湘教版 普通高中课程标准实验教科书

教师教学用书

数学

选修 2–1 理科

主编：傅晋玖

编者：邹黎华 孔祥明 林岳水 林 风

湖南教育出版社

编 写 说 明

本书是《普通高中课程标准实验教科书·数学选修 2-1(理科)》的教师教学用书. 编写时按教材分章、节安排，每章首先阐述了该章的教学目标、教材说明、课时安排建议、教学建议、评价建议，然后按教材分节编写，每节内容包括教材线索、教学目标、教材分析、教学建议、例题解析、相关链接. 在每章的最后给出教材中练习、习题和复习题的参考解答.

编写此书的目的是为了帮助教师更好地把握教材，包括教材线索、教学目标、教材分析、内容结构及教学中应予以关注的重点和难点，所提教学建议及例题解析仅供教师在教学过程中参考. 在相关链接中所提供的短文或例题是编者精心编写并与该章、节相关的内容，旨在扩大教师的知识视野，使教师用较高的观点把握教材，不要求学生掌握.

希望本书能成为教师使用教材的好帮手，恳请广大教师在使用过程中提出宝贵意见和建议. 谢谢!

目　　录

第 1 章　常用逻辑用语

一、教学目标

帮助学生正确使用常用逻辑用语，更好的理解数学内容中的逻辑关系，体会逻辑用语在表述和论证中的作用，利用这些逻辑用语准确地表达数学内容，更好地进行交流，避免在使用过程中产生错误. 高中数学课程中，学“常用逻辑用语”不是为逻辑学和数理逻辑奠定基础，这与“简易逻辑”的目标不同，这一点需要老师们特别注意.

1. 了解命题的逆命题、否命题与逆否命题.

2. 理解必要条件、充分条件与充要条件的意义，会分析四种命题的相互关系.

3. 通过实例，了解逻辑联结词“非”、“且”、“或”的含义.

4. 通过生活和数学中的丰富实例理解全称量词与存在量词的意义.

5. 能正确地对含有一个量词的命题进行否定.

二、教材说明

正确地使用逻辑用语是现代社会公民应该具备的基本素质. 无论是进行思考、交流，还是从事各项工作，都需要正确地运用逻辑用语来表达自己的思想. 在本章中，学生将在义务教育阶段的基础上，学习常用逻辑用语，体会逻辑用语在表述和论证中的作用，利用这些逻辑用语准确地表达数学内容，更好地进行交流.

高中学生已经具有较丰富的生活经验和一定的科学知识. 因此，教材中选择学生感兴趣的、与其生活实际密切相关的素材，现实世界中的常见现象或其他科学的实例，展现逻辑用语概念，理解常用逻辑用语的意义，体会常用逻辑用语的作用. 使学生感到数学就在自己身边，数学的应用无处不在.

数学各部分内容之间的知识是相互联系的，学生的学习是循序渐进、逐步发展的. 为了加强学生对数学内部联系的认识，教材需要将不同的数学内容相互沟通，以加深学生对数学学习的认识和对本质的理解. 对于本章的学习，不仅需要用已学过的数学知识为载体，而且需要把常用逻辑用语用于后继的数学学习中.

《普通高中数学课程标准（实验）》（以下简称《课标》）对“常用逻辑用语”的要求，既是阶段性要求也是终结性要求，正确的使用常用逻辑用语，不仅是学习这一部分内容的要求，而且还需要在今后的学习中，通过不断的正确使用常用逻辑用语，加深对常用逻辑用语的认识. 有兴趣选修《开关电路与布尔代数》的同学还会接触到有关命题的一些知识，了解“命题演算”是布尔代数的一个具体模型.

本章的主要内容：命题的概念和例子，命题的四种形式，充分条件和必要条件，逻辑联结词“非”、“且”和“或”，全称量词和存在量词.

课程内容的呈现，应注意反映数学发展的规律，以及人们的认识规律，体现从具体到抽象，特殊到一般的原则.

1. 数学知识的丰富和发展依赖于人们不断地提出命题并力图证明这些命题. 教材通过数学课中大量的语句引出命题的概念，在初中已学过的命题知识的基础上阐述了命题的四种形式之间的转化和关系；从而更进一步的探讨命题“若 p 则 q”的真假性，给出充分条件和必要条件的概念.

2. 人说话时或书面表达时，句子之间需要用联结词联结，不同的联结词表达的意思有很大的差别，特别地，数学表达需要精确和严密，因此，在学习命题的基础上，要进一步学习联结命题的逻辑联结词. 学习联结词的正确使用，特别是全称量词和存在量词的应用.

随着时代的发展，信息技术已经渗透到数学教学中. 如何使现代信息技术为学生的数学学习提供更多的帮助，是教材编写中值得注意和进一步思考的问题. 教材可以在处理某些内容时，提倡使用计算机或计算器，帮助学生理解数学概念，还应鼓励学生使用现代技术手段处理繁杂的计算，解决实际问题，以取得更多的时间和精力去探索和发现数学的规律，培养创新精神和实践能力. 另外，现代信息技术不仅可以在改进学生的学习方式上发挥巨大的潜力，而且还可以渗透到数学的课程内容中来，教材应注意这些资源的整合. 例如，可以把算法融入有关数学课程内容中；也可以引导学生通过网络搜集资料，研究数学文化，体会数学的人文价值.

