABC 为等腰三角形.

例 3　如图 8－13，AM 是△ABC 中 BC 边上的中线，求证：$AM=\dfrac{1}{2}\sqrt{2(AB^2+AC^2)-BC^2}$.

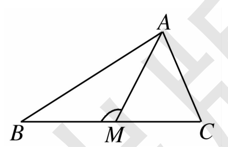


图 8－13

证明　设 $\angle AMB=\alpha$，则 $\angle AMC=180°-\alpha$. 在△ABM 中，由余弦定理，得

$AB^2=AM^2+BM^2-2AM\cdot BM\cos\alpha$.

在△ACM 中，由余弦定理，得 $AC^2=AM^2+MC^2-2AM\cdot MC\cos(180°-\alpha)$.

因为 $\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha$，$BM=MC=\dfrac{1}{2}BC$，

所以 $AB^2+AC^2=2AM^2+\dfrac{1}{2}BC^2$，因此，$AM=\dfrac{1}{2}\sqrt{2(AB^2+AC^2)-BC^2}$.

例 **4** 在$\triangle ABC$中，$BC=a$，$AC=b$，a，b是方程$x^2-2\sqrt{3}x+2=0$的两个根，且$2\cos(A+B)=1$，求：(1)角C的度数；(2)AB的长度；(3)$S_{\triangle ABC}$.

解 (1)$\cos C=\cos[\pi-(A+B)]=-\cos(A+B)=-\dfrac{1}{2}$，$\therefore C=120°$.

(2)由题设得：$\begin{cases}a+b=2\sqrt{3},\\ ab=2,\end{cases}$

$\therefore AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos C=a^2+b^2-2ab\cos 120°$

$=a^2+b^2+ab=(a+b)^2-ab=(2\sqrt{3})^2-2=10$，即$AB=\sqrt{10}$.

(3)$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}ab\sin 120°=\dfrac{1}{2}\times 2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

相关链接

巧拼桌面

从前，京城里有一个很有名气的木匠，他做的活儿美观大方，精巧耐用. 一堆杂乱零碎的木头，到了他手里，能拼成很美的图案，装饰在家具上，显得优雅和谐.

有一次，他给人做了一个鼓形圆桌，在桌的侧面刻了几团云，簇拥着一条小龙，使人觉得那龙和云仿佛在空中轻轻游动. 后来人们传说，在一个雷电交加的暴雨天，那条龙真的飞到天上去了.

这件事不知怎么传到一个大臣的耳朵里，大臣信以为真，觉得要大难临头，连忙向皇帝禀报："陛下，有一个木匠刻了一条龙，下大雨的时候，那条龙真的飞上天了."

"此话当真?"皇帝将信将疑.

"是我亲耳所闻，并已查明，所报属实."看皇上不语，大臣连忙又说："陛下，只有您才是真龙天子，现在一个下贱的木匠居然也造出了一条真龙，这是心怀叵测，是对万岁的最大不敬."

皇帝本来生性多疑，唯恐失去他的皇位，听了此话大怒，立即命大臣带人将木匠抓来问罪.

"陛下息怒，若平白无故将木匠问罪，恐他不服，我想好了一个办法，能使木匠有口难辩，死而无怨."接着大臣把自己想出的计谋说给皇上听，皇上点头同意了.

木匠很快被召进皇宫. 皇上命人将一个木板抬到木匠身边. 木板是完整的一块，下面是个正方形，上面是个等腰直角三角形，形状象个房屋的"山墙"，如图 8－14.

"听说你很聪明，朕要你用这块木板做一个正方形的桌面，不准浪费木料，也不准增添木料，锯成的块数最多 3 块，限你 3 日完成，如果逾期完不成，当斩!"皇上对木匠说.

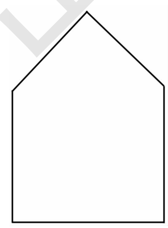


图 8－14

“如能按期完成呢?”聪明的木匠镇静地问.

“朕赦你无罪!”

“皇上此话当真?”木匠不放心地问.

“君无戏言!”皇上肯定地说.因为他听信了大臣的话,认为这样一块木板,按照提出的条件,是绝对拼不出一个正方形桌面的.

可是完全出乎皇帝和大臣的预料.到了第三天,木匠把桌面做好了,并且符合要求.皇帝一看傻了眼,无奈只好赦免了木匠,那么,木匠是怎样拼的呢? 看了图 8-15,你便会恍然大悟!

当然,我们可以用数学中的三角知识严密地证明木匠的方案是完全合理可行的.现证明如下:

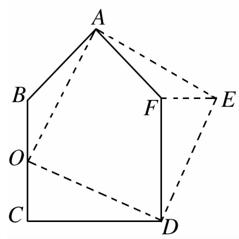


图 8-15

如图 8-15,设 O 是 BC 的中点,连接 OA,OD,过 D,A 两点分别作 OA,OD 的平行线,相交于 E,连接 FE.

因为上面三角形是等腰直角三角形,则可设其腰长为 a,所以$\angle ABO=\frac{3}{4}\pi$,下面正方形的边长为$\sqrt{2}a$.

在$\triangle ABO$中,由余弦定理知:

$$OA^2=a^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2-2a\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a\cos\frac{3\pi}{4}=\frac{5}{2}a^2,OA=\sqrt{\frac{5}{2}}a.$$

由正弦定理:$\dfrac{a}{\sin\angle BOA}=\dfrac{\sqrt{\frac{5}{2}}a}{\sin\frac{3\pi}{4}}$,$\sin\angle BOA=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

在直角三角形 OCD 中,由勾股定理知:

$$OD^2=(\sqrt{2}a)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2=\frac{5}{2}a^2,OD=\sqrt{\frac{5}{2}}a.$$

$$\sin\angle ODC=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\sqrt{\frac{5}{2}}a}=\frac{1}{\sqrt{5}},\angle ODC=\angle BOA.$$

$\therefore\angle ODC+\angle COD=\angle BOA+\angle COD=90^\circ$.

由上可得 $OA=OD$,且$\angle AOD$是直角,这样可以判定 $AODE$ 是正方形.

由三角形全等的判别条件很容易看出:$\triangle OCD\cong\triangle EFD$,$\triangle OAB\cong\triangle EAF$.

可见,木匠可以分别沿 AO,OD 锯下两个三角形,然后按图中所示的方法就拼成了一个正方形桌面.

8.3　解三角形的应用举例

教材线索

正弦定理、余弦定理体现了三角形中边角之间的相互关系，在测量学、运动学、力学、电学等许多领域有着广泛的应用.

教学目标

(1)综合运用正弦定理、余弦定理等知识和方法解决与测量学、航海问题、三角形等一些几何问题和物理问题等有关的实际问题.

(2)体会数学建模的基本思想，掌握求解实际问题的一般步骤.

(3)能够从阅读理解、信息迁移、数学化方法、创造性思维等方面，多角度培养学生分析问题和解决问题的能力.

教材分析

1. 教学重点、难点：

(1)综合运用正弦定理、余弦定理等知识和方法解决一些实际问题.

(2)掌握求解实际问题的一般步骤，能熟练应用正弦定理、余弦定理及相关公式解决与三角形有关的问题.

2. 解斜三角形的应用.

解斜三角形在实际生活中的应用是很广泛的，如测量、航海、几何、物理等方面都要用到解三角形的知识. 解与斜三角形有关的实际问题过程中，贯穿了数学建模的思想. 这种思想就是从实际出发，经过抽象概括，把它转化为具体问题中的数学模型，然后通过推理演算，得出数学模型的解，再还原成实际问题的解. 解题的一般步骤是：

(1)准确理解题意，弄清应用题中有关名词、术语，如坡度、仰角、俯角、视角、象限角、方位角等，根据题意画出示意图，分清已知与所求；

(2)分析与所研究的问题有关的一个或几个三角形，把实际问题转化为解三角形的问题；

(3)通过正确地运用正弦定理和余弦定理来解三角形，一是要会解，二是要选择适当的方法求解；

(4)检验解出的答案是否具有实际意义，对解进行取舍.

3.理解实际应用问题中的有关名称、术语.

(1)仰角和俯角:与目标视线在同一铅直平面内的水平视线和目标视线的夹角,目标视线在水平视线上方时叫仰角,目标视线在水平视线下方时叫俯角.

(2)方向角:从指定方向线到目标方向线的水平角.

4.熟悉三角形中有关公式,除正弦定理、余弦定理外,还需要熟悉两角和与差的正弦、余弦、正切及二倍角的正弦、余弦、正切公式.

5.解三角形应用题的另一个难点是运算问题,由于将正弦定理、余弦定理看成几个"方程",那么解三角形的应用题实质上就是把已知信息按方程的思想进行处理,解题时应根据已知和未知合理选择一个"容易解"的方程,从而使解题过程简洁.同时,由于具体问题中给出的数据通常是近似值,故运算过程一般较为复杂,必须借助于计算器计算,因此要加强训练,达到"算法简炼,算式工整,计算准确"的要求.

6.解三角形实际问题的一般步骤是:

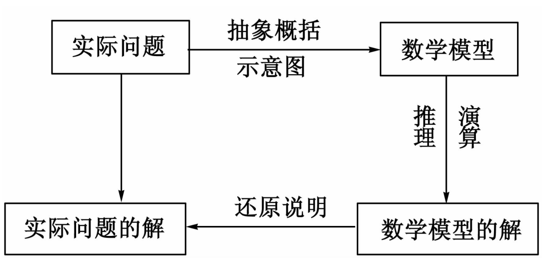
(1)分析:准确理解题意,尤其要理解应用题中的有关名词、术语所表示的量,分清已知与未知,画出示意图,抽象成三角形相应边和角及相应大小、位置;

(2)建模:根据已知条件与求解目标,把已知量与求解量尽量集中在有关的三角形中,建立一个解斜三角形的数学模型;

(3)求解:利用正弦定理或余弦定理有序地解出三角形,求得数学模型的解;

(4)检验:检验上述所求的解是否符合实际意义,从而得出实际问题的结论.

解三角形实际问题的基本思路:



7.解斜三角形应用题常见的几种情况:

(1)实际问题经抽象概括后,已知与未知量全部集中在一个三角形中,可用正弦定理或余弦定理解之,如教科书中的例1,例2.

(2)实际问题经抽象概括后,已知量与未知量涉及两个三角形中,这时需按顺序逐步在两个三角形中求出问题的解,如教科书中的例3,例4.

(3)实际问题经抽象概括后,涉及的三角形只有一个,但由题目已知条件解此三角形需连续使用正弦定理或余弦定理.

(4)实际问题可大致分为长度问题、高度问题、角度问题、速度问题,比如教科书中的例1、例4均为速度问题,其中长度,高度,速度可合称距离问题,仰角,俯角,方向角则合称为角度问题.还可选择后面的例题作为参考、补充.

解三角形是这一章节中的重要内容，对于后面的解析几何、立体几何的学习也有着重要的意义. 在所有解三角形的类型中，已知两边和其中一边的对角的解三角形问题是情况最为复杂的一类，学生在解答这一类问题时，往往会出现增根或把简单问题复杂化. 学生在这节课前已经学习完成了解三角形的所有类型，在平时训练中，已经有了一定的分类讨论的意识. 这节课的设计希望发展学生的四个能力：(1)运算能力(可以使用计算器)，在课堂教学上给出一定的时间用于学生的计算；(2)数形结合的能力；(3)分类讨论的能力；(4)严密的逻辑思维能力.

教学建议

辩证唯物主义认识论、现代教学观和建构主义教学观与学习观指导下的“情境·问题·反思·应用”教学实验方式，旨在培养学生的数学问题意识，养成从数学的角度发现和提出问题、形成独立思考的习惯，提高学生解决数学问题的能力，增强学生的创新意识和实践能力. 创设数学情境是前提，提出问题是重点，解决问题是核心，应用数学知识是目的，因此所设情境要符合学生的“最近发展区”.“正、余弦定理”具有一定广泛的应用价值，教学中我们要从实际需要出发创设情境，要充分利用教科书中的例题创设问题情境，帮助学生从实际问题中抽象出数学模型，学会运用正弦定理和余弦定理解斜三角形.

充分利用学生资源，从多方位、多角度着手，让学生参与创造性的数学活动，让应用意识化为信念，伴随着学生的学习与生活，成为学生终生享用的财富. 解斜三角形在生产实践中有着广泛的应用，核心问题是将实际问题转化为解斜三角形的数学问题.

参考例题

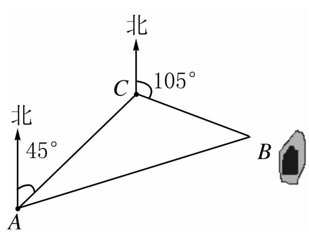


图 8－16

例 **1**　如图 8－16，某渔轮在航行中不幸遇险，发出呼救信号，我海军舰艇在 A 处获悉后，测出该渔轮在方位角为 $45°$，距离为 10 海里的 C 处，并测得渔轮正沿方位角为 $105°$ 的方向，以 9 海里的速度向小岛靠拢，我海军舰艇立即以 21 海里的速度前去营救. 求舰艇最快靠近渔轮的航向和所需的时间(角度精确到 $0.1°$，时间精确到 1 min).

解　设舰艇收到信号 x h 后在 B 处靠拢渔轮，则 $AB=21x$，$BC=9x$.

又 $AC=10$，$\angle ACB=45°+(180°-105°)=120°$.

由余弦定理，得

$$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cos\angle ACB,$$

即

$$(21x)^2=10^2+(9x)^2-2\times10\times9x\cos\angle120°.$$

化简，得

$$36x^2-9x-10=0,$$

解得 $x=\frac{2}{3}(\mathrm{h})=40(\mathrm{min})$(负值舍去).

由正弦定理,得

$\sin\angle BAC=\frac{BC\sin\angle ACB}{AB}=\frac{9x\sin 120^\circ}{21x}=\frac{3\sqrt{3}}{14}$,

所以$\angle BAC\approx 21.8^\circ$,方位角为 $45^\circ+21.8^\circ=66.8^\circ$.

答:舰艇应沿着方向角 66.8°的方向航行,经过 40 min 就可靠近渔轮.

例 **2** 作用在同一点的三个力 F_1,F_2,F_3 平衡.已知 $F_1=30$ N,$F_2=50$ N,F_1 与 F_2 之间的夹角是 60°,求 F_3 的大小与方向(精确到 0.1°).

解 F_3 应和 F_1,F_2 合力 F 平衡,所以 F_3 和 F 在同一直线上,并且大小相等,方向相反.

如图 8-17,在$\triangle OF_1F$ 中,由余弦定理,得

$F=\sqrt{30^2+50^2-2\times 30\times 50\cos 120^\circ}=70(\mathrm{N})$,

再由正弦定理,得

$\sin\angle F_1OF=\frac{50\sin 120^\circ}{70}=\frac{5\sqrt{3}}{14}$,

所以$\angle F_1OF\approx 38.2^\circ$,从而$\angle F_1OF_3\approx 141.8^\circ$.

答:F_3 为 70 N,F_3 与 F_1 之间的夹角是 141.8°.

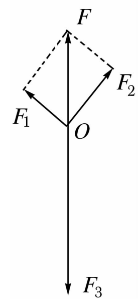


图 8-17

本例是正弦定理、余弦定理在力学问题中的应用,教学时可作如下分析:由图根据余弦定理可求出 OF,再根据正弦定理求出$\angle F_1OF$.

例 **3** 如图 8-18,半圆 O 的直径为 2,A 为直径延长线上的一点,$OA=2$,B 为半圆上任意一点,以 AB 为一边作等边三角形 ABC.问:点 B 在什么位置时,四边形 $OACB$ 面积最大?

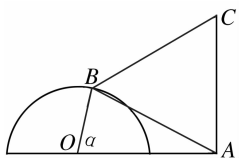


图 8-18

分析 四边形的面积由点 B 的位置唯一确定,而点 B 由$\angle AOB$ 唯一确定,因此可设$\angle AOB=\alpha$,再用 α 的三角函数来表示四边形 $OACB$ 的面积.

解 设$\angle AOB=\alpha$.在$\triangle AOB$ 中,由余弦定理,得

$AB^2=1^2+2^2-2\times 1\times 2\cos\alpha=5-4\cos\alpha$.

于是,四边形 $OACB$ 的面积为

$$\begin{aligned}S&=S_{\triangle AOB}+S_{\triangle ABC}\\&=\frac{1}{2}OA\cdot OB\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{4}AB^2\\&=\frac{1}{2}\times 2\times 1\times\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{4}(5-4\cos\alpha)\\&=\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha+\frac{5}{4}\sqrt{3}\end{aligned}$$

$=2\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)+\dfrac{5}{4}\sqrt{3}$.

因为 $0<\alpha<\pi$,所以当 $\alpha-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$,即 $\alpha=\dfrac{5}{6}\pi$ 时,也即 $\angle AOB=\dfrac{5}{6}\pi$ 时,四边形 $OACB$ 的面积最大.

对于本例,教学中可引导学生分析得到四边形 $OACB$ 的面积随着 α($\angle AOB$)的变化而变化,这样将四边形 $OACB$ 的面积表示成 α 的函数,利用三角形的有界性则可求出四边形 $OACB$ 的面积最大值.

例 **4** $\triangle ABC$ 中,若已知三边为连续正整数,最大角为钝角,(1)求最大角的余弦值;(2)求以此最大角为内角,夹此角两边之和为 4 的平行四边形的最大面积.

解 (1)设三边 $a=k-1,b=k,c=k+1,k\in\mathbf{N}^*$ 且 $k>1$,

$\because C$ 为钝角,$\therefore\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{k-4}{2(k-1)}<0$,解得 $1<k<4$,

$\because k\in\mathbf{N}^*$,$\therefore k=2$ 或 3,但 $k=2$ 时不能构成三角形应舍去,

当 $k=3$ 时,$a=2,b=3,c=4,\cos C=-\dfrac{1}{4}$.

(2)设夹 C 角的两边为 $x,y,x+y=4$,

所以,$S=xy\sin C=x(4-x)\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{4}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}\cdot(-x^2+4x)$,当 $x=2$ 时,$S_{\max}=\sqrt{15}$.

相关链接

距离测量

测量距离是测量的基本工作之一,所谓距离是指两点间的水平长度.如果测得的是倾斜距离,还必须改算为水平距离.按照所用仪器、工具的不同,测量距离的方法有钢尺直接量距、视距测量、视差法测距和电磁波测距等,下面重点介绍两种测量距离的方法:钢尺直接量距、视距测量.

钢尺量距的一般方法

一、量距的工具

钢尺是钢制的带尺,如图 8 - 19,常用钢尺宽 10 mm,厚 0.2 mm,长度有 20 m、30 m 及 50 m几种,卷放在圆形盒内或金属架上.钢尺的基本分划为厘米,在每米及每分米处有数字注记.一般钢尺在起点处一分米内刻有毫米分划;有的钢尺,整个尺长内都刻有毫米分划.

由于尺的零点位置的不同,有端点尺和刻线尺的区别.

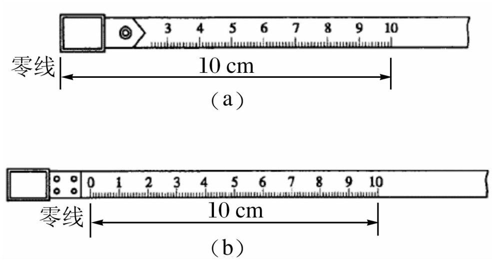


图 8-19

端点尺是以尺的最外端作为尺的零点，当从建筑物墙边开始丈量时使用很方便.

刻线尺是以尺前端的一刻线作为尺的零点.

丈量距离的工具，除钢尺外，还有标杆、测钎和垂球.

二、直线定线

当两个地面点之间的距离较长或地势起伏较大时，为使量距工作方便，可分成几段进行丈量. 这种把多根标杆标定在已知直线上的工作称为直线定线. 一般量距用目视定线.

三、量距方法

1. 平坦地区的距离丈量

丈量前，先将待测距离的两个端点 A，B 用木桩(桩上钉一小钉)标志出来，然后在端点的外侧各立一标杆，清除直线上的障碍物后，即可开始丈量. 丈量工作一般由两人进行，如图 8-20，后尺手持尺的零端位于 A 点，并在 A 点上插一测钎. 前尺手持尺的末端并携带一组测钎的其余 5 根(或 10 根)，沿 AB 方向前进，行至一尺段处停下. 后尺手以手势指挥前尺手将钢尺拉在 AB 直线方向上；后尺手以尺的零点对准 B 点，当两人同时把钢尺拉紧、拉平和拉稳后，前尺手在尺的末端刻线处竖直地插下一测钎，得到点 1，这样便量完了一个尺段. 随之后尺手拔起 A 点上的测钎与前尺手共同举尺前进，同法量出第二尺段. 如此继续丈量下去，直至最后不足一整尺段(n—B)时，前尺手将尺上某一整数分划线对准 B 点，由后尺手对准 n 点在尺上读出读数，两数相减，即可求得不足一尺段的余长.

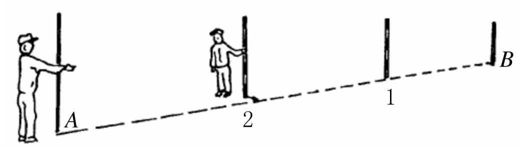


图 8-20

距离要往、返丈量. 返测时要重新进行定线，取往、返测距离的平均值作为丈量结果. 量距精度以相对误差表示，通常化为分子为 1 的分式形式.

2. 倾斜地面的距离丈量

(1)平量法

沿倾斜地面丈量距离，当地势起伏不大时，可将钢尺拉平丈量，丈量由 A 向 B 进行，甲立于 A 点，指挥乙将尺拉在 AB 方向线上. 甲将尺的零端对准 A 点，乙将尺子抬高，并且目估使尺子水平，然后用垂球尖将尺段的末端投于地面上，再插以插钎. 若地面倾斜较大，将钢尺抬平

有困难时，可将一尺段分成几段来平量，如图 8－21.

（2）斜量法

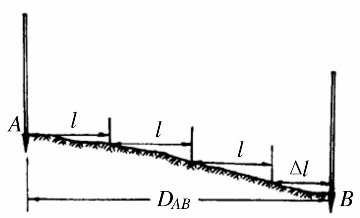


图 8－21

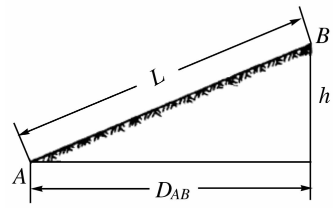


图 8－22

当倾斜地面的坡度均匀时，可以沿着斜坡丈量出 AB 的斜距 L，测出地面倾斜角，然后计算 AB 的水平距离 D，如图 8－22.

视距测量

用有视距装置的测量仪器，按光学和三角学原理测定两点间距离（有时还包括高差）的方法. 这种方法操作简便、迅速，不受地面起伏的限制，但精度较低，但能满足测定碎部点位置的精度要求，因此被广泛应用于碎部测量中.

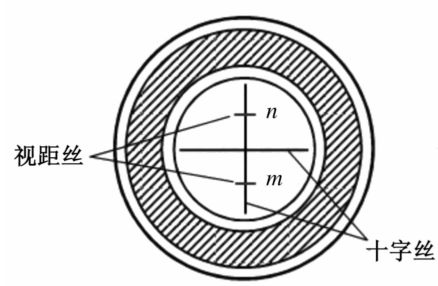


图 8－23

视距测量的原理如图 8－23 所示.

视距测量所用的主要仪器工具是经纬仪和视距尺.

一、视距测量原理

1. 视线水平时的距离与高差公式

欲测定 A，B 两点间的水平距离 D 及高差 h，可在 A 点安置经纬仪，B 点立视距尺，设望远镜视线水平，瞄准 B 点视距尺，此时视线与视距尺垂直，如图 8－24，求得上、下视距丝读数之差. 上、下丝读数之差称为视距间隔或尺间隔，用 l 表示.

计算公式：$D=Kl$，其中 K 为视距乘常数.

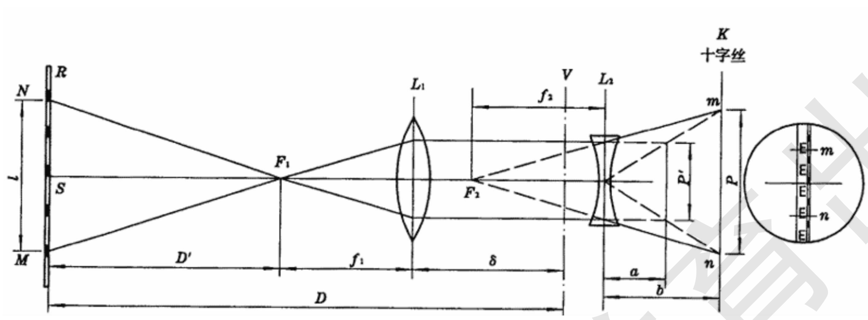


图 8－24　内调焦望远镜成像原理图

2. 视线倾斜时的距离与高差公式

如图 8－25，在地面起伏较大的地区进行视距测量时，必须使视线倾斜才能读取视距间

隔.由于视线不垂直于视距尺,故不能直接应用上述公式,而应用下面公式来计算.

$$D=Kl\cdot\cos^2\alpha,$$

$$h=\frac{1}{2}Kl\cdot\sin 2\alpha+i-v.$$

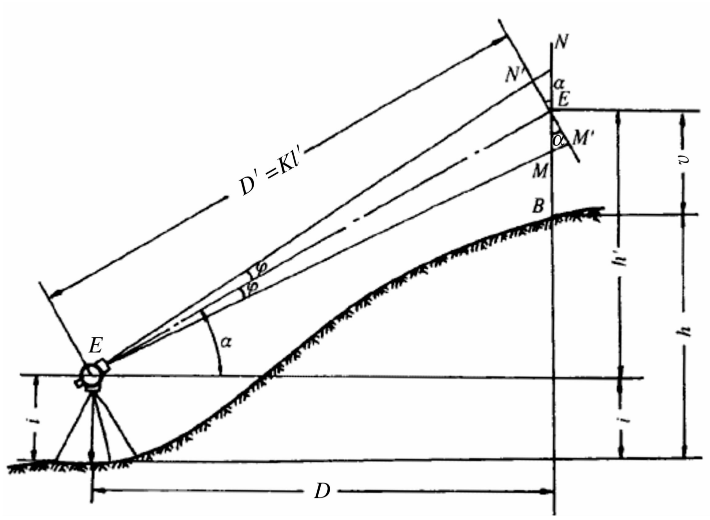


图 8-25　视线倾斜时视距测量

二、视距测量的观测与计算

施测时,安置仪器于 A 点,量出仪器高 i,转动照准部瞄准 B 点视距尺,分别读取上、下、中三丝的读数,计算视距间隔.再使竖盘指标水准管的气泡居中,读取竖盘读数,并计算竖直角.用计算器计算出水平距离和高差.

三、视距测量误差及注意事项

1.视距测量的误差

读数误差是指视距丝在视距尺上读数的误差,与尺子最小分划的宽度、水平距离的远近和望远镜放大倍率等因素有关,因此读数误差的大小,视使用的仪器、作业条件而定.

垂直折光影响:视距尺不同部分的光线是通过不同密度的空气层到达望远镜的,越接近地面的光线受折光影响越显著.经验证明,当视线接近地面在视距尺上读数时,垂直折光引起的误差较大,并且这种误差与距离的平方成比例地增加.

视距尺倾斜所引起的误差:视距尺倾斜误差的影响与竖直角有关,尺身倾斜对视距精度的影响很大.

2.注意事项

(1)为减少垂直折光的影响,观测时应尽可能使视线离地面 1 m 以上;

(2)作业时,要将视距尺竖直,并尽量采用带有水准器的视距尺;

(3)要严格测定视距常数,扩值应在 100 ± 0.1 之内,否则应加以改正;

(4)视距尺一般应是厘米刻划的整体尺.如果使用塔尺应注意检查各节尺的接头是否准确;

(5)要在成像稳定的情况下进行观测.

习题参考解答

P.8 练习

1. (1)$5\sqrt{2}$.(2)$10\sqrt{2}$.

2. (1)B 为 $45°$或 $135°$.(2)$45°$.

3. $\because C=180°-A-B=45°$,又$\because \dfrac{c}{\sin C}=2R$,$\therefore \dfrac{\sqrt{2}}{\sin 45°}=2R$,$R=1$,$S_{外}=\pi$.

4. 由题意可得,外接圆半径为 1.

由正弦定理得$\dfrac{b}{\sin 30°}=\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{b+c}{\sin 30°+\sin C}=2$,

$\therefore \sin C=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,因此 $C=45°$或 $135°$.

习题 1

1. (1)$\because A=180°-B-C=30°$,又由正弦定理可得$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$,即$\dfrac{7}{\sin 30°}=\dfrac{c}{\sin 120°}$,$\therefore c=7\sqrt{3}$.

(2)由正弦定理可得$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$,$\therefore \dfrac{14}{\sin 45°}=\dfrac{7\sqrt{6}}{\sin A}$,$\therefore \sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,$\because b>a$,$\therefore B=60°$或 $120°$,①当 $B=60°$时,$C=180°-A-B=75°$;②当 $B=120°$时,$C=15°$.

(3)由正弦定理可得$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$,即$\dfrac{8}{\sin A}=\dfrac{4\sqrt{6}}{\sin 60°}$,$\therefore \sin A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,$\because b>a$,$\therefore A=45°$.

$\therefore C=180°-A-B=75°$.又由$\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{a}{\sin A}$,$\therefore \dfrac{c}{\sin 75°}=\dfrac{8}{\sin 45°}$,$\therefore c=\dfrac{8\sin 75°}{\sin 45°}$.

$\because \sin 75°=\sin(30°+45°)=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$,$\therefore c=\dfrac{4(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}=4\sqrt{3}+4$.

2. 由正弦定理可得$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$,$\therefore \dfrac{3}{\sin 30°}=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sin C}$,$\therefore \sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,$\because c>a$,$\therefore C=60°$或 $120°$.

①当 $C=60°$时,$B=90°$,$b=6$,$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$.②当 $C=120°$时,$B=30°$,$b=3$.$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$.

3. 由正弦定理，得$\frac{2}{\sin A}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sin 105^\circ}$，

$\therefore \sin A=\frac{1}{2}$，$A=30^\circ$，$B=45^\circ$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\sqrt{3}+1$.

4. $\because S=\pi R^2$，$\therefore R=4$，又$\because \frac{a}{\sin A}=2R$，$\therefore \sin A=\frac{1}{2}$，$\frac{b}{\sin B}=2R$，$\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\because b>a$，

$\therefore A=30^\circ$，$B=45^\circ$或135°，$C=105^\circ$或15°.

5. $\because \frac{a}{\cos A}=\frac{b}{\cos B}=\frac{c}{\cos C}$，

由正弦定理，得$\frac{2R\sin A}{\cos A}=\frac{2R\sin B}{\cos B}=\frac{2R\sin C}{\cos C}$，

$\therefore \tan A=\tan B=\tan C$，而$A$，$B$，$C$都是三角形内角，

$\therefore A=B=C$，故$\triangle ABC$是等边三角形.

6. $\because \sin^2 A-\sin^2 B=\sin^2 C$，$\therefore 4R^2\sin^2 A+4R^2\sin^2 B=4R^2\sin^2 C$，$\therefore a^2+b^2=c^2$. $\therefore C=90^\circ$.

命题的逆命题为，在$\triangle ABC$中，若$C=90^\circ$，则有$\sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C$.

证明：$\because C=90^\circ$，$\therefore c^2=a^2+b^2$，又由正弦定理可得$a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$，

$\therefore 4R^2\sin^2 A+4R^2\sin^2 B=4R^2\sin^2 C$，$\therefore \sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C$.

7. $\because \frac{c}{b}=\frac{\sin C}{\sin B}=\frac{\sin 2B}{\sin B}=2\cos B$，又$\because C=2B$，$\therefore A=\pi-3B$，$\because 0<A,B,C<\pi$，

$$\therefore \begin{cases}0<2B<\pi,\\0<\pi-3B<\pi,\\0<B<\pi,\end{cases}\therefore \begin{cases}0<B<\frac{\pi}{2},\\0<B<\frac{\pi}{3},\\0<B<\pi.\end{cases}\therefore 0<B<\frac{\pi}{3}.\ \therefore \frac{1}{2}<\cos B<1,\therefore 1<\frac{c}{b}<2.$$

P.12　练习

1. (1) $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=8^2+3^2-2\times 8\times 3\times \cos 60^\circ=49$，$\therefore a=7$.

(2) $\because \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{3^2+5^2-7^2}{2\times 3\times 5}=-\frac{1}{2}$，又$\because 0<A<\pi$，$\therefore A=\frac{2\pi}{3}$.

(3) $\because \cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{20^2+21^2-29^2}{2\times 20\times 21}=0$，又$\because 0<B<\pi$，$\therefore B=\frac{\pi}{2}$.

2. $AB^2=a^2+b^2-2ab\cos C=300^2+180^2-2\times 300\times 180\times \cos 30^\circ\approx 28\ 869$，$\therefore AB\approx$ 170 m.

3. $\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C$，$\therefore \frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{4}(a^2+b^2-c^2)$，$\therefore \sin C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，

$\therefore \sin C=\cos C$，$\because 0<C<\pi$，$\therefore C=\frac{\pi}{4}$.

4. $\because \cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\frac{2^2+3^2-4^2}{2\times2\times3}=-\frac{1}{4}$，又$\because 0<A<\pi$，$\therefore \sin A=\frac{\sqrt{15}}{4}$.

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot \sin A=\frac{1}{2}\times2\times3\times\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{3\sqrt{15}}{4}$.

5. $\because a\cos B+b\cos A=a\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+b\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{a^2+c^2-b^2+b^2+c^2-a^2}{2c}=\frac{2c^2}{2c}=c$，

$\therefore c=a\cos B+b\cos A$.

习题 2

1. $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{3^2+4^2-37}{2\times3\times4}=-\frac{1}{2}$，又$\because 0<C<\pi$，$\therefore C=\frac{2\pi}{3}$.

2. 令三边之比为 $a:b:c=\sqrt{7}:2:1$，$\therefore$最大的内角为 A，$\because \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{2^2+1^2-7}{2\times2\times1}=-\frac{1}{2}$，又$\because 0<A<\pi$，$\therefore A=\frac{2\pi}{3}$.

3. $\because c^2=a^2+b^2+ab$ 及余弦定理得，$-2ab\cos C=ab$，$\therefore \cos C=-\frac{1}{2}$.

$\because 0<C<\pi$，$\therefore C=\frac{2\pi}{3}$.

4. 设 $a=5$，$b=7$，$c=3$，$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=-\frac{1}{2}$，$\therefore 0<B<\pi$，$\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$S_{\triangle}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times5\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{15\sqrt{3}}{4}$.

5. 由 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$ 可得：$12=9+c^2-6c\cos 150^\circ$，即 $c^2+3\sqrt{3}c-3=0$，$\therefore c=\frac{-3\sqrt{3}+\sqrt{39}}{2}$.

6. 如图 8－26，连接 BD，在$\triangle ABD$ 中，

由余弦定理，得 $BD=\sqrt{3^2+5^2-2\times3\times5\cos 120^\circ}=7$.

又 AC 是$\triangle ABD$ 的外接圆直径，

由正弦定理，$AC=\frac{BD}{\sin 120^\circ}=\frac{14\sqrt{3}}{3}$.

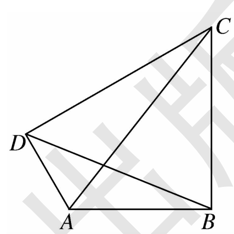


图 8－26

7. （方法一）$\because a\cos B=b\cos A$，由正弦定理可知 $2R\sin A\cos B=2R\sin B\cos A$，即 $\sin(A-B)=0$，$\therefore A=B$，$\triangle ABC$ 为等腰三角形.

（方法二）由余弦定理可得 $a\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=b\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$\therefore\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}$.

$\therefore a^2+c^2-b^2=b^2+c^2-a^2$，$\therefore a^2=b^2$，即 $a=b$，故 $\triangle ABC$ 为等腰三角形.

8. 如图 8-27 所示，设点 D 为 AB 边上中点.

$\because BC^2=AC^2+AB^2-2AC\cdot AB\cdot\cos 30°$，

$\therefore 4=12+AB^2-2\times 2\sqrt{3}AB\times\frac{\sqrt{3}}{2}$，

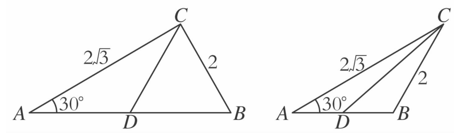


图 8-27

$\therefore AB^2-6AB+8=0$，$\therefore AB=4$ 或 2，

① 当 $AB=4$ 时，$\triangle ABC$ 为 Rt$\triangle$，$\therefore CD=2$.

② 当 $AB=2$ 时，$\triangle ABC$ 为等腰三角形，$CD^2=BD^2+BC^2-2BD\cdot BC\cdot\cos B$.

$\because BD=1$，$BC=2$，$B=120°$，$\therefore CD^2=1^2+2^2-2\times1\times2\times\cos 120°=7$.

$\therefore CD=\sqrt{7}$.

9. 如图 8-28 所示，连接 BD，则有 $AD^2+AB^2-2AD\cdot AB\cdot\cos A=CD^2+CB^2-2CD\cdot CB\cdot\cos C$.

又 $\therefore \cos A=-\frac{1}{2}$，$A=120°$，$C=60°$，$\therefore S_{四边形ABCD}=8\sqrt{3}$.

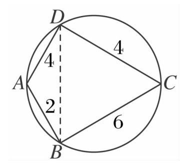


图 8-28

P. 18　练习

1. 如图 8-29 所示，设甲船在 A 处，乙船在 B 处，t h 后在 C 处相遇.

由题意可知 $BC=at$，$AC=\sqrt{3}at$，$\angle CBA=120°$，

由正弦定理可知 $\frac{BC}{\sin\angle CAB}=\frac{AC}{\sin\angle CBA}$.

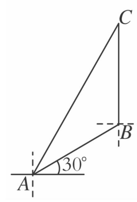


图 8-29

$\therefore \sin\angle CAB=\frac{1}{2}$. $\because \angle CAB$ 为锐角，$\therefore \angle CAB=30°$，故甲船应沿着北偏东 30° 方向前进就可以最快与乙船相遇.

2. 如图 8-30 所示，设 AB 表示房屋，DE 表示塔.

由题意可知：$AB=20$ m，$\angle CBE=60°$，$\angle CBD=45°$，

在 $\triangle CBD$ 中，$CD=BC=20$ m.

在 $\triangle CBE$ 中，$EC=\sqrt{3}BC=20\sqrt{3}$，

$\therefore DE=(20+20\sqrt{3})$m.