三、课时安排建议

本章教学时间约需 **8** 课时，具体分配如下（仅供参考）：

1.1　命题及其关系	
1.1.1　命题的概念和例子	1 课时
1.1.2　命题的四种形式	1 课时
1.1.3　充分条件和必要条件	2 课时
1.2　简单的逻辑联结词	
1.2.1　逻辑联结词“非”、“且”和“或”	1 课时
1.2.2　全称量词和存在量词	2 课时
小结与复习	1 课时

四、教学建议

1. 数学教学要体现课程改革的基本理念，在教学设计中充分考虑数学的学科特点，高中学生的心理特点，不同水平、不同兴趣学生的学习需要，运用多种教学方法和手段，引导学生积极主动地学习，掌握数学的基础知识和基本技能以及它们所体现的数学思想方法，

加强应用意识和创新意识，对数学有较为全面的认识，提高数学素养，形成积极的情感态度，为进一步学习和发展打好基础.

2. 在本部分内容的教学中，要通过具体实例来帮助学生按《课标》要求了解或理解常用逻辑用语，并学会正确使用逻辑用语，避免形式化的讨论. 因为本部分内容不是为逻辑学和数学逻辑奠定基础，而是学习正确的使用逻辑用语来清晰的表达数学内容.

例如，对于一个具体命题，理解它的否定命题的真假并不难. 但是，对于一般形式的命题“若 p 则 q”，认识这个命题否定的含义就比较困难，因此不要求形式的讨论这类问题.

3. 在这部分内容的教学中，应以学生已经学过的数学内容为载体，帮助学生学会正确的使用逻辑用语，加深对已学过的数学知识之间的逻辑联系和数学本质的认识.

例如，在充要条件的教学中，可以以勾股定理和直线斜率为具体实例.

勾股定理反映了三角形三边之间的一种特殊关系，这种特殊关系是刻画直角三角形的一个充分必要条件，有了这个条件，我们就可以通过边的长度之间的关系来研究几何中的直角三角形.

两条直线的方向向量的数量积等于零是刻画两条直线垂直的充分必要条件，有了这个条件，我们就可以利用向量的代数运算来研究几何中的垂直问题.

4. 在教学过程中，要结合具体数学内容不断的使用常用逻辑用语，加深对相关数学内容的认识.

例如，在用导数研究函数单调性时，有这样的结果：

一个函数在其定义域内，如果每一点的导数都大于零，则该函数为增函数.

由上述结论可以知道“每一点导数大于零”是“函数为增函数”的一个充分条件. 所以上述结论可以作为一个判定函数单调性的定理. 那么，“每一点导数大于零”是否是“函数为增函数”的必要条件？

以函数 $y=x^3$ 为例.我们知道函数 $y=x^3$ 是增函数，是否能保证“每一点导数大于零”？这是一个含有全称量词的命题.我们知道 $y=x^3$ 在 $x=0$ 处的导数等于零.这说明“函数为增函数”无法保证“每一点导数大于零”，即“每一点导数大于零”只是“函数为增函数”的充分条件，而不是必要条件.这个例子也说明了如何对含有全称量词的命题进行否定.

5. 本章的学习重在使用，在使用中不断地加深对于常用逻辑用语的认识. 要通过大量（各个方面）实例让学生充分感受，并在处理具体问题的过程中深化对基本概念的认识，掌握判断的方法，重视用“对比”的方法引导学生在比较中深化理解. 注意引导学生在使用常用逻辑用语的过程中掌握常用逻辑用语的用法，纠正出现的逻辑错误，体会运用常用逻辑用语表述数学内容的准确性、简洁性.

6. 某些具体内容的教学要求：

（1）命题及其关系的教学

第一、对于“命题以及命题的逆命题、否命题、逆否命题”的教学要从具体实例出发，不要形式化的讨论.

例如，已知命题“若 $m>0$，则关于 x 的方程 $x^2+x-m=0$ 有实数根”，试写出它的逆命题、否命题和逆否命题，并分别判断它们的真假.

第二、这部分教学的重点应放在“充分条件、必要条件、充要条件的理解”上，对于“充分条件、必要条件、充要条件”的教学要求应该参照前面的具体要求与深广度分析中的相关部分.

例如，$\dfrac{x}{y}>1$ 的一个充分不必要条件是（　　）

A. $x>y$　　B. $x>y>0$　　C. $x<y$　　D. $y<x<0$

例如，下列“若 p，则 q”形式的命题中，p 是 q 的什么条件？

①若两个三角形全等，则这两个三角形的面积相等；

②若 $ab=0$，则 $a=0$；

③若 $b=0$，则函数 $f(x)=ax^2+bc+c$ 是偶函数；

④若 $x=2$，则 $x-3=\sqrt{3-x}$.

在教学中，应该注意在讨论“充分条件、必要条件、充要条件”时，首先应该考虑命题是否是真命题. 上述例子②中，“若 $ab=0$，则 $a=0$”不是真命题，这时，我们需要判断“若 $a=0$，则 $ab=0$”是不是真命题. 由于它是真命题，所以 $ab=0$ 是 $a=0$ 的必要条件. 因此我们不要去形式的讨论“若 p 则 q”这种命题的充分条件和必要条件.

（2）简单的逻辑联结词的教学

第一、对于简单的逻辑联结词“或”、“且”、“非”的教学，也要通过具体实例，帮助学生理解它们的含义.

例如，①p：$\sqrt{2}$是无理数，q：$\sqrt{2}$大于 1，写出“p 且 q”，“p 或 q”，“非 p”的形式，并判断他们的真假.

②用 p：$\dfrac{1}{x^2-x-2}>0$ 表示实数满足的条件，用 q：$\dfrac{1}{x^2-x-2}\leqslant 0$ 表示实数满足的另一个条件.“非 p”是否等于 q？

显然，$x=2$ 不满足条件 p，也不满足条件 q. 由于 $x=2$ 不满足条件 p，所以 $x=2$ 满足条件“非 p”. 因此，“非 p”不等于 q.

这个例子有助于理解“条件”（命题）的“非”. 在对“非”的学习中，最基本的性质是“条件”（命题）和“条件”（命题）的“非”，不能同时成立. 在教学中，要注意一个条件（命题）和这个条件（命题）所确定的集合是不同的概念.

第二、教学中只要求用这些逻辑联结词作“合成”，不要求对复合命题“分解”.

（3）全称量词与存在量词的教学

第一、量词的教学也需要通过实例，帮助学生理解全称量词与存在量词的意义.

第二、教学中只要求理解和掌握含有一个量词的命题，对于含有量词的命题的否定，也只要求对含有一个量词的命题进行否定.

例如，对于给定命题“所有能被 3 整除的整数都是奇数”，写出它的否定命题.

学生有如下的解答：

①存在一个能被 3 整除的整数不是奇数；

②有些能被 3 整除的整数不是奇数；

③有些能被 3 整除的整数是偶数；

④所有能被 3 整除的数不都是奇数；

⑤并非所有能被 3 整除的整数都是奇数.

这些解答都是正确的，本质上是一致的. 有的老师在教学中，要求学生写出几种不同的解答形式，这是不必要的.

也有同学解答为：所有能被 3 整除的数都不是奇数. 这个解答是错误的.

五、评价建议

数学学习评价，既要重视学生知识、技能的掌握和能力的提高，又要重视其情感、态度和价值观的转变；既要重视学生学习水平的甄别，又要重视其学习过程中能动性的发挥；既要重视定量的认识，又要重视定性的分析；既要重视教育者对学生的评价，又要重视学生的自评互评. 总之，应将评价贯穿于数学学习的全过程，不能忽视评价的甄别与选拔功能，更突出评价的激励与发展功能. 相对于结果，过程更能反映每一个学生的发展变化，体现出学生成长的历程. 因此，数学学习的评价要重视结果，也要重视过程. 对学生数学学习过程的评价，包括学生参与数学活动的动机和态度、完成数学学习的自信、独立思考的习惯、合作交流的意识、数学认知的发展水平等方面.

数学教学的评价应立足于营造优质的育人环境，数学教与学活动过程的调控，学生和教师的共同成长.

下面给出一些具体的评价建议与要求：

1. 通过数学学习过程的评价，努力引导学生正确认识数学的价值，使他们产生积极的数学学习兴趣和动机. 数学的特点决定了个体数学知识的学习过程离不开理性思维，对学生独立地进行数学思考的关注应成为学习过程评价的核心之一. 评价中应关注学生是否肯于思考、善于思考、坚持思考并不断地改进思考的方法与过程；学习过程的评价，还应关注学生是否积极主动地参与数学学习活动，是否愿意与同伴交流数学学习的体会、与他人合作探究数学问题；学生学好数学的自信心，勤奋、刻苦以及克服困难的毅力等良好的意志品质，也是数学学习过程评价的重要内容.

2. 应当重视学生理解并有条理地表达对数学内容的思考和理解的过程；关注学生能否不断反思自己的数学学习过程. 可要求学生归纳本章的知识结构，独立写出本章的学习小结，并相互交流，互相点评.

3. 评价对数学的理解，可以关注学生能否独立举出一定数量的用于说明问题的正例和反例. 特别地，核心概念对数学学习的影响是深远的，对它们的评价应该在高中数学学习的整个过程中予以关注. 例如，对充分条件、必要条件与充要条件的意义的理解，对全称

量词、存在量词的含义以及对含有一个量词的命题进行否定及逻辑联结词的含义的理解与运用情况.

4. 进行一次评估测试，了解学生掌握基础知识和基本技能的情况，尤其关注学生对重点知识的掌握情况.

1.1 命题及其关系

1.1.1 命题的概念和例子

教材线索

本小节从学生学过的大量的判断语句出发引出命题的概念，并根据命题是否成立分成真命题、假命题，结合例题介绍了如何证明一个命题是真命题还是假命题. 同时介绍了数学发展的一个重要动力——猜想.

教学目标

（一）知识与技能

了解命题的概念.

（二）过程与方法

感知正确判断命题的真假.

（三）情感、态度与价值观

初步形成运用逻辑知识准确地表述问题的数学意识.

教材分析

1. 重点

命题的概念.

2. 难点

正确判断命题的真假.

3. 对命题的认识

对命题的认识我们不从一般的定义出发，而是通过实例了解“命题”，这些实例都能清晰地分辨出组成这个命题的条件和结论，并且能判断真假.

例如，（1）若一个四边形是矩形，则这个四边形是平行四边形；

（2）三角形内角和等于 180°；

（3）$x>3$.

①明确的给出了条件和结论，并能判断真假.

②虽然没有明确的给出条件和结论，但是能清晰地分辨出组成这个命题的条件和结论，即如果有三个角都是一个三角形的内角，则这三个角的和等于 180°.

③不能判断真假，所以它不是一个命题.

4. 要证明一个命题是真命题，需要严格的数学推理、论证；要证明一个命题是假命题，通常的方法是举一个反例. 暂时无法判断真假的命题可以叫作猜想. 一个好的猜想将推动数学的发展，因为人们在证明猜想的过程中会提出许多新的数学概念和想出许多新的数学方法.

教学建议

教学要从具体实例出发，不要形式化的讨论. 对于命题：我们只研究明确地给出条件和结论的命题，也就是说只研究含有“如果…（条件），那么…（结论）”，“若…（条件），则…（结论）”或“因为…（条件），所以…（结论）”的命题. 要使学生了解什么是条件，什么是结论，会将一个命题分解成“若 p，则 q”的形式.