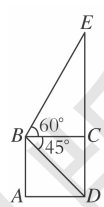


图 8-30

3. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=1\ 000$ m，$A=30°$，$\angle ABC=135°$，$\therefore \angle ACB=15°$.

又 $\because \frac{AB}{\sin\angle ACB}=\frac{BC}{\sin 30°}$，

$\therefore BC=\frac{1\ 000\sin 30°}{\sin 15°}=\frac{500}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}=\frac{2\ 000}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=500(\sqrt{6}+\sqrt{2})$.

在 $\triangle BDC$ 中，$CD=\frac{\sqrt{2}}{2}BC=500(\sqrt{6}+\sqrt{2})\times\frac{\sqrt{2}}{2}=500(\sqrt{3}+1)$.

习题 3

1. 如图 8－31 所示，设在点 C 处追上，由题意可知，$AB=10$，$\angle CAB=60^\circ$，设我舰的速度为 v 海里/时，

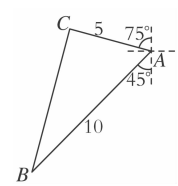


图 8－31

则 $BC=\frac{1}{6}v$，$AC=5$. 由余弦定理可得：

$BC^2=AC^2+BA^2-2AC\cdot AB\cdot\cos 60^\circ=25+100-2\times5\times10\times\frac{1}{2}=75.$

$\therefore \frac{1}{36}v^2=75.\ \therefore v^2=36\times75$，$\therefore v=30\sqrt{3}.$

又 $\because \frac{BC}{\sin 60^\circ}=\frac{5}{\sin B}$，$\therefore \frac{5\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{5}{\sin B}.\ \therefore \sin B=\frac{1}{2}$，又 $\because \angle CAB=60^\circ$，$\therefore B=30^\circ.$

答：我舰航行的方向是北偏东 15°，速度为 $30\sqrt{3}$ 海里/时.

2. 由点 A 作 $AD\perp BC$ 交 BC 的延长线于 D，$\because BC=30$，$\angle B=30^\circ$，$\angle ACB=120^\circ$，

$\therefore \angle A=30^\circ.$

$\therefore AC=30$，$\therefore AD=15\sqrt{3}>20$. 故无触礁危险.

3. 由题意可知，$AB=32.2\times\frac{1}{2}=16.1$，$\angle BAS=20^\circ$，$\angle SBA=120^\circ$，$\angle S=40^\circ$，

又由正弦定理可知 $\frac{AB}{\sin S}=\frac{BS}{\sin A}$，$\therefore \frac{16.1}{\sin 40^\circ}=\frac{BS}{\sin 20^\circ}.$

$\therefore BS=\frac{16.1}{2\cos 20^\circ}\approx 8.5.$

答：灯塔 S 到 B 处的距离为 8.5 海里.

4. 在 $\triangle ABC$ 中，$BC=24$，$\angle BAC=30^\circ$，$\therefore AB=24\sqrt{3}$，$AC=48$. 在 $\triangle ADC$ 中，$\angle CAD=30^\circ$，$\angle D=120^\circ$，

$\therefore \frac{CD}{\sin\angle CAD}=\frac{AC}{\sin\angle D}$，$\therefore \frac{CD}{\sin 30^\circ}=\frac{48}{\sin 120^\circ}$，$\therefore CD=\frac{48}{\sqrt{3}}=16\sqrt{3}.$

答：两座建筑物的高分别为 $24\sqrt{3}$ m 和 $16\sqrt{3}$m.

5. 在 $\triangle ACE$ 中，$\angle CAE=\theta$，$AC=\frac{9\sqrt{2}}{2}$，$\therefore AE=\frac{9\sqrt{2}}{2\cos\theta}$，

在 $\triangle BDE$ 中，$BD=6\sqrt{2}$，$BE=\frac{6\sqrt{2}}{\cos\theta}.$

在 $\triangle AEB$ 中，$AB=15$，$\angle AEB=2\theta$，$\therefore AB^2=AE^2+BE^2-2AE\cdot BE\cdot\cos 2\theta.$

$\therefore 15^2=\frac{81}{2\cos^2\theta}+\frac{72}{\cos^2\theta}-2\times\frac{54}{\cos^2\theta}\cdot\cos 2\theta$，$\therefore 225\cos^2\theta=\frac{81}{2}+72-108\cos 2\theta.$

$\therefore 441\cos^2\theta=\dfrac{81}{2}+72+108 \quad \therefore \cos^2\theta=\dfrac{1}{2}$，$\therefore \cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\because 0°<\theta<90°$，$\therefore \theta=45°$.

6. 如图 8－32 所示，$\because BC=30$，$\angle B=\theta$，$\angle ACD=2\theta$，$\angle ADE=4\theta$，

$\therefore \angle BAC=\theta$，$\angle CAD=2\theta$，$\therefore AC=30$，$AD=10\sqrt{3}$.

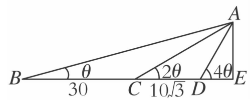


图 8－32

在△ACD 中，$\dfrac{CD}{\sin\angle CAD}=\dfrac{AC}{\sin\angle ADC}$，

$\therefore \dfrac{30}{\sin 4\theta}=\dfrac{10\sqrt{3}}{\sin 2\theta}$，$\therefore \dfrac{30}{2\sin 2\theta\cos 2\theta}=\dfrac{10\sqrt{3}}{\sin 2\theta}$，$\therefore \cos 2\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$\because 0<2\theta<\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore 2\theta=\dfrac{\pi}{6}$，$\therefore \theta=\dfrac{\pi}{12}$，$AE=AD\cdot\sin 4\theta=10\sqrt{3}\times\sin\dfrac{\pi}{3}=15$(m).

复习题 8

1. D.

2. C.

3. B.

4. (1)$\dfrac{15\sqrt{2}+5\sqrt{6}}{3}$.(2)2 或 1.(3)$\sqrt{181-90\sqrt{3}}$.(4)120°.

5. 如图 8－32 所示，$\dfrac{AB}{\sin\angle ACB}=\dfrac{AC}{\sin B}$，

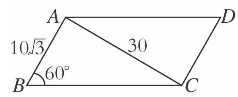


图 8－32

$\therefore \dfrac{10\sqrt{3}}{\sin\angle ACB}=\dfrac{30}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$. $\therefore \sin\angle ACB=\dfrac{1}{2}$.

又$\because 10\sqrt{3}<30$，$\therefore 0<\angle ACB<90°$，$\therefore \angle ACB=30°$，

$\therefore \angle BAC=90°$，$\therefore S_{\text{四边形}ABCD}=2S_{\triangle ABC}=300\sqrt{3}$.

6. $\because S=\dfrac{1}{2}ab\sin C$，$\therefore 5=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{17}\times\sqrt{13}\cdot\sin C$，$\therefore \sin C=\dfrac{10}{\sqrt{17}\times\sqrt{13}}$，$\cos C=\pm\dfrac{11}{\sqrt{17}\times\sqrt{13}}$，

$\therefore c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=17+13-2\sqrt{17}\times\sqrt{13}\times\dfrac{\pm 11}{\sqrt{17}\times\sqrt{13}}=8$ 或 52，$\therefore c=2\sqrt{2}$ 或 $2\sqrt{13}$.

7. 设汽车 B 的速度为 v km/h，1 小时后，$OA=48$，$OB=v$，$AB^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cdot\cos 60°$，$\therefore 43^2=48^2+v^2-48v$.

$\therefore v^2-48v+5\times 91=0$.

$v=\dfrac{48\pm\sqrt{48^2-20\times 91}}{2}=\dfrac{48\pm 22}{2}$，$\therefore v=35$ 或 13.

8. 45°.

9. $\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{\frac{5}{8}c}{\sin\frac{C}{2}}$，得 $\cos\dfrac{C}{2}=\dfrac{4}{5}$，

$\therefore \cos C=2\cos^2\dfrac{C}{2}-1=\dfrac{7}{25}$.

10. 由 $\sin^2 A=\sin B\sin C$ 得，$a^2=bc$，

又 $2a=b+c$，两式消去 b 得，$a^2-2ac+c^2=0$，$\therefore a=c$.

消去 c 得，$a^2-2ab+b^2=0$，$\therefore a=b$.

故$\triangle ABC$ 为等边三角形.

11. 由已知得，$\begin{cases} b^2=a^2+c^2-2ac\cos 60^\circ, \\ \dfrac{1}{2}ac\sin 60^\circ=10\sqrt{3}, \\ a+b+c=20, \end{cases}$ 又 $a<b<c$，解得 $a=5$，$b=7$，$c=8$.

12. $\because \dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{AC}{\sin B}$，$\therefore \dfrac{BC}{\sin 45^\circ}=\dfrac{AC}{\sin 30^\circ}$，$\therefore \dfrac{BC}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{30}{\frac{1}{2}}$，$\therefore BC=30\sqrt{2}$.

13. (1) $f(x)=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)-1$.

(2) 由 $f(B)=1$ 得，$\sin\left(2B+\dfrac{\pi}{6}\right)=1$，从而 $B=\dfrac{\pi}{6}$. 又 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，$a=3$，$b=\sqrt{3}$，因而 $\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore A=\dfrac{\pi}{3}$或$\dfrac{2\pi}{3}$.

由 $A=\dfrac{\pi}{3}$时，$C=\dfrac{\pi}{2}$，$c=2\sqrt{3}$.

当 $A=\dfrac{2\pi}{3}$时，$C=\dfrac{\pi}{6}$，$c=\sqrt{3}$.

14. (1) 如图 8-33 所示，设经过 t h 后与轮船相遇于点 B，

由题意可知，若希望相遇时小艇的航行距离最小，则必有

$OB\perp AB$，$\therefore OB=vt$，$AB=30t$，$AO=20$.

$\therefore \sin 30^\circ=\dfrac{AB}{AO}$，$\therefore \dfrac{1}{2}=\dfrac{30t}{20}$，$\therefore t=\dfrac{1}{3}$.

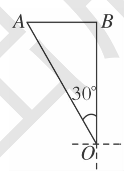


图 8-33

且 $OB=AO\cos 30^\circ=10\sqrt{3}$，

$\therefore 10\sqrt{3}=\dfrac{1}{3}v$. $\therefore v=30\sqrt{3}$.

(2)如图 8 - 34,讨论:①若轮船与小艇在 A,T 之间 G 位置相遇时,根据小艇的速度限制,有 $OG<AG$,但实际上,这种情况中 $AG<OG$,所以不符合要求舍去.因此轮船与小艇的交点必在 T,B 之间.

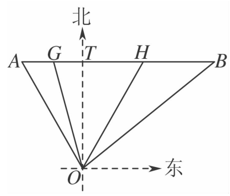


图 8 - 34

②若轮船与小艇在 H 处相遇时,在直角三角形 OHT 中运用勾股定理有:

$(900-v^2)t^2-600t+400=0$,等价于 $v=\sqrt{900+\frac{400}{t^2}-\frac{600}{t}}=10\sqrt{4\left(\frac{1}{t}\right)^2-6\left(\frac{1}{t}\right)+9}$,

从而 $v=10\sqrt{4\left[\left(\frac{1}{t}\right)^2-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{t}\right)+\frac{9}{16}\right]-\frac{9}{4}+9}=10\sqrt{4\left(\frac{1}{t}-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{27}{4}}\leqslant 30\left(\frac{1}{t}<3\right)$.

所以当 $v=30$ 时,$t=\frac{2}{3}$.

此时 $OH=30\times\frac{2}{3}=20$,$AH=30\times\frac{2}{3}=20$,$\therefore OH=OA=AH$.

$\therefore\triangle AOH$ 为等边三角形.$\therefore\angle TOH=30^\circ$.

也就是说,当小艇以 30 海里/时的速度,沿北偏东 30°方向行走能以最短的时间遇到轮船.

第9章 数 列

一、教学目标

1.知识目标：

(1)理解数列、等差数列、等比数列及其有关概念，了解数列和函数之间的关系.

(2)了解数列的递推公式，明确递推公式与通项公式的异同.

(3)对于比较简单的数列，会根据其前几项写出它的一个通项公式.

(4)理解数列的前 n 项和与 a_n 的关系.

(5)掌握等差数列、等比数列前 n 项和公式及其获取思路.

(6)会解决知道 $S_n, a_n, a_1, d(q), n$ 中的任意三个，求另外两个的问题.

(7)掌握等比数列前 n 项和公式在购物付款方式中的应用，使学生学会从数学角度对某些日常生活中的问题进行研究.

2.能力目标：

培养学生搜集、选择、处理信息的能力，发展学生独立探究和解决问题的能力，提高学生的应用意识和创新能力.

3.情感态度与价值观：

(1)使学生抓住社会现象的本质，用科学的、辩证的眼光观察事物，建立科学的世界观.

(2)通过学生之间、师生之间的交流与配合培养学生的合作意识和团队精神.

(3)通过独立运用数学知识解决实际问题，培养学生勇于克服困难的坚强意志，也使学生体会学习数学知识的重要性，增强他们对数学学习的自信心和对数学的情感.

二、教材说明

本章是讲解数列的基本知识，特别是由于等差数列与等比数列有着较为广泛的实际应用，因此可以补充举例进行说明解释，如各种产品尺寸常要分成若干等级，当其中的最大尺寸与最小尺寸相差不大时，常按等差数列进行分级，比如鞋的尺码；当其中的最大数字与最小数字相差较大时(这种情况是多数)，常按等比数列进行分级，比如汽车的载重量、包装箱的重量等，特别值得一提的是，数列在产品尺寸标准化方面有着重要作用.数列在整个中学数学教学内容中处于一个知识汇合点的地位，很多知识都与数列有着密切联系，过去学过的数、式、方程、函数、简易逻辑等知识在这一章均得到了较为充分的应用，而学习数列又为后面学习数列与函数的极限等内容作了铺垫.教科书采取将代数、几何打通的混编体系的主要目的是强化数学知识的

内在联系，而数列正是在沟通各知识方面发挥了重要作用．由于不少关于恒等变形、解方程（组）以及一些带有综合性的数学问题都与等差数列、等比数列有关，因此在学习这一章时应该对学生进行综合训练，从而有助于培养学生综合运用知识解决问题的能力．

三、课时安排建议

9.1	数列的概念	2课时
9.2	等差数列	3课时
9.3	等比数列	3课时
9.4	分期付款问题中的有关计算	1课时
小结与复习		3课时

四、教学建议

由于本章联系的知识面广，具有知识交汇点的特点，在应试教育的“一步到位”的教育思想影响下，本章的教学要求很容易拔高，容易过早地进行针对“高考”的综合性训练，从而影响了基本内容的学习和加重了学生负担．事实上，学习是一个不断深化的过程，应致力于打好基础并进行初步的综合训练，在后续的学习中通过对本章内容的不断应用来获得巩固和提高，为此，本章教学中应特别注意一些容易膨胀的地方，例如在学习数列的递推公式时，不要去搞涉及递推公式变形的论证、计算问题，只要会根据递推公式求出数列的前几项就行了；在研究数列求和问题时，不要涉及过多的技巧．

1．适当加强本章内容与函数的联系．

适当加强这种联系，不仅有利于知识的融汇贯通，加深对数列的理解，运用函数的观点和方法解决有关数列的问题，而且反过来可使学生对函数的认识进一步深化．比如，学生在此之前接触的函数一般是自变量连续变化的函数，而到本章接触到数列这种自变量离散变化的函数之后，就能进一步理解函数的一般定义，防止了前面内容安排可能产生的学生认识上的负迁移．

2．掌握基本方法．

基本量法：由于等差（等比）数列是由首项与公差（比）确定的，故称首项与公差（比）为等差（比）数列的基本量．因此，大凡涉及等差（等比）数列的数学问题，我们总希望通过等差（等比）数列的基础知识并结合条件去求出首项与公差（比）或它们之间的关系，从而认识数列，达到解决问题的目的，这种方法就是等差（等比）数列特有的基本量方法．简言之，就是用基本量去统一条件与结论而达到解决等差（比）数列相关问题的方法．

基本量法常涉及“知三求二”题型，所谓“知三求二”就是等差（或等比）数列有五个参量：项数、通项、前 n 项和、首项、公差（比），只要已知这五个量中的任意三个，就可以利用通项公式和前 n 项和公式求出其余两个．对于“知三求二”的题型训练要适度，不要做那些太难、太繁的题目，这样不仅增加学习负担，而且淡化数学本质．

运用基本量法必须与等差(比)数列的性质密切配合,只有这样才能达到灵活应用的程度,才能发挥无穷的活力.两个重要数列问题都可以运用基本量法解决,有人认为解题过程较繁,想寻找解题技巧.我们不能对计算追求表面上少一步,或不容易设想的计算技巧,而冲淡了对基本数列和基本量法的认识.

3.数列涉及很多数学思想,在学习中需要学生们很好地把握几个主要数学思想.

(1)函数思想:数列作为一种特殊的函数,是反映自然规律的基本数学模型.学习中应理解等差数列的概念,掌握等差数列的通项公式,弄清等差数列与一次函数的关系,抓住等差数列的特征,掌握前 n 项和公式,弄清它与二次函数的关系.应理解等比数列的概念,掌握等比数列的通项公式,弄清等比数列与指数函数的关系.

(2)方程思想:运用数列基本量法解题就需根据题设条件,结合数列通项公式和求和公式构建方程或方程组求解,方程思想贯穿于数列学习和解题的始终.

(3)转化与化归思想:解决等差(比)数列问题都可以归结为研究首项和公差(比)问题.非等差、等比数列的问题常通过构造辅助数列转化为等差或等比数列求解.求和问题也是常见的题型,一些非等差、等比数列求和可以转化为等差、等比数列求和问题解决.有些数列应用题也可以转化为等差、等比数列问题来解决.通过两个基本数列的学习,在化归与转化过程中可以认识更多的数列,是数列学习的隐性目标.

(4)递推思想:递推是数列的本质性的内涵,是数列的一大特色.我们这里讲递推,并不是要深入研究递推数列,教科书中没有递推数列的概念和题型,课标和考试说明中都没有提及到递推数列,因此递推数列已经不是高考涉及的内容,近几年课改地区的高考一直回避这一问题.但是递推思想和方法在解决数列问题中的作用是很大的,涉及数列前 n 项和 S_n 与 a_n 的关系问题,常采用递推思想来解决.

(5)分类讨论思想:数列中渗透分类讨论的思想.如由 S_n 求 a_n,要对 $n=1$ 和 $n\neq1$ 讨论;在运用等比数列求和公式时,若公比 q 没有明确给出,需要分 $q=1$ 和 $q\neq1$ 讨论;在数列求和中有时需要进行奇偶性分析讨论;有些数列的通项公式是分段表示,解题过程需要讨论;在数列解题中有时根据过程需要进行讨论.

(6)特殊化思想:有些数列问题,在一般情况下解决思维可能会受阻或者解决比较困难繁杂,这时我们可以把问题退化到特殊情形,研究在特殊情况下的问题,从中寻找规律或探求问题成立的条件,然后再将结果代到一般问题中去检验或验证,也可以借鉴研究特殊情形的方法去研究一般性问题.这种“从一般到特殊再到一般”的方法,在研究数列问题中很有效果.

五、评价建议

本章节,教师可通过创设情境,适时引导的方式来激发学生积极思考的欲望,有时直接讲解,有时组织学生集体讨论、探索发现.通过本章节的学习,要求学生掌握数列及其有关概念,而且要让学生体会到数学概念形成过程中蕴含的基本数学思想:“函数思想、数形结合思想、特殊化思想”,使之获得内心感受,提高学生的基本技能和解决问题的能力,让学生逐渐学会辩证

地看待问题.

数列是高中数学的重点内容之一，是初等数学与高等数学的重要衔接点，由于它既具有函数特征，又能构成独特的递推关系，使得它既与高中数学其他部分的知识有着密切的联系，又有自己鲜明的特点：内容的丰富性、应用的广泛性和思想方法的多样性，所以高考中主要考查等差、等比数列的概念、性质、通项公式、前 n 项和公式等内容，对基本的计算技能要求比较高，具有“小、巧、活、新”的特点. 解答题属于中高档难度的题目，有时也作为压轴题，因为其具有综合性强、变化多、难度较大等特点，但考查的重点仍以等差数列和等比数列的内容为主，重点考查数列内在本质的知识和推理能力、运算能力以及分析问题与解决问题的能力.

9.1 数列的概念

教材线索

在本章的“问题探索”里用了一个有关“兔子问题”作为引入的例子，它用一个涉及斐波拉契数列问题给学生造成了一个不学本章知识、难获问题答案的悬念.

在数列的概念这一部分，主要介绍数列的概念、分类，以及给出数列的两种方法. 关于数列的概念，先从实际生活的兔子繁殖问题和超市的货物摆放问题出发，尔后给出了一个描述性定义，在此基础上，补充给出一个在映射、函数观点下的定义，指出：“从映射、函数的观点看，数列可以看作是一个定义域为正整数集(或它的有限子集)的函数当自变量从小到大依次取值时对应的一列函数值”. 这样就可以将数列与函数联系起来，不仅可以加深对数列概念的理解，而且有助于运用函数的观点去研究数列. 关于给出数列的两种方法，其中一种是给出数列的通项公式，而教科书在讲解这一方法时已明确指出它就是相应函数的解析式，点破了这一点，数列与函数的内在联系揭示得就更加清楚.

教学目标

(1)通过本节学习，让学生理解数列的概念，理解数列是一种特殊函数，把数列融于函数之中.

(2)了解数列的通项公式，并会用通项公式写出数列的任意一项，对于比较简单的数列，会根据前几项写出它的通项公式.

(3)理解递推公式的意思，能类比函数画出数列通项公式的图象.

(4)理解通项公式与递推公式的异同.

(5)通过探究、思考、交流、实验、观察、分析等教学方式，充分发挥学生的主体作用，并通过日常生活中的大量实例，鼓励学生动手试验，大胆猜想，培养学生对科学的探究精神和严肃认真的科学态度.

(6)通过本节章头图的学习，体会数学来源于生活，理解大自然的丰富多彩，感受“大自然是懂数学的”，从而提高学生学习数学的兴趣.

教材分析

1. 教学重点：

(1)理解数列及其有关概念.

(2)了解数列的通项公式和递推公式的意义,并能根据通项公式或递推公式写出数列的前几项.

(3)了解数列和函数之间的关系.

2. 教学难点:

(1)根据数列的前几项,归纳出数列的通项公式.

(2)理解递推公式和通项公式的关系.

(3)数列的递推公式及其应用的处理技巧.

3. 过程与方法:

通过对现实生活情境的探究过程,感知应用数学解决问题的方法,理解数形结合的数学思想和从一般到特殊以及从特殊到一般的逻辑推理的数学方法.

(1)数列的概念

按照一定顺序排列着的一列数称为数列.

数列中的每一个数叫做这个数列的项,数列中的每一项都和它的序号有关,排在第一位的数称为这个数列的第一项,依此下去,通常计为:$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$.

(2)数列的分类

①根据数列的项数可以分为:

有穷数列——项数有限的数列,如教科书中的例 2;

无穷数列——项数无限的数列,如教科书中的例 1.

②根据数列的每一项随序号变化的情况可以分为:

递增数列——一个数列,从第二项起每一项都大于它的前一项,如教科书中的例 1.

递减数列——一个数列,从第二项起每一项都小于它的前一项.

摆动数列——一个数列,从第二项起,有些项大于它的前项,有些项小于它的前一项.

常数数列——一个数列,它的每一项都相等,且等于一个常数.

(3)数列的表示方法

①通项公式法

如果数列$\{a_n\}$的第 n 项与序号 n 之间的关系可以用一个公式来表示,那么这个公式就叫做这个数列的通项公式.

如数列 $0,1,2,3,\cdots$的通项公式为 $a_n=n-1(n\in\mathbf{N}^*)$;

$1,1,1,\cdots$的通项公式为 $a_n=1(n\in\mathbf{N}^*)$;

$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots$的通项公式为 $a_n=\frac{1}{n}(n\in\mathbf{N}^*)$.

②图象法

启发学生仿照函数图象的画法画数列的图形. 具体方法是以项数 n 为横坐标,相应的项 a_n 为纵坐标,即以(n,a_n)为坐标在平面直角坐标系中作出点,如教科书中的例 2,作出一个数

列的图象，所得的数列的图形是一群孤立的点，因为横坐标为正整数，所以这些点都在 y 轴的右侧，而点的个数取决于数列的项数. 从图象中可以直观地看到数列的项随项数由小到大变化而变化的趋势.

③递推公式法

如果已知数列$\{a_n\}$的第 1 项（或前几项），且任一项 a_n 与它的前一项 a_{n-1}（或前 n 项）间的关系可以用一个公式来表示，那么这个公式就叫做这个数列的递推公式，如教科书中的例 3、例 7、例 8.

递推公式也是给出数列的一种方法，如下面数字排列的一个数列：3，5，8，13，21，34，55，89，其递推公式为：$a_1=3$，$a_2=5$，$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$($3\leqslant n\leqslant 8$).

(4)根据一个数列的有限项，写数列的通项公式时，主要用观察归纳法，体现由特殊到一般的思维规律，观察、分析问题的特点是重要的. 要利用我们熟知的一些基本数列，建立合理的联想，才能解决问题. 可以熟练地掌握一些基本数列的通项公式. 如：

(1)$-1,1,-1,1,\cdots,a_n=(-1)^n$.

(2)$1,3,5,7,\cdots,a_n=2n-1$.

(3)$2,4,6,8,\cdots,a_n=2n$.

(4)$1,2,4,8,\cdots,a_n=2^{n-1}$.

(5)$1,4,9,16,\cdots,a_n=n^2$.

(6)$1,3,6,10,\cdots,a_n=\dfrac{n(n+1)}{2},\cdots$，等等. 还有如教科书中的例 5，例 6.

可以补充说明以下几点：

(1)数列与数集的区别

①数列有序，数集无序.

②数列中有重复的数，数集中没有.

(2)数列的项与函数值

数列的项是指出现在这个数列中的某一确定的数，它是一个函数值，即 $f(n)$，而项数是指这个数在数列中的位置序号，它是这个函数 $f(n)$ 对应的自变量的值，即 n.

(3)数列与函数的关系

①用函数观点看数列

数列可以看作是一个定义域为正整数集($n\in\mathbf{N}^*$)的函数 $f(n)$，当它的自变量 n 从 1 开始依次取正整数时，对应的一列函数值 $f(1)$，$f(2)$，$f(3)$，……

②数列的图象表示

数列的图象是一群孤立的点，这些点的个数可以是无限的，也可以是有限的.

教学建议

由于本章处在知识交汇点的位置，它所蕴含的数学思想方法较为丰富，因此教科书在这方

面也力求充分挖掘这些思想.教科书注意从函数的观点去看数列，在这种整体的、动态的观点之下使数列的一些性质显现得更加清楚，某些问题也能得到更好的解决，正如并非每一函数均有解析表达式一样，也并非每一数列均有通项公式(有通项公式的数列只是少数)，因而研究递推公式给出数列的方法可使我们研究数列的范围大大扩展.递推是数学里的一个非常重要的概念和方法，在数列的研究中，不仅很多重要的数列是用递推公式给出的，而且它也是获得一个数列的通项公式的途径：先得出较为容易写出的数列的递推公式，然后再根据它推得通项公式.但是，这项内容也是极易膨胀的，例如研究用递推公式给出的数列的性质、从数列的递推公式推导通项公式等，这样就会加重学生负担，考虑到学生是在高一学习，因此我们必须牢牢把握教学要求，只要能初步体会一下用递推方法给出数列的思想，能根据递推公式写出一个数列的前几项就行了.数列通项公式的常见求法：观察归纳法、累加消项法、累积消项法、迭代法等.已知数列的前几项，写出它的一个通项公式时，通常用观察法，然后归纳猜想.我们有时未必能观察出它的通项公式，这时不妨尝试观察它们任意相邻两项间的相依关系，如对于数列：1，3，7，13，21，31，…，若不能直接发现 $a_n=n(n-1)+1$，则通过观察出递推关系 $a_n-a_{n-1}=2(n-1)$，再用迭加或迭代法便可求出通项公式.已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n，求 a_n，则用公式法，即 $a_n=S_n-S_{n-1}(n\geqslant 2)$，具体解题时需看清问题的本质并注意分类讨论.总之，观察是一切能力的基础，在数列学习中显得尤其重要珍贵.

参考例题

例 1 下面的等式：

$$1=1,$$
$$3+5=8,$$
$$7+9+11=27,$$
$$13+15+17+19=64,$$
$$21+23+25+27+29=125,$$

它们所暗示的一般规律是____________________________________.

解 设第 n 行左边第一个数为 a_n，则 $a_1=1$，$a_2=3$，$a_{n+1}=a_n+2n$.

叠加得 $a_n=n^2-n+1$，而第 n 行等式左边是 n 个奇数的和，故第 n 行所暗示的一般规律是 $(n^2-n+1)+[(n^2-n+1)+2]+[(n^2-n+1)+4]+\cdots+[(n^2-n+1)+2(n-1)]=n^3$.

例 2 已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_2=2$，$a_n=3a_{n-1}+a_{n-2}(n\geqslant 3)$，试写出数列的前 4 项.

解 由已知得 $a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=3a_2+a_1=7$，$a_4=3a_3+a_2=23$.

例 3 已知 $a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n$，写出前 5 项，并猜想 a_n.

解 (方法一)$a_1=2$，$a_2=2\times 2=2^2$，$a_3=2\times 2^2=2^3$，$a_4=2\times 2^3=2^4$，

$a_5=2\times 2^4=2^5$，观察可得 $a_n=2^n$.

(方法二)$\because a_{n+1}=2a_n$，$\therefore a_n=2a_{n-1}$，即 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=2$.

$\therefore \dfrac{a_n}{a_{n-1}}\times\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\times\dfrac{a_{n-2}}{a_{n-3}}\times\cdots\times\dfrac{a_2}{a_1}=2^{n-1}$，$\therefore a_n=a_1\cdot 2^{n-1}=2^n$.

例 **4**　已知数列$\{a_n\}$的前n项和，求数列的通项公式：

(1)$S_n=n^2+2n$；(2)$S_n=n^2-2n-1$.

解　(1)当$n\geqslant 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2+2n)-[(n-1)^2+2(n-1)]=2n+1$，

当$n=1$时，$a_1=S_1=1^2+2\times 1=3$，

经检验，当$n=1$时，$2n+1=2\times 1+1=3$，

$\therefore a_n=2n+1$为所求.

(2)当$n\geqslant 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2-2n-1)-[(n-1)^2-2(n-1)-1]=2n-3$，

当$n=1$时，$a_1=S_1=1^2-2\times 1-1=-2$，

经检验，当$n=1$时，$2n-3=2\times 1-3=-1\neq -2$，

$\therefore a_n=\begin{cases}-2, n=1;\\ 2n-3, n\geqslant 2\end{cases}$为所求.

例 **5**　把自然数按上小下大、左小右大的原则排成如图 9-1 所示的三角形数表(每行比上一行多一个数)：设$a_{ij}(i,j\in\mathbf{N}^*)$是位于这个三角形数表中从上往下数第$i$行、从左往右数第$j$个数，如$a_{42}=8$.

1
2　3
4　5　6
7　8　9　10
……

图 9-1

(1)若$a_{ij}=2\ 006$，求i,j的值；

(2)记三角形数表从上往下数第n行各数的和为b_n，令$c_n=\begin{cases}1 & (n=1);\\ \dfrac{n}{b_n-n} & (n\geqslant 2).\end{cases}$若数列$\{c_n\}$的前$n$项和为$T_n$，求$T_n$的值.

解　(1)三角形数表中前n行共有$1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$个数，

即第i行的最后一个数是$\dfrac{i(i+1)}{2}$，

$\therefore$使$a_{ij}=2\ 006$成立的i是不等式$\dfrac{i(i+1)}{2}\geqslant 2\ 006$的最小正整数解.

因为$\dfrac{62\times 63}{2}=1\ 953$，而$\dfrac{63\times 64}{2}=2\ 016$，所以$i=63$.

于是第 63 行的第一个数是$\dfrac{62\times 63}{2}+1=1\ 954$.

$\therefore j=(2\ 006-1\ 954)+1=53$.

(2)$\because$三角形数表中前n行共有$1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$个数，

$\therefore$前n行的所有自然数的和为

$$S_n=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\left[\frac{n(n+1)}{2}-1\right]=\frac{n(n+1)(n^2+n+2)}{8}.$$

$\therefore b_n=S_n-S_{n-1}=\cdots=\dfrac{n(n^2+1)}{2}$.

$\therefore$ 当 $n\geqslant 2$ 时，$c_n=\dfrac{n}{b_n-n}=\dfrac{2}{(n^2-1)}=\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1}$.

其前 n 项和 $T_n=1+\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1}\right)$

$$=1+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{5}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

相关链接

橄榄数

12 345 678 987 654 321 这个数有这样一个特点，各数位上的数字从左到右逐渐增大(由 1 到 9，且是连续自然数)到整数 9 时，达到顶峰，以后又逐渐减小(由 9 到 1)，它活像一只橄榄，我们姑且称它为橄榄数(是一种特殊的回文数). 有趣的是它还是一个完全平方数呢？你知道它是哪个数的平方吗(学过开方的同学，也希望你根据这个数的特点，分析出这个数来)?

12 345 654 321 也是一个橄榄数，它是哪个数的平方呢？告诉你这个数还能被 3，7，11，13，37 整除呢？

解　因为 1=1，2=1+1，

3=1+1+1，4=1+1+1+1，5=1+1+1+1+1，6=1+1+1+1+1+1，

7=1+1+1+1+1+1+1，8=1+1+1+1+1+1+1+1，9=1+1+1+1+1+1+1+1+1，

所以 12 345 678 987 654 321 可以分成下面九项的和，即：

```
1 2 3 4 5 6 7 8 9 8 7 6 5 4 3 2 1
---------------------------------
                1 1 1 1 1 1 1 1 1
              1 1 1 1 1 1 1 1 1
            1 1 1 1 1 1 1 1 1
          1 1 1 1 1 1 1 1 1
        1 1 1 1 1 1 1 1 1
      1 1 1 1 1 1 1 1 1
    1 1 1 1 1 1 1 1 1
  1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1
```

写成上面形式后，大家可能不再感到陌生了，它是 111 111 111×111 111 111 直式计算的一部分，所以 12 345 678 987 654 321=111 111 111^2.

同样可以求出：121=11^2，12 321=111^2，1 234 321=1 111^2，123 454 321=11 111^2，

$12\ 345\ 654\ 321=111\ 111^2$，$1\ 234\ 567\ 654\ 321=1\ 111\ 111^2$，$123\ 456\ 787\ 654\ 321=11\ 111\ 111^2$.

从上面各橄榄数中，可以发现橄榄数中间的那个数与和它相等的两次幂的底数中的 1 的个数相等，即：

$12\cdots n\cdots 21=\underbrace{11\cdots 1}_{n\text{个}}{}^2$（其中 $n=1,2,\cdots,9$）.

由于 $12\ 345\ 654\ 321=111\ 111^2$，而 $111\ 111$ 能被 3，7，11，13，37 整除，所以 $12\ 345\ 654\ 321$ 也能被 3，7，11，13，37 整除，并且有 $12\ 345\ 654\ 321=3^2\times 7^2\times 11^2\times 13^2\times 37^2$.

9.2 等差数列

教材线索

讲等差数列与等比数列的概念时，都是先写出几个数列，让学生先观察它们的共同特点，然后在归纳共同特点的基础上给出相应的定义，这样突出了它与实际生活的联系. 在等差数列这一部分时，教材以某住宅小区的绿化建设的统计数据出发，从而发现一般的规律.

教学目标

1. 明确等差数列、等差中项的定义，掌握等差数列的通项公式及推导公式.
2. 会解决知道 a_n，a_1，d，n 中的任意三个，求另外一个的问题.
3. 掌握等差数列前 n 项和公式及其获取思路.
4. 会用等差数列的前 n 项和公式解决一些简单的与前 n 项和有关的问题.

教材分析

1. 教学重点：

(1) 等差数列的概念、通项公式、性质的理解与应用.

(2) 等差数列前 n 项和公式的理解、推导及应用.

2. 教学难点：

灵活应用等差数列的定义、性质、前 n 项和公式解决一些相关问题.

3. 了解公差的概念，明确一个数列是等差数列的限定条件，能根据定义判断一个数列是等差数列；正确认识、使用等差数列的各种表示法，能灵活运用通项公式求等差数列的首项、公差、项数、指定的项. 通过公式的推导和公式的运用，使学生体会从特殊到一般，再从一般到特殊的思维规律，初步形成认识问题、解决问题的一般思路和方法；通过公式推导过程教学，对学生进行思维灵活性与广阔性的训练，发展学生的思维水平. 教科书中例 1 利用公差的概念求公差，例 2 和例 4 是说明证明一个数列是等差数列的方法，要求学生掌握并能加以应用. 例 3 与三角形相结合，可与解三角形相联系. 例 5、例 6、例 7 都是利用等差数列的通项公式求相差量，注意方程思想的应用，同时要利用例 7 的实际应用问题这个题材，培养学生的应用意识.

4. "等差数列前 n 项和"的推导不只一种方法. 教科书通过介绍高斯的算法，探究了这种方法如何推广到一般等差数列的求和这一问题. 该方法反映了等差数列的本质，可以进一步促进

学生对等差数列性质的理解，而且该推导过程体现了人类研究、解决问题的一般思路．教学过程的难点在于如何获得推导公式的“倒序相加法”这一思路．为了突破这一难点，在教学中宜采用“问题驱动”的教学方法，设计的问题要体现分析、解决问题的一般思路，即从特殊问题的解决中提炼方法，再试图运用这一方法解决一般问题．在教学过程中，通过教师的层层引导、学生的合作学习与自主探究，尤其是借助图形的直观性，学生“倒序相加法”思路的获得就水到渠成了．例 8 利用等差数列通项公式和前 n 项和公式解决实际问题，例 9 利用方程的思想构造两个关于 a_1 和 d 的方程，例 10 介绍一种求数列通项公式的方法，即利用公式 $a_n=\begin{cases}S_1(n=1),\\S_n-S_{n-1}(n\geqslant 2).\end{cases}$ 要注意验证 a_1 是否可以统一．

教学建议

本节是等差数列部分，在讲等差数列的概念时，突出了它与一次函数的联系，这样就便于利用所学过的一次函数的知识来认识等差数列的性质：从图象上看，为什么表示等差数列的各点都均匀地分布在一条直线上，为什么两项可以决定一个等差数列（从几何上看两点可以决定一条直线）？

在推导结论时，创设情境，唤起学生知识经验的感悟和体验，比如可以举出如下情境：高斯，德国著名数学家，被誉为“数学王子”．200 多年前，高斯的算术教师提出了下面的问题：$1+2+3+\cdots+100=$？据说，当其他同学忙于把 100 个数逐项相加时，10 岁的高斯却用下面的方法迅速算出了正确答案：

$(1+100)+(2+99)+\cdots+(50+51)=101\times 50=5\ 050.$

高斯的算法蕴涵着求等差数列前 n 项和一般的规律性．教学时，应给学生提供充裕的时间和空间，让学生自己去观察、探索发现这种数列的内在规律．由前面的大量铺垫，学生应容易得出如下过程：

$\because S_n=a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+\cdots+[a_1+(n-1)d]$，

$S_n=a_n+(a_n-d)+(a_n-2d)+\cdots+[a_n-(n-1)d]$，

$\therefore 2S_n=\underbrace{(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+\cdots+(a_1+a_n)}_{n个}$，

$\therefore S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}.$ （公式 1）

组织学生讨论：

若将 $a_n=a_1+(n-1)d$ 代入公式 1 中，又可得出哪个表达式？

即：$S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d.$ （公式 2）

让学生在观察高斯算法的基础上，发现上述数列的一个对称性质：任意第 k 项与倒数第 k 项的和均等于首末两项的和，从而为顺利地推导求和公式铺平了道路．建构主义学习理论认为，学习是学生积极主动地建构知识的过程，因此，应该让学生在具体的问题情境中经历知识

的形成和发展，让学生利用自己的原有认知结构中的相关知识与经验，自主地在教师的引导下促进对新知识的建构. 在教学过程中，根据教学内容，从介绍高斯的算法开始，探究这种方法如何推广到一般等差数列的前 n 项和的求法. 通过设计一些从简单到复杂，从特殊到一般的问题，层层铺垫，组织和启发学生获得公式的推导思路，并且充分引导学生展开自主、合作、探究学习，通过学生互动和师生互动等形式，让学生在解决问题中学会思考、学会学习. 同时可以根据自己所在学校的特点，为了促进成绩优秀学生的发展，还可以设计一些选做题和探索题，以利于进一步培养优秀生用函数观点分析、解决问题的能力，达到分层教学的目的.

参考例题

例 1 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=450$，求 a_2+a_8 及前 9 项和 S_9.

解 由等差中项公式得：$a_3+a_7=2a_5$，$a_4+a_6=2a_5$.

由条件 $a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=450$，得

$5a_5=450$，$a_5=90$，$\therefore a_2+a_8=2a_5=180$.

$$\begin{aligned}S_9&=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9\\&=(a_1+a_9)+(a_2+a_8)+(a_3+a_7)+(a_4+a_6)+a_5\\&=9a_5=810.\end{aligned}$$

例 2 已知 a,b,c 的倒数成等差数列，求证：$\dfrac{a}{b+c-a}$，$\dfrac{b}{c+a-b}$，$\dfrac{c}{a+b-c}$ 的倒数也成等差数列.

分析 给定的是三个数的倒数成等差数列，故应充分利用"三个数 x,y,z 成等差数列的充要条件：$x+z=2y$".

证明 因为 a,b,c 的倒数成等差数列，

$\therefore \dfrac{2}{b}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}$，即 $2ac=b(a+c)$.

又 $\dfrac{b+c-a}{a}+\dfrac{a+b-c}{c}=\dfrac{c^2+a^2+b(a+c)}{ac}-2=\dfrac{c^2+a^2+2ac}{ac}-2=\dfrac{(a+c)^2}{ac}-2=\dfrac{2(a+c)^2}{b(a+c)}-2=\dfrac{2(c+a-b)}{b}$，

所以 $\dfrac{a}{b+c-a}$，$\dfrac{b}{c+a-b}$，$\dfrac{c}{a+b-c}$ 的倒数也成等差数列.

例 3 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1+a_2+\cdots+a_5=30$，$a_6+a_7+\cdots+a_{10}=80$，求 $a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{15}$.

解 $\because 6+6=11+1$，$7+7=12+2$，$\cdots$ $\therefore 2a_6=a_1+a_{11}$，$2a_7=a_2+a_{12}$，$\cdots$

$\therefore (a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{15})+(a_1+a_2+\cdots+a_5)=2(a_6+a_7+\cdots+a_{10})$.

$\therefore a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{15}=2(a_6+a_7+\cdots+a_{10})-(a_1+a_2+\cdots+a_5)=2\times 80-30=130$.

例 4 成等差数列的四个数之和为 26，第二个数和第三个数之积为 40，求这四个数.

解 设四个数为 $a-3d$，$a-d$，$a+d$，$a+3d$，

则：$\begin{cases}(a-3d)+(a-d)+(a+d)+(a+3d)=26,\\(a-d)(a+d)=40,\end{cases}$ 解得，$a=\dfrac{13}{2}$，$d=\pm\dfrac{3}{2}$，

∴这四个数为 2,5,8,11 或 11,8,5,2.

例 5　已知等差数列$\{a_n\}$中 $a_1=13$ 且 $S_3=S_{11}$，那么 n 取何值时，S_n 取最大值？

解　(方法一)设公差为 d，由 $S_3=S_{11}$ 得：

$$3\times13+\frac{3\times2}{2}d=11\times13+\frac{11\times10}{2}d,\ d=-2,\ a_n=13-2(n-1),\text{即 } a_n=15-2n,$$

又由$\begin{cases}a_n\geqslant0,\\a_{n+1}\leqslant0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}15-2n\geqslant0,\\15-2(n+1)\leqslant0,\end{cases}$

解得：$6.5\leqslant n\leqslant7.5$，所以 $n=7$ 时，S_n 取最大值.

(方法二)由方法一得 $d=-2$，又 $a_1=13$，

所以 $S_n=\dfrac{d}{2}n^2+\left(a_1-\dfrac{d}{2}\right)n=-n^2+14n=-(n-7)^2+49$，

∴当 $n=7$，S_n 取最大值.

相关链接

斐波拉契数列

斐波拉契数列（又译作“斐波那契数列”或“斐波那切数列”）是一个非常美丽、和谐的数列，它的形状可以用排成螺旋状的一系列正方形来说明（如图 9－2），起始的正方形（图中用阴影表示）的边长为 1，在它左边的那个正方形的边长也是 1，在这两个正方形的上方再放一个正方形，其边长为 2，以后顺次加上边长为 3,5,8,13,21,……等等的正方形. 这些数字每一个都等于前面两个数之和，它们正好构成了斐波那契数列. 即斐波那契数列指的是这样一个数列：1,1,2,3,5,8,13,21,34,……

这个数列从第三项开始，每一项都等于前两项之和. 它的通项公式为：$f(n)=\dfrac{1}{\sqrt5}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt5}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt5}{2}\right)^n\right]$.

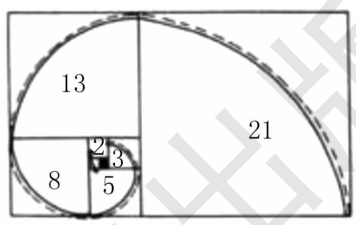


图 9－2

很有趣的是：这样一个完全是自然数的数列，通项公式居然是用无理数来表达的.

斐波拉契(Fibonacci)数列来源于兔子问题，它有一个递推关系，

$f(1)=1$，$f(2)=1$，$f(n)=f(n-1)+f(n-2)$，其中 $n\geqslant2$，$\{f(n)\}$即为斐波拉契数列.

斐波拉契数列的某些性质

1) $f(n)f(n)-f(n+1)f(n-1)=(-1)^n$；

2) $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n)=f(n+2)-1$；

4) $f(0)+f(1)+f(2)+\cdots+f(n)=f(n+2)-1$；

5) $f(1)+f(3)+f(5)+\cdots+f(2n-1)=f(2n)-1$；

6) $f(0)+f(2)+f(4)+\cdots+f(2n)=f(2n+1)-1$；

7) $[f(0)]^2+[f(1)]^2+\cdots+[f(n)]^2=f(n)\cdot f(n+1)$；

8) $f(0)-f(1)+f(2)-\cdots+(-1)^n f(n)=(-1)^n[f(n+1)-f(n)]+1$；

9) $f(m+n)=f(m-1)\cdot f(n-1)+f(m)\cdot f(n)$；

……

日常生活中的常见斐波拉契数列

可以说，斐波拉契数列无处不在，以下仅举几个常见的例子：

1.杨辉三角对角线上各数之和构成斐波拉契数列 .

2.多米诺牌(可以看作一个 2×1 大小的方格)完全覆盖一个 $n\times2$ 的棋盘，覆盖的方案数等于斐波拉契数列.

3.从蜜蜂的繁殖来看，雄峰只有母亲，没有父亲，因为蜂后产的卵，受精的孵化为雌蜂，未受精的孵化为雄峰.人们在追溯雄峰的祖先时，发现一只雄峰的第 n 代祖先的数目刚好就是斐波拉契数列的第 n 项 $f(n)$.

4.钢琴的 13 个半音阶的排列完全与雄峰第六代的排列情况类似，说明音调也与斐波拉契数列有关.

5.自然界中一些花朵的花瓣数目符合于斐波拉契数列，也就是说在大多数情况下，一朵花的花瓣数目都是 3,5,8,13,21,34,……(有 6 枚是两套 3 枚；有 4 枚可能是基因突变).细察下列各种花：延龄草、野玫瑰、南美血根草、大波斯菊，它们的花瓣的数目为斐波拉契数.

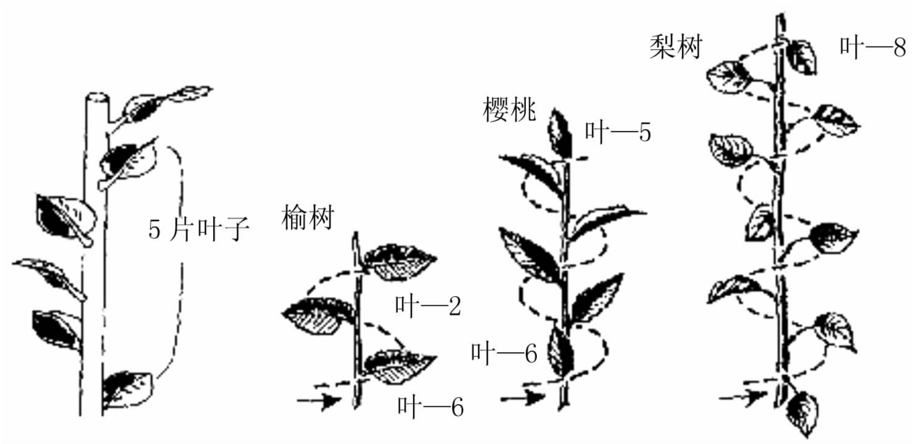

南美血根草


延龄草

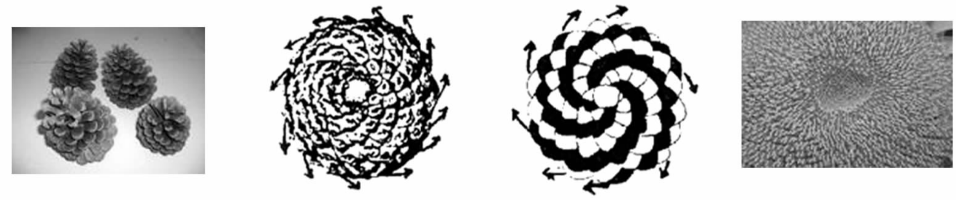

大波斯菊


野玫瑰

6.如果一根树枝每年长出一根新枝，而长出的新枝两年以后，每年也长出一根新枝，那么历年的树枝数，也构成一个斐波拉契数列 .斐波拉契数还可以在植物的叶、枝、茎等排列中发现.例如，在树木的枝干上选一片叶子，记其为数 0，然后依序点数叶子(假定没有折损)，直到到达与那片叶子正对的位置，则其间的叶子数多半是斐波拉契数.叶子从一个位置到达下一个正对的位置称为一个循回.叶子在一个循回中旋转的圈数也是斐波拉契数，如榆树、樱桃、梨树等.在一个循回中叶子数与叶子旋转圈数的比称为叶序(源自希腊词，意即叶子的排列)比.多数的叶序比呈现为斐波拉契数的比.

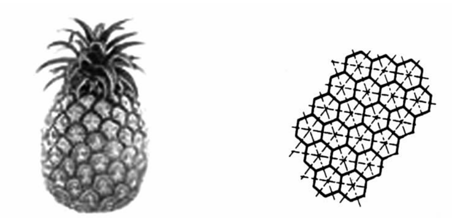


7. 斐波拉契数有时也称松果数，因为连续的斐波拉契数会出现在松果的左和右的两种螺旋形走向的数目之中. 这种情况在向日葵的种子盘中也会看到.



松果　　8 条右旋螺线和 13 条左旋螺线　　向日葵的种子盘

8. 菠萝是又一种可以检验斐波拉契数的植物. 对于菠萝，我们可以去数一下它表面上六角形鳞片所形成的螺旋线数.



斐波拉契数列的变式

1. 帕多瓦数列：1，1，1，2，2，3，4，5，7，9，12，16，21，… 这样的数列称为帕多瓦数列.

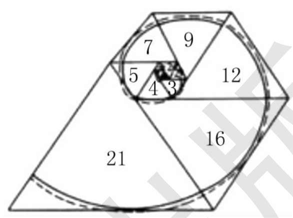


图 9－3

它和斐波拉契数列非常相似，稍有不同的是：每个数都是跳过它前面的那个数，并把在前面的两个数相加而得出的. 这个数列可以用另一幅图来表示，它是由一些等边三角形构成的（如图 9－3）. 开始的三角形用灰色表示，为了使这些三角形天衣无缝地拼在一起，头三个三角形的边长均为 1，其后的两个三角形的边长为 2，然后依次是 3，4，5，7，9，12，16，21，…

2. 冬冬有 15 块糖，如果每天至少吃 3 块，吃完为止，那么共有多少种不同的吃法？

如果冬冬有 3 块糖、4 块糖或者 5 块糖，都只有 1 种吃法；如果有 6 块糖，则有 2 种吃法；如果有 7 块糖，则有 3 种吃法；如果有 8 块糖，则有 4 种吃法；如果有 9 块糖，则有 6 种吃法.

即：吃糖的粒数：3，4，5，6，7，8，9，10，11，12，…

糖的吃法:1,1,1,2,3,4,6,9, 13,19,…

这样的数列,它和斐波拉契数列不同的是,每次都是跳过中间的那个数,再把第1,3两个数相加,等于第4个数.它的规律和斐波拉契数列既有相似之处又有不同之处.

3.小明要上楼梯,他每次能向上走一级、两级或三级,如果楼梯有10级,他有几种不同的走法?

这里我们不妨也来研究一下其中的规律:如果楼梯就一级,他有1种走法;如果楼梯有两级,他有2种走法;如果楼梯有三级,他有4种走法;如果有五级楼梯,他有7种走法.

即:楼梯的级数:1,2,3,4,5,6,7,8,…

上楼梯的走法:1,2,4,7,13,24,44,81,…

这其中的规律就是,这里从第4个数开始,每一个数都等于它前面的3个数之和.

斐波拉契数列的奇妙属性

比如:随着数列项数的增加,前一项与后一项之比越逼近黄金分割0.618 033 988 7…(后一项与前一项之比1.618 033 988 7…).

还有一项性质,从第二项开始,每个奇数项的平方都比前后两项之积多1,每个偶数项的平方都比前后两项之积少1.

如果你看到有这样一个题目:某人把一个8*8的方格切成四块,拼成一个5*13的长方形,故作惊讶地问你:为什么64=65?其实就是利用了斐波那契数列的这个性质:5,8,13正是数列中相邻的三项,事实上前后两块的面积确实差1,只不过后面那个图中有一条细长的狭缝,一般人不容易注意到.

如果任意挑两个数为起始,比如5,-2.4,然后两项两项地相加下去,形成5,-2.4,2.6,0.2, 2.8,3,5.8,8.8,14.6,…,你将发现随着数列的发展,前后两项之比也越来越逼近黄金分割,且某一项的平方与前后两项之积的差值也交替相差某个值.

斐波那契数列的第n项同时也代表了集合$\{1,2,\cdots,n\}$中所有不包含相邻正整数的子集个数.

9.3 等比数列

教材线索

在等比数列这一部分，在讲等比数列的概念和通项公式时也突出了它与指数函数的联系，这不仅可加深对等比数列的认识，而且可以对处理某类问题的指数函数方法和等比数列方法进行比较，从而有利于对这些方法的掌握.

教学目标

(1)掌握等比数列的定义，理解等比数列的通项公式及推导.

(2)灵活应用等比数列的定义及通项公式，深刻理解等比中项概念.

(3)熟悉等比数列的有关性质，并系统地了解判断数列是否成等比数列的方法.

(4)掌握等比数列的前 n 项和公式及公式证明思路，会用等比数列的前 n 项和公式解决有关等比数列的一些简单问题.

教材分析

1. 教学重点：

等比数列的定义及通项公式，等比中项的理解与应用，等比数列的前 n 项和公式的推导，进一步熟练掌握等比数列的通项公式和前 n 项和公式.

2. 教学难点：

灵活应用等比数列定义、通项公式、性质、前 n 项和公式解决一些相关问题.

3. 等比数列是数列的重要组成部分，掌握了它及其通项公式，有利于进一步研究等比数列的性质及前 n 项和的推导以及应用，从而极大提高学生利用数列知识解决实际问题的能力. 同时，这节课的教学过程对进一步培养学生观察、分析和归纳问题的能力具有重要的意义. 为了激发学生的学习热情，实施趣味教学，如可以利用一个初中自然学科中的“细胞分裂”的问题以及教科书第 50 页的一个趣味折纸引出等比数列的定义及其通项公式. 之后，再由浅入深，由低到高地设置不同层次的问题，逐步加深学生对等比数列及其通项公式的记忆和理解. 因此，可以对教科书的引入、例题、练习做适当的补充和修改.

4. 教科书中的例 1 说明了等差数列与等比数列之间的联系. 例 2 说明了等差数列与等比数列之间的转化. 例 3 介绍了等比中项概念是判断一个数列是否是等比数列的方法之一. 例 4

利用等比数列的通项公式求相关量，注意方程的构造.例 5 与例 6 说明了等比数列在实际生活的应用，如提高的百分率、降低的百分率等等.

5.结合同学们熟悉的国际象棋的发明的故事引入等比数列的前 n 项之和的求法，并推导出求和公式，注意讨论公比 q 与 1 的大小关系，教科书中的例 7、例 8 利用求和公式来解答，例 9 与例 10 分别利用等比数列的相关知识解答实际问题.

教学建议

1.由于首项为 a_1、公比为 q 的等比数列的通项公式与指数函数 $y=a^x$ 有着密切联系，从而可利用指数函数的性质来研究等比数列.等比数列也是一类重要的特殊数列，在讲等比数列的概念和通项公式时，要突出它与指数函数的联系，可以对处理某类问题的指数函数方法和等比数列方法进行比较，这不仅可加深对等比数列的认识，而且有利于对这些方法的掌握.从全面提高学生的素质考虑，本节课应把等比数列定义及通项公式的探索、发现、创新等思维过程的暴露、知识形成过程的揭示作为教学重点，同时，由于“思维过程的暴露，知识形成过程的揭示”不像将知识点和盘托出那么容易，这就要求教师精心设计问题层次，由浅入深，循序渐进，不断地激发学生思维的积极性和创造性，使学生自行发现知识、“创造”知识.这是对教师，也是对学生高层次的要求，因而是教学的难点之一.本节是对公式的教学，要充分揭示公式之间的内在联系，掌握与理解公式的来龙去脉，掌握公式的导出方法，理解公式的成立条件.也就是让学生对本节课要学习的新知识有一个清晰的、完整的认识.而忽视公式的推导和条件，直接记忆公式的结论是降低教学要求，违背教学规律的做法.

2.公式推导的另外两种方法：

（方法一）由等比数列的定义，有$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\cdots=\frac{a_n}{a_{n-1}}=q$，

根据等比的性质，有$\frac{a_2+a_3+\cdots+a_n}{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}=\frac{S_n-a_1}{S_n-a_n}=q$，

即$\frac{S_n-a_1}{S_n-a_n}=q\Rightarrow(1-q)S_n=a_1-a_nq\Rightarrow S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}$.

（方法二）

$$\begin{aligned}S_n&=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=a_1+q(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1})\\&=a_1+qS_{n-1}=a_1+q(S_n-a_n)\end{aligned}$$

$\Rightarrow(1-q)S_n=a_1-a_nq$（结论同上）.

“方程”在代数课程里占有重要的地位，方程思想是应用十分广泛的一种数学思想，利用方程思想，在已知量和未知量之间搭起桥梁，使问题得到解决.

参考例题

例 1　已知 b 是 a 与 c 的等比中项，且 a,b,c 同号.

求证：$\dfrac{a+b+c}{3}$，$\sqrt{\dfrac{ab+bc+ca}{3}}$，$\sqrt[3]{abc}$也成等比数列.

证明　由题设得：$b^2=ac$，

$$\frac{a+b+c}{3}\times\sqrt[3]{abc}=\frac{a+b+c}{3}\times\sqrt[3]{b^3}=\frac{ab+b^2+bc}{3}=\left(\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}\right)^2,$$

$\therefore\dfrac{a+b+c}{3}$，$\sqrt{\dfrac{ab+bc+ca}{3}}$，$\sqrt[3]{abc}$也成等比数列.

例 **2**　(1)已知$\{a_n\}$是等比数列，且$a_n>0$，$a_2a_4+2a_3a_5+a_4a_6=25$，求a_3+a_5；

(2)已知$a\neq c$，三数a，1，c成等差数列，a^2，1，c^2成等比数列，求$\dfrac{a+c}{a^2+c^2}$.

解　(1)$\because\{a_n\}$是等比数列，

$\therefore a_2a_4+2a_3a_5+a_4a_6=(a_3+a_5)^2=25$，

又$a_n>0$，$\therefore a_3+a_5=5$.

(2)$\because a$，1，c成等差数列，$\therefore a+c=2$，

又a^2，1，c^2成等比数列，$\therefore a^2c^2=1$，有$ac=1$或$ac=-1$，

当$ac=1$时，由$a+c=2$得$a=1$，$c=1$，与$a\neq c$矛盾，

$\therefore ac=-1$，$a^2+c^2=(a+c)^2-2ac=6$，

$\therefore\dfrac{a+c}{a^2+c^2}=\dfrac{1}{3}$.

例 **3**　已知无穷数列$10^{\frac{0}{5}}$，$10^{\frac{1}{5}}$，$10^{\frac{2}{5}}$，…，$10^{\frac{n-1}{5}}$，….

求证：(1)这个数列成等比数列；

(2)这个数列中的任一项是它后面第五项的$\dfrac{1}{10}$；

(3)这个数列的任意两项的积仍在这个数列中.

证明　(1)$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{10^{\frac{n-1}{5}}}{10^{\frac{n-2}{5}}}=10^{\frac{1}{5}}$(常数)，$\therefore$该数列成等比数列.

(2)$\dfrac{a_n}{a_{n+5}}=\dfrac{10^{\frac{n-1}{5}}}{10^{\frac{n+4}{5}}}=10^{-1}=\dfrac{1}{10}$，即：$a_n=\dfrac{1}{10}a_{n+5}$.

(3)$a_pa_q=10^{\frac{p-1}{5}}\cdot10^{\frac{q-1}{5}}=10^{\frac{p+q-2}{5}}$，$\because p,q\in\mathbf{N}$，$\therefore p+q\geqslant2$.

$\therefore p+q-1\geqslant1$且$(p+q-1)\in\mathbf{N}$，

$\therefore 10^{\frac{p+q-2}{5}}\in\{10^{\frac{n-1}{5}}\}$，且为第$p+q-1$项.

例 **4**　一条信息，若一人得知后用 1 h 将信息传给两个人，这两个人又用 1 h 各传给未知此信息的另外两人，如此继续下去，一天时间可传遍多少人？

解　根据题意可知，获知此信息的人数成首项$a_1=1$，$q=2$的等比数列，

则：一天内获知此信息的人数为：$S_{25}=\dfrac{1-2^{25}}{1-2}=2^{25}-1$.

例 **5**　已知等差数列$\{a_n\}$的第二项为 8，前十项的和为 185，从数列$\{a_n\}$中，依次取出第 2

项、第 4 项、第 8 项、…、第 2^n 项，然后按原来的顺序将它们排成一个新数列 $\{b_n\}$，求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式和前 n 项和公式 S_n.

解 $\because \begin{cases} a_1+d=8, \\ 10a_1+45d=185, \end{cases}$ 解得 $a_1=5, d=3$,

$\therefore a_n=3n+2, b_n=a_{2^n}=3\times 2^n+2$,

$S_n=(3\times 2+2)+(3\times 2^2+2)+(3\times 2^3+2)+\cdots+(3\times 2^n+2)$

$=3\cdot\dfrac{2(2^n-1)}{2-1}+2n=6\cdot 2^n+2n-6$.（分组求和法）

例 **6** 设数列 $\{x_n\}$ 为 $1, 2x, 3x^2, 4x^3, \cdots, nx^{n-1}, \cdots (x\neq 0)$，求此数列前 n 项的和.

解 （用错项相消法）

$S_n=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots+nx^{n-1}$, ①

$xS_n=x+2x^2+3x^3+\cdots+(n-1)x^{n-1}+nx^n$, ②

①－②：$(1-x)S_n=1+x+x^2+\cdots\cdots+x^{n-1}-nx^n$,

当 $x\neq 1$ 时，

$(1-x)S_n=\dfrac{1-x^n}{1-x}-nx^n=\dfrac{1-x^n-nx^n+nx^{n+1}}{1-x}=\dfrac{1-(1+n)x^n+nx^{n+1}}{1-x}$,

$\therefore S_n=\dfrac{1-(1+n)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$.

当 $x=1$ 时，$S_n=1+2+3+4+\cdots+n=\dfrac{n(1+n)}{2}$.

例 **7** 设首项为正数的等比数列，它的前 n 项之和为 80，前 $2n$ 项之和为 6 560，且前 n 项中数值最大的项为 54，求此数列.

解 由题意 $\begin{cases} \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=80, \\ \dfrac{a_1(1-q^{2n})}{1-q}=6\ 560 \end{cases} \Rightarrow 1+q^n=82\Rightarrow q^n=81$.

代入 $a_1(1-q^n)=80(1-q)$，得：$a_1=q-1>0$，从而 $q>1$,

$\therefore \{a_n\}$ 递增，$\therefore$ 前 n 项中数值最大的项应为第 n 项.

$\therefore a_1q^{n-1}=(q-1)q^{n-1}=q^n-q^{n-1}=81-q^{n-1}=54$,

$\therefore q^{n-1}=81-54=27, q=\dfrac{q^n}{q^{n-1}}=3$,

$\therefore a_1=q-1=3-1=2$,

$\therefore$ 此数列为 $2, 6, 18, 54, 162, \cdots$

相关链接

十二平均律与等比数列

我国古代重视“礼、乐、术、数”，研究乐音数学规律的律学相当发达，《二十四史》有许多律历志的记载. 最晚到殷商时期已产生了宫、商、角、徵、羽五声，西周编钟已刻有十二律（由于对乐音组成的认识，而产生十二律，其名称为：黄钟、大吕、太簇、夹钟、姑洗、仲吕、蕤宾、林钟、夷则、南吕、无射和应钟，黄钟为十二律中的第一律），以黄钟标准音高为首，逐次按半音降低，就形成了十二律. 最早的乐律计算法见于《管子·地员篇》中的“三分损益法”，约产生于公元前7～3世纪间，即将主音律的弦（或管）长三等分，取其两份（全管长的 2/3，为损一），或增加一份（全管长的 4/3，为益一），依次确定十二律中其他各律的方法. 这种以弦长为准的方法，与欧洲当时以频率为准的“五度相生法”是成倒数关系的. 16 世纪末，明代著名的科学家、艺术家、律学家、历学家、数学家、明太祖朱元璋九世孙朱载▮提出了十二平均律的理论和算法，在其著作《律吕精义·内篇》（卷二《不取围径皆同篇》）中完整地叙述了十二平均律的实验步骤、方法及其对实验结果的解释. 十二平均律是我国对世界音乐声学的重大贡献.

朱载▮倡导七声音阶，通过大量的的比较、研究和声学实验，发现只有在一个八度内取十二律，通过运用等比数列把八度分成十二个半音，才能做到旋宫转调，才能实现音感、乐感的最优化，达到音乐至美. 其父朱厚烷因对明世宗朱厚▮“大不敬”和直言规谏致触其痛处而被囚禁时，朱载▮年刚十五. 此后朱载▮身处逆境，“布衣蔬食”，发奋攻读，“席藁独处”近廿载，致力于乐律、历算之学的研究，撰写了大量学术著作. 朱载▮对古代文化的最大贡献是他创建了十二平均律. 这是音乐学和音乐物理学的一大革命，也是世界科学史上的一大发明. 在中国古代音律学发展过程中，如何能够实现乐曲演奏中的旋宫转调，历代都有学者孜孜不倦进行探索，但是迄朱载▮时无人登上成功的峰顶，只有朱载▮彻底解决了这一问题. 他在总结前人乐律理论的基础上，通过精密计算和科学实验，成功地发现十二平均律的等比数列规律，称其为密率，在其《律学新说》（卷一）中，他概述了十二平均律的计算方法：“创立新法：置一尺为实，以密率除之，凡十二遍.”在《律吕精义·内篇》（卷一）中，他对十二平均律做了描述：“盖十二律黄钟为始，应钟为终，终而复始，循环无端. ……是故各律皆以黄钟……为实，皆以应钟倍数 1.059 463……为法除之，即得其次律也.”用这种方法确定的各律相应弦长，其音程相等，完全可以满足音乐演奏中旋宫转调的要求. 这也正是现代国际音乐中通用的十二平均律. 朱载▮一劳永逸地解决了这一科学和艺术领域的重大难题.

朱载▮是在其《算学新说》中阐述“旋宫转调”这个当时的难题的，以正律八度倍黄（钟）、大吕、太簇、夹钟、姑洗、仲吕、蕤宾、林钟、夷则、南吕、无射、应钟、正黄（钟），构成一个等比数列，首项即倍黄钟，其数值为 2，末项即正黄钟（相当于现代乐理中的 C 音：音名 C，唱名 1，频率 $f=256$ Hz），其数值为 1，项数为 13. 上述 13 项中，朱载▮用相间两项相乘得平方积，开平方所得，

求等比数列中项.

朱载▮在其《律学新说》、《律吕精义·内篇》中以另一种数学方式叙述十二平均律计算方法：将八度音程比值 2 进行 12 次方根运算，那么，$\sqrt[12]{2}$（≈1.059 463）即是十二平均律的半音音程，他把这个数值称为“密率”；既求得密率，只要将起始音高以密率累除 12 次，就得到了十二平均律的各律音高，实际上，这就是以“密率”即$\sqrt[12]{2}$为公比的由 13 项构成的等比数列.

今天对十二平均律的计算方法概括表述为：“这个最简单的方法是要为半音选择一个正确的比例，然后把它运用十二次.”今天的《物理学词典》将平均律定义为：“平均律的半音音阶，在一个八度内有十三个音，任何相邻两音之间的音程是$\sqrt[12]{2}$.”

朱载▮用实验方法精确地研究了一组律弦（诸如二胡、古筝弦等）在弦张紧度不变的前提下弦音频率 f 与弦长 L 的关系，还将他的十二平均律的数值运用到律管上，根据律管的声学原理，作出了极好的适于我国律管的管口校正公式：$\dfrac{d_n}{\sqrt[24]{2}}=d_{n+1}$（$n=0,1,2,\cdots,12$）. 式中，$d$ 为管内径，两个相邻律管的内径之比为$\sqrt[24]{2}$.

19 世纪，比利时声学家马容（Victor-Charles Mahillon）据此管口校正数据复制了一套中国律管作了测音，惊讶中国的音律学比他们更进步.

围绕着十二平均律的创建，朱载▮成功地登上了一个又一个科学高峰. 例如为了解决十二平均律的计算问题，他讨论了等比数列，找到了计算等比数列的方法，并将其成功地应用于求解十二平均律. 为了解决繁重的数学运算，他最早运用珠算进行开方运算，并提出了一套珠算开方口诀，这是富有创见之举. 他还解决了不同进位小数的换算方法，作出了有关计算法则的总结. 在数学史上，这些都是很引人注目的成就.

在中国古代，音律学与度量衡分不开. 朱载▮在研究音律学的同时，对计量学和度量衡的演变也做了考察. 他亲自做了累黍实验以确定古人所说的尺长. 为了确定量制标准，他测定了水银密度，测量结果相当精确. 他从理论上辩证说明了“同律度量衡”之关系，对后世影响很大.

朱载▮注重实践、实验和实测. 他特别注意把自己的理论放在实践中去检验. 例如他提出的名为“异径管律”的管口校正法，就是从数学中推导出来以后，又在实践中进行检验，证明了它确实有效. 他的书中记述了大量的实验事实，如管口校正实验、和声实验、累黍实验、度量实验等，就充分反映了他的这一思想方法.

朱载▮的科学贡献是巨大的，他是我国封建社会一位富有创造性的学者，是明代科学和艺术上的一颗巨星，中外学者尊崇他为“东方文艺复兴式的圣人”. 朱载▮被列为“世界历史文化名人”.

历史事实表明，数学是朱载▮完成其十二平均律新理论的“羽翼”，是有力的辅助工具. 从特定角度可以说，是等比数列创造了音乐至美. 音乐美，反过来又折射出了数学之妙、无理数之妙、无理数之美.

9.4 分期付款问题中的有关计算

教材线索

本节课是等比数列的前 n 项和公式在购物方式上的一个应用.此前学生已掌握等比数列的通项公式及其前 n 项和公式.将研究性课题列为必修内容,是为迎接知识经济的挑战而培养学生创新精神和创新能力的一项开创性工作.研究性学习注重的是让学生学会学习和研究,关注的是研究过程,其核心是创新意识的培养.本研究性课题,是所学知识的实际应用,因此对培养学生的应用意识也具有很高的价值.又由于它在本节中首次出现,学生对如何学习研究性课题比较模糊,所以能否将研究性课题中的以实际问题为载体,以学生独立探究为主体的特点实现出来,也影响着今后研究性课题的教学效果,因此,教师应充分注意教学方式.

教学目标

(1)使学生掌握等比数列前 n 项和公式在购物付款方式中的应用.

(2)通过"分期付款问题中的有关计算"的教学,使学生学会从数学角度对某些日常生活中的问题进行研究.

(3)培养学生搜集、选择、处理信息的能力,发展学生独立探究和解决问题的能力,提高学生的应用意识和创新能力.

(4)使学生抓住社会现象的本质,用科学的、辩证的眼光观察事物,建立科学的世界观.

(5)通过学生之间、师生之间的交流与配合培养学生的合作意识和团队精神.

(6)通过独立运用数学知识解决实际问题培养学生勇于克服困难的坚强意志,也使学生体会学习数学知识的重要性,增强他们对数学学习的自信心和对数学的情感.

教材分析

1.教学重点:

引导学生对例题中的分期付款问题进行独立探究.

2.教学难点:

独立解决方案,将实际问题转化为数学问题.

3.分期付款

(1)分期付款(Pay by Instalments)大多用在一些生产周期长、成本费用高的产品交易上.

如成套设备、大型交通工具、重型机械设备等产品的出口.分期付款的做法是在进出口合同签订后,进口人先交付一小部分货款作为订金给出口人,其余大部分货款在产品部分或全部生产完毕装船付运后,或在货到安装、试车、投入以及质量保证期满时分期偿付.

(2)发展历史

分期付款方式是在第二次世界大战以后发展起来的,开始时只局限于一般日用商品或劳务的购买.后来,随着生产力的迅速发展,工、农业生产的规模日益扩大,所需费用增大,加之银行信用的发展,分期付款的领域扩大到企业购买大型机器设备和原材料上.伴随着中国金融服务的完善以及人们消费习惯的改变,在国外流行的分期付款消费被引入国内,并迅速得到国内消费者的认可.采用分期付款方式消费的通常是目前支付能力较差,但有消费需求的年轻人.其消费的产品通常是笔记本电脑、手机、数码产品等.分期付款方式通常由银行和分期付款供应商联合提供.银行为消费者提供相当于所购物品金额的个人消费贷款,消费者用贷款向供应商支付货款,同时供应商为消费者提供担保,承担不可撤消的债务连带责任.使用分期付款方式消费的年轻人通常被称为“分期族”.

(3)市场含意

分期付款实际上是卖方向买方提供的一种贷款,卖方是债权人,买方是债务人.买方在只支付一小部分货款后就可以获得所需的商品或劳务,但是因为以后的分期付款中包括有利息,所以用分期付款方式购买同一商品或劳务,所支付的金额要比一次性支付的货款多一些.分期付款的方式一方面可以使卖方完成促销活动,另一方面也给买方提供了便利.

(4)行为特点

买卖双方在成交时签订契约,买方对所购买的商品和劳务在一定时期内分期向卖方交付货款.每次交付货款的日期和金额均事先在契约中写明.

(5)期限形式

分期付款的期限也有多种形式:购房人自己分期付的,通常是先交首付,然后等接到房地产商的交房通知后再交第二笔钱;分三期的,第三笔钱等入住后一定时间内再缴纳.这种做法,购房人交的总房款通常会比一次性付款交的多,但同时可以减少期房可能发生的损失,比如房子“烂尾”,再如房价下跌幅度超过首付及购房人自己经济状况发生变化等等.贷款分期付款的通常都是若干年才付清,这里的关键是除了首付,分期付款从何时开始,换句话说就是贷款银行何时把购房人的贷款交给房地产商.这个时间可以是从贷款手续一办好就开始,也可以是在房屋交付时开始,后者对购房人更有利.当然,如何付款不是购房人一厢情愿的事,如果房地产商自己没有实力,一定要靠购房人的钱盖房子,他们通常不会同意购房人第二期付款的时间拖到交房时的,在这种情况下,购房人除了争取,只能自己决定是否买这个房地产商的房子.

(6)使用建议

搞清分期付款的范围.各家银行对分期付款有不同的做法,除了信用卡分期付款目录上的商品外,有的银行对购买地点、金额均有具体要求.如广发卡可对单笔满500元的交易申请分期付款,消费前须致电客服登记;而招商银行则可在国美电器、百安居等处消费时申请分期付

款. 在购物前搞清这笔消费能否分期付款很重要. 准确计算手续费，虽然信用卡分期付款免收利息，但手续费是免不了的，有必要在消费前先把需缴纳的手续费算出来，如果加上手续费后价格可以接受，再刷卡也不迟.

(7)计算方法

①复利

复利：当期利息计入下期本金，即每期都从上期本息和作为计息基础. 例如：

在日常生活中，商家为了促销，便于顾客购买一些售价较高的商品，常采用分期付款的方式出售. 例如，顾客购买一件售价为 5 000 元的商品，采用分期付款，商家要求，在一年内将款全部付清，同时，又提供了下表中的几种付款方案，供顾客选择.