例如，命题：12 能被 3 整除. 其条件和结论不明确，对于这样的命题，在教学中不宜引入，否则，不好给出其逆命题等，并且容易混淆，我们在这里不予研究.

如果将命题改写为：因为 12 是 3 的倍数，所以 12 能被 3 整除. 这时才可以引入教学.

例题解析

例 判断下列语句是否是命题？若是，则判断其真假，并说明理由.

（1）$x>7$；

（2）如果 a，b 是正实数且 $a^2>b^2$，那么 $a>b$；

（3）如果 a，b 是任意实数且 $a^2>b^2$，那么 $a>b$.

分析 显然(1)不是命题. 要证明命题(2)是真命题，即要证明在已知条件下 $a>b$ 成立，可以用求差法证明. 要证明命题(3)是假命题，只需举一个特例说明，在已知条件下 $a>b$不成立即可.

说明 证明命题是假命题的通常方法是举一个反例.

相关链接

（一）费马大定理

费马大定理又称费马最后定理，这个著名的猜想产生于 1673 年，费马在读丢番图的

《算术》时，在第 2 卷问题 8："将一个已知的平方数分为两个平方数"的页边写下如下的注解："分一立方数为两个立方数，分一个四次幂（或者一般地，任何次幂）为两个同次幂，这是不可能的，我确实找到了一个极妙的证明，但是页边太窄，写不下."费马是否真有此问题的一个完善的证明，也许将永远是个谜！

费马对 $n=4$ 的情况给出了一个证明，欧拉对 $n=3$ 的情况给出了证明，大约 1825 年，勒让德和狄利克雷独立地对 $n=5$ 的情况给出了证明，拉梅于 1839 年证明了 $n=7$ 的情形.德国数学家库默尔对此问题的研究作了有意义的推进.1908 年，德国数学家佛尔夫斯克尔给哥廷根科学院留下十万马克，作为"定理"的第一个完全证明的奖金，更多的证明者纷至沓来.

1993 年 6 月，牛顿研究所的著名数学家维尔斯完成了证明. 至此，这个历时 357 年的猜想被完美地解决了. 在这 357 年中，有多少优秀的数学家为了费马问题作出不懈的努力，然而，他们都纷纷失败了. 但是，他们为解决问题而作的努力，作出的好设想，却是有价值的，有重大意义的. 正如希尔伯特所说，费马问题是一只会下金蛋的鹅，能激发许多思想，推动数学向前发展.

（二）费马数之谜

伟大的科学家也会犯错误，就连费马这位被誉为 17 世纪最伟大的数学家也不例外. 费马出生于 17 世纪初的法国，是一个皮革商的儿子，童年是在家里接受的教育. 30 岁那年，他得到图卢兹地方议会辩护士的职位. 在那里，他谦虚谨慎地干他的工作，并且利用业余时间从事数学研究. 虽然他一生中发表的著作不多，但他和同时代的许多一流数学家有通信往来，并给他们以相当大的影响.

在费马对数学多种多样的贡献中，最杰出的是对现代数论的奠基. 而他所犯的错误也恰恰是在他最擅长的数论中.

1640 年，费马发现：设 $F_n=2^{2^n}+1$，当 $n=0$，1，2，3，4 时，F_n 分别给出 3，5，17，257，65 537，并且这 4 个数都是素数. F_5 太大（$F_5=4\ 294\ 967\ 297$），于是费马没有再进行验证. 他猜测：对于一切自然数 n，F_n 都是素数，这种素数后来被称为费马数. 但他猜错了. 1732 年，欧拉发现：$F_5=2^2+1=4\ 294\ 967\ 297=641\times6\ 700\ 417$，是一个合数. 一百多年后，有人发现 $F_6=2^{26}+1=27\ 477\times67\ 280\ 421\ 310\ 721$，也是合数.

令人惊奇的是，陆续有数学家发现 F_7，F_8，…，直到 F_{19} 以及许多 n 值很大的 F_n 全都是合数. 计算机发明后，计算大大简化，但是目前能判断它是素数还是合数的也只有几十个，除费马当年给出的 5 个外，至今尚未有新的素数发现. 人们开始猜测：费马数是否只有有限个？除了那 5 个素数之外，是否再也没有了？这两个问题至今也没有解决，成为数学中的一个谜.

1.1.2 命题的四种形式

教材线索

本小节从学生初中学过的命题与逆命题的知识，引出由一个命题可以构造出命题的其他三种形式，并结合例题介绍了如何由一个命题构造其他命题. 同时介绍了用符号抽象地表示命题的方式. 在此基础上，探讨了命题四种形式之间的关系，特别是其中的等价关系在解决数学问题中的应用.

教学目标

（一）知识与技能

了解命题的逆命题、否命题与、逆否命题的概念，明白四种命题的关系.

（二）过程与方法

感知一般命题的逆命题、否命题、逆否命题，并判断他们的真假.

（三）情感、态度与价值观

初步形成运用逻辑知识解决问题的数学意识.

教材分析

1. 重点

逆命题、否命题、逆否命题的概念及写法.

2. 难点

四种命题的关系.

3. “了解命题的逆命题、否命题与逆否命题”是指：

对给定的具体命题，可以写出它的逆命题、否命题、逆否命题，并可以判断出它们的真假.

“会分析四种命题的相互关系”. 不研究含有逻辑联结词“非”、“且”、“或”的命题的逆命题、否命题和逆否命题. 主要包括两部分内容：

第一、通过实例的分析，总结出表示四种命题之间的基本关系的图示，如图 1-1.