方案类别	付款次数	付款方法	每期所付款额	付款总额	与一次性付款差额
1	3 次	购买 4 个月后第 1 次付款，再过 4 个月第 2 次付款，再过 4 个月第 3 次付款			
2	6 次	购买 2 个月后第 1 次付款，再过 2 个月第 2 次付款，购买 12 个月后第 6 次付款			
3	12 次	购买第 1 次付款，再过 1 个月第 2 次付款，购买 12 个月后第 12 次付款			

数学计算：

利用数列知识有分期付款公式：$x=\frac{a(1+p)^{m}\left[(1+p)^{\frac{m}{n}}-1\right]}{(1+p)^{m}-1}$，其中 a 为本金，p 为月利率，m 为月份数，n 为次数，x 为每次付款额，且一般地 $m=n$，那么付出的利息应为：$mx-a$.

例如按揭 7 万元，5 年. 此时 $a=70\ 000$，$p=0.008$，$m=60$，$n=60$，代入得 $x=?$

付利息 $60\times ?\ -70\ 000=\cdots$

②单利

单利：每期都按初始本金计算利息，每期利息不计入下期本金. 单利的还款方式又分为等额本金还款法和等额本息还款法.

(1)等额本金还款法(简称等额法)：也称递减法，因为购房者每月所还贷款本金相同，每还一次款，下次的贷款利息便因本金减少而减少，因此每期还贷款本息是逐期递减的. 这种方法的每月本金相同，第一个月还款额最高，以后逐月减少.

(2)等额本息还款法(简称等本法)：每月本金加利息总额固定，按照贷款期限把贷款本息平均分为若干个等份，每个月还款本息合计数相同. 这种方法便于购房者对资金的规划.

教学建议

1. 本节教学时可以用幽默故事开头，如：一位中国老太太与一位美国老太太在黄泉路上相遇. 美国老太太说，她住了一辈子的宽敞房子，也辛苦了一辈子，昨天刚还清了银行的住房贷

款.而中国老太太却叹息地说，她三代同堂一辈子，昨天刚把买房的钱攒足.指出：随着改革开放的进一步发展，我国现代都市人的消费观念也正在变迁——“花明天的钱，圆今天的梦”对我们已不再陌生.贷款购物、分期付款已深入我们生活.但是面对商家和银行提供的各种分期付款服务，究竟选择什么样的方式好呢？

2.研究性课题的基本过程：

生活实际中的问题→存在的可行方案→启迪思维留有余地→搜集整理信息→独立探究个案→提出解答并给答辩→创建数学模型→验证并使用模型→结论分析

3.问题来源于现实，问题处处存在，要善于发现问题并抓住问题本质，而探究问题时往往不会一帆风顺，要勇于战胜困难，磨砺自己意志.

4.促进学生知识迁移——分期贷款及以复利增长型问题可类似解决.

研究性课题的教学有两个特点：一是不仅仅局限于书本知识，更有很多课外内容，如利率、复利计息、分期付款等专业术语的含义，以及现代网络技术的运用等，这样就使探究成败不取决于数学成绩的好坏，每一位学生都可以通过自己的思考与实践获得成功；其次，不仅仅拘泥于教师主讲，也不仅仅注重研究的结果，应更关注学生在学习过程中提出问题、分析问题、解决问题的能力和心理体验，这就为学生个性的发展、能力的提高、创新精神的培养提供了广阔的空间.正因为有这样的特点，就导致了不仅仅该课题本身是开放的(具有解法和结论的不确定性)，其教学本身也是开放性的，这就有可能出现教师事先没预料到的问题，这就要求教师的基本功扎实，从而也为促进教学提供了好机会.

研究性课题是应教改需要在新教科书中新加的一个专题性栏目，为突出研究性课题的实践性，课前和课后都应安排学生进行社会实践调查；为突出研究性课题的探究性，对学生适当启发引导，大胆放手，让学生独立分析和解决问题.另外以突出学生主体地位为根本去设计教学环节，以面向全体学生为原则而采取分层次的教学方式，并且尽量采用现代网络技术等多媒体教学手段辅助教学，提高了课堂效率和教学效果.

参考例题

例 **1**　一般地，购买一件售价为 a 元的商品，采用分期付款时要求在 m 个月内将款全部付清，月利率为 p，分 n(n 是 m 的约数)次付款，那么每次付款数 x 的计算公式为

$$x=\frac{a(1+p)^m\left[(1+p)^{\frac{m}{n}}-1\right]}{(1+p)^m-1}.$$

证明　设每次付款 x，则：第 1 期付款 x 元(即购货后 $\frac{m}{n}$ 个月时)，到付清款时还差 $m-\frac{2m}{n}$ 个月，因此这期所付款连同利息之和为：$x(1+p)^{m-\frac{2m}{n}}$；

…

第 n 期付款(即最后一次付款)x 元时，款已付清，所付款没有利息.

各期所付的款连同到最后一次付款时所生的利息之和为：

$x+x(1+p)^{\frac{m}{n}}+x(1+p)^{\frac{2m}{n}}+\cdots+x(1+p)^{m-\frac{m}{n}}$,

贷款到 m 个月后已增值为 $a(1+p)^m$,

根据规定可得:$x\left[1+(1+p)^{\frac{m}{n}}+(1+p)^{\frac{2m}{n}}+\cdots+(1+p)^{m-\frac{m}{n}}\right]=a(1+p)^m$,

即:$x\cdot\dfrac{(1+p)^m-1}{(1+p)^{\frac{m}{n}}-1}=a(1+p)^m$,

解得:$x=\dfrac{a(1+p)^m\left[(1+p)^{\frac{m}{n}}-1\right]}{(1+p)^m-1}$.

例 **2** 某人于公元 2000 年参加工作,考虑买房数额较大,需做好长远的储蓄买房计划,打算在 2010 年的年底花 50 万元购一套商品房,从 2001 年初开始存款买房,请你帮他解决下列问题:

方案 1:从 2001 年开始每年年初到建设银行存入 3 万元,银行的年利率为 1.98%,且保持不变,按复利计算(即上年利息要计入下年的本金生息),在 2010 年年底,可以从银行里取到多少钱? 若想在 2010 年年底能够存足 50 万,每年年初至少要存多少呢?

方案 2:若在 2001 年初向建行贷款 50 万先购房,银行贷款的年利率为 4.425%,按复利计算,要求从贷款开始到 2010 年要分 10 年还清,每年年底等额归还且每年还 1 次,每年至少要还多少钱呢?

方案 3:若在 2001 年初贷款 50 万元先购房,要求从贷款开始到 2010 年要分 5 期还清,头两年第 1 期付款,再过两年付第二期,…,到 2010 年年底能够还清,这一方案比方案 2 好吗?

启迪思维,留有余地:

问题 1:按各种方案付款每次需付款额分别是多少?

每次付款额是 50 万元的平均数吗?(显然不是,而会偏高)

那么分期付款总额就高于买房价,什么引起的呢?(利息)

问题 2:按各种方案付款最终付款总额分别是多少?(事实上,它等于各次付款额之和,于是可以归结为上一问题.)

于是,本课题的关键在于按各种方案付款每次需付款额分别是多少?

——设为 x 万元.

搜集、整理信息:

(1)分期付款中规定每期所付款额相同;

(2)每年利息按复利计算,即上年利息要计入下年本金.

例如,由于年利率为 1.98%,款额 a 元过一年就增值为 $a(1+1.98\%)=1.019\ 8a$(元),

再过一年又增值为 $1.019\ 8a(1+1.98\%)=1.019\ 8^2a$(元).

解 独立探究方案 1:

可将问题进一步分解为:

1.商品售价增值到多少?

2.各期所付款额的增值状况如何?

3.当贷款全部付清时，房屋售价与各期付款额有什么关系？

提出解答，并给答辩.

按复利计算存10年本息和(即从银行里取到钱)为：

$$3\times(1+1.98\%)^{10}+3\times(1+1.98\%)^{9}+\cdots+3\times(1+1.98\%)^{1}$$

$$=\frac{3\times(1+1.98\%)[1-(1+1.98\%)^{10}]}{1-(1+1.98\%)}\approx 33.47(\text{万元}).$$

设每年存入 x 万元，在2010年年底能够存足50万，则：

$$\frac{(1+1.98\%)\cdot[1-(1+1.98\%)^{10}]}{1-(1+1.98\%)}\cdot x=50,$$

解得 $x=4.48$(万元).

通过方案1让学生了解了银行储蓄的计算，也初步掌握了等比数列在银行储蓄中的应用，储蓄买房时间太久，显然不切合他的实际，于是引出分期付款问题.

独立探究方案2：

(方法一)设每年还 x 万元，第 n 年年底欠款为 a_n 万元，则

2001年底：$a_1=50(1+4.425\%)-x$；

2002年底：$a_2=a_1(1+4.425\%)-x=50(1+4.425\%)^2-(1+4.425\%)\cdot x-x$；

…

2010年底：$a_{10}=a_9(1+4.425\%)-x$

$$=50\times(1+4.425\%)^{10}-(1+4.425\%)^{9}\cdot x-\cdots-(1+4.425\%)\cdot x-x$$

$$=50\times(1+4.425\%)^{10}-\frac{1-(1+4.425\%)^{10}}{1-(1+4.425\%)}\cdot x=0,$$

解得：$x=\frac{50\times(1+4.425\%)^{10}[1-(1+4.425\%)]}{1-(1+4.425\%)^{10}}\approx 6.30$(万元).

(方法二)50万元10年产生本息和与每年存入 x 万元的本息和相等，故有

购房款50万元10年的本息和：$50(1+4.425\%)^{10}$，

每年存入 x 万元的本息和：

$$x\cdot(1+4.425\%)^{9}+x\cdot(1+4.425\%)^{8}+\cdots+x=\frac{1-(1+4.425\%)^{10}}{1-(1+4.425\%)}\cdot x,$$

从而有 $50(1+4.425\%)^{10}=\frac{1-(1+4.425\%)^{10}}{1-(1+4.425\%)}\cdot x$，

解得：$x=6.30$(万元)，10年共付63万元.

独立探究方案3：

设每期存入 x 万元，每一期的本息和分别为：第5期为 x，第4期为 $(1+4.425\%)^2x$，第3期为 $(1+4.425\%)^4x$，第2期为 $(1+4.425\%)^6x$，第1期 $(1+4.425\%)^8x$，则有

$$[1+(1+4.425\%)^2+(1+4.425\%)^4+(1+4.425\%)^6+(1+4.425\%)^8]\cdot x$$

$$=50\cdot(1+4.425\%)^{10},$$

解得：$x=\dfrac{50\cdot(1+4.425\%)^{10}\cdot[1-(1+4.425\%)^{2}]}{1-(1+4.425\%)^{10}}\approx 12.87$(万元).

此时，10 年共付：$12.87\times 5=64.35$(万元).

创建数学模型：

比较方案 1，方案 2 和方案 3 的结果，经过猜想得：分期付款购买售价为 a 的商品，分 n 次经过 m 年还清贷款，每年还款 x，年利率为 p，则 $x=\dfrac{a(1+p)^{m}[(1+p)^{\frac{m}{n}}-1]}{(1+p)^{m}-1}$.

验证并使用模型：(略)

结论分析：

方案类别	付(存)款次数	付(存)款方法	每期所付款表达式	每期付款	付款总额
1	10	每隔 1 年存款 1 次，存 10 次	$x=\dfrac{50(1-1.019\,8)}{1.019\,8(1-1.019\,8^{10})}$	4.48	50
2	10	每年付款 1 次，付 10 次	$x=\dfrac{50\times 1.044\,25^{10}(1-1.044\,25^{1})}{1-1.044\,25^{10}}$	6.30	63
3	5	每隔 2 年付款 1 次，付 5 次	$x=\dfrac{50\times 1.044\,25^{10}(1-1.044\,25^{2})}{1-1.044\,25^{10}}$	12.87	64.35

方案 3 比方案 2 多付了：$64.35-63=1.35$(万元). 所以方案 2 更好.

方案 1 每年虽存款少，但需等 10 年后才能买房. 由于 $6.3-4.48=1.82$(万元)，如若本地的年房租低于 1.82 万元，就可以考虑先租 10 年房后再买房的方案，当然还要考虑 10 年后的房价是升还是降的问题.

例 **3** 某地区荒山 2 200 亩，从 1995 年开始每年春季在荒山植树造林，第一年植树 100 亩，以后每一年比上一年多植树 50 亩.

(1)若所植树全部都成活，则到哪一年可将荒山全部绿化？

(2)若所植树苗每亩木材量为 2 m^3，每年树木木材量的自然增长率为 20%，那么全部绿化后的那一年年底，该山木材总量为 S，求 S 的表达式；

(3)若 $1.2^{8}\approx 4.3$，计算 S(精确到 1 m^3).

分析　由题意可知，各年植树亩数为：100，150，200，…成等差数列.

解　(1)设植树 n 年可将荒山全部绿化，则：$100n+\dfrac{n(n-1)}{2}\times 50=2\ 200$，

解之得 $n=8$ 或 $n=-11$(舍去).

(2)1995 年所植树，春季木材量为 200 m^3，到 2002 年底木材量则增为 200×1.2^{8} m^3.

1996 年所植树到 2002 年底木材量为 300×1.2^{7} m^3.

…

2002 年所植树到年底木材量为 900×1.2 m^3，则到 2002 年底木材总量为：

$$S=200\times1.2^{8}+300\times1.2^{7}+400\times1.2^{6}+\cdots+900\times1.2(\mathrm{m}^{3}).$$

(3)$S=900\times1.2+800\times1.2^{2}+700\times1.2^{3}+\cdots+200\times1.2^{8}$,

$1.2S=900\times1.2^{2}+800\times1.2^{3}+\cdots+300\times1.2^{8}+200\times1.2^{9}$,两式相减得：

$$\begin{aligned}0.2S&=200\times1.2^{9}+100(1.2^{2}+1.2^{3}+\cdots+1.2^{8})-900\times1.2\\&=200\times1.2^{9}+100\times\frac{1.2^{2}(1.2^{7}-1)}{1.2-1}-900\times1.2\approx1\,812,\end{aligned}$$

$\therefore S=9\,059(\mathrm{m}^{3})$.

说明　第(1)题是等差数列求和，第(3)题是特殊数列求和，用“错位相减法”转化为等比数列求和.

例 **4**　某城市 2010 年末汽车保有量为 30 万辆，预计此后每年报废上一年末汽车保有量的 6%，且每年新增汽车数量相同，为保护城市环境，要求该市汽车保有量不超过 60 万辆，那么每年新增汽车数量不应超过多少万辆？

解　设 2001 年的汽车保有量为 $a_1=30$，第 n 年的汽车保有量为 a_n.

每年新增 x 万辆，故 $a_{n+1}=a_n(1-6\%)+x$，即 $a_{n+1}=0.94a_n+x$.

$\therefore a_{n+1}-\dfrac{x}{0.06}=0.94\left(a_n-\dfrac{x}{0.06}\right)$，$\therefore a_n=\left(30-\dfrac{x}{0.06}\right)\times0.94^{n-1}+\dfrac{x}{0.06}$.

依题意：$a_n\leqslant60$ 恒成立，即 $\left(30-\dfrac{x}{0.06}\right)\times0.94^{n-1}+\dfrac{x}{0.06}\leqslant60$ 对 $n\in\mathbf{N}^{+}$ 恒成立.

当 $30-\dfrac{x}{0.06}\geqslant0$ 时，$a_n\leqslant a_{n-1}\leqslant\cdots\leqslant a_1\leqslant60$，$\therefore 0<x<1.8$.

当 $30-\dfrac{x}{0.06}<0$ 时，a_n 单调递增，$a_n<\dfrac{x}{0.06}$，$\therefore\dfrac{x}{0.06}\leqslant60$，$\therefore 1.8<x\leqslant3.6$.

综上所述有 $0<x\leqslant3.6$.

故每年新增的汽车数不得超过 3.6 万辆.

说明　(1)解数列应用题：①有一列关于 n 的量构成数列；②关注这个数列的相邻项的关系，并利用这种关系求通项公式；③根据相关条件运用数列知识解决问题.

(2)沙漠的绿化与沙化、森林的生长与采伐、城市住房的新建与折迁、生产车间有害气体的释放与净化、奖金分配等等，这些应用题都可以用递推关系来求解.

相关链接

各种购房付款方式的比较

一、一次性付款

这是过去最为常见的付款方式，目前一般多用于那些低价位、小单元的楼盘销售.

利：一次性付款一般都能从销售商处得到房价款的 5%左右的优惠，如是现房则能很快获得房屋的产权，如果是期房则这种付款方式价格最低.

弊：一次性付款需要筹集大笔资金，且损失此项资金的利息，对经济能力有限的购房者压力较大. 如果是期房的一次性付款，开发商有可能不按期交房，造成利息甚至全部房款损失，购房风险大.

二、分期付款

又分为免息分期付款和低息分期付款，是目前比较吸引人的付款方式.

利：缓解一次性付款的经济压力，也可用房款督促开发商履行合同中的承诺.

弊：分期付款随着付款期限的延长，利率会越高，房款额比一次性付款的房款额高. 如电影《分期付款》就讲述了公司职员天志总是向往着美好的生活，可没有什么远大志向. 因为月薪不高，看到老杨和小李他们都过着优越的生活，心里很是羡慕. 于是，他不顾女朋友的反对，一意孤行去效仿别人分期付款买房子、买各种东西，但最终因还不上分期付款的各种费用而破产.

三、按揭付款

即购房抵押贷款，指购房者以所购房屋之产权作抵押，由银行先行支付房款给开发商，以后购房者按月向银行分期支付本息的付款方式，因为它能使市场潜在需求迅速转化为有效需求，所以成为促进房地产市场活跃的最有效手段.

利：可以筹集到所需资金，实现购房愿望，“花明天的钱，圆今天的梦”.

弊：目前手续繁琐、限制较多.

四、公积金贷款

居民购房除了动用历年的积蓄外，购房资金不足部分一般都首先申请个人住房公积金贷款，仍不足部分则再申请由银行个人住房按揭贷款解决，目前运用此种个人住房公积金贷款与银行个人住房按揭贷款相结合的“组合贷款”已是购房最普遍的贷款方式. 因为它比较符合现实又较为合理，毕竟每户家庭可以计贷的个人住房公积金额度不会很多，若全部向银行贷款又会在利息上负担太重. 个人住房公积金贷款属政策性的个人住房贷款，具有一定的政策补贴性质，只要个人所在单位建立过住房公积金且按期缴纳了公积金的均有权申请贷款，它最大的优点是利率低，低于现行同期银行个人住房按揭贷款利率（一般比银行个人住房按揭贷款利率低1个百分点左右）.

习题参考解答

P. 36 练习

1.(1)$a_1=\frac{1}{2}$，$a_2=\frac{2}{3}$，$a_3=\frac{3}{4}$，$a_4=\frac{4}{5}$，$a_5=\frac{5}{6}$.

(2)$a_1=-1$，$a_2=1$，$a_3=-1$，$a_4=1$，$a_5=-1$.

(3)$a_1=0$，$a_2=3$，$a_3=8$，$a_4=15$，$a_5=24$.

(4)$a_1=3$，$a_2=1$，$a_3=1$，$a_4=3$，$a_5=5$.

2.(1)$a_{10}=10$，$a_{2\,003}=-2\,003$，$a_{4n}=4n$.

(2)$a_{10}=10$，$a_{2\,003}=2\,004$，$a_{4n}=4n$.

3.(1)$a_9=80$.

(2)若 $n^2-1=99$，则 $n^2=100$，$\because n>0$，$\therefore n=10$. 第 10 项.

P. 38 练习

1.(1)$a_n=2n-1$.(2)$a_n=2n$.(3)$a_n=(-1)^{n+1}\cdot n^2$.(4)$a_n=\frac{1}{n+1}$.

2.(1)-1；6；$a_n=(-1)^n\cdot n$.(2)32；$a_n=2^n$.(3)$\frac{2}{7}$；$a_n=\frac{2}{n+1}$.

P. 39 练习

1.(1)$a_1=1$，$a_2=3$，$a_3=5$，$a_4=7$，$a_5=9$.

(2)$a_1=1$，$a_2=\frac{1}{2}$，$a_3=\frac{1}{4}$，$a_4=\frac{1}{8}$，$a_5=\frac{1}{16}$.

(3)$a_1=2$，$a_2=3$，$a_3=5$，$a_4=9$，$a_5=17$.

2.$\because a_n=2^n$，$\therefore a_{n-1}=2^{n-1}$，$\therefore a_n=2a_{n-1}$，($n\geqslant 2$)且 $a_1=2$.

习题 1

1.(1)$a_1=1$，$a_2=1.6$，$a_3=1.66$，$a_4=1.666$，$a_5=1.666\,6$.

(2)$a_1=2$，$a_2=1.7$，$a_3=1.67$，$a_4=1.667$，$a_5=1.666\,7$.

2.$a_1=102$，$a_2=108$，$a_3=114$.

3.(1)$a_1=2$，$a_2=5$，$a_3=8$，$a_4=11$.

(2)$a_{n+1}=3n+2$，$a_{2n}=6n-1$.

(3)当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n-a_{n-1}=3$.

4.

n	1	2	3	…	11	…	21	…	100
a_n	8	14	20	…	68	…	128	…	602

5.(1)1；27.(2)$-\frac{1}{3}$；$-\frac{1}{7}$.(3)$\sqrt{3}$；$\sqrt{6}$.

6.(1)$a_{10}=\frac{1}{2\times 10}$.(2)$a_{10}=\frac{1}{21\times 23}$.(3)$a_{10}=\frac{11}{10}$.(4)$a_{10}=10\frac{10}{11}$.

7.$a_1=-\frac{1}{2}$,$a_2=\frac{1}{2}$,$a_3=-\frac{1}{2}$,$a_4=\frac{1}{2}$,$a_{2n}=\frac{1}{2}$.

8.(1)$a_{10}=10\times 11$,$a_{31}=31\times 32$.

(2)若$420=n(n+1)$,$\therefore n^2+n-420=0$,$\because n\in \mathbf{N}^*$,$\therefore n=20$.$\therefore 420$是这个数列的第20项.

(3)假设$60=n(n+1)$,$\therefore n^2+n-60=0$.$\therefore n=\frac{-1\pm\sqrt{241}}{2}\notin \mathbf{N}$.$\therefore 60$不是数列中的项.

9.$\because a_1=2$,$a_2=6$,$a_3=12$,$a_4=20$,$\therefore a_n=n(n+1)$.

10.(1)$a_1=1$,$a_2=5$,$a_3=17$,$a_4=53$,$a_5=161$.

(2)$a_1=3$,$a_2=6$,$a_3=9$,$a_4=12$,$a_5=15$.

11.由题意可知$a_1=9$,$a_2=16$,$a_3=21$,$a_4=24$.

12.由题意可知:$a_1=2\times 10^4(1+2.52\%)-2\times 10^4\times 2.52\%\times 20\%=2\times 10^4(1+2.52\%\times 80\%)$,

$a_2=2\times 10^4(1+2.52\%\times 80\%)^2+2\times 10^4(1+2.52\%\times 80\%)$,

$a_3=2\times 10^4(1+2.52\%\times 80\%)^3+2\times 10^4(1+2.52\%\times 80\%)^2+2\times 10^4(1+2.52\%\times 80\%)$.

P.43 练习

1.(1)$\because a_3-a_1=2d$,$\therefore 2=2d$,$\therefore d=1$,$a_2=a_1+d=3$.

(2)$\because a_3-a_2=d$,$\therefore d=-2$,$a_1=a_2-d=6$.

2.由韦达定理可知$m+n=-2$,$\therefore m+n$的等差中项为-1.

3.$\because B=60^\circ$,又$\because A+B+C=180^\circ$,$\therefore A+C=120^\circ=2B$,$\therefore A,B,C$成等差数列.

4.(方法一)$\because a_n=2n-1$,$\therefore a_{n+1}=2n+1$,$\therefore a_{n+1}-a_n=2$.$n\in\mathbf{N}^*$,$\therefore \{a_n\}$是等差数列.

(方法二)$\because a_n=2n-1$,$a_{n-1}=2n-3$,$a_{n+1}=2n+1$,$\therefore a_{n-1}+a_{n+1}=4n-2=2a_n$.

$\therefore \{a_n\}$是等差数列.

P.45 练习

1.(1)$\because a_7-a_4=3d=-9$,$\therefore d=-3$,$a_1=a_4-3d=28$.

(2)$\because a_{10}-a_4=6d=-6$,$\therefore d=-1$,$\therefore a_{14}=a_{10}+4d=0$.

2.设梯子各级的宽度为等差数列$\{a_n\}$,$a_1=33$,$a_{12}=110$.

$\because a_{12}=a_1+11d$,$\therefore 110=33+11d$,$\therefore d=7$.

$\therefore a_2=40$,$a_3=47$,$a_4=54$,$a_5=61$,$a_6=68$,$a_7=75$,$a_8=82$,$a_9=89$,$a_{10}=96$,$a_{11}=103$.

3.$\because \begin{cases}a_4=a_1+3d,\\ a_7=a_1+6d,\end{cases}\therefore \begin{cases}a_1+3d=10,\\ a_1+6d=19,\end{cases}\therefore \begin{cases}a_1=1,\\ d=3,\end{cases}$

$\therefore a_n=a_1+(n-1)d=3n-2$.

$\because b_n$为$\{a_n\}$中的奇数项,$\therefore b_n=a_{2n-1}=3(2n-1)-2=6n-5$.

$\therefore b_{n+1}-b_n=6$,$\therefore \{b_n\}$是一个公差为6的等差数列.

4.a_{n+1}.

P. 48 练习

1.(1)$\because S_n=\dfrac{(a_1+a_n)n}{2}$，$\therefore S_9=\dfrac{(2+18)\times 9}{2}=90$.

(2)$\because S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$，$\therefore S_{20}=20\times 12+\dfrac{20\times 19}{2}\times(-2)=-140$.

(3)$\because a_2+a_{n-1}=10$，又$\because a_1+a_n=a_2+a_{n-1}$，$\therefore a_1+a_n=10$.

$\because S_n=\dfrac{(a_1+a_n)n}{2}$，$\therefore S_{20}=\dfrac{10\times 20}{2}=100$.

2.设每层放的铅笔数构成数列$\{a_n\}$，由题意可知$\{a_n\}$为等差数列，公差为 1.

(1)$a_1=1$，$a_{20}=20$，$d=1$，$\therefore S_{20}=\dfrac{(a_1+a_{20})\times 20}{2}=210$.

(2)$a_1=1$，$d=1$，$S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=n+\dfrac{n(n-1)}{2}=\dfrac{n(n+1)}{2}$. 若要堆放 105，

则$\dfrac{n(n+1)}{2}=105$. $\therefore n(n+1)=210$，$\because n\in \mathbf{N}$，$\therefore n=14$.

3.(1)$\because a_1=25$，$S_{17}=S_9$，$\therefore 17a_9=9a_5$. $\therefore 17(a_1+8d)=9(a_1+4d)$，$\therefore d=-2$，$\therefore a_n=-2n+27$.

(2)$S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=25n-n(n-1)=-n^2+26n$. 当 $n=13$ 时，S_n 最大值为 169.

4.$\because S_n=n^2+n$，$\therefore S_{n-1}=(n-1)^2+(n-1)=n^2-n$，

$\therefore$当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2n$. 当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=2$，符合.

$\therefore$当 $n\geqslant 2$ 时，$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2n$. $\therefore a_1=2$，$a_2=4$，$a_3=6$.

习题 2

1.

a_1	a_2	a_3	公差 d	a_5
-3	1.5	6	4.5	15
-7	-5	-3	2	1

2.$\because a_{n+1}-a_n=d$，$b_{n+1}-b_n=k$，$\therefore a_{n+1}+b_{n+1}-(a_n+b_n)=(a_{n+1}-a_n)+(b_{n+1}-b_n)=d+k$.
$\therefore$数列$\{a_n+b_n\}$是一个公差为 $d+k$ 的等差数列.

3.设这三个数分别为 $a-d$，a，$a+d$，由题意可知 $3a=6$，且 $a+d=3(a-d)$，$\therefore a=2$，$d=1$，
$\therefore$这三个数分别为 1，2，3.

4.

a_1	d	n	a_n
1	-3	27	-77
5	10	12	115
-5	6	12	61

5.(1)$\because a_3=-2$，$a_7=5$，$\therefore 4d=a_7-a_3=7$，$\therefore d=\dfrac{7}{4}$，$\therefore a_{13}=a_7+6d=5+\dfrac{21}{2}=\dfrac{31}{2}$.

(2)$\because a_1+a_6=12, a_4=7, \therefore \begin{cases} a_1+a_1+5d=12, \\ a_1+3d=7. \end{cases} \therefore \begin{cases} a_1=1, \\ d=2. \end{cases} \therefore a_9=a_1+8d=17.$

6. 由已知可得，$\begin{cases} y=x+4d_1, \\ y=x+5d_2, \end{cases} \therefore \begin{cases} y-x=4d_1, \\ y-x=5d_2, \end{cases} \therefore d_1 : d_2=5 : 4.$

7. $\because a_3+a_7=a_4+a_6=2a_5=a_2+a_8$，

$\therefore 5a_5=450, \therefore a_5=90. \therefore a_2+a_8=180.$

8. (1)$\because S_5=5a_3, \therefore a_3=8$，又$\because a_2+a_5=19, \therefore \begin{cases} a_1+2d=8, \\ 2a_1+5d=19. \end{cases} \therefore a_1=2.$

(2)$\because d=2, a_{15}=-10, \therefore a_{15}=a_1+14d, \therefore a_1=-38.$

$\therefore S_{15}=\dfrac{(a_1+a_{15})\times 15}{2}=\dfrac{(-38-10)\times 15}{2}=-360.$

(3)$\because a_1=1, a_n=-55, S_n=-405$，又$\because S_n=\dfrac{(a_1+a_n)n}{2}, \therefore n=15.$

又$\because a_n=a_1+(n-1)d, \therefore -55=1+14d, \therefore d=-4.$

(4)$a_n=a_1+(n-1)d=\dfrac{5}{6}+(n-1)\times\left(-\dfrac{1}{6}\right)=-\dfrac{1}{6}n+1.$

又$\because S_n=\dfrac{(a_1+a_n)n}{2}, \therefore \dfrac{5}{2}=\dfrac{\left(\dfrac{5}{6}+1-\dfrac{1}{6}n\right)n}{2}. \therefore 5=\left(\dfrac{11}{6}-\dfrac{1}{6}n\right)n$，

$\therefore n^2-11n+30=0. \therefore n=5$ 或 $6. a_5=\dfrac{1}{6}, a_6=0.$

(5)$\because \begin{cases} a_3+a_5+a_7=6, & ① \\ a_2+a_4+a_6=-3, & ② \end{cases}$ ①－②得 $3d=9, \therefore d=3$. 又由②得 $3a_1+9d=-3$，

$\therefore a_1=-10. S_{100}=100a_1+\dfrac{100\times 99}{2}\times d=-1\ 000+50\times 99\times 3=13\ 850.$

(6)因为$\{a_n\}$为等差数列，所以 $a_3+a_9=a_2+a_{10}=a_4+a_8=2a_6=30$，

故 $a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}=2\times 30+15=75.$

(7)$S_{11}=\dfrac{11(a_1+a_{11})}{2}=11a_6=2\ 200.$

(8)(方法一)因为$\{a_n\}$为等差数列，设 $S_n=An^2+Bn$，则$\begin{cases} 25A+5B=15, \\ 100A+10B=60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{3}{5}, \\ B=0. \end{cases}$

所以 $S_{15}=\dfrac{3}{5}\times 15^2=135.$

(方法二)因为$\{a_n\}$为等差数列，所以 $S_5, S_{10}-S_5, S_{15}-S_{10}$ 仍为等差数列，$S_{10}-S_5=45$，得 $S_5+(S_{15}-S_{10})=2(S_{10}-S_5)\Rightarrow 15+S_{15}-60=2\times 45\Rightarrow S_{15}=135.$

9. 由 $S_n=n^2+1$ 得，$a_1=S_1=2, a_2=3, a_3=5.$

同时由 $S_n=n^2+1$ 得，当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+1-[(n-1)^2+1]=2n-1.$

所以 $a_n=\begin{cases} 2, & (n=1); \\ 2n-1, & (n\geqslant 2). \end{cases}$

10. $\because a_3=a_1+2d=12$，$\therefore a_1=12-2d$. 又$\because \begin{cases}S_{12}>0,\\S_{13}<0,\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}12a_1+\dfrac{12\times 11}{2}\times d>0,\\13a_1+\dfrac{13\times 12}{2}d<0,\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}12(12-2d)+66d>0,\\13(12-2d)+78d<0,\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}144+42d>0,\\156+52d<0,\end{cases}$ $\therefore -\dfrac{24}{7}<d<-3$.

11. 设直角三角形三边分别为 $a-d,a,a+d$，由勾股定理可得：$(a-d)^2+a^2=(a+d)^2$.

$\therefore a^2-2ad+d^2+a^2=a^2+2ad+d^2$，$\therefore a^2=4ad$，$\therefore a=4d$.

$\therefore$三边分别是 $3d,4d,5d$，$\therefore$三边之比为 $3:4:5$.

12. (1)设数列$\{a_n\}$中所有奇数项构成新数列为$\{b_n\}$，则 $b_n=a_{2n-1}$.

$\because a_n=a_1+(n-1)d$，$\therefore b_{n+1}-b_n=2d$.

$\therefore\{b_n\}$是一个公差为 $2d$，首项为 a_1 的等差数列.

(2)设数列$\{a_n\}$中所有偶数项构成新数列为$\{c_n\}$，则 $c_n=a_{2n}$.

$\therefore c_{n+1}-c_n=2d$，$\therefore\{c_n\}$是一个公差为 $2d$，首项为 a_2 的等差数列.

13. 设某地海拔 n km($1\leqslant n\leqslant 10$，$n\in\mathbf{N}$)的气温是 a_n 度，

由题意可知$\{a_n\}$是一个等差数列. 且 $a_1=8.5$，$a_5=-17.5$，

$\therefore d=\dfrac{a_5-a_1}{4}=-\dfrac{26}{4}=-6.5$，$\therefore a_8=a_1+7d=-37$.

14. 设数列为$\{a_n\}$，其前 n 项和为 S_n，$\therefore S_n=100$. $\begin{cases}a_1+a_2+\cdots+a_{10}=25,\\a_n+a_{n-1}+\cdots+a_{n-9}=75,\end{cases}$

$\therefore(a_1+a_2+\cdots+a_{10})+(a_n+a_{n-1}+\cdots+a_{n-9})=100$.

$\therefore 10(a_1+a_n)=100$，$\therefore a_1+a_n=10$. $S_n=\dfrac{(a_1+a_n)n}{2}$，$\therefore 100=\dfrac{10\times n}{2}$，$\therefore n=20$.

15. 设这些直线夹在梯形两腰间的线段长度以及两底边长按从小到大排列构成数列$\{a_n\}$，由几何性质可知，$\{a_n\}$是一个等差数列，且 $a_1=12$，$a_{11}=22$，$\therefore S_n=\dfrac{11(12+22)}{2}=187$(cm).

$\therefore$所求线段的长度和为：$187-12-22=153$.

16. $\because(n-2)\times 180=100n+\dfrac{n(n-1)}{2}\times 10$，$\therefore n^2-17n+72=0$，$\therefore n=8$ 或 9.

又$\because a_1=100$，$a_8=a_1+7d=170^\circ$，$a_9=180^\circ$，$\because$内角小于 180°，

$\therefore n=9$(舍去)，$\therefore n=8$.

17. $\because S_{100}=145$，$\therefore a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{100}=145$，

$\therefore 2(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{100})+50d=145$.

$\because d=\dfrac{1}{2}$，$\therefore 2(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{99})=120$. $\therefore a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{99}=60$.

18. (1)$\because S_2+(S_6-S_4)=2a_1+d+6a_1+15d-4a_1-6d=4a_1+10d$.

又$\because S_4-S_2=4a_1+6d-2a_1-d=2a_1+5d$，$\therefore S_2+(S_6-S_4)=2(S_4-S_2)$.

$\therefore S_2,S_4-S_2,S_6-S_4$ 成等差数列.

(2)$\because S_3=a_1+a_2+a_3$，$S_6-S_3=a_4+a_5+a_6$，$S_9-S_6=a_7+a_8+a_9$. $\because\{a_n\}$为等差数列，

$\therefore(S_9-S_6)+S_3=a_1+a_2+a_3+a_7+a_8+a_9=(a_1+a_7)+(a_2+a_8)+(a_3+a_9)=2a_4+$

$2a_5+2a_6=2(S_6-S_3)$.

$\therefore S_3, S_6-S_3, S_9-S_6$ 成等差数列.

(3)推广：若$\{a_n\}$为等差数列，前 n 项之和为 S_n，则 $S_n, S_{2n}-S_n, S_{3n}-S_{2n}$成等差数列.

证明：$\because S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n, S_{2n}-S_n=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n}$,

$S_{3n}-S_{2n}=a_{2n+1}+a_{2n+2}+\cdots+a_{3n}$,

$$\begin{aligned}\therefore S_n+(S_{3n}-S_{2n})&=(a_1+a_{2n+1})+(a_2+a_{2n+2})+\cdots+(a_n+a_{3n})\\&=2a_{n+1}+2a_{n+2}+\cdots+2a_{2n}\\&=2(S_{2n}-S_n).\end{aligned}$$

$\therefore S_n, S_{2n}-S_n, S_{3n}-S_{2n}$成等差数列.

P. 52 练习

1. (1)$q=\dfrac{a_3}{a_2}=\dfrac{1}{2}, a_1=\dfrac{a_2}{q}=8$.

(2)$q^2=\dfrac{a_3}{a_1}=2$，$\therefore q=\pm\sqrt{2}, a_2=\pm 2\sqrt{2}$.

2. $\because m\cdot n=2$，$\therefore m$ 与 n 的等比中项为$\pm\sqrt{2}$.

3. $\because a_n=\dfrac{1}{(-3)^n}, a_{n+1}=\dfrac{1}{(-3)^{n+1}}$，$\therefore \dfrac{a_{n+1}}{a_n}=-\dfrac{1}{3}$. $\therefore\{a_n\}$为等比数列.

4. 若$\{a_n\}$为等比数列，设公比为 q，$\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\dfrac{\frac{1}{a_{n+1}}}{\frac{1}{a_n}}=\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{q}$（常数）.

$\therefore\{b_n\}$为等比数列，公比为$\dfrac{1}{q}$.

P. 54 练习

1. (1)$a_n=(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{2^{n-1}}=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

(2)$\dfrac{a_5}{a_3}=\dfrac{2}{8}=\dfrac{1}{4}$，$\therefore q^2=\dfrac{1}{4}$，$\therefore q=\pm\dfrac{1}{2}$.

$\therefore a_n=a_3\cdot q^{n-3}$，$\therefore a_n=8\cdot\dfrac{1}{2^{n-3}}$或 $a_n=8\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-3}$.

2. 设每代的种子数构成数列$\{a_n\}$，由题意可知$\{a_n\}$是一个公比为 120 的等比数列，$\therefore a_n=a_1\cdot q^{n-1}$，$\therefore a_5=120^5$.

3. 若 $m+n=p+q$，则有 $a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q$.

证明：设$\{a_n\}$的公比为 t，$\therefore a_m=a_1\cdot t^{m-1}, a_n=a_1\cdot t^{n-1}, a_p=a_1\cdot t^{p-1}, a_q=a_1\cdot t^{q-1}$.

$\therefore a_m\cdot a_n=a_1^2\cdot t^{m+n-2}, a_p\cdot a_q=a_1^2\cdot t^{p+q-2}$,

$\because m+n=p+q$，$\therefore a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q$.

4. 因为$\{a_n\}$为等比数列，$a_3a_9=a_2a_{10}=a_4a_8=a_6^2=9$，$\therefore a_6=\pm 3$，

所以 $a_2a_4a_6a_8a_{10}=9^2\times(\pm 3)=\pm 243$.

P. 58 练习

1. $\because a_n=a_1\cdot q^{n-1}$，$\therefore a_n=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$，

$\therefore S_{10}-S_4=\dfrac{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{10}}{1+\dfrac{1}{2}}-\dfrac{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{4}}{1+\dfrac{1}{2}}=\dfrac{21}{512}$.

或 $a_5+a_6+\cdots+a_{10}=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^4+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^5+\cdots+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^9=\dfrac{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^4\left[1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^6\right]}{1+\dfrac{1}{2}}=\dfrac{21}{512}$.

2. 设等比数列为$\{a_n\}$，$a_3=21$，$a_4=-63$，$\therefore q=-3$，$a_3=a_1\cdot q^2$，$\therefore 21=a_1\cdot(-3)^2$.

$\therefore a_1=\dfrac{7}{3}$，$S_5=\dfrac{a_1(1-q^5)}{1-q}=\dfrac{\dfrac{7}{3}[1-(-3)^5]}{1+3}=\dfrac{427}{3}$.

3. 设每次着地后跳回的高度以及 32 m 构成一个从大到小的数列，记为$\{a_n\}$，则 a_n 是一个首项为 32，公比为$\dfrac{1}{2}$的等比数列，当它第 6 次着地时，共经过的路程记为 S，则 $S=a_1+2a_2+2a_3+2a_4+2a_5+2a_6=32+32+16+8+4+2=94$ (m).

4. 若 $q=1$，则 $a_1=1=a_2=\cdots=a_n$，$\therefore S_3=1+1+1=3\neq7$，$\therefore q\neq1$.

$\because\begin{cases}a_2a_4=1,\\S_3=7,\end{cases}\therefore\begin{cases}a_1^2\cdot q^4=1,\\\dfrac{a_1(1-q^3)}{1-q}=7.\end{cases}$

$\because a_n>0$，$\therefore a_1>0$，$q>0$，$\therefore a_1q^2=1$，$\therefore a_1=\dfrac{1}{q^2}$.

$\therefore\dfrac{1-q^3}{(1-q)q^2}=7$，$\therefore\dfrac{(1-q)(1+q+q^2)}{(1-q)q^2}=7$.

$\therefore 1+q+q^2=7q^2$，$\therefore 6q^2-q-1=0$. $\because q>0$，$\therefore q=\dfrac{1}{2}$. $\therefore a_1=4$.

$\therefore S_5=\dfrac{a_1(1-q^5)}{1-q}=\dfrac{4\times\left[1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^5\right]}{1-\dfrac{1}{2}}=8-8\times\dfrac{1}{32}=\dfrac{31}{4}$.

习题 3

1.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$\dfrac{1}{3}$	-1	3	-9	27
$\pm4\sqrt{2}$	4	$\pm2\sqrt{2}$	2	$\pm\sqrt{2}$

2. 设插入的二个数依次为 a，b，由已知可得$\begin{cases}2+b=2a,\\b^2=9a,\end{cases}\therefore\begin{cases}a=\dfrac{1}{4},\\b=-\dfrac{3}{2}\end{cases}$或$\begin{cases}a=4,\\b=6.\end{cases}$因而这个数

列为 2,4,6,9 或 $2,\frac{1}{4},-\frac{3}{2},9$.

3. $\because c_n=b_{2n-1}+b_{2n},c_{n+1}=b_{2n+1}+b_{2n+2},b_n=3\times 2^n$,

$\therefore b_{2n+1}=4b_{2n-1},b_{2n+2}=4b_{2n}$. $\therefore \frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{b_{2n+1}+b_{2n+2}}{b_{2n-1}+b_{2n}}=4$.

$\therefore\{c_n\}$是一个公比为 4 的等比数列.

4.

a_1	q	n	a_n
0.03	9	6	1 771.47
$\frac{1}{2}$	-2	7	32
1	2	9	256

5. 设插入的 5 个数分别为 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,设公比为 q,则有 $5=320\cdot q^6$.

$\therefore q^6=\frac{5}{320}=\frac{1}{64}$, $\therefore q=\pm\frac{1}{2}$.

①当 $q=\frac{1}{2}$ 时,$a_1=160,a_2=80,a_3=40,a_4=20,a_5=10$,

②当 $q=-\frac{1}{2}$ 时,$a_1=-160,a_2=80,a_3=-40,a_4=20,a_5=-10$.

6. $\because a_1=27,q=-\frac{1}{3}$, $\therefore a_n=a_1\cdot q^{n-1}$, $\therefore \frac{1}{243}=27\times\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$,

$\therefore n=9,S_9=\frac{a_1(1-q^9)}{1-q}=\frac{27\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^9\right]}{1+\frac{1}{3}}=\frac{4\ 921}{243}$.

7. $\because a_n=a_1\cdot q^{n-1}$, $\therefore \frac{1}{90}=-2.7\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$, $\therefore \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}=-\frac{1}{3^5}$.

$\therefore n=6,S_6=\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=-\frac{91}{45}$.

8. (1) $S_6=\frac{a_1(1-q^6)}{1-q},q=\frac{1}{2}$. $\therefore \frac{a_1\left(1-\frac{1}{64}\right)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{189}{4}$. $\therefore a_1=24$.

(2) 若 $q=1$,则 $a_1=a_2=a_3=1$, $\therefore S_3=3\neq 14$, $\therefore q\neq 1$.

$\because S_3=\frac{a_1(1-q^3)}{1-q},a_1=2$, $\therefore 14=\frac{2(1-q^3)}{1-q}$, $\therefore 7=\frac{(1-q)(1+q+q^2)}{1-q}$,

$\therefore q^2+q-6=0$. $\therefore q=-3$ 或 $q=2$.

(3) $q=\frac{a_2+a_4+a_6}{a_1+a_3+a_5}=2$,所以 $a_1+4a_1+16a_1=21\Rightarrow a_1=1$,故 $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=2^n-1$.

(4)(方法一)由于$\{a_n\}$为等比数列,设 $S_n=Aq^n-A$,则$\begin{cases}Aq^5-A=15,\\Aq^{10}-A=60\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=\frac{15}{2},\\q^5=3.\end{cases}$

所以 $S_{15}=\frac{15}{2}\times 3^3-\frac{15}{2}=195$.

(方法二)由于$\{a_n\}$为等比数列,$S_5,S_{10}-S_5,S_{15}-S_{10}$仍为等比数列,又 $S_{10}-S_5=45$.

$S_5(S_{15}-S_{10})=(S_{10}-S_5)^2\Rightarrow 15(S_{15}-60)=45^2\Rightarrow S_{15}=195$.

9. 类比可得：若$\{a_n\}$是公比为q的等比数列，m，n是任意正整数，则$\dfrac{a_m}{a_n}=q^{m-n}$.

证明：$\because a_m=a_1q^{m-1}$，$a_n=a_1q^{n-1}$，$\therefore \dfrac{a_m}{a_n}=q^{m-n}$.

10. 设第n年后的世界人口为a_n，设现在的人口为a，则$a_n=a(1+1\%)^n$.

$\therefore a_{25}=a(1+1\%)^{25}$，$\dfrac{a_{25}}{a}\approx 1.28$.

$2a=a(1+1\%)^x$，$\therefore x=\log_{1.01}2=\dfrac{\lg 2}{\lg 1.01}\approx 70$.

若增长率为2%，则$a_{25}=a(1+2\%)^{25}$，$\therefore \dfrac{a_{25}}{a}\approx 1.64$. $2a=a(1+2\%)^x$，

$\therefore x=\dfrac{\lg 2}{\lg 1.02}\approx 35$.

11. (1) 设衰变率为q，^{14}C含量最初为1，5 730年后的含量为a_n，$a_n=q^{5\,730}=\dfrac{1}{2}$.

$\therefore q=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5\,730}}\approx 0.999\,879$.

$\therefore$确定年代模型为：$a_1(0.999\,879)^x=a_n$.（a_n为x年后的^{14}C的含量，a_1为刚开始的含量）

(2) 设已存在x年，则$a_n=0.01a$，$\therefore 0.01a=q^x=(0.999\,879)^x a$. $\therefore 0.01=(0.999\,879)^x$，

$\therefore x\approx 38\,057$年.

12. $\because a_1=6$，$q=\dfrac{1}{2}$，$\therefore S_n=\dfrac{6\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)}{1-\dfrac{1}{2}}>11.5$，$\therefore 1-\dfrac{1}{2^n}>\dfrac{11.5}{12}$，$\therefore \dfrac{1}{2^n}<\dfrac{1}{24}$.

$\therefore 2^n>24$，$\therefore n\geqslant 5$. $\therefore n$的最小值为5.

13. (1) $\because a_1=19$，$d=-2$，$a_n=a_1+(n-1)d=19-2(n-1)=-2n+21$.

$\therefore S_n=\dfrac{(a_1+a_n)n}{2}=20n-n^2$.

(2) $b_n-a_n=3^{n-1}$，$\therefore b_n=-2n+3^{n-1}+21$.

$$\begin{aligned}T_n&=b_1+b_2+\cdots+b_n\\&=[19+17+\cdots+(-2n+21)]+[3^0+3^1+\cdots+3^{n-1}]\\&=\frac{(19-2n+21)n}{2}+\frac{1-3^n}{1-3}\\&=-n^2+20n+\frac{3^n-1}{2}\\&=-n^2+20n-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 3^n.\end{aligned}$$

习题 4

(1) 方案1　每次付款数为x元，则有

$5\,000(1+0.008)^{12}=x(1+0.008)^8+x(1+0.008)^4+x$，

$\therefore x(1.008^8+1.008^4+1)=5\,000\times 1.008^{12}$.

$\therefore x=\dfrac{5\ 000\times1.008^{12}}{1.008^{8}+1.008^{4}+1}\approx1\ 775.8$，应付总额为 5 327.4 元.

方案 2　设每次付款数为 y 元，则有

$5\ 000(1+0.008)^{12}=y[(1+0.008)^{10}+(1+0.008)^{8}+(1+0.008)^{6}+\cdots+1]$

$\therefore y=\dfrac{5\ 000(1+0.008)^{12}}{1.008^{10}+1.008^{8}+1.008^{6}+\cdots+1}\approx880.8$.

应付总额约为 5 284.8 元.

方案 3　设每次付款为 z 元，则有

$5\ 000(1+0.008)^{12}=z[(1+0.008)^{11}+(1+0.008)^{10}+\cdots+1]$

$\therefore z=\dfrac{5\ 000(1+0.008)^{12}}{(1+0.008)^{11}+(1+0.008)^{10}+\cdots+1}\approx438.6$.

应付总额为 5 264.2 元.

(2)分期次数越多，应付总款就越少.

(3)方案 1　每次应付款额为

$$x=\frac{a(1+r\%)^{12}}{(1+r\%)^{8}+(1+r\%)^{4}+1}=\frac{a(1+r\%)^{12}[1-(1+r\%)^{4}]}{1-(1+r\%)^{12}}.$$

方案 2　每次应付款额为

$$y=\frac{a(1+r\%)^{12}[1-(1+r\%)^{2}]}{1-(1+r\%)^{12}}.$$

方案 3　每次应付款额为

$$z=\frac{a(1+r\%)^{12}[1-(1+r\%)]}{1-(1+r\%)^{12}}=\frac{-a(1+r\%)^{12}\cdot r\%}{1-(1+r\%)^{12}}.$$

复习题九

1.(1)$a_n=\dfrac{2n+1}{2^n}$.(2)$a_n=(-1)^{n+1}\cdot n^{\frac{1}{n}}$.(3)$a_n=\dfrac{n+2}{2^n}$.(4)$a_n=2^n-1$.

2.$a_1=1,a_2=-1,a_3=-1,a_4=1,a_5=1,a_6=-1,a_7=-1,a_8=1,a_{100}=1$.

3.$a_1=2,a_2=1,a_3=4,a_4=3$，

$S_{100}=2+1+4+3+\cdots+100+99=1+2+\cdots+100=5\ 050$.

4.(1)$a_1=1,a_2=2,a_3=\dfrac{5}{2},a_4=\dfrac{29}{10}$.

(2)$a_1=3,a_2=6,a_3=3,a_4=-3$.

5.(1)C.　(2)B.　(3)A.

6.(1)设每月的产值为数列$\{a_n\}$，则$\{a_n\}$是一个等差数列，且 $a_1=a,a_{12}=b$.

$\therefore d=\dfrac{b-a}{11}$. $\therefore a_{10}=a_1+9d=a+\dfrac{9(b-a)}{11}=\dfrac{2a+9b}{11}$，$S_{12}=\dfrac{12(a_1+a_{12})}{2}=6(a+b)$.

(2)设每月的产值为数列$\{b_n\}$，则$\{b_n\}$是一个等比数列，且 $b_1=a,b_{12}=b$，

$\therefore q^{11}=\dfrac{b}{a}$，$\therefore q=\sqrt[11]{\dfrac{b}{a}}$. $\therefore b_{10}=b_1\cdot q^{9}=a\cdot\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{9}{11}}=a^{\frac{2}{11}}b^{\frac{9}{11}}$. $S_{12}=\dfrac{a\left[1-\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{12}{11}}\right]}{1-\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{11}}}$.

7.(1)$\because\begin{cases}a_m=n,\\a_n=m,\end{cases}\therefore\begin{cases}a_1+(m-1)d=n,①\\a_1+(n-1)d=m,②\end{cases}$

①－②得 $d=-1$. $\therefore a_{m+n}=0$.

(2)$\because\begin{cases}a_m=n,\\a_n=m,\end{cases}\therefore\begin{cases}a_1q^{m-1}=n,\\a_1q^{n-1}=m,\end{cases}$

$\therefore q^{m-n}=\dfrac{n}{m}, a_{m+n}=a_m\cdot q^n=n\cdot\left(\dfrac{n}{m}\right)^{\frac{n}{m-n}}$.

8.(1)$a_n=n^2-10n+10=(n-5)^2-15$. 当 $n\geqslant5$ 时，各项数值逐渐增大.

(2)$a_n>0,(n-5)^2-15>0,\therefore(n-5)^2>15$.

$\therefore$当 $n>9$ 或 $n=1$ 时，a_n 为正数.

(3)$\because a_1=1$，若 $a_n=1$，则 $n^2-10n+10=1$，

$\therefore n=9$. 第九项与首项的值相同.

9.经观察每年环境的噪声平均值成等差数列，公差为-0.6，若 $a_1=56$.

$a_n=a_1+(n-1)d=56-(n-1)\times0.6=56.6-0.6n<42$，

$\therefore 0.6n>14.6, n>24.3$. $\because n\in\mathbf{N},\therefore n=25$. 经过 25 年.

10.$\because a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{99}=60$，

$$\begin{aligned}\therefore a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{100}&=(a_1+d)+(a_3+d)+(a_5+d)+\cdots+(a_{99}+d)\\&=(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{99})+50d=60+25=85.\end{aligned}$$

$\therefore S_{100}=60+85=145$.

11.$\because S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d,\therefore\dfrac{S_n}{n}=a_1+\dfrac{n-1}{2}d,\dfrac{S_{n+1}}{n+1}=a_1+\dfrac{n}{2}d$.

$\therefore\dfrac{S_{n+1}}{n+1}-\dfrac{S_n}{n}=\dfrac{d}{2},\therefore\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$是等差数列.

12.$b=aq, c=aq^2, c^2=a^2+b^2,\therefore a^2q^4=a^2+a^2q^2$,

$\therefore q^4=1+q^2, q^4-q^2-1=0$. $\therefore q^2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

$\because q>0, q=\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}=\sqrt{\dfrac{2+2\sqrt{5}}{4}}=\dfrac{\sqrt{2+2\sqrt{5}}}{2}$.

13.$\because$该城市 1999 年住房总面积为 500×14.5 万平方米，2009 年的人口数为 $500\times(1+1\%)^{10}$万，住房总面积为 $500\times(1+1\%)^{10}\times29$ 万平方米.

$\therefore$这 10 年每年平均新增住房面积数为$\dfrac{500(1+1\%)^{10}\times29-500\times14.5}{10}\approx877$(万平方米).

14.(1)若$\{a_n\}$是公比为 q 的等比数列，则 $S_2=S_1q^3, S_3=S_2\cdot q^3,\therefore S_1,S_2,S_3$ 是一个公比为 q^3 的等比数列.

(2)推广：若$\{a_n\}$是公比为 q 的等比数列，S_n 是它的前 n 项之和，则有 $S_n,S_{2n}-S_n,S_{3n}-S_{2n}$ 成等比数列，公比为 q^n.

$\because S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，

$S_{2n}-S_n=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n}=a_1q^n+a_2q^n+\cdots+a_n\cdot q^n=S_n\cdot q^n$，

$S_{3n}-S_{2n}=a_{2n+1}+a_{2n+2}+\cdots+a_{3n}$

$=a_{n+1}\cdot q^n+a_{n+2}\cdot q^n+\cdots+a_{2n}\cdot q^n=(S_{2n}-S_n)\cdot q^n$.

$\therefore S_n,S_{2n}-S_n,S_{3n}-S_{2n}$成等比数列.

15.(1)$\because a_{2m-1}+a_{2n-1}=2a_{m+n-1}+2(m-n)^2$, ①

令 $m=2,n=1$,得

$a_3+a_1=2a_2+2$,又$\because a_1=0,a_2=2,\therefore a_3=6$.

令 $m=3,n=1,\therefore a_5+a_1=2a_3+8.\therefore a_5=20$.

(2)$\because b_n=a_{2n+1}-a_{2n-1},b_{n+1}=a_{2n+3}-a_{2n+1}$,

$\therefore b_{n+1}-b_n=a_{2n+3}-2a_{2n+1}+a_{2n-1}$.

令 $m=n+2$,代入①式得 $a_{2n+3}+a_{2n-1}=2a_{2n+1}+8$.

$\therefore b_{n+1}-b_n=8.\therefore\{b_n\}$是等差数列.

(3)$c_n=(b_{n+1}-b_n)q^{n-1},\therefore c_n=8q^{n-1}$,

$\therefore c_n$ 是一个首项为 8,公比为 q 的等比数列.

当 $q=1$ 时,$S_n=8n$,当 $q\neq1$ 时,$S_n=\dfrac{8(1-q^n)}{1-q}$.

16.(1)(方法一)若 $a_{10}=0,\therefore a_1+9d=0,\therefore a_1=-9d$.

$\therefore a_1+a_2+\cdots+a_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=-9d_n+\dfrac{n^2d-dn}{2}=\dfrac{n^2d-19dn}{2}=\dfrac{(n-19)nd}{2}$.

$a_1+a_2+\cdots+a_{19-n}$

$=(19-n)a_1+\dfrac{(19-n)(18-n)}{2}d=(19-n)\cdot(-9d)+\dfrac{(19-n)(18-n)d}{2}$

$=\dfrac{(19-n)[-18d+(18-n)d]}{2}=\dfrac{(19-n)\cdot(-nd)}{2}=\dfrac{(n-19)\cdot nd}{2}$.

$\therefore a_1+a_2+\cdots+a_n=a_1+a_2+\cdots+a_{19-n}$.

(方法二)$\because a_{10}=0,\therefore a_{20-n}+a_n=0,a_{21-n}+a_{n-1}=0,a_{22-n}+a_{n-2}=0,\cdots$

$\therefore\quad a_1+a_2+\cdots+a_n$

$=a_1+a_2+\cdots+a_{19-n}+a_{20-n}+a_{21-n}+\cdots+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n$

$=a_1+a_2+\cdots+a_{19-n}+(a_{20-n}+a_n)+(a_{21-n}+a_{n-1})+(a_{22-n}+a_{n-2})+\cdots$

$=a_1+a_2+\cdots+a_{19-n}$.

(2)若 $a_k=0$,则有 $a_1+a_2+\cdots+a_n=a_1+a_2+\cdots+a_{2k-1-n}$.

证明:$\because a_{2k-n}+a_n=2a_k=0,a_{2k+1-n}+a_{n-1}=2a_k=0$,

$\therefore a_1+a_2+\cdots+a_n=a_1+a_2+\cdots+a_{2k-1-n}+a_{2k-n}+a_{2k-1-n}+\cdots+a_{n-1}+a_n$

$=a_1+a_2+\cdots+a_{2k-1-n}$.

(3)若对等比数列$\{b_n\}$,若 $b_k=1$,则有 $b_1\cdot b_2\cdot\cdots\cdot b_n=b_1\cdot b_2\cdot\cdots\cdot b_{2k-1-n}$.

证明:$\because b_{2k-n}\cdot b_n=b_k^2=1,b_{2k+1-n}\cdot b_{n-1}=b_k^2=1$,

$\therefore b_1\cdot b_2\cdot\cdots\cdot b_n=b_1\cdot b_2\cdot\cdots\cdot b_{2k-1-n}\cdot b_{2k-n}\cdot b_{2k+1-n}\cdot\cdots\cdot b_{n-1}\cdot b_n=b_1\cdot b_2\cdot\cdots\cdot b_{2k-1-n}$.

第10章　不等式

一、教学目标

1.知识目标：

(1)了解不等式(组)的实际背景.

(2)理解不等式(组)对于刻划不等关系的意义和价值.

(3)了解从实际情境中抽象出一元二次不等式模型的过程.

(4)理解一元二次不等式的概念.

(5)理解并掌握一元二次不等式、二次函数及一元二次方程之间的关系.

(6)理解并掌握解一元二次不等式的过程.

(7)了解从实际情境中抽象出二元一次不等式(组)模型的过程.

(8)理解二元一次不等式(组)、二元一次不等式(组)的解集的概念.

(9)了解二元一次不等式的几何意义,理解(区域)边界的概念及实线、虚线边界的含义.

(10)了解线性约束条件、目标函数、线性目标函数、线性规划、可行解、可行域、最优解的概念.

(11)掌握简单的二元线性规划问题的解法.

(12)了解基本不等式的代数背景、几何背景以及它的证明过程.

(13)理解算术平均数、几何平均数的概念.

2.能力目标：

(1)会求一元二次不等式解集.

(2)会用不等式(组)表示实际问题中的不等关系,能用不等式(组)研究含有不等关系的实际问题.

(3)会用二元一次不等式(组)表示平面区域,能画出给定的不等式(组)表示的平面区域.

(4)会用基本不等式解决简单的最大(小)值的问题.

(5)培养学生搜集、选择、处理信息的能力,发展学生独立探究和解决问题的能力,提高学生的应用意识和创新能力.

3.情感态度与价值观：

(1)使学生学会抓住社会现象的本质,能用科学的、辩证的眼光观察事物,建立科学的世界观.

(2)通过基本不等式的实际应用,使学生感受数学的应用价值.

二、教材说明

本章的主要内容是不等式的基本性质、一些不等式的解法等,不等式主要研究数的不等关系,它与数、式、方程、函数、三角等有着密切的联系,在解决各类实际问题时也有着广泛的应用.因此,不等式是进一步学习数学的基础,是掌握现代科学技术的重要工具.不等式既是中学数学的一个重要内容,又是学好数学其他内容必须掌握的一门工具.其中,利用基本不等式求函数的最值,是重点和难点.不等式的应用非常广泛,它贯穿于整个高中数学的始终,诸如集合问题、方程(组)的解的讨论、函数定义域及值域的确定、函数的单调性的研究、三角、数列、复数、立体几何与解析几何的最值问题、直线与圆锥曲线位置关系的讨论等,这些无一不与不等式有着密切的关系.

不等式应用问题体现了一定的综合性.这类问题大致可以分为两类:一类是建立不等式、解不等式;另一类是建立函数式求最大值或最小值.利用平均值不等式求函数的最值时,要特别注意“正数、定值和相等”三个条件缺一不可,有时需要适当拼凑,使之符合这三个条件.利用不等式解应用题的基本步骤:(1)审题;(2)建立不等式模型;(3)解数学问题;(4)作答.

通过不等式的基本知识、基本方法在代数、三角函数、数列、复数、立体几何、解析几何等各部分知识中的应用,深化数学知识间的融汇贯通,从而提高分析问题、解决问题的能力.在应用不等式的基本知识、方法、思想解决问题的过程中,提高学生的数学素质及创新意识.不等关系与相等关系都是客观事物的基本数量关系,是数学研究的重要内容.不等关系在现实世界和日常生活中大量存在,任何人都需要对发生在我们周围的事物作出某种判断,判断有时需借助于量与量的比较来实现,这就是不等关系在本章的地位与作用.

在本章中,学生将通过问题探索中的光的折射,明白光走的路程用时总是最短这一原理来感受不等关系,理解不等式(组)对于刻画不等关系的意义和价值;掌握求解一元二次不等式的基本方法,并能解决一些实际问题;能用二元一次不等式组表示平面区域,并尝试解决一些简单的二元线性规划问题;认识基本不等式及其简单应用;体会不等式、方程及函数之间的联系.我们将重点研究一元二次不等式、二元一次不等式(组)、基本不等式三种不等式模型,在了解不等式实际背景的前提下,重点研究不等式的应用.

(1)不等关系:通过具体情境,感受在现实世界和日常生活中大量存在的数量关系,了解不等式(组)的实际背景,了解不等式的一些基本性质.

(2)一元二次不等式:经历从实际情境中抽象出一元二次不等式模型的过程;通过函数图象了解一元二次不等式与相应函数、方程的联系;会解一元二次不等式及运用它解决简单实际问题.

(3)二元一次不等式组与简单线性规划问题:从实际情境中抽象出二元一次不等式组;了解二元一次不等式的几何意义,能用平面区域表示二元一次不等式组;从实际情境中抽象出一些简单的二元线性规划问题,并能加以解决.

(4)基本不等式：探索基本不等式的证明过程；会用基本不等式解决简单最值问题.

几个特点：

①内容安排上的特点

把简单的线性规划和不等式放在一起，将线性规划问题作为不等式来处理，突出了不等式的几何意义以及在解决优化问题中的作用，有利于理解不等式的本质，体现优化思想.

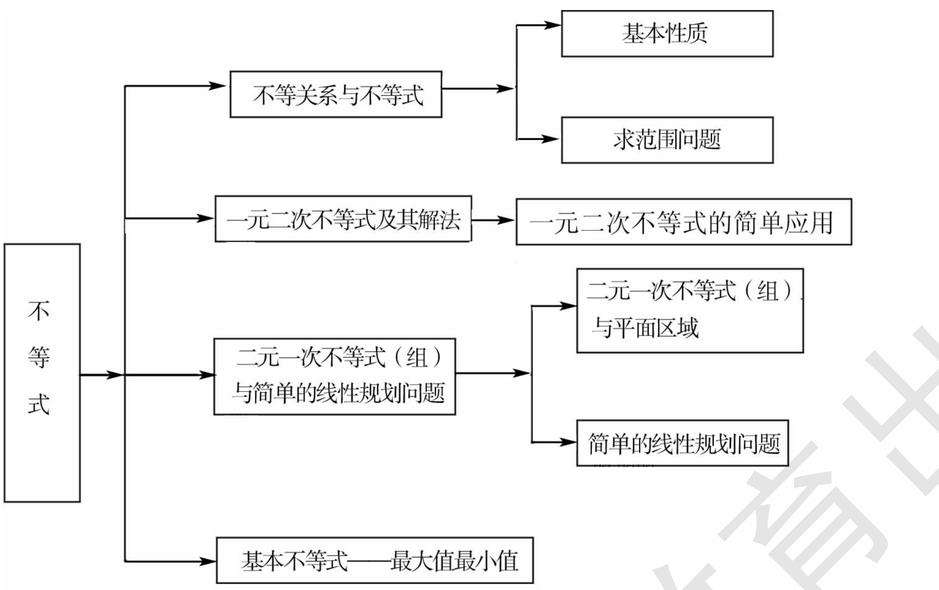
②教学要求上的特点

在不等式求解方面，《课标》对学生的基本要求进一步弱化，在大纲教材删除了指、对数不等式和无理不等式的基础上，又删除了分式不等式、一元高次不等式求解，将绝对值不等式移至选修4－5(不等式选讲)；不等式证明采取分步到位、螺旋上升的做法，由于选修4－5不作高考要求(但是为学业考试内容，如果进入高考考试范围也考得非常简单)，因此降低了其基本要求. 但在选修1－2(文科必选)、选修2－2(理科必选)的推理与证明中，均提出了用综合法与分析法证明不等式：在选修4－5中，介绍了不等式证明的常用方法——比较法、综合法、分析法、反证法、放缩法，进一步介绍了柯西不等式、排序不等式、均值不等式及其应用，还介绍了数学归纳法与贝努利不等式. 二元一次不等式(组)与简单的线性规划问题的学习要求基本不变.

③教学价值上变化

不等式是原大纲版教科书中的一个重点和难点，是培养学生思维能力和推理能力的一个很好素材，所以它强调理论叙述、推理严密、变化技巧，而《课标》则更加关注不等式的背景和实际应用，把不等式作为刻画现实世界中不等关系的数学工具，作为描述优化问题的一种数学模型，而不再把重点放在纯理论的数学探究上.

本章节的知识结构和框架体系.



除了注意以上要求外，还需注意以下几点：

(1)一元二次不等式的求解只要求达到基本要求即可；

(2)淡化解不等式的技巧性要求，突出不等式的实际背景及其应用；

(3)能把一些实际问题转化成二元线性规划问题并能加以解决；

(4)突出用基本不等式解决问题的基本方法，不必推广到三个变量以上的情形.

三、课时安排建议

10.1	不等式的基本性质	**2** 课时
10.2	一元二次不等式	**3** 课时
10.3	基本不等式及其应用	**4** 课时
10.4	简单线性规划	**4** 课时
小结与复习		**3** 课时

四、教学建议

不等式是高中数学的重点和难点内容，它渗透到了中学数学教科书的各个章节，在实际问题中被广泛应用，可以说是解决其它数学问题的一种有利工具.

1. 不等式的概念和性质是本部分内容的基础，要高度重视不等式的概念和性质，弄清每一个性质和结论，做到深刻理解并能够灵活应用.

2. 熟练掌握不等式的解法. 解不等式是研究函数和方程的重要工具，在学习中不仅要注重不等式在研究函数与方程的工具作用，更要重视不等式、方程、函数三者之间的相互转化.

3. 均值不等式应用范围非常广泛，可与高中数学大部分章节的知识进行综合考查，但在高考中的考查却不外乎大小判断、求最值、求取值范围等. 因此，把握均值不等式应用的前提以及均值不等式的构造是学习这个知识点的关键.

4. 重视不等式的综合应用. 不等式单独命题较少，常在函数、数列、立体几何、解析几何和应用题解题过程中涉及，加强不等式的应用能力是提高解综合问题的关键，因此，在学习时应加强这方面知识和能力的训练，提高应用意识.

5. 注重思想方法的复习和应用. 解决不等式问题中经常用到的思想方法有：等价转化思想、分类讨论思想、函数与方程的思想、化归思想等.

6. 不等式的综合应用主要涉及以下三个方面：

(1)建立函数关系，利用均值不等式求最值. 根据题设条件建立函数关系式，并创设基本不等式应用背景. 在应用均值不等式求最值时要注意的是“一正、二定、三相等”，即求和(积)的最小值(最大值)时，必须使其积(和)为定值，并且要注意各项是否为正，确保等号成立的条件是否成立(即各项是否能相等).

(2)建立不等式求参数的取值范围. 常见的问题有：(1)在集合问题中的应用；(2)在方程(组)的解的讨论中的应用；(3)在函数、导数和数列问题中的应用；(4)在平面向量、解析几何和立体几何中的应用；(5)在概率与统计中的应用等等. 解决这类问题的基本方法是根据条件列出相关的不等式(组)解不等式，或利用函数单调性、均值不等式求其值域.

(3)利用不等式解决实际问题. 不等式的应用题大致可分为两类：一类是建立不等式求参

数的取值范围或解决一些实际应用问题，另一类是建立函数关系，利用均值不等式或函数的单调性求最值问题. 应用不等式解题的关键是建立不等关系. 解不等式应用问题步骤：审题，建立不等模型，利用不等式有关知识解题. 解决问题的具体模式如下：

$$\begin{array}{ccc}
\text{现实世界中的实际问题} & \xrightarrow{\text{数学抽象}} & \text{不等式模型} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\text{实际问题的解} & \xrightarrow{\text{还原实际}} & \text{不等式的解}
\end{array}$$

总之，学习本章应做到立足基础、培养能力、有的放矢、重点突出、学会建模、提高素质. 高中数学课程应力求使学生体验数学在解决实际问题中的作用.

线性规划问题是数学在日常生活中常见的一种优化问题，在设计的过程中，提出实际生活问题，让学生经历建立数学模型的过程，培养学生观察发现、归纳类比、符号表示、抽象概括等数学思维能力. 在学生理解二元一次不等式(组)与平面区的过程中，教师应多利用多媒体进行动态的、直观的展示，鼓励学生进行探索和发现.

综上，不等式教学要在新课程理念指导下，讲背景、讲联系、讲应用，要立足教科书，改进教学方式，要鼓励学生自主探索，重视教科书中的“思考”与“探究”，要关注教科书中的阅读材料，要正确把握例、习题的功能，重视课后习题的探究，要重视信息技术的使用，要感受不等式的广泛应用，要体现数学的文化价值.

五、评价建议

新课程标准中对知识的发生过程提出了较高的要求，多次使用了“经历”、“感受”、“探索”等情感、态度与价值观要求行为动词，重视学生对问题的探究能力. 本节课通过多种证法让学生经历和感受了式子的来历，又通过探索不等式链的成立，加强了学生主动探索、敢于质疑、联想丰富等能力的培养.

10.1　不等式的基本性质

教材线索

教科书首先通过甲、乙两城市的温度的具体实例，引出了比较实数大小的方法，在这个基础上，给出了不等式的性质，一共讲了五个定理，并给出了严格的证明．不等式的其他性质，都可由它们推导出来，另外，本小节还举出了两个利用不等式的性质证明不等式的例题，这一方面有利于学生运用、掌握不等式的性质及其推论，另一方面，也为学生以后学习不等式的证明打下了基础．

教学目标

(1)通过具体情境，感受在现实世界和日常生活中存在着大量的不等关系，了解不等式(组)的实际背景．

(2)经历由实际问题建立数学模型的过程，体会其基本方法．

(3)掌握作差比较法判断两实数或代数式大小．

(4)通过解决具体问题，体会数学在生活中的重要作用，培养严谨的思维习惯．

教材分析

1．教学重点、难点：

(1)通过具体情境，建立不等式模型．

(2)掌握作差比较法判断两实数或代数式大小．

这一节的要求和原教科书有很大的不同，原教科书作为研究不等式的理论基础，所以对它们归结为几个定理和推论，并给出了证明．而现在把所有的定理和推论整理为不等式的五大性质，并作一些简要的说明，强调这些关于不等式的事实和性质是解决不等式问题的依据．

不等式主要研究数的不等关系．它与数、式、方程、函数、三角等有密切的联系，在解决各类实际问题时也有广泛的应用．因此，不等式是进一步学习数学的基础，是掌握现代科学技术的重要工具．

不等式的性质是穿越本章内容的一条主线，无论是算术平均数与几何平均数的定理的证明及其应用，还是不等式的证明和解一些简单的不等式，无不以不等式的性质作为基础．

本节的重点是比较两个实数的大小，不等式的五个定理；难点是不等式的性质成立的条件

及其他应用.

①比较实数的大小.

教科书利用两城市的温度差异,引出比较两个实数的大小,只要考察它们的差即可.也可以从实数与数轴上的点一一对应出发,运用知识“在数轴上表示的两个数,右边的数总比左边的数大”就可以比较数的大小.

指出比较两实数大小的方法是求差比较法:

比较两个实数 a 与 b 的大小,归结为判断它们的差 $a-b$ 的符号,而这又必然归结到实数运算的符号法则.

比较两个代数式的大小,实际上是比较它们的值的大小,而这又归结为判断它们的差的符号.

②理清不等式的几个性质的关系.

教科书中利用两位同学的对话发现不等式共5个定理.从这几个性质的分类来说,可以分为三类:

(Ⅰ)有关不等式的理论性质;(Ⅱ)有关一个不等式的性质;(Ⅲ)有关两个不等式的性质.例1与例2说明利用作差比较法比较两式的大小的关键是对差的变形,通常把差化成一个常数或完全平方和或几个因式之积的形式,这样有利于判断差的符号.同时要注意分类讨论.例3利用不等式的基本性质比较大小.例4利用比较法和函数的单调性比较大小.综合可得比较大小的方法有5种.见后面教学建议.

教学建议

建议在教学中不要对这些性质的证明作过多的纠缠,而应该在说明这些性质的合理性上举例说明,引导学生进一步挖掘一些感兴趣的和富有时代感的素材,通过分析其中的基本数量关系,以加深学生对“不等关系是客观事物的基本数量关系”的认识.也可以类比等式的基本性质,对一些不等式的推断作一些分析验证,通过类比,使学生认识不等式与等式性质之间的相同点与不同点.

建立不等式模型,通过具体情境,对问题中包含的数量关系进行认真、细致的分析,找出其中的不等关系,并由此建立不等式.引导学生发现比较两个代数式的大小,实际上是比较它们的值的大小,而这又归结为判断它们的差的符号.

1.建立不等式模型:通过具体情境,对问题中包含的数量关系进行认真、细致的分析,找出其中的不等关系,并由此建立不等式.

2.比较大小的常用方法是:作差比较与作商比较.在数的比较大小过程中,要遵循这样的规律:异中求同,即先将这些数的部分因式化成相同的部分,再去比较它们剩余部分,就会很简单了.一般在数的比较大小中有如下几种方法:(1)作差比较法和作商比较法,前者和零比较,后者和1比较大小;(2)找中间量,往往是1,在这些数中,有的比1大,有的比1小;(3)计算所有数的值;(4)选用数形结合的方法,画出相应的图形;(5)利用函数的单调性等等.