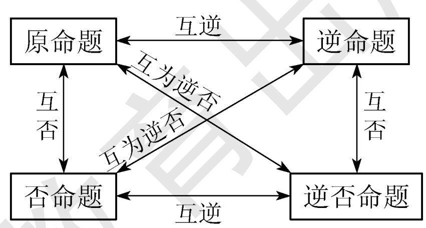


图 1-1

第二、知道原命题与其逆否命题是同真同假的，原命题的逆命题与原命题的否命题是同真同假的，通常我们说他们是相互等价的.

4. 由一个命题出发可以构造出它的逆命题、否命题与逆否命题，构造的关键是分析原命题的条件和结论. 本书中若无特别说明，所讨论的命题都是条件与结论比较明显的命题. 用符号抽象地表示命题，可以清晰地显示命题的四种形式，关键还是写好原命题的 p 和 q.

5. 原命题和它的逆否命题是等价的，否命题与原命题的逆命题是等价的. 我们知道，等价命题不会产生新的命题,但能提供一种新的思考问题的方法,对拓宽学生的思维有益.原命题和它的逆命题、否命题是不等价的.即当原命题为真时,逆命题、否命题可以为真,也可以为假.但考虑原命题的逆命题、否命题是提出猜想的一个来源,应当引起足够的重视.

教学建议

1. 对“命题的逆命题、否命题与逆否命题”只要求做一般性了解. 通过教学实例，重点关注四种命题的相互关系，理解命题与其逆否命题具有相同的真假性（即等价性），由此，对一些问题的解决提供了一种便捷的、间接证明问题的方法，这样便于培养和提高学生的逆向思维能力.

例如，判断命题：“若 $m>0$，则 $x^2+x-m=0$ 有实根”是真命题吗？

由该命题的逆否命题易于判断为真，而直接判断原命题，容易出现错误的结论.

2. 对于四个命题间的关系图，教师应通过实际例子引导学生得出，使学生理解四种命题间的真假关系，以及互为逆否命题的两个命题之间的等价关系，能利用这一等价关系转换角度，间接解决或证明一些问题.

例题解析

例 1 分别写出下列两个命题的四种形式.

（1）若 $\alpha=60°$，则 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；

（2）设 $a>0$，$b>0$，若 $a>b$，则 $a^2>b^2$.

分析 写好命题的四种形式，关键是认清原命题的条件和结论. 第(2)小题中的“设 $a>0$，$b>0$”是命题的大前提，在改写时，不作改动.

例 2 把下列命题改写成“若 p 则 q”的形式,并写出它们的逆命题、否命题和逆否命题.

（1）矩形的两条对角线互相平分；

（2）小于-5 的数的平方大于 25.

分析 所给命题的条件和结论部分都不是很明显，关键是写好原命题的条件 p 和结论 q. 今后遇到类似的问题时，也应该这样处理.

例 3 试证：（1）命题“两个角相等的三角形是等腰三角形”的逆命题是真命题.

（2）命题“若 $a>0$，$b>0$，则 $ab>0$”的逆命题是假命题.

分析 第(1)小题首先写出原命题的逆命题. 由于要证明逆命题是真命题，所以要进行严格的逻辑推理.

第(2)小题首先也是写出原命题的逆命题. 由于要证明逆命题是假命题，所以只需列举

出满足条件，但结论不成立的一种情形即可.

相关链接

反证法

有时候，人们用正向思维解答不了的问题，用逆向思维往往可以轻而易举地解决. 数学证明也有相同的情形，靠一般方法难以奏效时，反证法会助人一臂之力.

反证法是数学证明中的一种重要方法，它是从否定命题的结论出发，通过正确的逻辑导出矛盾，从而证明了原命题的正确性的一种重要方法. 反证法之所以有效是因为它对结论的否定实际上增加了论证的条件，这对发现正确的解题思路是有帮助的. 在现代数学中，反证法已成为最常用和最有效的解决问题的方法之一.

例如，求证：形如 $4n+3$ 的整数不能化为两整数的平方和.

用反证法证明的过程是这样的：假设 p 是 $4n+3$ 型的整数，且 p 能化为两个整数的平方和，即 $p=a^2+b^2$，则由 p 是奇数得 a，b 必为一奇一偶. 不妨设 $a=2s+1$，$b=2t$，其中 s，t 为整数，则 $p=a^2+b^2=(2s+1)^2+(2t)^2=4(s^2+s+t^2)+1$，这与 p 是 $4n+3$ 型的整数矛盾.

再例如，证明：$\triangle ABC$ 内不存在这样的点 P，使得过点 P 的任意一条直线把 $\triangle ABC$ 的面积分成相等的两部分.

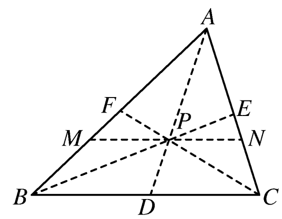


图 1-2

假设在 $\triangle ABC$ 内存在一点 P，使得过点 P 的任意一条直线把 $\triangle ABC$ 的面积分成相等的两部分（如图 1-2）. 连接 AP，BP，CP，并分别延长交对边于点 D，E，F. 由假设 $S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ADC}$，可得 D 为 BC 的中点，同理 E，F 分别是 AC，AB 的中点，从而点 P 是 $\triangle ABC$ 的重心. 过点 P 作 BC 的平行线分别交 AB，AC 于点 M，N，则 $\dfrac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{4}{9}$，这与假设过点 P 的任意一条直线把 $\triangle ABC$ 的面积分成相等的两部分矛盾.

1.1.3 充分条件和必要条件

教材线索

本小节在学习了命题四种形式的基础上，进一步通过命题“若 p 则 q”的真假性讨论 p 和 q 的真假性之间的联系，从而引出充分条件、必要条件和充要条件的概念. 通过判断命题中条件 p 与结论 q 之间的真假性，掌握一种证明命题的方法.