活动是影响人类发展的决定性因素，学生的学习只有通过自主活动并从中体验、感悟、建构自己的知识经验，培养积极的学习情感，才能得到自身的发展. 但学生主动参与学习活动的方向、活动过程的积极化离不开教师的“导”. 本节课建议采用从生活中创设问题情境的方法激发学生学习兴趣，采用类比等式性质创设问题情境的方法，引导学生的自主探究活动. 在整个探究学习的过程中应充满师生之间、学生之间的交流和互动，应充分体现教师只是教学活动的组织者、引导者、合作者，学生才是学习的主体.

“教为不教，学为会学”，“授之以鱼”更要“授之以渔”. 在教的过程中，关键是教学生的学法，本节教给学生类比、猜想、验证等问题研究方法，培养学生善于动手、善于观察、善于思考的学习习惯. 利用学生的好奇心设疑、解疑，组织活泼、互动、有效的教学活动，鼓励学生积极参与，大胆猜想，使学生在自主探索和合作交流中理解和掌握本节课的内容.

(1)根据学生的生活经验，创设丰富的情境，使学生感受到在现实世界中存在大量的不等关系，了解不等式(组)的实际背景，教学中可以引导学生进一步挖掘一些他们感兴趣的和富有时代感的素材，通过分析其中的基本数量关系，加深学生对用不等式刻画现实世界中的不等关系的认识；

(2)在教学中应突出对学生应用意识的培养，不能只限于要求学生会解书本上的习题，还应引导学生从现实生活中发现问题，并能自觉地运用所学的不等式模型来解决问题.

3. 本章注重突出不等式的现实背景和实际应用，因此教学中应首先提供丰富的实际背景，然后通过对实际背景的分析、概括和抽象，建立不等式模型，并运用数学的方法研究不等式模型，最后再由此去解决包括现实原型在内的更加广泛的异类实际问题. 这样处理体现了数学知识的产生，发展过程，反映了教科书中知识的“来龙去脉”，有助于学生理解数学的本质，形成对数学完整的认识，同时也突出了数学的应用价值，有助于激发学生学习数学的兴趣，发展学生的应用意识与解决实际问题的能力.

参考例题

例 1 比较大小：

(1)$(a+3)(a-5)$与$(a+2)(a-4)$；(2)$\dfrac{a+m}{b+m}$与$\dfrac{a}{b}$(其中$b>a>0$，$m>0$).

分析 此题是两代数式比较大小，实际上是比较它们的值的大小，可以先作差，然后展开，合并同类项之后，判断差值正负，得出两个代数式的大小.

解 (1)$(a+3)(a-5)-(a+2)(a-4)=(a^2-2a-15)-(a^2-2a-8)=-7<0$，

$\therefore (a+3)(a-5)<(a+2)(a-4)$.

(2)$\dfrac{a+m}{b+m}-\dfrac{a}{b}=\dfrac{b(a+m)-a(b+m)}{b(b+m)}=\dfrac{m(b-a)}{b(b+m)}$，

$\because b>a>0$，$m>0$，$\therefore \dfrac{m(b-a)}{b(b+m)}>0$，所以$\dfrac{a+m}{b+m}>\dfrac{a}{b}$.

说明 不等式$\dfrac{a+m}{b+m}>\dfrac{a}{b}$($b>a>0$，$m>0$)在生活中可以找到原型：$b$ g 糖水中有 a g 糖

($b>a>0$)，若再添加 m g 糖($m>0$)，则糖水便甜了.

例 **2**　已知 $x>2$，比较 x^3+11x 与 $6x^2+6$ 的大小.

解　$$\begin{aligned}x^3+11x-(6x^2+6)&=x^3-3x^2-3x^2+11x-6\\&=x^2(x-3)+(-3x+2)(x-3)\\&=(x-3)(x-2)(x-1).\qquad(*)\end{aligned}$$

(1)当 $x>3$ 时，(*)式大于 0，所以 $x^3+11x>6x^2+6$；

(2)当 $x=3$ 时，(*)式等于 0，所以 $x^3+11x=6x^2+6$；

(3)当 $2<x<3$ 时，(*)式小于 0，所以 $x^3+11x<6x^2+6$.

说明　(1)比较大小的步骤：作差——变形——定号——结论；

(2)实数比较大小的问题一般可用作差比较法，其中变形常用因式分解、配方、通分等方法才能定号.

相关链接

几何不等式

平面图形中所含的线段长度、角的大小及图形的面积在许多情形下会呈现不等的关系. 由于这些不等关系出现在几何问题中，故称之为几何不等式. 几何不等式就其形式来说不外乎分为线段不等式、角不等式以及面积不等式三类，在解题中不仅要用到一些有关的几何不等式的基本定理，还需用到一些图形的面积公式. 下面先给出几个基本定理.

定理 **1**　在三角形中，任两边之和大于第三边，任两边之差小于第三边.

定理 **2**　同一个三角形中，大边对大角，小边对小角，反之亦然.

定理 **3**　在两边对应相等的两个三角形中，第三边大的，所对的角也大，反之亦然.

定理 **4**　三角形内任一点到两顶点距离之和，小于另一顶点到这两顶点距离之和.

定理 **5**　自直线 l 外一点 P 引直线 l 的斜线，射影较长的斜线也较长，反之，斜线长的射影也较长.

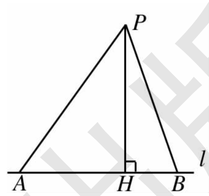


图 10－1

说明　如图 10－1 所示，PA，PB 是斜线，HA 和 HB 分别是 PA 和 PB 在 l 上的射影. 若 $HA>HB$，则 $PA>PB$；若 $PA>PB$，则 $HA>HB$. 事实上，由勾股定理知 $PA^2-HA^2=PH^2=PB^2-HB^2$，所以 $PA^2-PB^2=HA^2-HB^2$.

从而定理容易得证.

定理 **6**　在△ABC 中，点 P 是边 BC 上任意一点，则有 $PA\leqslant \mathrm{Max}\{AB,AC\}$，当点 P 为 A 或 B 时等号成立.

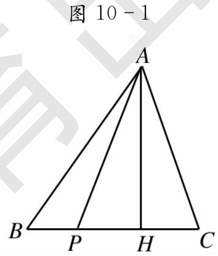


图 10－2

说明　$\mathrm{Max}\{AB,AC\}$表示 AB，AC 中的较大者，如图 10－2 所示，若 P 在线段 BH 上，则由于 $PH\leqslant BH$，由上面的定理 5 知 $PA\leqslant BA$，从而

$PA \leqslant \mathrm{Max}\{AB, AC\}$.

同理，若 P 在线段 HC 上，同样有 $PA \leqslant \mathrm{Max}\{AB, AC\}$.

例 1 在锐角三角形 ABC 中，$AB > AC$，AM 为中线，P 为 $\triangle AMC$ 内一点，证明：$PB > PC$（图 10－3）.

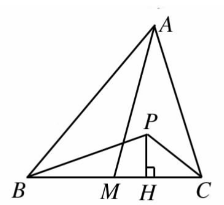


图 10－3

证明 在 $\triangle AMB$ 与 $\triangle AMC$ 中，AM 是公共边，$BM = MC$，且 $AB > AC$，由定理 3 知，$\angle AMB > \angle AMC$，所以 $\angle AMC < 90°$.

过点 P 作 $PH \perp BC$，垂足为 H，则 H 必定在线段 BM 的延长线上. 如果 H 在线段 MC 内部，则 $BH > BM = MC > HC$.

如果 H 在线段 MC 的延长线上，显然 $BH > HC$，所以 $PB > PC$.

例 2 已知 P 是 $\triangle ABC$ 内任意一点（图 10－4）.

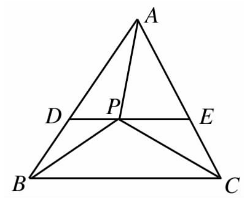


图 10－4

(1) 求证：$\frac{1}{2}(a+b+c) < PA + PB + PC < a+b+c$；

(2) 若 $\triangle ABC$ 为正三角形，且边长为 1，求证：$PA + PB + PC < 2$.

证明 (1) 由三角形两边之和大于第三边得

$PA + PB > c$，$PB + PC > a$，$PC + PA > b$.

把这三个不等式相加，两边除以 2，便得 $PA + PB + PC > \frac{1}{2}(a+b+c)$.

又由定理 4 可知 $PA + PB < a+b$，$PB + PC < b+c$，$PC + PA < c+a$.

把它们相加，再除以 2，便得 $PA + PB + PC < a+b+c$.

所以 $\frac{1}{2}(a+b+c) < PA + PB + PC < a+b+c$.

(2) 过 P 作 $DE \parallel BC$ 分别交正三角形 ABC 的边 AB，AC 于 D，E，如图 10－4 所示. 于是

$$PA < \mathrm{Max}\{AD, AE\} = AD,$$

$$PB < BD + DP,\ PC < PE + EC,$$

所以 $PA + PB + PC < AD + BD + DP + PE + EC = AB + DE + EC$，

又 $DE = AE$，因此 $PA + PB + PC < AB + AE + EC = AB + AC = 2$.

例 3 如图 10－5. 在线段 BC 同侧作两个三角形 ABC 和 DBC，使得 $AB = AC$，$DB > DC$，且 $AB + AC = DB + DC$. 若 AC 与 BD 相交于 E，求证：$AE > DE$.

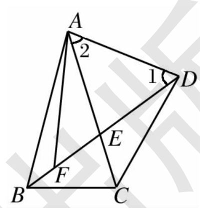


图 10－5

证明 在 DB 上取点 F，使 $DF = AC$，并连接 AF 和 AD. 由已知 $2DB > DB + DC = AB + AC = 2AC$，所以 $DB > AC$.

由于 $DB + DC = AB + AC = 2AC$，且 $DB = DF + FB = AC + FB$，

所以 $DC + BF = AC = AB$.

在 $\triangle ABF$ 中，$AF > AB - BF = DC$.

在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle ADF$ 中，$AD = AD$，$AC = DF$，$AF > CD$.

由定理 3，$\angle 1 > \angle 2$，所以 $AE > DE$.

10.2 一元二次不等式

教材线索

从实际问题"某地区为了增加农民的收入方案"中建立一元二次不等式，解一元二次不等式；应用一元二次不等式解决日常生活中的实际问题；解不等式的核心问题是不等式的同解变形，不等式的性质则是不等式变形的理论依据，方程的根、函数的性质和图象都与不等式的解法密切相关，要善于把它们有机地联系起来，互相转化.在解不等式中，换元法和图解法是常用的技巧之一.通过换元，可将较复杂的不等式化归为较简单的或基本不等式，通过构造函数、数形结合，则可将不等式的解化归为直观、形象的图形关系.

教学目标

(1)通过函数图象了解一元二次不等式与对应函数、方程的联系.

(2)会解一元二次不等式.

(3)掌握利用因式分解和讨论来求解一元二次不等式的方法及这种方法的推广运用.

(4)掌握将分式不等式转化为一元二次不等式求解.

(5)经历从实际情境抽象出一元二次不等式模型的过程，从中体会由实际问题建立数学模型的方法.

(6)利用二次函数图象求解含字母的一元二次不等式.

(7)让学生充分体会数学知识、数学思想方法在问题解决中的重要作用，进一步提高学习数学的兴趣.

(8)掌握利用二次函数图象求解一元二次不等式的方法.

(9)从不等式的解集出发求不等式中参数的值或范围的问题.

(10)从二次函数或是一元二次方程的角度来解决一元二次不等式的综合题.

教材分析

1.教学重点、难点：

从实例抽象出一元二次不等式模型，弄清一元二次方程、一元二次不等式及二次函数三者之间的关系及数形结合思想的运用，掌握一元二次不等式的解法，学会将分式不等式转化为一元二次不等式求解；运用一元二次不等式解决实际问题，学会利用二次函数图象求解含字母的一元二次不等式；从不等式的解集出发求不等式中参数的值或范围的问题，掌握一元二次不等

式恒成立的解题思路.

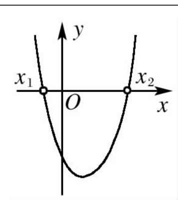
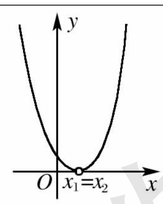
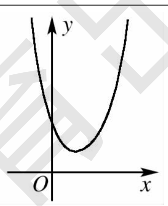
2. 在大纲版教科书的函数部分，借助于二次函数安排了二次不等式的内容. 这样安排已为广大教师所接受，其好处也是多方面的. 课标版教科书则把二次不等式的内容移至“必修 4”，在“必修 1”的函数内容中，强调函数“是描述现实世界变量之间的依赖关系的数学模型”，把重点放在函数概念的本质的理解、函数性质讨论以及函数的实际应用上，其用意固然是为了防止教师在集合的学习与函数概念的教学中，在求解定义域、值域等“细枝末节”的问题上对学生进行大量人为的、繁琐的训练，但这种“釜底抽薪”的做法似乎更多的是因为受到各个模块课时的限制而造成的无奈，许多首批参与实验的教师也对此提出质疑，认为这样处理值得商榷.

3. 一元二次不等式解集的求法对于高一学生而言并不会感到困难，但理解二次函数、一元二次方程与一元二次不等式解集之间的关系，则要经历观察、思考、探究的过程. 课标教科书着眼于让学生体验知识形成过程的精心设计值得我们在教学中细心体味，无论是一元二次不等式模型的建立，还是解法的归纳，都为学生的思维活动留足了空间. 这种从特殊到一般的处理方式符合学生的认知规律，有助于学生了解知识的形成过程和来龙去脉，加深对知识的理解，以及对隐藏在知识发生过程中的数学思想方法的领悟. 另外，教学中要控制不等式的难度，一般不要超出教科书的要求，一元二次不等式的求解只要达到基本要求即可，要淡化解不等式的技巧性要求，要注意加强与函数、方程的联系，积极渗透算法思想，突出不等式的实际背景及其应用，有关内容将在选修系列 4－5 中作进一步讨论.

4. 教科书中的例 1 是结合开口向上的二次函数图象可以直观求出不等式的解集. 例 2 的二次不等式的首项系数为负，则先化归为开口向上的二次函数. 例 3 说明 $\Delta=0$ 时情况. 例 4 说明不等式组的解法. 利用数轴取交集. 例 5 说明简单的分式不等式可化归为一元二次不等式来处理. 要注意同解变形. 例 6 说明解集与方程根之间关系，逆向思维. 例 8、例 9 为实际生活的一元二次不等式的应用，关键是建立模型.

教学建议

1. 一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0(a>0)$ 与相应的函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$、相应的方程 $ax^2+bx+c=0(a>0)$ 之间的关系：

判别式 $\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$ 的图象			

续表

判别式 $\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$的根	有两相异实根 $x_1,x_2(x_1<x_2)$	有两相等实根 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$	无实根
$ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$的解集	$\{x\mid x<x_1$ 或 $x>x_2\}$	$\left\{x\,\middle\vert\, x\neq-\dfrac{b}{2a}\right\}$	$\mathbf{R}$
$ax^2+bx+c<0$ $(a>0)$的解集	$\{x\mid x_1<x<x_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$

2.引导学生归纳解一元二次不等式的步骤：

(1)二次项系数化为正数；

(2)解对应的一元二次方程；

(3)根据一元二次方程的根，结合不等号的方向画图；

(4)写出不等式的解集.

参考例题

例 1 用一根长为 100 m 的绳子能围成一个面积大于 600 m^2 的矩形吗？当长、宽分别为多少米时，所围成的矩形的面积最大？

解　设矩形一边的长为 x(m)，则另一边的长为$(50-x)$ m，$0<x<50$. 由题意，得 $x(50-x)>600$，即 $x^2-50x+600<0$. 解得 $20<x<30$. 所以，当矩形一边的长在$(20,30)$的范围内取值时，能围成一个面积大于 600 m^2 的矩形.

用 S 表示矩形的面积，则 $S=x(50-x)=-(x-25)^2+625(0<x<50)$.

当 $x=25$ 时，S 取得最大值，此时 $50-x=25$. 即当矩形的长、宽都为 25 m 时，所围成的矩形的面积最大.

例 2 某小型服装厂生产一种风衣，日销货量 x 件与货价 p 元/件之间的关系为 $p=160-2x$，生产 x 件所需成本为 $C=500+30x$ 元，问：该厂日产量多大时，日获利不少于 1 300 元？

解　由题意，得$(160-2x)x-(500+30x)\geqslant 1\,300$，化简得 $x^2-65x+900\leqslant 0$，解之得 $20\leqslant x\leqslant 45$. 因此，该厂日产量在 20 件至 45 件时，日获利不少于 1 300 元.

例 3 汽车在行驶中，由于惯性的作用，刹车后还要继续向前滑行一段距离才能停住，我们称这段距离为“刹车距离”. 刹车距离是分析事故的一个重要因素.

在一个限速为 40 km/h 的弯道上，甲、乙两辆汽车相向而行，发现情况不对，同时刹车，但还是相碰了. 事后现场勘查测得甲车的刹车距离略超过 12 m，乙车的刹车距离略超过 10 m，又知甲、乙两种车型的刹车距离 S(m)与车速 x(km/h)之间分别有如下关系：$S_{甲}=0.1x+0.01x^2$，$S_{乙}=0.05x+0.005x^2$. 问：甲、乙两车有无超速现象？

分析　根据汽车的刹车距离可以估计汽车的车速.

解　由题意知,对于甲车,有 $0.1x+0.01x^2>12$,即 $x^2+10x-1\,200>0$,解得 $x>30$ 或 $x<-40$(不合实际意义,舍去),这表明甲车的车速超过 30 km/h.但根据题意刹车距离略超过 12 m,由此估计甲车车速不会超过限速 40 km/h.

对于乙车,有 $0.05x+0.005x^2>10$,即 $x^2+10x-2\,000>0$,解得 $x>40$ 或 $x<-50$(不合实际意义,舍去),这表明乙车的车速超过 40 km/h,超过规定限速.

例 4　已知 $A=\{x\mid x^2-3x+2\leqslant 0\}$,$B=\{x\mid x^2-(a+1)x+a\leqslant 0\}$.

(1)若 $A\subsetneqq B$,求 a 的取值范围;

(2)若 $B\subseteq A$,求 a 的取值范围;

(3)若 $A\cap B$ 为一元集,求 a 的取值范围;

(4)若 $A\cap B=B$,求 a 的取值范围;

解　由题意得 $A=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 2\}$,$B=\{x\mid (x-1)(x-a)\leqslant 0\}$.

(1)$\because A\subsetneqq B$,$\therefore a>2$.

(2)$\because B\subseteq A$,$\therefore 1\leqslant a\leqslant 2$.

(3)$\because A\cap B$ 只有一个元素,$\therefore a\leqslant 1$.

(4)$\because A\cap B=B$,$\therefore 1\leqslant a\leqslant 2$.

例 5　已知不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $\{x\mid 2<x<3\}$,求不等式 $cx^2-bx+a>0$ 的解集.

解　由题意 $\begin{cases}2+3=-\dfrac{b}{a},\\ 2\times 3=\dfrac{c}{a},\\ a<0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}b=-5a,\\ c=6a,\\ a<0.\end{cases}$

代入不等式 $cx^2-bx+a>0$ 得:$6ax^2+5ax+a>0(a<0)$.

即 $6x^2+5x+1<0$,$\therefore$ 所求不等式的解集为 $\left\{x\,\middle|\,-\dfrac{1}{3}<x<-\dfrac{1}{2}\right\}$.

例 6　已知一元二次不等式 $(m-2)x^2+2(m-2)x+4>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$,求 m 的取值范围.

解　$\because y=(m-2)x^2+2(m-2)x+4$ 为二次函数,$\therefore m\neq 2$.

$\because$ 二次函数的值恒大于零,即 $(m-2)x^2+2(m-2)x+4>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$.

$\therefore \begin{cases}m-2>0,\\ \Delta<0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}m>2,\\ 4(m-2)^2-16(m-2)<0,\end{cases}$ 解得:$\begin{cases}m>2,\\ 2<m<6.\end{cases}$

$\therefore m$ 的取值范围为 $\{m\mid 2<m<6\}$.

又 $m=2$ 时原不等式恒成立,因此,m 的取值范围是 $\{m\mid 2\leqslant m<6\}$.

拓展　1.已知二次函数 $y=(m-2)x^2+2(m-2)x+4$ 的值恒大于零,求 m 的取值范围.

2.已知一元二次不等式 $(m-2)x^2+2(m-2)x+4\leqslant 0$ 的解集为 $\varnothing$,求 m 的取值范围.

3.若不等式 $(m-2)x^2+2(m-2)x+4\leqslant 0$ 的解集为 $\varnothing$,求 m 的取值范围.

归纳　一元二次不等式恒成立情况小结:

$ax^2+bx+c>0(a\neq 0)$恒成立$\Leftrightarrow\begin{cases}a>0,\\ \Delta<0.\end{cases}$

$ax^2+bx+c<0(a\neq 0)$恒成立$\Leftrightarrow\begin{cases}a<0,\\ \Delta<0.\end{cases}$

例 **7** 若函数 $y=\sqrt{x^2+2kx+k}$中自变量 x 的取值范围是一切实数，求 k 的取值范围.

解 $\because y=\sqrt{x^2+2kx+k}$中自变量 x 的取值范围是 $\mathbf{R}$，$\therefore x^2+2kx+k\geqslant 0$ 恒成立.

$\therefore \Delta=4k^2-4k\leqslant 0$，$\therefore 0\leqslant k\leqslant 1$.

故 k 的取值范围是$\{k|0\leqslant k\leqslant 1\}$.

拓展 若将函数改为 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2kx+k}}$，如何求 k 的取值范围？

例 **8** 若不等式 $mx^2-2x+1-m<0$ 对满足 $-2\leqslant m\leqslant 2$ 的所有 m 都成立，求实数 x 的取值范围.

解 已知不等式可化为$(x^2-1)m+(1-2x)<0$.

设 $f(m)=(x^2-1)m+(1-2x)$，这是一个关于 m 的一次函数(或常数函数)，从图象上看，要使 $f(m)<0$ 在$-2\leqslant m\leqslant 2$ 时恒成立，其等价条件是：

$$\begin{cases}f(2)=2(x^2-1)+(1-2x)<0,\\ f(-2)=-2(x^2-1)+(1-2x)<0,\end{cases}\quad 即\begin{cases}2x^2+2x-3>0,\\ 2x^2-2x-1<0.\end{cases}$$

解得$\dfrac{-1+\sqrt{7}}{2}<x<\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$.

所以，实数 x 的取值范围是$\left(\dfrac{-1+\sqrt{7}}{2},\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$.

相关链接

品味不等式对生活中决策问题的影响

初学数学的人，大概都有过这样的一种情感经历，那就是自觉和不自觉地对等式和不等式有不同的偏爱倾向. 一般而言，因为内容顺序的原因和先入为主的习惯影响，人们总是比较容易喜欢等式和方程内容. 当然，这还跟普通民众对数学的习惯认识有关，人们评价数学时，总爱这样说：“数学嘛，1 是 1，2 是 2”，似乎这就是数学的特点，而它能在人们的生活中发挥作用、解决大量的问题，似乎也是因为如此. 相反，学习不等式知识，一般是在等式之后，“不等”关系或结论，总给人一种不准确、模糊不定的概念，让人不喜欢.

显然，以上认识是初学者的一种片面认识，喜好也是初学者的一种不成熟的偏爱. 随着学习的深入，学习者迟早会调整不正确的情感取向. 本文通过品味如下的一些例子，让初学者深刻领悟不等式不逊于等式或方程的功能和作用，彰显不等式在处理日常重要问题中的特殊本

领，从而让初学者尽快纠正这种不成熟的偏爱，使初学者尽快走上数学学习的正轨.

例 1 市政公司为绿化建设风景带，计划购买甲、乙两种树苗共 600 株，甲种树苗每株 50 元，乙种树苗每株 70 元. 有关统计表明，甲、乙两种树苗的成活率分别为 80% 和 95%.（注：成活率＝成活数量除以种植的数量×100%）. 若购买树苗的钱不超过 40 000 元，应如何选购甲、乙两种树苗？若希望这批树苗的成活率不低于 90%，且购买树苗的费用最低，应如何选购甲、乙两种树苗？并求出最低费用是多少元？

情境赏析：该题生活气息浓，现实意义强，易于激发求知欲望.

解 （1）设应购买甲种树苗 x 株，则乙种树苗为 $(600-x)$ 株，由题意得：$50x+70(600-x)\leqslant 40\ 000$，解得：$x\geqslant 100$，且 $600-x\leqslant 500$. ∴购买甲种树苗应不低于 100 株，而乙种树苗不超过 500 株.

（2）由题意可得：$80\%x+95\%(600-x)\geqslant 90\%\times 600$，解得：$x\leqslant 200$ 且 $600-x\geqslant 400$，综合可知：$100\leqslant x\leqslant 200$，∴当购买甲种树苗 $x=200$ 时，费用最低. 这时最低费用为：$50\times 200+70\times 400=10\ 000+28\ 000=38\ 000$（元）.

亮点品味：本题（1）（2）两问既相互独立，又相互联系. 若只受 40 000 元购物款限制时，x 取值范围较宽；但在此基础上，进一步提出成活率要求时，x 的取值范围就变窄了许多，这便是第（2）问.

例 2 福林制衣厂现有 24 名制作服装工人，每天都制作某种品牌的衬衫和裤子，每人每天可制作衬衫 3 件或裤子 5 条.（1）若该厂要求每天制作的衬衫和裤子数量相等，则应安排制作衬衫和裤子各多少人？（2）已知制作一件衬衫可获得利润 30 元，制作一条裤子可获得利润 16 元，若该厂要求每天获得的利润不少于 2 100 元，则至少需要安排多少名工人制作衬衫？

解 （1）设应安排 x 名工人制作衬衫，则制作裤子人数应为 $(24-x)$ 人，依题意，得：$3x=5(24-x)$，解得：$x=15$，$24-x=24-15=9$. ∴应安排 15 名工人制作衬衫，9 名工人制作裤子.（2）设应安排 y 名工人制作衬衫，依题意，得：$3\times 30y+5\times 16(24-y)\geqslant 2\ 100$，解得：$y\geqslant 18$. ∴至少应安排 18 名工人制作衬衫.

亮点品味：本题题目简单，生活气息仍然浓厚. 显然，第（1）问是等式中的方程问题，而第（2）问却是列不等式解应用题的问题，这使本题有了更多的回味余地. 它可以让人真实地感到：不等式在处理生活中有关决策问题时，作用一点不逊于等式或方程.

例 3 某公司要招聘甲、乙两类员工 150 人，甲、乙两类员工的月工资分别为 600 元和 1 000元.（1）现要求乙类员工的人数不少于甲类员工的人数的 2 倍，问甲、乙两类员工各招聘多少人时，可使得公司每月所付工资最少？最少工资总额是多少？（2）在招聘两类员工月工资总额最少的条件下，由于完成项目优秀，公司决定用 10 万元钱奖励招聘的这批员工，其中甲类员工的奖金不大于乙类员工的奖金，但每人不得低于 200 元，若以百元为单位发放，试问有几种发放方案？请具体写出.

情境赏析：公司招两类员工，其待遇有高低，为少付工资，老板当然愿选择雇用廉价劳动力；但岗位需要，老板也要看情况办事. 本题贴近生活，但数学是老板的参谋，请看下面的解答.

解　(1)设招聘甲类员工 x 人，乙类员工 y 人，公司每月所付工资总额为 w 元，则由题意可得：

$$\begin{cases}x+y=150, & ①\\ 2x\leqslant y, & ②\\ w=600x+1000y. & ③\end{cases}$$

由①得：$y=150-x$.　④

将④代入②得：$2x\leqslant 150-x$，即 $x\leqslant 50$. 又∵ x 表示甲类员工人数，∴ $1\leqslant x\leqslant 50$，且为正整数.

将④代入③得函数式：$w=600x+1\,000(150-x)=-400x+150\,000$，∵一次项系数 $a=-400<0$，∴工资总额 w 随 x 的增大而减小，∴当 $x=50$ 时，w 取得最小值，这时，$w_{\min}=-400\times 50+150\,000=130\,000$(元).

(2)设公司奖给甲类员工每人 m 百元，乙类员工每人 n 百元，则由题意可得

$50m+100n=1\,000$，　⑤

$2\leqslant m\leqslant n$，　⑥

由⑤化简得：$m=20-2n$.　⑦

将⑦代入⑥得：$2\leqslant 20-2n\leqslant n$，解得：$n\geqslant \frac{20}{3}(m\geqslant 2)$，即 $n=7,8,9,10,\cdots$ 当 $n=7$ 时，由⑦得：$m=6$. 当 $n=8$ 时，由⑦得：$m=4$. 当 $n=9$ 时，由⑦得：$m=2$. ∵ $m\geqslant 2$，∴奖励方案仅有以上三种，即奖给甲类员工每人 700 元、乙类员工每人 600 元；或甲类员工每人 800 元、乙类员工每人 400 元；或甲类员工每人 900 元、乙类员工每人 200 元.

亮点品味：过去的老教科书，侧重应试教育，重在题型训练，学生可能会认为：讨论“最值问题”，应该是二次函数功能，但事实上，此题只用了一次函数和不等式的知识，而且简单、适用，又有代表性，所以本题对克服学生的某些错误的“定式思维”有一定作用. 其次，一次函数当自变量取遍实数而没有限制的时候，它是没有“最值问题”出现的，但是一次函数在某些“实际背景”下，存在“最值问题”. 而这种“实际背景”，通常是限制自变量取值范围的客观现实情境，这种情境，也正是人们的某种现实需要. 而如何刻画人们的这些现实需要，在数学方法里，通常就是不等式的职责了. 所以在数学学习中，函数是非常重要的，但是它与不等式却始终是一对孪生姊妹.

10.3 基本不等式及其应用

教材线索

教科书根据某公司设计一块绿化带的设计方案中提出的问题，引导学生发现两个正数的算术平均数与几何平均数的定理，最后，通过几个例题，说明此定理在解决数学问题和实际问题中的应用. 通过例题分别介绍了证明不等式的两种基本方法——比较法、综合法以及一种几何证法.

教学目标

(1)了解两个正数的算术平均数与几何平均数的概念，能推导并掌握基本不等式.

(2)理解定理的几何意义，能够简单应用定理证明不等式.

(3)进一步掌握基本不等式.

(4)会运用基本不等式求某些函数的最值，求最值时注意“一正、二定、三相等”这一条件.

(5)进一步掌握用均值不等式求函数的最值问题.

(6)能综合运用函数关系、不等式知识解决一些实际问题.

教材分析

本节主要内容是使学生了解基本不等式的代数、几何背景及基本不等式的证明，通过基本不等式的实际应用，感受数学的应用价值，重点是应用数形结合的思想理解基本不等式，并从不同的角度探究其证明过程. 根据课标立足基础、螺旋上升的教学要求，教学时要突出用基本不等式解决问题的基本方法和基本的应用，如运用基本不等式可解决周长、面积、造价的最大(小)值问题等. 对不等式证明的教学不必加深，基本不等式仅限于二元均值不等式，不必推广到三个以上变量的情形，有关内容会在后续学习的选修 1－2 和选修 2－2 的推理与证明、选修 4－5 中的不等式选讲中得到加强.

1. 教学重点，难点：

基本不等式的证明及其简单应用；基本不等式的灵活运用；化实际问题为数学问题；会恰当地运用基本不等式求最值.

2.把$\frac{a+b}{2}$称为a,b的算术平均数,称$\sqrt{ab}$为a,b的几何平均数.因而,二元均值定理可以叙述为:两个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数.如果把$\frac{a+b}{2}$看作是正数a,b的等差中项,$\sqrt{ab}$看作是正数a,b的等比中项,那么二元均值定理还可以叙述为:两个正数的等差中项不小于它们的等比中项.

3.一般地,数学中的定理、公式揭示了若干量之间的本质关系,但不能定格于某一种特殊形式,因此不等式$a^2+b^2\geqslant 2ab$的形式可以是$a^2\geqslant 2ab-b^2$,也可以是$ab\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}$,还可以是$a+\frac{b^2}{a}\geqslant 2b(a>0)$,$\frac{b^2}{a}\geqslant 2b-a$等.解题时不仅要利用原来的形式,而且要掌握它的几种变形形式及公式的逆用等,以便灵活运用.

4.尽管二元均值定理的应用范围极广,推论和相关结论也很多,但其本身终究是由不等式的意义、性质推导出来的.凡是用它可以获证的不等式,均可以直接根据不等式的意义、性质证得.因此,在算术平均数与几何平均数定理的应用中,不可忽视不等式的意义、性质等概念在处理有关不等式论证方面的根本作用.

5.二元均值不等式不但可以处理两个正数的和与积这类结构的不等式,结合不等式的性质还可以处理两个正数的平方和、倒数和与其它变形式的结构,由公式$a^2+b^2\geqslant 2ab$和$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$可以得到以下几个重要结论:

①$a^2+b^2\geqslant -2ab$(当且仅当$a=-b$时取“=”号);

②$a^2+b^2\geqslant 2|ab|$(当且仅当$|a|=|b|$时取“=”号);

③$a^2+b^2\geqslant -2|ab|$(当且仅当$a=b=0$时取“=”号);

④$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$($a,b$都是正数,当且仅当$a=b$时等号成立).

6.二元均值不等式还能处理几个正数的平方和与和、倒数和与和、根式和与和及两两之积与和结构形式的不等式问题,但在处理这些结构型的不等式时,要注意与其它依据相结合来处理.常见结构的不等式的处理方法归纳如下:

(1)$ab+bc+ca$与$a+b+c$型

利用$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$与$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$相结合即可.

(2)$a^2+b^2+c^2$与$a+b+c$型

利用$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$乘以2再加上$a^2+b^2+c^2$即可.

(3)$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$与$a+b+c$型

只要对(2)中每个字母进行开方代换即可.

7.利用均值定理可以求函数或代数式的最值问题:

(1)当a,b都为正数,且ab为定值时,有$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$(定值),当且仅当$a=b$时取“=”号,

此时 $a+b$ 有最小值；

(2)当 a,b 都为正数，且 $a+b$ 为定值时，有 $ab\leqslant\frac{(a+b)^2}{4}$（定值），当且仅当 $a=b$ 时取"="号，此时 ab 有最大值.

以上两类问题可简称为"积大和小"问题.

8. 创设应用算术平均数与几何平均数定理使用的条件，合理拆分项或配凑因式是经常用的解题技巧，而拆与凑的过程中，一要考虑定理使用的条件（两数都为正）；二要考虑必须使和或积为定值；三要考虑等号成立的条件（当且仅当 $a=b$ 时取"="号），它具有一定的灵活性和变形技巧.

9. 教科书中的例 3 是二元均值定理的直接推论，可以作为结论使用，例 4、例 5 分别是积定与和定的代表题型. 例 6、例 7 分别是实际生活中的最值问题处理案例.

教学建议

1. 在使用公式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 和 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ 时，要注意这两者成立的条件是不相同的，前者只要求 a,b 都是实数，而后者要求 a,b 都是正数.

2. 在使用二元均值定理求最值时，必须具备三个条件：①在所求最值的代数式中，各变数均应是正数（如不是，则进行变号转换）；②各变数的和或积必须为常数，以确保不等式一边为定值（如不是，则进行拆项或分解，务必使不等式的一端的和或积为常数）；③各变数有相等的可能（即相等时，变量字母有实数解，且在定义域内，如无，则说明拆项、分解不当，此时，应重新拆项、分解或改用其它方法，比如，已知 $x\in[2,3]$，求函数 $y=x+\frac{1}{x}$ 的最小值，从形式上看可以使用二元均值定理，但等号成立的条件不具备，因此，要考虑函数的单调性把问题解决）.

3. 在使用均值定理证明问题时，要注意它们反复使用后，再相加、相乘时字母应满足的条件及多次使用后等号成立的条件是否一致，若不一致，则不等式中的等号不能成立.

4. 不等式的应用题大部分以函数的面目出现，在解决范围问题或求最值时，均值不等式为主要工具，从而解决实际问题. 解题步骤：(1)先理解题意，设变量，设变量时一般把要求最值的变量定为函数；(2)建立相应的函数关系，把实际问题抽象为函数的最值问题；(3)在定义域内，求出函数的最值；(4)正确写出答案.

5. 运用基本不等式求最值常用的变形方法有：(1)运用拆分和配凑的方法变成和式和积式；(2)配凑出和为定值；(3)配凑出积为定值；(4)将限制条件整体代入.

6. 分式函数求最值，如果 $y=f(x)$ 可表示为 $y=mg(x)+\frac{A}{g(x)}+B$ 的形式，且 $g(x)$ 在定义域内恒正或恒负，$A>0$，$m>0$，则可运用均值不等式来求最值.

7. 在给出和为定值，求和的最值时，一般情况都要对所求式子进行变形，用已知条件进行代换，变形之后再利用均值不等式进行求最值.

8.题中所求的式子带有根式，而且不能直接用均值不等式来求解时，则可采用逆向思维来求解，对不等式逆向转换，本类题型一般情况都给出 x 的取值范围，根据取值范围来进行逆向转换.

9.不等式的变形在证明过程中或求最值时，有着广泛应用，如：当 $ab>0$ 时，$a^2+b^2\geqslant 2ab$ 同时除以 ab 得 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2$ 或 $\frac{b}{a}-1\geqslant 1-\frac{a}{b}$ 等.

参考例题

例 1　(1)求 $\lg x+\log_x 10(x>1)$ 的最值，并求取最值时的 x 的值；

(2)若上题改成 $0<x<1$，结果将如何？

解　(1)$\because x>1$，$\therefore \lg x>0$，$\log_x 10>0$，于是 $\lg x+\log_x 10\geqslant 2\sqrt{\lg x\log_x 10}=2$，

当且仅当 $\lg x=\log_x 10$，即 $x=10$ 时，等号成立，

$\therefore \lg x+\log_x 10(x>1)$ 的最小值是 2，此时 $x=10$.

(2)$\because 0<x<1$，$\lg x<0$，$\log_x 10<0$，于是 $(-\lg x)+(-\log_x 10)\geqslant 2$，

从而 $\lg x+\log_x 10\leqslant -2$，$\therefore \lg x+\log_x 10(0<x<1)$ 的最大值是 -2，此时 $x=\frac{1}{10}$.

例 2　求 $y=x(4-x)(0<x<4)$ 的最大值，并求取最值时的 x 的值.

解　$\because 0<x<4$，$\therefore x>0$，$4-x>0$，$\therefore \sqrt{x(4-x)}\leqslant\frac{x+4-x}{2}=2$，

则 $y=x(4-x)\leqslant 4$，当且仅当 $x=4-x$，即 $x=2\in(0,4)$ 时取等号.

$\therefore$ 当 $x=2$ 时，$y=x(4-x)(0<x<4)$ 取得最大值 4.

例 3　若 $x>-1$，则 x 为何值时 $x+\frac{1}{x+1}$ 有最小值，最小值为多少？

解　$\because x>-1$，$\therefore x+1>0$，$\therefore \frac{1}{x+1}>0$，$\therefore x+\frac{1}{x+1}=x+1+\frac{1}{x+1}-1\geqslant 2\sqrt{(x+1)\cdot\frac{1}{x+1}}-1=2-1=1$，当且仅当 $x+1=\frac{1}{x+1}$ 即 $x=0$ 时 $\left(x+\frac{1}{x+1}\right)_{\min}=1$.

例 4　若 $x+2y=1$，求 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值.

解　$\because x+2y=1$，$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+2y}{x}+\frac{x+2y}{y}=1+\frac{2y}{x}+2+\frac{x}{y}=3+\left(\frac{2y}{x}+\frac{x}{y}\right)\geqslant 3+2\sqrt{2}$.

当且仅当 $\begin{cases}\frac{2y}{x}=\frac{x}{y},\\ x+2y=1,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x=\sqrt{2}-1,\\ y=\frac{2-\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ 时取等号，

$\therefore$ 当 $x=\sqrt{2}-1$，$y=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ 时，$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 取最小值 $3+2\sqrt{2}$.

例 5　用长为 $4a$ 的铁丝围成矩形，怎样才能使所围的矩形面积最大？

解　设矩形的长为 $x(0<x<2a)$，则宽为 $2a-x$，

矩形面积 $S=x(2a-x)$，且 $x>0$，$2a-x>0$.

由 $\sqrt{x(2a-x)}\leqslant\dfrac{x+(2a-x)}{2}=a$，当且仅当 $x=2a-x$，即 $x=a$ 时取等号，

由此可知，当 $x=a$ 时，$S=x(2a-x)$ 有最大值 a^2.

答：将铁丝围成正方形时，才能有最大面积 a^2.

说明　此题也可转化为求二次函数 $S=x(2a-x)$ 的最大值.

例 **6**　某食品厂定期购买面粉，已知该厂每天需要面粉 6 t，每吨面粉的价格为 1 800 元，面粉的保管等其它费用为平均每吨每天 3 元，购面粉每次需支付运费 900 元. 求该厂多少天购买一次面粉，才能使平均每天所支付的总费用最少？

解　设该厂 x 天购买一次面粉，平均每天所支付的总费用为 y 元.

$\therefore$ 购买面粉的费用为 $6\times 1\,800x=10\,800x$ 元，

保管等其它费用为 $3\times(6+12+\cdots+6x)=9x(x+1)$，

$\therefore y=\dfrac{10\,800x+9x(x+1)+900}{x}=10\,809+9\left(x+\dfrac{100}{x}\right)\geqslant 10\,809+9\times 2\sqrt{x\cdot\dfrac{100}{x}}=10\,989$，

当 $x=\dfrac{100}{x}$，即 $x=10$ 时，y 有最小值 10 989 元.

答：该厂 10 天购买一次面粉，才能使平均每天所支付的总费用最少.

例 **7**　甲、乙两地相距 S km，汽车从甲地匀速行驶到乙地，速度不得超过 c km/h，已知汽车每小时的运输成本（以元为单位）由可变部分和固定部分组成：可变部分与速度 x(km/h) 的平方成正比，比例系数为 b，固定部分为 a 元，

(1) 把全程运输成本 y(元) 表示为速度 x(km/h) 的函数，指出定义域；

(2) 为了使全程运输成本最小，汽车应以多大速度行驶？

解　(1) 由题知，汽车从甲地匀速行驶到乙地所用时间为 $\dfrac{S}{x}$，全程运输成本为 $y=a\cdot\dfrac{S}{x}+bx^2\cdot\dfrac{S}{x}=S\left(\dfrac{a}{x}+bx\right)$，

所以，函数及其定义域为 $y=a\cdot\dfrac{S}{x}+bx^2\cdot\dfrac{S}{x}=S\left(\dfrac{a}{x}+bx\right)$，$x\in(0,c]$.

(2) 由题知 S,a,b,x 都为正数，故有 $S\left(\dfrac{a}{x}+bx\right)\geqslant 2S\sqrt{ab}$，

当且仅当 $\dfrac{a}{x}=bx$，即 $x=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ 时上式等号成立；

若 $\sqrt{\dfrac{a}{b}}\leqslant c$，则当 $x=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ 时，全程运输成本 y 最小；若 $\sqrt{\dfrac{a}{b}}>c$，当 $x\in(0,c]$ 时，

有 $S\left(\dfrac{a}{x}+bx\right)-S\left(\dfrac{a}{c}+bc\right)=S\left[\left(\dfrac{a}{x}-\dfrac{a}{c}\right)+(bx-bc)\right]=\dfrac{S}{xc}(c-x)(a-bcx)$，

$\because c-x\geqslant 0,\ a>bc^2$，$\therefore a-bcx\geqslant a-bc^2>0$，

$\therefore S\left(\dfrac{a}{x}+bx\right)\geqslant S\left(\dfrac{a}{c}+bc\right)$，当且仅当 $x=c$ 时上式等号成立，即当 $x=c$ 时，全程运输成本

y 最小.

综上:为使全程运输成本 y 最小,当 $\sqrt{\frac{a}{b}}\leqslant c$ 时,行驶速度应为 $x=\sqrt{\frac{a}{b}}$;

当 $\sqrt{\frac{a}{b}}>c$ 时,行驶速度应为 $x=c$.

例 **8** 四边形 $ABCD$ 的两条对角线相交于 O,如果$\triangle AOB$ 的面积为 4,$\triangle COD$ 的面积为 16,求四边形 $ABCD$ 的面积 S 的最小值,并指出 S 最小时四边形 $ABCD$ 的形状.

解 设 $OA=a,OB=b,OC=c,OD=d,\angle AOB=\angle COD=\alpha$,则

$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}ab\sin\alpha=4,S_{\triangle COD}=\frac{1}{2}cd\sin\alpha=16$,

$S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}bc\sin(\pi-\alpha)=\frac{1}{2}bc\sin\alpha,S_{\triangle AOD}=\frac{1}{2}ad\sin(\pi-\alpha)=\frac{1}{2}ad\sin\alpha$,

$$\begin{aligned}\therefore S&=S_{\triangle AOB}+S_{\triangle COD}+S_{\triangle BOC}+S_{\triangle AOD}=4+16+\frac{1}{2}bc\sin\alpha+\frac{1}{2}ad\sin\alpha\\&\geqslant 20+2\sqrt{\frac{1}{2}bc\sin\alpha\cdot\frac{1}{2}ad\sin\alpha}\\&=20+2\sqrt{4\times16}=36,\text{当且仅当 } bc=ad \text{ 时取“=”},\end{aligned}$$

$\therefore S$ 的最小值为 36,此时由 $bc=ad$ 得:$\frac{b}{d}=\frac{a}{c}$,即$\frac{OB}{OD}=\frac{OA}{OC}$,$\therefore AB\parallel CD$,即四边形是梯形.

相关链接

均值不等式在求最值中的简单应用

一、基本不等式的内容及使用要点

利用基本不等式求函数最值的方法使用范围较广泛,既可适用于已学过的二次函数,又可适用于分式函数、高次函数、无理函数.

利用基本不等式求函数最值时,可能三个条件(一正、二定、三相等)不一定满足,此时不能认为该函数不存在最值,因为通过化归思想或初等变形等手段可以使条件得到满足.常用的初等变形手段有均匀裂项、增减项、配系数等.

在利用基本不等式求最值时,若不能直接得到结论,应考虑与间接法的解题思路连用,如通过解不等式的途径.

一般说来,“见和想积,拆低次,凑积为定值,则和有最小值;见积想和,拆高次,凑和为定值,则积有最大值”.

二、基本不等式求最值的应用

例 **1** 已知 $a>1,0<b<1$,求证:$\log_a b+\log_b a\leqslant-2$.

解题思路分析:

由对数函数可知：$\log_b a=\dfrac{1}{\log_a b}$，$\log_b a<0$，因此由 $\log_a b+\dfrac{1}{\log_a b}$ 的结构特点联想到用基本不等式去缩小，但相等条件显然不满足，应利用相反数的概念去转化.

证明　∵ $\log_a b<0$，

∴ $-\log_a b>0$.

∴ $-\log_a b+\dfrac{1}{-\log_a b}\geqslant 2\sqrt{(-\log_a b)\cdot\dfrac{1}{-\log_a b}}=2$.

∴ $\log_a b+\dfrac{1}{\log_a b}\leqslant -2$.

即 $\log_a b+\log_b a\leqslant -2$.

当且仅当 $-\log_a b=\dfrac{1}{-\log_a b}$，即 $\log_a b=-1$ 时，等号成立，此时 $ab=1$.

例 2　已知 x,y,z 均为正数，且 $xyz(x+y+z)=1$，求证：$(x+y)(y+z)\geqslant 2$.

解题思路分析：

这是一个含条件的不等式的证明，欲证不等式的右边为常数 2，联想到二元基本不等式及条件等式中的“1”. 下面关键是凑出因式 xyz 和 $x+y+z$.

证明　$(x+y)(y+z)=xy+xz+y^2+yz=(xy+y^2+yz)+xz=y(x+y+z)+xz$.

将 $y(x+y+z)$，xz 分别看成是两个因式，得用二元基本不等式：

$y(x+y+z)+xz=2\sqrt{y(x+y+z)\cdot xz}=2\sqrt{xyz(x+y+z)}=2$，

当且仅当 $\begin{cases}y(x+y+z)=xz,\\ xyz(x+y+z)=1\end{cases}$ 时等号成立.

例 3　(1) 已知 $x>1$，求 $3x+\dfrac{4}{x-1}+1$ 的最小值；

(2) 已知 x,y 为正实数，且 $x^2+\dfrac{y^2}{2}=1$，求 $x\sqrt{1+y^2}$ 的最大值；

(3) 已知 x,y 为正实数，$3x+2y=10$，求函数 $W=\sqrt{3x}+\sqrt{2y}$ 的最值；

(4) 已知 $x>0$，求函数 $f(x)=4x+\dfrac{9}{x^2}$ 的最小值；

(5) 已知 $a>b>0$，求函数 $y=a+\dfrac{1}{(a-b)b}$ 的最小值；

(6) 求函数 $y=x(10-x)(14-3x)\left(0<x<\dfrac{14}{3}\right)$ 的最大值；

(7) 求函数 $y=\sin^2\theta\cos\theta$，$\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的最值.

解题思路分析：

这一组题目主要介绍在利用基本不等式求最大值或最小值时，为满足“一正、二定、三相等”的条件所涉及的一些变形技巧.

(1) 在分式的位置凑出分母 $x-1$，在 $3x$ 后面施加互逆运算：± 3.

原式$=(3x-3)+3+\frac{4}{x-1}+1=3(x-1)+\frac{4}{x-1}+4\geqslant 2\sqrt{3(x-1)\cdot\frac{4}{x-1}}+4=4\sqrt{3}+4$.

(2)因条件和结论分别是二次和一次，故采用公式$ab\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}$，同时还应化简$\sqrt{1+y^2}$中$y^2$前面的系数为$\frac{1}{2}$.

即$x\sqrt{1+y^2}=x\sqrt{2\cdot\frac{1+y^2}{2}}=\sqrt{2}x\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{y^2}{2}}$.

下面将x，$\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{y^2}{2}}$分别看成两个因式，则

$$x\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{y^2}{2}}\leqslant\frac{x^2+\left(\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{y^2}{2}}\right)^2}{2}=\frac{x^2+\frac{y^2}{2}+\frac{1}{2}}{2}=\frac{3}{4},$$

$\therefore x\sqrt{1+y^2}=\sqrt{2}\cdot x\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{y^2}{2}}\leqslant\frac{3}{4}\sqrt{2}$.

(3)若利用算术平均与平方平均之间的不等关系：$\frac{a+b}{2}\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}$，则本题很简单. $\sqrt{3x}+\sqrt{2y}\leqslant\sqrt{2}\cdot\sqrt{(\sqrt{3x})^2+(\sqrt{2y})^2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3x+2y}=2\sqrt{5}$.

否则，可以这样思考：

条件与结论均为和的形式，设法直接用基本不等式，应通过平方化函数式为积的形式，再向“和为定值”的条件靠拢.

$\because W>0, W^2=3x+2y+2\sqrt{3x}\cdot\sqrt{2y}\leqslant 10+(\sqrt{3x})^2+(\sqrt{2y})^2=10+(3x+2y)=20$,

$\therefore W\leqslant\sqrt{20}=2\sqrt{5}$.

(4)函数式为和的形式，故考虑凑积为常数. 分母为x的二次，为使积的结果在分式位置上出现x^2，应对$4x$均匀裂项，裂成两项即可.

$$f(x)=2x+2x+\frac{9}{x^2}\geqslant 3\sqrt[3]{2x\cdot 2x\cdot\frac{9}{x^2}}=\sqrt[3]{36}.$$

(5)本题思路同(1)：

$$y=(a-b)+b+\frac{1}{(a-b)}\geqslant 3\sqrt[3]{(a-b)b\cdot\frac{1}{(a-b)b}}=3.$$

(6)配x项前面系数为4，使得与后两项和式中的x相消

$$y=\frac{1}{3}(4x)(10-x)(14-3x)\leqslant\frac{1}{3}\left(\frac{4x+10-x+14-3x}{3}\right)^2=\frac{1}{3}\left(\frac{24}{3}\right)^3=\frac{512}{3}.$$

(7)因式为积的形式，设法凑和为常数，注意到$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$为常数，应对解析式平方.

$$\because y>0, y^2=\sin^4\theta\cos^2\theta=\sin^2\theta\cdot\sin^2\theta\cdot\cos^2\theta=\frac{1}{2}\sin^2\theta\cdot\sin^2\theta\cdot(2\cos^2\theta)$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{\sin^2\theta+\sin^2\theta+2\cos^2\theta}{3}\right)^3=\frac{4}{27},$$

$\therefore y \leqslant \frac{2}{9}\sqrt{3}$.

例 4　已知 a,b 为正实数，$2b+ab+a=30$，求函数 $y=\frac{1}{ab}$的最小值.

解题思路分析：

这是一个二元函数的最值问题，通常有两个途径，一是通过消元，转化为一元函数问题，再用单调性或基本不等式求解，对本题来说，这种途径是可行的；二是直接用基本不等式，对本题来说，因已知条件中既有和的形式，又有积的形式，不能一步到位求出最值，考虑用基本不等式放缩后，再通过解不等式的途径进行.

解　（方法一）$a=\frac{30-2b}{b+1}$，$ab=\frac{30-2b}{b+1}\cdot b=\frac{-2b^2+30b}{b+1}$，

由 $a>0$ 得，$0<b<15$.

令 $t=b+1$，$1<t<16$，$ab=\frac{-2t^2+34t-32}{t}=-2\left(t+\frac{16}{t}\right)+34$.

$\because t+\frac{16}{t} \geqslant 2\sqrt{t\cdot\frac{16}{t}}=8$，

$\therefore ab \leqslant 18$，$\therefore y \geqslant \frac{1}{18}$，

当且仅当 $t=4$，即 $b=3$，$a=6$ 时，等号成立.

（方法二）由已知得：$30-ab=a+2b$.

$\because a+2b \geqslant 2\sqrt{2ab}$，$\therefore 30-ab \geqslant 2\sqrt{2ab}$.

令 $u=\sqrt{ab}$，则 $u^2+2\sqrt{2}u-30 \leqslant 0$，$-5\sqrt{2} \leqslant u \leqslant 3\sqrt{2}$，

$\therefore \sqrt{ab} \leqslant 3\sqrt{2}$，$ab \leqslant 18$，$y \geqslant \frac{1}{18}$.

经验：方法一，通过消元得到一个分式函数，在分子（或分母）中含有二次式. 这种类型的函数一般都可转化为 $x+\frac{1}{x}$ 型，从而用基本不等式求解. 其他处理方法，可以让学生们自己去仔细体会. 实际上，一般含二次式的分式函数 $y=\frac{ax^2+bx+c}{mx^2+nx+p}$（$a,b,c,m,n,p$ 不全为零）均可用此方法求解.

例 5　有一个阻值为 8 Ω 的电阻 R_1 与一个最大阻值为 24 Ω 的滑动变阻器 R_2 串联，接在电压 $U=4$(V) 的电源上，问 R_2 为多少时，R_2 消耗的电功率 P_2 最大？

解　（方法一）使用均值不等式 $(a+b)^2 \geqslant 4ab$，

$P_2=I^2R_2=\left(\frac{U}{R_1+R_2}\right)^2R_2=\frac{16R_2}{(8+R_2)^2} \leqslant \frac{16R_2}{4\cdot 8R_2}=\frac{1}{2}$，

$\therefore$ 当 $R_2=8$ 时，$(P_2)_{\max}=\frac{16}{0+32}=\frac{1}{2}$.

（方法二）使用均值不等式 $a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$.

$P_2 = I^2 R_2 = \left(\frac{U}{R_1 + R_2}\right)^2 R_2 = \frac{16R_2}{(8+R_2)^2} = \frac{16}{R_2 + \frac{64}{R_2} + 16} \leqslant \frac{16}{2\sqrt{64}+16} = \frac{1}{2}$,

∴当 $R_2 = \frac{64}{R_2} > 0$ 即 $R_2 = 8$ 时，$(P_2)_{\max} = \frac{16}{0+32} = \frac{1}{2}$.

例 **6**　某公司欲建连成片的网球场数座，用 120 万元购买土地 10 000 m^2，该球场每座的建筑面积为 1 000 m^2，球场总建筑面积的每平方米的平均建设费用与球场数有关，当该球场建 x 个时，每平方米的平均建设费用用 $f(x)$ 表示，且 $f(n) = f(m)\left(1 + \frac{n-m}{20}\right)(n > m, n \in \mathbf{N})$，已知建 5 座球场时，每平方米的平均建设费用为 400 元，为了使该球场每平方米的综合费用最省（综合费用是建设费用与购地费用之和），公司应建多少座球场？

解　设建成 x 个球场，则每平方米的购地费用为 $\frac{128 \times 10\,000}{1\,000x} = \frac{1\,280}{x}$,

依题意知 $f(5) = 400$，则 $f(x) = f(5)\left(1 + \frac{x-5}{20}\right) = 400\left(1 + \frac{x-5}{20}\right)$.

因此，综合费用为 $y = f(x) + \frac{1\,280}{x} = 20\left(x + \frac{64}{x}\right) + 300 \geqslant 20 \cdot 2\sqrt{64} + 300 = 620$（元/$m^2$）.

当且仅当 $x = 8$ 时等号成立.

故当建成 8 座球场时，每平方米的综合费用最省.

10.4 简单线性规划

教材线索

教科书首先通过一个具体问题，介绍了二元一次不等式组表示一个平面区域，再在这个具体实例的基础上，介绍了线性规划问题及有关的几个基本概念及一种基本解法——图解法，并举出两道例题说明线性规划在实际中的应用.

教学目标

(1)了解二元一次不等式的几何意义，会画出二元一次不等式表示的平面区域.

(2)会用“选点法”确定二元一次不等式表示的平面区域，了解线性规划的意义和可行域的意义.

(3)掌握简单的二元线性规划问题的解法，掌握如何用图解法求线性目标函数的最大值、最小值.

(4)能从实际情境中抽象出一些简单的二元线性规划问题，会用画网格的方法求解整数线性规划问题.

教材分析

1.教学重点：

(1)二元一次不等式的几何意义.

(2)二元一次不等式表示的平面区域的确定.

(3)二元线性规划问题的解法的掌握.

2.教学难点：

用画网格的方法求解整数线性规划问题.培养学生从实际情境中抽象出一些简单的二元线性规划问题.

3.最优整数解常有两种处理方法，一种是通过打出网格求整点，关键是作图要准确；另一种是普遍采用的方法，即先确定区域内点的横坐标范围，确定 x 的所有整数值，再代回原不等式组，得出 y 的一元一次不等式组，再确定 y 的所有相应整数值，即先固定 x，再用 x 制约 y.

说明　(1)解线性规划应用题的一般步骤：①设出未知数；②列出约束条件(要注意考虑数据、变量、不等式的实际含义及计量单位的统一)；③建立目标函数；④求最优解.

(2)对于有实际背景的线性规划问题，可行域通常是位于第一象限内的一个凸多边形区域，此时变动直线的最佳位置一般通过这个凸多边形的顶点.

(3)引导学生对于不含边界的区域要将边界画成虚线.

(4)用选点法检验不等式表示的区域.

(5)用图形解决问题时应指导学生正确规范地作图.

(6)正确指导学生寻找满足例4、例5中不等式组的解.

4.通过分组讨论，让学生在活动中学会沟通和合作，提高分析和处理信息的能力，充分尊重学生的自主性，以学生探究为主，教师点拨为辅，重在培养创新.在解决线形规划问题时，指导学生学会将数据转换成表格形式，引导学生正确建模；用图形解决问题时，指导学生正确规范地作图.另外还要注意解答的完整性及其叙述要求是否合理到位.

不等式作为用来刻划不等关系的有效工具，有着丰富的现实背景，不等式也是刻划区域的重要工具，刻划区域是解决线性规划问题的一个基本步骤.在现实生产、生活中，经常遇到的资源利用、人力调配、生产安排等问题常常可归结为二元线性规划问题.线性规划是数学规划中理论较完整、方法较成熟、应用较广泛的一个分支，它能解决科学研究、工程设计、经济管理等许多方面的实际问题.教学中要注意从实际问题引入，着眼于不等式与实际问题的联系，使学生明确数学问题源于生活且用于生活.由于线性规划属于多元条件极值问题，对高一学生有一定难度，因此教学中应当强调借助几何直观解决一些简单的线性规划问题，引导学生体会线性规划的基本思想，在其它方面的一些应用不宜过多展开.

教学建议

(1)对学生来说，二元一次不等式(组)表示平面的区域是一个比较陌生的概念，不像二元一次方程表示直线那样早有所知，为使学生对这一概念的引进不感到突然，应建立新旧知识之间的联系，以便自然地给出概念.

(2)建议将本节新课讲授分为五步(思考、尝试、猜想、证明、归纳)来进行，目的是为了分散难点，层层递进，突出重点，只要学生对旧知识掌握较好，完全有可能由学生自己主动去探求新知，得出结论.

(3)要举几个典型例题，特别是似是而非的例子，对理解二元一次不等式(组)表示的平面区域的含义是十分必要的.

(4)建议通过本节教学着重培养学生掌握“数形结合”的数学思想，尽管侧重于用“数”研究“形”，但同时也要用“形”去研究“数”，这对培养学生观察、联想、猜测、归纳等数学能力是大有益处的.

(5)建议可适当采用多媒体和投影仪等先进手段来辅助教学，以增加课堂容量，增强直观性，进而提高课堂效率.

(6)若实际问题要求的最优解是整数解，而我们利用图解法得到的解为非整数解(近似解)时，应作适当的调整，其方法应以与线性目标函数的直线的距离为依据，在直线的附近寻求与

此直线距离最近的整点，不要在用图解法所得到的近似解附近寻找．如果可行域中的整点数目很少，则可采用逐个试验法．

(7)在线性规划的实际问题中，一般主要掌握两种类型：一是给定一定数量的人力、物力资源，问怎样运用这些资源能使完成的任务量最大，收到的效益最大；二是给定一项任务问怎样统筹安排，能使完成的这项任务耗费的人力、物力资源最小．

参考例题

例 1 已知 x，y 满足不等式组 $\begin{cases}2x-y-3>0,\\2x+3y-6<0,\\3x-5y-15<0,\end{cases}$ 求使 $x+y$ 取最大值的整数 x，y．

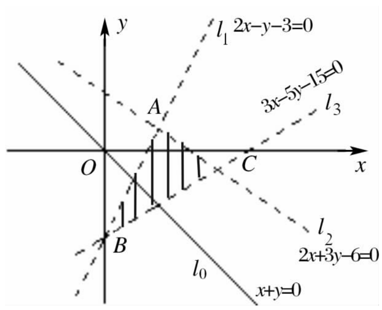


图 10－6

解　如图 10－6 不等式组的解集为三直线 l_1：$2x-y-3=0$，l_2：$2x+3y-6=0$，l_3：$3x-5y-15=0$ 所围成的三角形内部(不含边界)，设 l_1 与 l_2，l_1 与 l_3，l_2 与 l_3 交点分别为 A，B，C，则 A，B，C 坐标分别为 $A\left(\frac{15}{8},\frac{3}{4}\right)$，$B(0,-3)$，$C\left(\frac{75}{19},-\frac{12}{19}\right)$，作一组平行线 l：$x+y=t$ 平行于 l_0：$x+y=0$．

∵当 l 往 l_0 右上方移动时，t 随之增大，

∴当 l 过 C 点时 $x+y$ 最大为 $\frac{63}{19}$，但不是整数解，

又由 $0<x<\frac{75}{19}$ 知 x 可取 1，2，3，

当 $x=1$ 时，代入原不等式组得 $y=-2$，∴$x+y=-1$；

当 $x=2$ 时，得 $y=0$ 或 -1，∴$x+y=2$ 或 1；

当 $x=3$ 时，$y=-1$，∴$x+y=2$，

故 $x+y$ 的最大整数解为 $\begin{cases}x=2,\\y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=3,\\y=-1.\end{cases}$

例 2 (1)已知 $\begin{cases}1\leqslant a-b\leqslant 2,\\2\leqslant a+b\leqslant 4,\end{cases}$ 求 $t=4a-2b$ 的取值范围；

(2)设 $f(x)=ax^2+bx$，且 $1\leqslant f(-1)\leqslant 2$，$2\leqslant f(1)\leqslant 4$，求 $f(-2)$ 的取值范围．

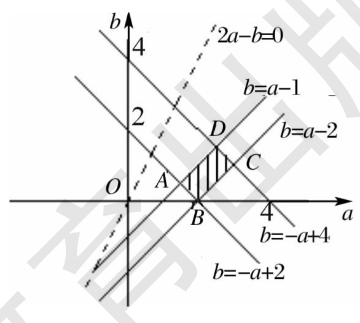


图 10－7

解　(1)不等式组表示的平面区域如图 10－7 所示，

作直线 l_0：$4a-2b=0$，

作一组平行线 l：$4a-2b=t$，

由图知 l 由 l_0 向右下方平移时，t 随之增大，反之减小，

∴当 l 经过 A 点时 t 取最小值，

当 l 经过 C 点时 t 取最大值.

由 $\begin{cases} a-b=1, \\ a+b=2 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} a-b=2, \\ a+b=4 \end{cases}$ 分别得 $A\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$，$C(3,1)$，

$\therefore t_{\min}=4\times\frac{3}{2}-2\times\frac{1}{2}=5$，$t_{\max}=4\times3-2\times1=10$，所以，$t\in[5,10]$.

(2) $f(-1)=a-b$，$f(1)=a+b$，$f(-2)=4a-2b$，

由(1)知，$f(-2)\in[5,10]$.

例 3 已知$\triangle ABC$的三边长 a，b，c 满足 $b+c\leqslant 2a$，$c+a\leqslant 2b$，求 $\frac{b}{a}$ 的取值范围.

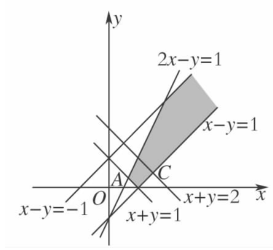


图 10－8

解　设 $x=\frac{b}{a}$，$y=\frac{c}{a}$，则 $\begin{cases} 1<x+y\leqslant 2, \\ x<y+1\leqslant 2x, \\ y<x+1, \\ x>0, \\ y>0. \end{cases}$

作出平面区域，如图 10－8，由图知：$A\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$，$C\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$，$\therefore \frac{2}{3}<x<\frac{3}{2}$，即 $\frac{2}{3}<\frac{b}{a}<\frac{3}{2}$.

例 4 投资生产 A 产品时，每生产 100 t 需要资金 200 万元，需场地 200 m^2，可获利润 300 万元；投资生产 B 产品时，每生产 100 m 需要资金 300 万元，需场地 100 m^2，可获利润 200 万元. 现某单位可使用资金 1 400 万元，场地 900 m^2，问：应作怎样的组合投资，可使获利最大？

分析　这是一个二元线性规划问题，可先将题中数据整理成下表，以方便理解题意：

	资　金（百万元）	场地（m^2）	利润（百万元）
A 产品	2	2	3
B 产品	3	1	2
限制	14	9	

然后根据此表数据，设出未知数，列出约束条件和目标函数，最后用图解法求解.

解　设生产 A 产品 x 百吨，生产 B 产品 y 百米，利润为 S 百万元，

则约束条件为 $\begin{cases} 2x+3y\leqslant 14, \\ 2x+y\leqslant 9, \\ x\geqslant 0, \\ y\geqslant 0, \end{cases}$ 目标函数为 $S=3x+2y$.

作出可行域（如图 10－9）.

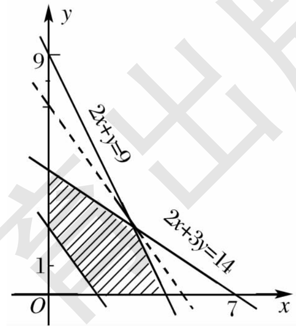


图 10－9

将目标函数变形为 $y=-\frac{3}{2}x+\frac{S}{2}$，它表示斜率为 $-\frac{3}{2}$，在 y 轴

上截距为$\frac{S}{2}$的直线，平移直线 $y=-\frac{3}{2}x+\frac{S}{2}$，当它经过直线与 $2x+y=9$ 和 $2x+3y=14$ 的交点$\left(\frac{13}{4},\frac{5}{2}\right)$时，$\frac{S}{2}$最大，也即 S 最大．此时，$S=3\times\frac{13}{4}+2\times\frac{5}{2}=14.75$(百万元).

因此，生产 A 产品 3.25 百吨，生产 B 产品 2.5 百米时，利润最大，且最大利润为 1 475 万元.

说明　(1)解线性规划应用题的一般步骤：①设出未知数；②列出约束条件(要注意考虑数据、变量、不等式的实际含义及计量单位的统一)；③建立目标函数；④求最优解.

(2)对于有实际背景的线性规划问题，可行域通常是位于第一象限内的一个凸多边形区域，此时变动直线的最佳位置一般通过这个凸多边形的顶点.

例 **5**　某运输公司向某地区运送物资，每天至少运送 180 t．该公司有 8 辆载重为 6 t 的 A 型卡车与 4 辆载重为 10 t 的 B 型卡车，有 10 名驾驶员．每辆卡车每天往返的次数为 A 型车 4 次，B 型车 3 次．每辆卡车每天往返的成本费为 A 型车 320 元，B 型车为 504 元．试为该公司设计调配车辆的方案，使公司花费的成本最低.

解　设每天调出 A 型车 x 辆，B 型车 y 辆，公司花费成本 z 元，

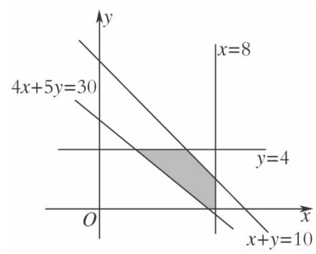


图 10－10

则约束条件为$\begin{cases}x+y\leqslant 10,\\4x\times 6+3y\times 10\geqslant 180,\\0\leqslant x\leqslant 8,\\0\leqslant y\leqslant 4,\\x,y\in\mathbf{N}^*,\end{cases}$　即$\begin{cases}x+y\leqslant 10,\\4x+5y\geqslant 30,\\0\leqslant x\leqslant 8,\\0\leqslant y\leqslant 4,\\x,y\in\mathbf{N}^*.\end{cases}$

目标函数为 $z=320x+504y$.

作出可行域，如图 10－10 所示，

当直线 $z=320x+504y$ 经过直线 $4x+5y=30$ 与 x 轴的交点$(7.5,0)$时，z 有最小值．但$(7.5,0)$不是整点．由图可知，经过可行域内的整点，且与原点距离最近的直线是 $320x+504y=2\ 560$，经过的整点是$(8,0)$，它是最优解.

因此，公司每天调出 A 型车 8 辆时，花费成本最低.

相关链接

运筹学简介

英语全称为：Operational Research(英国)或者是 Operations Research(美国).

在中国战国时期，曾经有过一次流传后世的赛马比赛，相信大家都知道，这就是田忌赛马．田忌赛马的故事说明在已有的条件下，经过筹划、安排，选择一个最好的方案，就会取得最好的效果．可见，筹划安排是十分重要的.

现在普遍认为，运筹学是近代应用数学的一个分支，主要是将生产、管理等事件中出现的

一些带有普遍性的运筹问题加以提炼，然后利用数学方法进行解决. 前者提供模型，后者提供理论和方法.

运筹学的思想在古代就已经产生了. 敌我双方交战要克敌制胜就要在了解双方情况的基础上，做出最优的对付敌人的方法，这就是“运筹帷幄之中，决胜千里之外”的说法.

但是作为一门数学学科，用纯数学的方法来解决最优方法的选择安排，却是晚多了. 也可以说，运筹学是在二十世纪四十年代才开始兴起的一门分支.

运筹学的特点

运筹学的特点是：(1)运筹学已被广泛应用于工商企业、军事部门、民政事业等研究组织内的统筹协调问题，故其应用不受行业、部门之限制；(2)运筹学既对各种经营进行创造性的科学研究，又涉及到组织的实际管理问题，它具有很强的实践性，最终应能向决策者提供建设性意见，并应收到实效；(3)它以整体最优为目标，从系统的观点出发，力图以整个系统最佳的方式来解决该系统各部门之间的利害冲突. 对所研究的问题求出最优解，寻求最佳的行动方案，所以它也可看成是一门优化技术，提供的是解决各类问题的优化方法.

运筹学的具体内容

运筹学的具体内容包括：规划论（包括线性规划、非线性规划、整数规划和动态规划）、图论、决策论、对策论、排队论、存储论、可靠性理论等.

规划论

数学规划即上面所说的规划论，是运筹学的一个重要分支，早在 1939 年苏联的康托洛维奇（H. B. Kahtopob）和美国的希奇柯克（F. L. Hitchcock）等人就在生产组织管理和制定交通运输方案方面首先研究和应用线性规划方法. 1947 年旦茨格等人提出了求解线性规划问题的单纯形方法，为线性规划的理论与计算奠定了基础，特别是电子计算机的出现和日益完善，更使规划论得到迅速的发展，可用电子计算机来处理成千上万个约束条件和变量的大规模线性规划问题，从解决技术问题的最优化，到工业、农业、商业、交通运输业以及决策分析部门都可以发挥作用. 从范围来看，小到一个班组的计划安排，大至整个部门，以至国民经济计划的最优化方案分析，它都有用武之地，具有适应性强、应用面广、计算技术比较简便的特点. 非线性规划的基础性工作则是在 1951 年由库恩（H. W. Kuhn）和达克（A. W. Tucker）等人完成的. 到了 70 年代，数学规划无论是在理论上和方法上，还是在应用的深度和广度上都得到了进一步的发展.

数学规划的研究对象是计划管理工作中有关安排和估值的问题，解决的主要问题是在给定条件下，按某一衡量指标来寻找安排的最优方案. 它可以表示成求函数在满足约束条件下的极大、极小值问题.

数学规划和古典的求极值的问题有本质上的不同，古典方法只能处理具有简单表达式和简单约束条件的情况. 而现代的数学规划中的问题目标函数和约束条件都很复杂，而且要求给出某种精确的数字解答，因此算法的研究特别受到重视.

这里最简单的一种问题就是线性规划. 如果约束条件和目标函数都是呈线性关系的就叫

线性规划.要解决线性规划问题,从理论上讲都要解线性方程组,因此解线性方程组的方法,以及关于行列式、矩阵的知识,就是线性规划中非常必要的工具.

线性规划及其解法——单纯形法的出现,对运筹学的发展起了重大的推动作用.许多实际问题都可以化成线性规划来解决,而单纯形法是一个行之有效的算法,加上计算机的出现,使一些大型复杂的实际问题的解决成为现实.

非线性规划是线性规划的进一步发展和继续.许多实际问题如设计问题、经济平衡问题都属于非线性规划的范畴.非线性规划扩大了数学规划的应用范围,同时也给数学工作者提出了许多基本理论问题,使数学中的如凸分析、数值分析等也得到了发展.还有一种规划问题和时间有关,叫做“动态规划”.近年来在工程控制、技术物理和通讯中的最佳控制问题中,已经成为经常使用的重要工具.

图论

图论是一个古老的但又十分活跃的分支,它是网络技术的基础.图论的创始人是数学家欧拉.1736 年他发表了图论方面的第一篇论文,解决了著名的哥尼斯堡七桥难题.相隔一百年后,在 1847 年基尔霍夫第一次应用图论的原理分析电网,从而把图论引进到工程技术领域.20 世纪 50 年代以来,图论的理论得到了进一步发展,将复杂庞大的工程系统和管理问题用图描述,可以解决很多工程设计和管理决策的最优化问题,例如,完成工程任务所需时间最少、距离最短、费用最省等等.图论受到数学、工程技术及经营管理等各方面越来越广泛的重视.

排队论

排队论又叫随机服务系统理论.最初是在二十世纪初由丹麦工程师艾尔郎关于电话交换机的效率研究开始的,在第二次世界大战中为了对飞机场跑道的容纳量进行估算,它得到了进一步的发展,其相应的学科更新论、可靠性理论等也都发展起来.

1909 年丹麦的电话工程师爱尔朗(A. K. Erlang)开始研究排队问题,1930 年以后,开始了更为一般的情况的研究,取得了一些重要成果.1949 年前后,开始了对机器管理、陆空交通等方面的研究,1951 年以后,理论工作有了新的进展,逐渐奠定了现代随机服务系统的理论基础.排队论主要研究各种系统的排队队长、排队的等待时间及所提供的服务等各种参数,以便求得更好的服务.它是研究系统随机聚散现象的理论.

它的研究目的是要回答如何改进服务机构或组织被服务的对象,使得某种指标达到最优的问题.比如一个港口应该有多少个码头,一个工厂应该有多少维修人员等.

因为排队现象是一个随机现象,因此在研究排队现象的时候,主要采用的是研究随机现象的概率论作为主要工具.此外,还有微分和微分方程.排队论把它所要研究的对象形象地描述为顾客来到服务台前要求接待.如果服务台已被其它顾客占用,那么就要排队.另一方面,服务台也时而空闲、时而忙碌,就需要通过数学方法求得顾客的等待时间、排队长度等的概率分布.

排队论在日常生活中的应用是相当广泛的,比如水库水量的调节、生产流水线的安排、铁路分成场的调度、电网的设计等等.