教学目标

（一）知识与技能

理解必要条件、充分条件与充要条件的意义.

（二）过程与方法

观察具体命题，感知判断充分条件、必要条件、充要条件的方法.

（三）情感、态度与价值观

培养学生的辩证思维能力.

教材分析

1. 重点

充分条件、必要条件和充要条件的意义.

2. 难点

充分条件、必要条件和充要条件的判断.

3. 理解必要条件、充分条件与充要条件的意义应通过对具体实例中条件之间的关系的分析，理解充分条件、必要条件和充要条件的意义.

例如，通过分析下列条件 p 与 q 之间的关系，来理解必要条件的意义.

p：四边形是正方形，q：对角线相互垂直平分.

分析："若四边形是正方形，则对角线相互垂直平分"是一个真命题，它可以写成"四边形是正方形"$\Rightarrow$"对角线相互垂直平分".

即 $p\Rightarrow q$.

总结："若 p 则 q"为真命题是指：当 p 成立，q 一定成立. 换句话说，p 成立时一定有 q 成立，即 $p\Rightarrow q$，这时，我们就说 q 是 p 的必要条件.

$p\Rightarrow q$ 可以理解为一旦 p 成立，q 必须成立，即 q 对于 p 成立是必要的. 也就是说，只要 p 成立，必须具备条件 q.

4. 通过具体实例理解充分条件、必要条件和充要条件在解决和思考数学问题中的作用.

在数学中，寻求充分条件是一件很重要的事情. 特别是在引入新的数学对象后，常常需要判断一个对象是不是我们引入的新对象.

例如，(1) 在引入平行四边形后，就需要寻找判定一个图形是不是平行四边形的条件. 一组对边平行且相等就是判定一个四边形是平行四边形的充分条件. 用命题形式表达就是：一组对边平行且相等的四边形是平行四边形.

(2) 在引入方程的解的概念后，需要寻找判定方程有解的条件. 像这些条件都是充分条件. 对于区间 $[a, b]$ 上的连续函数 $f(x)$，$f(a)\cdot f(b)<0$ 就是判定方程 $f(x)=0$ 在区间 $[a,b]$ 内有解的充分条件. 用命题形式表达就是：对于区间 $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$，若 $f(a)\cdot f(b)<0$，则方程 $f(x)=0$ 在区间 $[a,b]$ 内有解.

通常我们把上面的命题称之为判定定理. 判定定理中的条件是给出判定一个事物的充

分条件.

寻求必要条件也是数学中一件很重要的事情. 在数学中，常常要确定一个对象的某些性质. 特别是在引入新的数学对象后，常常需要研究这个对象具有什么性质.

例如，(1) 在引入平行四边形后，就需要研究平行四边形所具有的性质. 对角线互相平分是平行四边形的一个性质. 用命题形式表达就是：平行四边形的对角线互相平分.

(2) 在引入连续函数的概念后，就需要研究连续函数的性质等. 有界，取到最大、最小值等是闭区间上连续函数的性质. 用命题形式表达就是：闭区间上的连续函数有界、取到最大值和最小值.

通常我们把上面的命题称之为性质定理. 性质定理中的性质是给出判定一个事物的必要条件. 当然，它仅仅是从某些方面反映了事物的特征. 因此，必要条件可用来区别一个事物与另一个事物.

在数学上，找到一个"事物"的充分必要条件是特别重要的一件事情，它可以帮助我们从不同的角度，全面地反映同一个"事物"的面貌. 在历史上有很多非常重要的充分必要条件的结果.

例如，(1) 勾股定理.

勾股定理中的"$a^2+b^2=c^2$"是直角三角形的充分必要条件，有了这个条件，我们就可以通过边的长度之间的关系来研究几何中的直角三角形.

(2) 两条直线垂直的充要条件.

两条直线的方向向量的数量积等于零是两条直线垂直的充分必要条件，有了这个条件，我们就可以利用向量的代数运算来研究几何中的垂直问题.

(3) 一元二次方程有解的充分必要条件.

判别式 $\Delta=b^2-4ac\geqslant 0$ 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq 0$) 有解的充分必要条件，有了这个条件，我们就可以定性地研究一元二次方程的解.

一个事物的充分必要条件会给我们讨论问题带来很大的方便，给我们提供了全面刻画事物的另外一个角度，甚至可以帮助我们开拓新的研究方向.

5."充要条件"是高中数学中一个重要的数学概念，是学生解决数学问题时进行等价转换的逻辑基础，也是高中数学的基础，要求学生熟练掌握充分条件、必要条件和充要条件之间的关系，这里不强调对充要条件的证明.

教学建议

命题的充分条件、必要条件、充要条件是教学中的一个重点内容. 这部分教学的重点应放在充分条件、必要条件、充要条件的理解上. 根据学生学习的实际情况，许多学生对充分、必要及充要条件意义的理解还存在困难，所以正确进行充分条件、必要条件、充要条件的判断是本部分内容的一个难点. 判断充分条件、必要条件、充要条件的前提，是判断一个给定的命题是否是真命题，解决这个问题关键是需要结合实例学习，在不断使用的

实践中，加深认识和发展能力，而不是形式上的记忆. 因此，讲充分条件、必要条件、充要条件一旦脱离实际就失去意义了.

例题解析

例 1 从“充分而不必要条件”、“必要而不充分条件”和“充要条件”中选择适当的一种填空.

(1) 四边形的对角线相等是该四边形为矩形的____________；

(2) $a \geqslant 5$ 是 a 为正数的____________；

(3) 四边形的一组对边平行且相等是四边形的两组对边分别平行的__________.