可靠性理论

可靠性理论是研究系统故障，以提高系统可靠性问题的理论. 可靠性理论研究的系统一般分为两类：(1)不可修系统：如导弹等，这种系统的参数是寿命、可靠度等；(2)可修复系统：如一般的机电设备等，这种系统的重要参数是有效度，其值为系统的正常工作时间与正常工作时间加上事故修理时间之比.

对策论

对策论也叫博弈论，前面讲的田忌赛马就是典型的博弈论问题. 作为运筹学的一个分支，博弈论的发展也只有几十年的历史. 系统地创建这门学科的数学家，现在一般公认为是美籍匈牙利数学家、计算机之父——冯·诺依曼.

最初用数学方法研究博弈论是在国际象棋中开始的，旨在用来如何确定取胜的算法. 由于是研究双方冲突、制胜对策的问题，所以这门学科在军事方面有着十分重要的应用. 近年来，数学家还对水雷和舰艇、歼击机和轰炸机之间的作战、追踪等问题进行了研究，提出了追逃双方都能自主决策的数学理论. 近年来，随着人工智能研究的进一步发展，对博弈论提出了更多新的要求.

决策论研究决策问题. 所谓决策就是根据客观可能性，借助一定的理论、方法和工具，科学地选择最优方案的过程. 决策问题是由决策者和决策域构成的，而决策域又由决策空间、状态空间和结果函数构成. 研究决策理论与方法的科学就是决策科学. 决策所要解决的问题是多种多样的，从不同角度有不同的分类方法，按决策者所面临的自然状态的确定与否可分为：确定型决策、风险型决策和不确定型决策；按决策所依据的目标个数可分为：单目标决策与多目标决策；按决策问题的性质可分为：战略决策与策略决策，以及按不同准则划分成的种种决策问题类型. 不同类型的决策问题应采用不同的决策方法. 决策的基本步骤为：(1)确定问题，提出决策的目标；(2)发现、探索和拟定各种可行方案；(3)从多种可行方案中，选出最满意的方案；(4)决策的执行与反馈，以寻求决策的动态最优.

如果决策者的对方也是人(一个人或一群人)，双方都希望取胜，这类具有竞争性的决策称为对策或博弈型决策. 构成对策问题的三个根本要素是：局中人、策略与一局对策的得失. 目前对策问题一般可分为有限零和两人对策、阵地对策、连续对策、多人对策与微分对策等.

搜索论

搜索论是由于第二次世界大战中战争的需要而出现的运筹学分支. 主要研究在资源和探测手段受到限制的情况下，如何设计寻找某种目标的最优方案，并加以实施的理论和方法. 它是在第二次世界大战中，同盟国的空军和海军在研究如何针对轴心国的潜艇活动、舰队运输和兵力部署等进行甄别的过程中产生的. 搜索论在实际应用中也取得了不少成效，例如二十世纪六十年代，美国寻找在大西洋失踪的核潜艇“打谷者号”和“蝎子号”，以及在地中海寻找丢失的氢弹等，都是依据搜索论获得成功的.

习题参考解答

P.80 练习

1. $(x-5)(x-7)-(x-6)^2=x^2-12x+35-(x^2-12x+36)=-1<0$,

$\therefore (x-5)(x-7)<(x-6)^2$.

2. $\because\quad (a^2+\sqrt{2}a+1)(a^2-\sqrt{2}a+1)-(a^2+a+1)(a^2-a+1)$

$=[(a^2+1)+\sqrt{2}a][(a^2+1)-\sqrt{2}a]-[(a^2+1)+a][(a^2+1)-a]$

$=(a^2+1)^2-2a^2-(a^2+1)^2+a^2=-a^2\leqslant 0$.

$\therefore (a^2+\sqrt{2}a+1)(a^2-\sqrt{2}a+1)\leqslant(a^2+a+1)(a^2-a+1)$.

3. $\dfrac{1}{a-1}-\dfrac{1}{b-1}=\dfrac{b-1-(a-1)}{(a-1)(b-1)}=\dfrac{b-a}{(a-1)(b-1)}$.

$\because a<b<1$,得 $b-a>0,(a-1)(b-1)>0$,

$\therefore \dfrac{1}{a-1}-\dfrac{1}{b-1}>0$,即$\dfrac{1}{a-1}>\dfrac{1}{b-1}$.

P.82 练习

1. (1)假,若 $c\leqslant 0$,则 $ca\leqslant cb$. (2)假,若 $c=0$,则 $ac^2=bc^2$.

2. (1)不能. (2)不能.

3. (1)$\because a>b>0,c>0,\therefore ac>bc$,又$\because c>d>0,b>0,\therefore bc>bd,\therefore ac>bd$.

(2)(方法一)$\because a>b$,a,b 同号,$\therefore ab>0,\therefore \dfrac{1}{ab}>0,\therefore \dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b},\because c>0,\therefore \dfrac{c}{a}<\dfrac{c}{b}$.

(方法二)$\dfrac{c}{a}-\dfrac{c}{b}=\dfrac{cb-ca}{ab}=\dfrac{c(b-a)}{ab}$.

$\because c>0,a>b,ab>0,\therefore \dfrac{c(b-a)}{ab}<0.\ \therefore \dfrac{c}{a}<\dfrac{c}{b}$.

习题 1

1. $\because (x+2)(x-6)-(x-2)^2=x^2-4x-12-x^2+4x-4=-16<0$,

$\therefore (x+2)(x-6)<(x-2)^2$.

2. (1)$(x^2+1)^2-(x^4+x^2+1)=x^2\geqslant 0,\therefore (x^2+1)^2\geqslant x^4+x^2+1$.

(2)$(\sqrt{m}-1)^2-(\sqrt{m}+1)^2=-4\sqrt{m}\leqslant 0,\therefore (\sqrt{m}-1)^2\leqslant(\sqrt{m}+1)^2$.

3. (1)$>$. (2)$>$. (3)$>$. (4)$<$.

4. (1)成立,因为 $c-a>c-b,\therefore -a>-b,\therefore a<b$.

(2)成立,$\because ab>c,b>0,\dfrac{1}{b}>0,\therefore a>\dfrac{c}{b}$.

(3)不一定成立. 若 $c>0$ 时,$ac>bc$,则 $a>b$,若 $c\leqslant 0$,则不成立.

(4)不成立,若 $a=3,b=2,c=1,d=0$,则 $a-b=c-d$.

5.(1)B. (2)D.

6. $\because x^3-(x^2-x+1)=x^3-x^2+x-1=x^2(x-1)+(x-1)=(x-1)(x^2+1)$,

$\because x>1$,$\therefore x^3-(x^2-x+1)>0$,$\therefore x^3>x^2-x+1$.

7.(1)$\because a>b$,$\therefore a-b>0$,$c<0$,$\therefore (a-b)c<0$.

(2)$\because a>b>0$,$c<d<0$,$\therefore -c>-d>0$,$\therefore -ac>-bd$,$\therefore ac<bd$.

(3)$\because a<0$,$-1<b<0$,$ab^2-a=a(b^2-1)$,$\because b^2<1$,$\therefore a(b^2-1)>0$. $\therefore ab^2>a$.

又 $\because ab-ab^2=ab(1-b)$,$\because a<0$,$-1<b<0$,$\therefore ab(1-b)>0$,$\therefore ab>ab^2$. $\therefore$ 结论成立.

P. 86 练习

1.(1)$\because 3x^2-7x+2>0$ 可化为 $(3x-1)(x-2)>0$,$\therefore x>2$ 或 $x<\frac{1}{3}$.

$\therefore$ 不等式的解集为 $\left\{x \mid x>2 \text{ 或 } x<\frac{1}{3}\right\}$.

(2)$\because -x^2+5x>6$ 可化为 $x^2-5x+6<0$,$\therefore (x-2)(x-3)<0$,$\therefore 2<x<3$.

$\therefore$ 不等式的解集为 $\{x \mid 2<x<3\}$.

(3)$\because 4x^2-4x+1\leqslant 0$ 可化为 $(2x-1)^2\leqslant 0$,$\therefore x=\frac{1}{2}$. $\therefore$ 不等式的解集为 $\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

(4)$\because \Delta=4-12<0$,$\therefore x^2-2x+3\geqslant 0$ 恒成立,解集为 $\mathbf{R}$.

2. $\because (100-x)\cdot 5\ 000\cdot(1+2x\%)\geqslant 100\times 5\ 000$. $\therefore (100-x)(1+2x\%)\geqslant 100$.

$\therefore 0\leqslant x\leqslant 50$. 又 $x>0$,$\therefore 0<x\leqslant 50$.

P. 87 练习

1.(1)$\because a<b$,$\therefore (x-a)(x-b)\leqslant 0$ 等价于 $a\leqslant x\leqslant b$,解集为 $[a,b]$.

(2)$\frac{x-a}{x-b}\leqslant 0$ 可化为 $\begin{cases}(x-a)(x-b)\leqslant 0,\\ x-b\neq 0,\end{cases}$ $\therefore$ 解集为 $[a,b)$.

2. $\frac{7x^2+13x-2}{(x+1)(x-2)}>0$ 可化为 $(7x^2+13x-2)(x+1)(x-2)>0$,

$\therefore (7x-1)(x+2)(x+1)(x-2)>0$,$\therefore \left(x-\frac{1}{7}\right)(x+2)(x+1)(x-2)>0$.

$\therefore x\in(-\infty,-2)\cup\left(-1,\frac{1}{7}\right)\cup(2,+\infty)$.

P. 88 练习

1. $\because 3x^2-7x+2>0$,$\therefore (3x-1)(x-2)>0$,$\therefore x>2$ 或 $x<\frac{1}{3}$.

∴函数的定义域为 $x\in\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)\cup(2,+\infty)$.

2. ∵ $x^2+(x-3)x+k=0$ 为一元二次方程,

(1)若 $\Delta<0$ 即 $(k-3)^2-4k<0$,则原方程无实数根,∴ $k^2-10k+9<0$. ∴ $1<k<9$.

(2)若 $\begin{cases}\Delta\geqslant 0,\\ x_1+x_2>0,\\ x_1x_2>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}(k-3)^2-4k\geqslant 0,\\ 3-k>0,\\ k>0\end{cases}$ 时有两正实根,∴ $\begin{cases}k\geqslant 9 \text{ 或 } k\leqslant 1,\\ k<3,\\ k>0,\end{cases}$ ∴ $0<k\leqslant 1$.

P. 90 练习

设船的速度为 v km/h,则由题意得 $\frac{75}{v+4}+\frac{1}{2}+\frac{126}{v-4}<5\ (v>4)$.

∴ $2\times 75(v-4)+(v+4)(v-4)+2\times 126(v+4)<10(v+4)(v-4)$.

∴ $150v-4\times 150+v^2-16+252v+252\times 4<10v^2-160$.

∴ $9v^2-402v-552>0$. ∴ $3v^2-134v-184>0$.

∵ $v>4$, ∴ $v>46$.

答:至少为 46 km/h.

习题 2

1. (1) $(-2,3)$. (2) $\mathbf{R}$. (3) $\varnothing$. (4) $\left\{\frac{4}{3}\right\}$. (5) $(-\infty,-1-\sqrt{6})\cup(-1+\sqrt{6},+\infty)$.

(6) $\mathbf{R}$. (7) $\mathbf{R}$. (8) $\frac{1-\sqrt{33}}{16}<x<\frac{1+\sqrt{33}}{16}$.

2. (1)原不等式组可化为 $\begin{cases}(4x-3)(x-6)>0,\\ (x-2)(x-4)<0,\end{cases}$ ∴ $\begin{cases}x>6 \text{ 或 } x<\frac{3}{4},\\ 2<x<4,\end{cases}$ ∴ $x\in\varnothing$.

(2)原不等式组可化为 $\begin{cases}(3x-2)(x+1)\geqslant 0,\\ (4x-3)(x-3)>0,\end{cases}$ ∴ $\begin{cases}x\geqslant\frac{2}{3} \text{ 或 } x\leqslant -1,\\ x\geqslant 3 \text{ 或 } x\leqslant\frac{3}{4},\end{cases}$

∴ $\left\{x\,|\,x\geqslant 3 \text{ 或 } \frac{2}{3}\leqslant x\leqslant\frac{3}{4} \text{ 或 } x\leqslant -1\right\}$.

3. (1) ∵ $\frac{2}{3-5x}-3<0$, ∴ $\frac{2-3(3-5x)}{3-5x}<0$, ∴ $\frac{2-9+15x}{3-5x}<0$, ∴ $\frac{15x-7}{5x-3}>0$.

∴ $x>\frac{3}{5}$ 或 $x<\frac{7}{15}$. 即解集为 $\left\{x>\frac{3}{5} \text{ 或 } x<\frac{7}{15}\right\}$.

(2) ∵ $\frac{2x+4}{x-3}>1$, ∴ $\frac{2x+4}{x-3}-1>0$, $\frac{2x+4-x+3}{x-3}>0$, ∴ $\frac{x+7}{x-3}>0$.

∴ $(x+7)(x-3)>0$. ∴ $x>3$ 或 $x<-7$. 解集为 $\{x\,|\,x>3 \text{ 或 } x<-7\}$.

4. 由题意可知$\begin{cases}\Delta>0,\\ x_1\cdot x_2>0,\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}10^2-12k>0,\\ \dfrac{k}{3}>0,\end{cases}$ $\therefore 0<k<\dfrac{25}{3}$.

5. ①若 $a=2$ 时，$-4<0$，$x\in\mathbf{R}$，符合.

②若 $a>2$ 时，$y=(a-2)x^2+2(a-2)x-4$ 的图象开口向上，不可能恒小于 0. $\therefore a>2$ 不符合.

③若 $a<2$ 时，则$\begin{cases}a-2<0,\\ 4(a-2)^2+16(a-2)<0,\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}a<2,\\ -2<a<2\end{cases}$ $\therefore -2<a<2$.

综合①②③得 $a\in(-2,2]$.

6. (1)$\begin{cases}x^2-16<0,\\ x^2-4x+3\geqslant 0,\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}-4<x<4,\\ x\geqslant 3 \text{ 或 } x\leqslant 1,\end{cases}$ $\therefore 3\leqslant x<4$，或 $-4<x\leqslant 1$.

(2)$\begin{cases}x^2-16\geqslant 0,\\ x^2-4x+3<0,\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}x\geqslant 4 \text{ 或 } x\leqslant -4,\\ 1<x<3,\end{cases}$ $\therefore x$ 为 $\varnothing$.

$\therefore$使得不等式 $x^2-16<0$ 和 $x^2-4x+3\geqslant 0$ 至少有一个成立的取值范围为 $x\in\mathbf{R}$.

(3)由(2)可得都不成立的 x 的取值范围为 $\varnothing$.

7. (1)$x^2-2ax-3a^2<0$ 可化为 $(x-3a)(x+a)<0$.

①当 $a>0$ 时，$-a<x<3a$. ②当 $a=0$ 时，$x\in\varnothing$. ③当 $a<0$ 时，$3a<x<-a$.

(2)$3a^2x^2-2ax-1<0$ 可化为 $(3ax+1)(ax-1)<0$.

①当 $a>0$ 时，$\left(x+\dfrac{1}{3a}\right)\left(x-\dfrac{1}{a}\right)<0$，$\therefore -\dfrac{1}{3a}<x<\dfrac{1}{a}$.

②当 $a=0$ 时，$-1<0$，$x\in\mathbf{R}$.

③当 $a<0$ 时，$\left(x+\dfrac{1}{3a}\right)\left(x-\dfrac{1}{a}\right)<0$，$\therefore \dfrac{1}{a}<x<-\dfrac{1}{3a}$.

8. 设利润为 $f(x)$，则 $f(x)=R(x)-G(x)=\begin{cases}-0.4x^2+4.2x-0.8-2-x,(0\leqslant x\leqslant 5),\\ 10.2-2-x,(x>5).\end{cases}$

$\therefore f(x)=\begin{cases}-0.4x^2+3.2x-2.8, & (0\leqslant x\leqslant 5),\\ 8.2-x, & (x>5).\end{cases}$

①当 $0\leqslant x\leqslant 5$ 时，$f(x)>0$，$-0.4x^2+3.2x-2.8>0$，$\therefore x^2-8x+7<0$，$\therefore 1<x<7$，$\therefore 1<x\leqslant 5$.

②当 $x>5$ 时，$f(x)>0$，$8.2-x>0$，$\therefore 5<x<8.2$. 综合①②得 $1<x<8.2$.

P. 93 练习

1. (1)$\because x,y\in\mathbf{R}_+$，$\therefore \dfrac{y}{x},\dfrac{x}{y}\in\mathbf{R}_+$，$\therefore \dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}\geqslant 2\sqrt{\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{x}{y}}=2$，当且仅当 $x=y$ 时取等号成立.

(2)$\because x,y$ 都为正数，$\therefore x+y\geqslant 2\sqrt{xy}$，$x^2+y^2\geqslant 2xy$，$x^3+y^3\geqslant 2xy\sqrt{xy}$，

$\therefore (x+y)(x^2+y^2)(x^3+y^3)\geqslant 8x^3y^3$.

2. ∵$a,b,c\in\mathbf{R}_+$. ∴$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}>0$,$b+c\geqslant 2\sqrt{bc}>0$,$c+a\geqslant 2\sqrt{ca}>0$.

∴$(a+b)(b+c)(c+a)\geqslant 8abc$,当且仅当 $a=b=c$ 时,等号成立.

P. 95 练习

1. $f(x)=x+\dfrac{1}{x-1}=(x-1)+\dfrac{1}{x-1}+1\geqslant 3$,当且仅当 $x-1=\dfrac{1}{x-1}$ 即 $x=2$ 时取等号. $f(x)$最小值为 3.

2. $f(x)=(1+x)\cdot x^2\cdot(1-x)=(1-x^2)\cdot x^2$,∵$0\leqslant x\leqslant 1$,∴$1-x^2\geqslant 0$,$x^2\geqslant 0$.

∴$f(x)\leqslant\left(\dfrac{1-x^2+x^2}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$. 当且仅当 $1-x^2=x^2$ 即 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时取等号. $f(x)$最大值为$\dfrac{1}{4}$.

P. 98 练习

1. 设直角三角形三边长分别为 a,b,c,且 $c^2=a^2+b^2$,$\dfrac{1}{2}ab=1$. 则 $a+b+c=a+b+\sqrt{a^2+b^2}\geqslant 2\sqrt{ab}+\sqrt{2ab}=2\sqrt{2}+2\approx 4.83$,选 C.

2. 如图 10-11,设鱼池的长和宽分别为 x,y,总面积为 S,则 $S=(x+6)\cdot(y+8)$,且 $xy=432$.

∴$S=xy+8x+6y+48=8x+6y+480\geqslant 2\sqrt{48xy}+480=768$.

当且仅当 $8x=6y$,即 $x=18$,$y=24$ 时,S 最小.

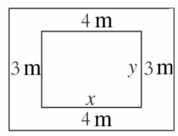


图 10-11

习题 3

1. (1) ∵$a+a^3\geqslant 2\sqrt{a\cdot a^3}=2a^2$. 当且仅当 $a=a^3$ 即 $a=1$ 时取等号.

(2) ∵$a^2+b^2\geqslant 2ab$,又∵$ab=4$,∴$a^2+b^2\geqslant 8$,当且仅当 $a=b=\pm 2$ 时取等号.

(3) ∵$x^2(1-x^2)\leqslant\left(\dfrac{x^2+1-x^2}{2}\right)^2$,∴$\sqrt{x^2(1-x^2)}\leqslant\dfrac{1}{2}$.

当且仅当 $x^2=1-x^2$ 即 $x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时取等号.

(4) ∵$\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\geqslant 2$ 或$\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\leqslant -2$,∴$\left|\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\right|\geqslant 2$,当且仅当$\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{a}$,即$|a|=|b|$时取等号.

(5) ∵$a^2+b^2+\dfrac{4}{a^2+b^2+1}=(a^2+b^2+1)+\dfrac{4}{a^2+b^2+1}-1\geqslant 4-1=3$,当且仅当 $a^2+b^2+1=2$,即 $a^2+b^2=1$ 时取等号.

2. $f(x)=x(1-2x)=2x\left(\dfrac{1}{2}-x\right)\leqslant 2\cdot\left(\dfrac{x+\dfrac{1}{2}-x}{2}\right)^2=\dfrac{1}{8}$,当且仅当 $x=\dfrac{1}{2}-x$ 时即 $x=\dfrac{1}{4}$时,$f(x)$有最大值为$\dfrac{1}{8}$.

3. $f(x)=x+\frac{1}{x+1}=(x+1)+\frac{1}{x+1}-1\geqslant 1$，当且仅当$(x+1)^2=1$即$x=0$时最小值为1.

4. $f(x)=x\sqrt{2-x^2}\leqslant\frac{x^2+1-x^2}{2}=\frac{1}{2}$，当且仅当$x=\sqrt{1-x^2}$即$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$时取最大值$\frac{1}{2}$.

5. $\because x<0$，$\therefore 4x+\frac{1}{x}=-\left[(-4x)+\left(-\frac{1}{x}\right)\right]\leqslant -2\sqrt{(-4x)\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)}=-4$.

当且仅当$-4x=-\frac{1}{x}$，即$x=-\frac{1}{2}$时等号成立. $\therefore f(x)$的最大值为-4.

6. 设原价为a，

方案甲：价格为$y_{甲}=a(1+p\%)(1+q\%)=a(1+p\%+q\%+p\%\cdot q\%)$；

方案乙：价格为$y_{乙}=a(1+q\%)(1+p\%)=a(1+p\%+q\%+p\%\cdot q\%)$；

方案丙：价格为$y_{丙}=a\left[1+\left(\frac{p+q}{2}\right)\%\right]^2=a\left[1+p\%+q\%+\left(\frac{p\%+q\%}{2}\right)^2\right]$.

$\because p\%\cdot q\%\leqslant\left(\frac{p\%+q\%}{2}\right)^2$，$\therefore$方案丙提价幅度较大.

7. 设A，B之间的距离为1，甲用的时间为$t_{甲}$，乙用的时间为$t_{乙}$，则有

$\frac{1}{2}at_{甲}+\frac{1}{2}bt_{甲}=1$，$\therefore t_{甲}=\frac{2}{a+b}$，$t_{乙}=\frac{\frac{1}{2}}{a}+\frac{\frac{1}{2}}{b}=\frac{b+a}{2ab}$.

$\therefore t_{甲}-t_{乙}=\frac{2}{a+b}-\frac{b+a}{2ab}=\frac{4ab-(a+b)^2}{2ab(a+b)}\leqslant 0$，$\because a\neq b$，$\therefore t_{甲}<t_{乙}$.

8. (1)不成立，若$a=b=1$，则$a^2+b^2=2ab$.

(2)不成立，若$a=b=-1$，则$a+b<2\sqrt{ab}$.

(3)成立，$\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\geqslant 2\sqrt{\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt{\frac{b}{a}}}=2$. 当且仅当$a=b$时取等号.

(4)成立，$\because\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=-\left[\left(-\frac{b}{a}\right)+\left(-\frac{a}{b}\right)\right]\leqslant -2$，当且仅当$a=-b$时取等号.

(5)不成立，$y=\frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+2}}=\frac{x^2+2+1}{\sqrt{x^2+2}}=\sqrt{x^2+2}+\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\geqslant 2$，

当且仅当$\sqrt{x^2+2}=\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$，即$x^2+2=1$，$x^2=-1$时取等号，矛盾. $\therefore y$的最小值不为2.

(6)成立，$\because y=2-\left(3x+\frac{4}{x}\right)\leqslant 2-4\sqrt{3}$，当且仅当$3x=\frac{4}{x}$即$x=\frac{2\sqrt{2}}{3}$时取等号.

9. 设水池的长与宽分别为x，y，总造价为z元，则有

$z=150xy+(6x+6y)\times 120$，且$3xy=4\ 800$，

$\therefore z=150xy+720x+720y=240\ 000+720(x+y)\geqslant 240\ 000+720\times 2\sqrt{1\ 600}=297\ 600$.

当且仅当$x=y=40$时取等号.

10. 设海报印制部分的长与宽分别为 x，y，则 $xy=128$，如图 10－12 所示.

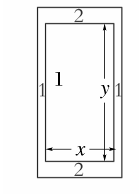


图 10－12

于是四周空白面积为：

$$S=2x+4y+4\times 2=2x+\frac{4\times 128}{x}+8=2x+\frac{512}{x}+8\geqslant 56.$$

当且仅当 $2x=\frac{512}{x}$ 即 $x=16$，$y=8$ 时，S 最小.

11. $f(v)=\dfrac{36.8v}{1.6v+\dfrac{v^2}{22}+49.5}=\dfrac{36.8}{1.6+\dfrac{v}{22}+\dfrac{49.5}{v}}$，

$\because \frac{v}{22}+\frac{49.5}{v}\geqslant 2\sqrt{\frac{49.5}{22}}=3.$

当且仅当 $\frac{v}{22}=\frac{49.5}{v}$ 即 $v=33$ 时，$f(v)$ 最大，且最大值为 8.

P. 106 练习

1. (1)如图 10－13 所示. (2)如图 10－14 所示. (3)如图 10－15 所示.

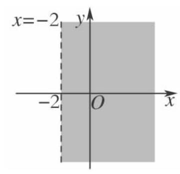


图 10－13

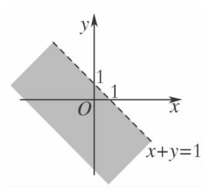


图 10－14

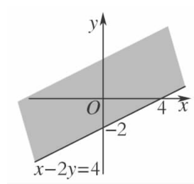


图 10－15

2. 如图 10－16 所示.

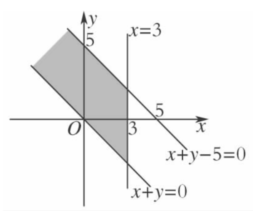


图 10－16

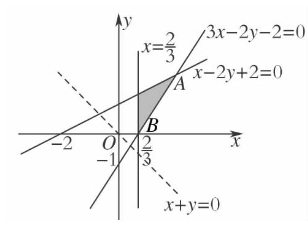


图 10－17

3. 由图 10－17 直观可得，当直线 $z=x+y$ 过点 B 时，z 最小.

直线 $z=x+y$ 过点 A 时 z 最大，又 $B\left(\frac{2}{3},0\right)$，$A(2,2)$，

$\therefore z_{\max}=4$，$z_{\min}=\frac{2}{3}$.

4. 设每天应配制两种饮料分别为 x，y 杯，利润为 z 元，则有 $z=0.7x+1.2y$.

由题意知，x，y 应该满足下列不等式组：

$$\begin{cases}9x+4y\leqslant 3\ 600,\\4x+5y\leqslant 2\ 000,\\3x+10y\leqslant 3\ 000,\\x,y\in \mathbf{N}.\end{cases}$$

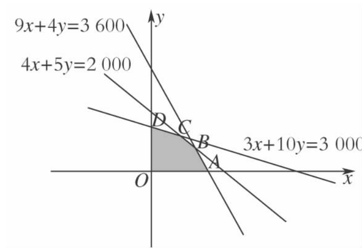


图 10－18

如图 10－18，由斜率大小可知，在点 C 处取最大值，点 $C(200,240)$，$z_{\max}=428$ 元.

习题 4

1.(1)如图 10－19 所示. (2)如图 10－20 所示. (3)如图 10－21 所示. (4)如图 10－22 所示.

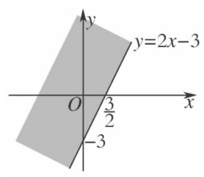


图 10－19

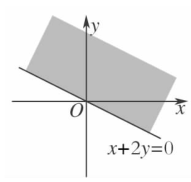


图 10－20

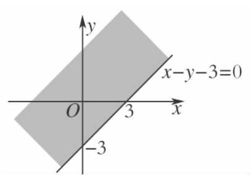


图 10－21

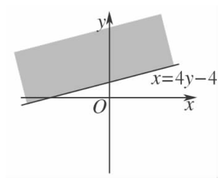


图 10－22

2.(1)如图 10－23 所示. (2)如图 10－24 所示. (3)如图 10－25 所示. (4)如图 10－26 所示.

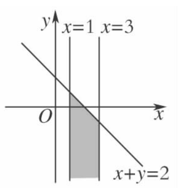


图 10－23

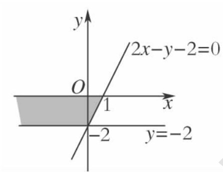


图 10－24

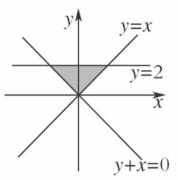


图 10－25

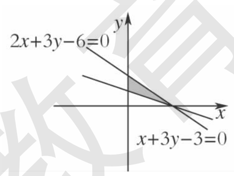


图 10－26

3. 由图 10－25 可知，$z=y-2x$ 的最大值为 6，最小值为 -2.

4. (1) $\begin{cases}x+y\geqslant 1,\\x+y\leqslant 2,\\x\geqslant 0,\\y\geqslant 0.\end{cases}$ (2) $\begin{cases}2x-y-4\geqslant 0,\\2x+y-8\leqslant 0,\\y\geqslant 0.\end{cases}$

5. 由图 10－27 可知，$z=x-y$ 过点 A 最小，过点 C 最大，

$\therefore z_{\min}=-\dfrac{5}{2}$，$z_{\max}=6$.

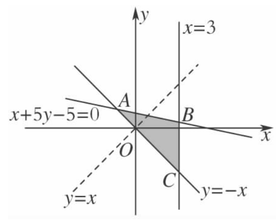


图 10－27

6. 设生产甲、乙两种产品分别为 x，y 件，利润为 z，$z=2x+3y$.

$\begin{cases}4x\leqslant 16,\\4y\leqslant 12,\\x+2y\leqslant 8,\\x,y\in\mathbf{N},\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}x\leqslant 4,\\y\leqslant 3,\\x+2y\leqslant 8,\\x,y\in\mathbf{N},\end{cases}$

由图 10－28 可知，$z_{\max}=14$.

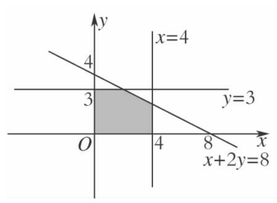


图 10－28

复习题十

1. (1) $\because a^3b-ab^3=ab(a^2-b^2)$，

$\because a>b>0$，$\therefore ab>0$，$a^2>b^2$，$\therefore a^3b>ab^3$.

(2) $\because x(x+2)-(x+1)^2=x^2+2x-x^2-2x-1=-1<0$，

$\therefore x(x+2)<(x+1)^2$.

(3) $\because x^2-(4x-5)=x^2-4x+5=(x-2)^2+1>0$，$\therefore x^2>4x-5$.

(4) $\because \dfrac{x^2-6x+5}{x^2+2x+1}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{3(x^2-6x+5)+x^2+2x+1}{3(x^2+2x+1)}=\dfrac{4(x-2)^2}{3(x+1)^2}>0$，$\therefore$ 结论成立.

2. (1) $\because \begin{cases}a<b<0,\\c<d<0,\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}-a>-b>0,\\-c>-d>0,\end{cases}$ $\therefore ac>bd$.

(2) $\because a>b>0$，$\therefore a^2>b^2>0$，$c>d>0$，$\therefore a^2c>b^2d$.

3. (1) $\because b^2+c^2\geqslant 2bc$，$c^2+a^2\geqslant 2ac$，$a^2+b^2\geqslant 2ab$，$\therefore$ 结论成立.

(2) $\because a+b+2=(a+1)+(b+1)\geqslant 2\sqrt{a}+2\sqrt{b}$，$\therefore$ 结论成立.

(3) $\because \dfrac{a}{b^2}+\dfrac{b}{a^2}+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\left(\dfrac{a}{b^2}+\dfrac{1}{a}\right)+\left(\dfrac{b}{a^2}+\dfrac{1}{b}\right)\geqslant 2\sqrt{\dfrac{1}{b^2}}+2\sqrt{\dfrac{1}{a^2}}=\dfrac{2}{a}+\dfrac{2}{b}$，

$\therefore \dfrac{a}{b^2}+\dfrac{b}{a^2}\geqslant \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$.

4. (1) $-3x^2+8x-4<0$，可化为 $3x^2-8x+4>0$.

$\therefore (3x-2)(x-2)>0$，$\therefore$ 解集为 $\left\{x\,|\,x>2 \text{ 或 } x<\dfrac{2}{3}\right\}$.

(2) $4x^2-20x+25\leqslant 0$，可化为 $(2x-5)^2\leqslant 0$，$\therefore x=\dfrac{5}{2}$，$\therefore$ 解集为 $\left\{x\,\middle|\,x=\dfrac{5}{2}\right\}$.

(3)$\begin{cases}x^2-x-2>4,\\x^2-x-2<10,\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}x^2-x-6>0,\\x^2-x-12<0,\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}x>3\text{ 或 }x<-2,\\-3<x<4,\end{cases}$

$\therefore$解集为$\{x|3<x<4$ 或 $-3<x<-2\}$.

(4)$\begin{cases}2x^2-x-2>-1,\\2x^2-x-2<1,\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}2x^2-x-1>0,\\2x^2-x-3<0,\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}(2x+1)(x-1)>0,\\(2x-3)(x+1)<0,\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}x>1\text{ 或 }x<-\dfrac{1}{2},\\-1<x<\dfrac{3}{2},\end{cases}$

$\therefore$解集为$\left\{x\,\middle|\,1<x<\dfrac{3}{2}\text{或}-1<x<-\dfrac{1}{2}\right\}$.

5. $f(x)=\dfrac{1}{4-x}-x=\dfrac{1}{4-x}+(4-x)-4\geqslant-2$,

$\therefore$当且仅当$\dfrac{1}{4-x}=4-x$ 即 $x=3$ 时取最小值-2.

6. $f(x)=(1-4x^2)x^2=4\left(\dfrac{1}{4}-x^2\right)x^2\leqslant4\cdot\left(\dfrac{\dfrac{1}{4}-x^2+x^2}{2}\right)^2=\dfrac{1}{16}$.

当且仅当$\dfrac{1}{4}-x^2=x^2$ 即 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$时取最大值$\dfrac{1}{16}$.

7. C.

8. $\begin{cases}b=2a,\\\sqrt{(a-2)^2+(b-1)^2}\leqslant3,\end{cases}$ $\therefore a^2-4a+4+4a^2-4a+1\leqslant9$, $\therefore 5a^2-8a-4\leqslant0$.

$\therefore(5a+2)(a-2)\leqslant0$, $\therefore-\dfrac{2}{5}\leqslant a\leqslant2$.

9. 由韦达定理可知$\begin{cases}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}=-\dfrac{b}{a},\\-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{a},\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}a=-12,\\b=-2.\end{cases}$

10. (1)$x^2-(m+n)x+mn>0$ (2)$x^2-(m+n)x+mn<0$.

11. 由图 10－29 可得：$z=f(x,y)$的最大值为 5.

12. 由图 10－30 可得：$z=f(x,y)$的最小值为 3.

13. 由图 10－31 可得：$a+b$ 的最小值为 4.

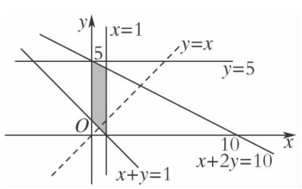


图 10－29

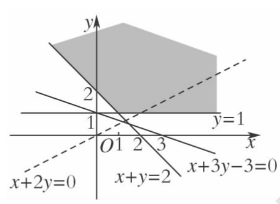


图 10－30

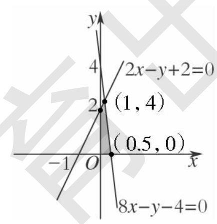


图 10－31

14.设该旅店某晚的收入为 y 元，则 $y=(50+10x)(200-10x)$，$(x\in\mathbf{N}^*)$.

由题意可知 $y>12\ 600$，$\therefore(50+10x)(200-10x)>12\ 600$.

$\therefore x^2-15x+26<0$，$\therefore 2<x<13$，且 $x\in\mathbf{N}^*$.

答：每个床位的出租价格可定在 70 到 180 之间.

15.设生产甲、乙两种混合肥料分别为 x，y 车皮，利润为 z 元.

则有 $z=10\ 000x+5\ 000y$，且$\begin{cases}4x+y\leqslant 10,\\18x+15y\leqslant 66,\\x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N},\end{cases}$即$\begin{cases}4x+y\leqslant 10,\\6x+5y\leqslant 22,\\x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N}.\end{cases}$

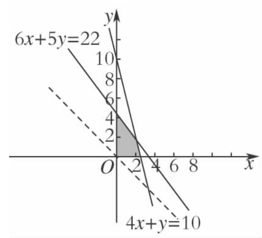


图 10－32

如图 10－32 所示，设直线 $4x+y=10$ 与 $6x+5y=22$ 的交点为 A，则 A 点坐标为 $(2,2)$. $\therefore$ 当 $x=2$，$y=2$ 时取最大值，且 $z_{\max}=30\ 000$ 元.

16.(1)$\because ab^2+a^2b-(a^3+b^3)=a(b^2-a^2)+b(a^2-b^2)=(a^2-b^2)(b-a)=(a-b)(a+b)\cdot(b-a)=-(a-b)^2(a+b)$.

又 $\because a>b$，$b>0$，$a\neq b$，$\therefore -(a-b)^2(a+b)<0$，$\therefore ab^2+a^2b<a^3+b^3$.

(2)$\because ab^3+a^3b-(a^4+b^4)=a(b^3-a^3)+b(a^3-b^3)=(a^3-b^3)(b-a)=(a-b)(a^2+b^2+ab)(b-a)=-(a-b)^2(a^2+b^2+ab)=-(a-b)^2\left[\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2\right]<0$,

$\therefore ab^3+a^3b<a^4+b^4$.

推广：(1)若 $a>0$，$b>0$ 且 $a\neq b$，则 $ab^{2n}+a^{2n}b<a^{2n+1}+b^{2n+1}$，$n\in\mathbf{N}^*$；

(2)若 a，b 是实数且 $a\neq b$，则 $ab^{2n+1}+a^{2n+1}b<a^{2n+2}+b^{2n+2}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

证明如下：(1)$\because ab^{2n}+a^{2n}b-a^{2n+1}-b^{2n+1}=(a-b)(b^{2n}-a^{2n})$，

$\because a>0$，$b>0$，$\therefore a-b$ 与 $b^{2n}-a^{2n}$ 异号.

$\therefore ab^{2n}+a^{2n}b<a^{2n+1}+b^{2n+1}$.

(2)$ab^{2n+1}+a^{2n+1}b-a^{2n+2}-b^{2n+2}=(a-b)(b^{2n+1}-a^{2n+1})$.

$\because a-b$ 与 $b^{2n+1}-a^{2n+1}$ 异号，$\therefore ab^{2n+1}+a^{2n+1}b<a^{2n+2}+b^{2n+2}$.

17.略.(提示：对丙要分情况，再与甲、乙比较.)