分析 首先应把命题中的条件(即 p)和结论(即 q)确定清楚，接着判断原命题是否为真命题，再判断逆命题是否为真命题，从而选择正确的条件.

例 2 试证：

(1) 在实数范围内，$x=1$ 是 $x^2=1$ 的充分而不必要条件；

(2) 四边形的两组对边分别相等是四边形是矩形的必要而不充分条件.

分析 首先应把命题中的条件(即 p)和结论(即 q)确定清楚，充分性的证明，即条件⇒结论；必要性的证明，即结论⇒条件.

例 3 下列各组命题中，p 是 q 的什么条件（在“充分而不必要条件”、“必要而不充分条件”、“充要条件”、“既不充分又不必要条件”中选出一种)？为什么？

(1) 设 x，$y \in \mathbf{R}$，p：$x^2+y^2>0$，q：x，y 都不为零；

(2) p：两个三角形的三条边对应成比例，q：两个三角形有两个角对应相等；

(3) p：$0<x<1$，q：$\sin x>0$；

(4) 设 x 是整数，p：x 是 6 的倍数，q：x 是 8 的倍数.

(5) p：圆 $x^2+y^2=r^2$ 与直线 $ax+by+c=0$ 相切，q：$c^2=(a^2+b^2)r^2$.

分析 分别考虑命题“若 p 则 q”和“若 q 则 p”的真假性，从而选择正确的条件.

1.2 简单的逻辑联结词

1.2.1 逻辑联结词“非”、“且”和“或”

教材线索

本小节在学习了命题有关知识的基础上，进一步学习如何用逻辑联结词来精确和严密地表达复杂的数学命题. 首先，学习数学中常见的三个逻辑联结词“非”、“且”、“或”的数学含义，通过实例说明如何使用这三个逻辑联结词来写数学命题，接着讲述如何根据已知命题的真假性来判断用逻辑联结词表达的数学命题的真假性.

教学目标

（一）知识与技能

了解简单的逻辑联结词“非”、“且”、“或”的含义.

（二）过程与方法

能正确地感知“非”、“且”、“或”的含义，从而正确地表述相关的数学内容.

（三）情感、态度与价值观

初步体会真值表在判断含有复合命题中的作用，增强学生的辩证思维能力.

教材分析

1. 重点

了解逻辑联结词“非”、“且”、“或”的含义，使学生能正确地表述相关数学内容.

2. 难点

用逻辑联结词“非”、“且”、“或”简洁、准确地表述否命题、且命题、或命题等命题，以及对所得到的新命题真假的判断.

3. 认识逻辑联结词“非”、“且”、“或”是构造新命题的逻辑用语，利用逻辑联结词“非”、“且”、“或”联结具体命题来构造新命题，通过分析这样构造出的新命题的真假，来理解“非”、“且”、“或”的含义.

例如，对下列各组命题，利用逻辑联结词“且”构造新命题，并判断新命题的真假.

（1）p：12 是 3 的倍数，q：12 是 4 的倍数；

（2）p：$\pi>3$，q：$\pi<2$.

分析：由（1）可得新命题："12 是 3 的倍数且 12 也是 4 的倍数"；

由（2）可得新命题："π 大于 3 且 π 小于 2".

在得出的新命题中，"12 是 3 的倍数且 12 也是 4 的倍数"是真命题，"π 大于 3 且 π 小于 2"是假命题.

概括：从上述例子可以看出，可以用"且"联结两个命题 p 和 q，构成一个新命题"p 且 q". 当两个命题 p 和 q 都是真命题时，新命题"p 且 q"就是真命题；当两个命题 p 和 q 之中，至少有一个命题是假命题时，新命题"p 且 q"就是假命题.

4. 了解在数学中也可以用逻辑联结词"且"与"或"联结一些"条件"，形成一个新的条件.

例如，"$x>3$"且"$x<5$"表示的是"$3<x<5$"；"$x<0$"或"$x>5$"表示的是"或者 $x<0$，或者 $x>5$".

5. 只要求用"或"、"且"把两个命题合成一个命题，不要求把一个"复合"命题进行"分解".

例如，"高一（1）班全体同学考试合格"，这是一个非常明了的命题，实在没有必要说成"高一（1）班的张三考试合格、且李四同学合格、且……".

6. "非"的含义就是对"命题的否定".《课标》不要求一般的讨论"命题的否定"，而要求通过具体的实例体会"命题的否定"的含义.《课标》只要求能正确地对"含有一个量词的命题"进行否定.

例如，（1）所有的正方形都是矩形；该命题的否定是：存在一个正方形不是矩形. 显然原命题是真命题，其否定是假命题.

（2）所有的一元二次方程都有实数解；该命题的否定是：存在一个一元二次方程没有实数解. 显然原命题是假命题，其否定是真命题.

（3）至少存在一个锐角 α 使得 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$；该命题的否定是：每一个锐角 α 都使得 $\sin\alpha\neq\frac{1}{2}$. 显然原命题是真命题，其否定是假命题.

7. 通过一些具体的实例来理解命题否定的作用.

命题的否定常常可以帮助我们证明一些结论.

例如，在上述举例的（2）中，为了说明原命题是假命题，只需要找到一个无实数解的一元二次方程即可. 这就帮助我们证明了原来的命题是错误的. 这是数学中常用的一种思考和解决问题的方式.

教学建议

本节内容《课标》的要求是通过数学实例，了解逻辑联结词"非"、"且"、"或"的含义. 因此在教学过程中应突出实例，淡化形式，一方面要通过具体实例，帮助学生了解它们的含义，另一方面，要结合具体数学内容不断的使用常用逻辑联结词，加深对相关数学

内容的认识. 教学中只要求用这些逻辑联结词作“合成”，不要求对复合命题“分解”. 对于由逻辑联结词“非”、“且”、“或”构成的复合命题，教学时，不要太强调使用真值表. 这样，避免学生的机械记忆. 使学生体会运用逻辑用语表述问题的准确性和简洁性，便于培养学生的表达能力、理解能力和逻辑思维能力. 同时，为学生利用集合这一工具，理解“交”、“并”、“补”与“且”、“或”、“非”之间的关系，构建知识体系提供了再创造的空间. 如果仅从真值表运算，学生可以判断“p 或 q”为真，但是却很难理解，形成的是机械记忆的解决办法. 应该让学生明白“p 或 q”，“p 且 q”和“非 p”命题中的“p”，“q”是两个命题，而原命题、逆命题、否命题和逆否命题中的“p”，“q”是一个命题的条件和结论两个部分.

一个命题的否定与它的否命题是有区别的. 如下面的这个例子.

例如，命题 p：正方形的四条边相等. 命题 $\neg p$：正方形的四条边不相等. p 的否命题：若一个四边形不是正方形，则它的四条边不相等. 显然，命题 p 为真命题，而命题 p 的否定 $\neg p$ 与否命题均为假命题.

例题解析

例 1 写出下列命题 p 的否定 $\neg p$.

(1) p：4 是方程 $x^2-16=0$ 的根.

(2) p：空集是集合 A 的子集；

(3) p：16 不是 5 的倍数.

分析 命题的 $\neg p$ 形式就是对命题进行否定.

例 2 根据下列各组命题中的 p，q，写出命题 $p\wedge q$，并判断其真假：

(1) p：矩形的对角线互相平分，q：矩形的对角线互相垂直；

(2) p：函数 $y=x^2$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，q：函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减.

分析 命题 $p\wedge q$ 是用逻辑联结词“且”来联结两个命题从而得到新命题，再用 p，q 两个命题的真假性来判断新命题的真假性.

例 3 根据下列各组命题中的 p，q，写出命题“$p\vee q$”，并判断其真假：

(1) p：5 是集合 $\{2, 3, 4\}$ 中的元素，q：3 是集合 $\{2, 3, 4\}$ 中的元素；

(2) p：方程 $x^2+x-1=0$ 有两个正实数根，q：方程 $x^2+x-1=0$ 有两个负实数根.

分析 命题 $p\vee q$ 是用逻辑联结词“或”来联结两个命题从而得到新命题，再用 p，q 两个命题的真假性来判断新命题的真假性.

1.2.2 全称量词和存在量词

教材线索

本小节从生活和数学两个方面介绍了全称量词和存在量词的含义、数学表示符号，同时介绍常见的全称量词和存在量词. 通过实例讲解了全称量词和存在量词的使用及判断一个含有全称量词和存在量词命题真假的方法，最后通过实例讲解对一个含有全称量词和存在量词的命题进行否定的要求.

教学目标

（一）知识与技能

1. 通过生活和数学中的丰富实例，理解全称量词与存在量词的意义.

2. 能准确地利用全称量词与存在量词叙述数学内容.

（二）过程与方法

1. 通过生活和数学中的实例，感知对含有一个量词的命题的否定的意义.

2. 能正确地对含有一个量词的命题进行否定.

（三）情感、态度与价值观

增强对立统一的辩证思想.

教材分析

1. 重点

全称量词与存在量词的含义及对含有一个量词的命题进行否定.

2. 难点

对含有一个量词的命题进行否定.

3. 教学时要结合具体命题来理解全称量词、存在量词的意义，了解全称量词和存在量词在日常生活和数学中的各种表达形式.

例如，可以结合下面的具体命题来理解全称量词的意义.

(1) 所有正方形都是矩形；

(2) 每一个有理数都能写成分数的形式；

(3) 一切三角形的内角和都等于 $180°$；

(4) 有些三角形是直角三角形；

(5) 如果两个数的和为正数，那么这两个数中至少有一个是正数；

(6) 存在一个实数 x，使得 $x^2+x-1=0$.

在以上命题的条件中，“所有”、“每一个”、“一切”等都是在指定范围内，表示整体或全部的含义，这些词都是全称量词；“有些”、“至少有一个”、“存在”等都表示个别或一部分的含义，这些词都是存在量词.

通常，全称量词的表达形式有“所有”、“每一个”、“一切”、“任何一个”、“任意一个”等，存在量词的表达形式有“有些”、“至少有一个”、“存在”、“有一个”、“至少”等.

4. 通过生活和数学中的丰富实例，体会“量词”在数学和日常生活中的作用.

全称量词、存在量词是数学和日常生活中使用频率很高的一种逻辑用语. 大量的数学命题都要使用这样的逻辑用语.

例如，每一个等腰三角形的两个底角相等，过直线外一点存在唯一的一条直线与该直线平行，就使用了全称量词和存在量词.

在大学的学习中，对数列极限的概念的刻画，就需要多次使用全称量词和存在量词. 对于每一个数列 $\{a_n\}$，如果存在一个常数 A，对于任意（所有）的 $\varepsilon>0$，存在一个 N，对任意（所有）的 n（$n>N$），都有 $|a_n-A|<\varepsilon$，则称 A 为数列 $\{a_n\}$ 的极限. 在日常生活中，这样的例子也很多.

5.《课标》只要求理解和掌握含有一个量词的命题. 不要求理解和掌握含有两个或两个以上量词的命题. 对于命题的否定，只要求对含有一个量词的命题进行否定.

例如，对于北京市任何一所高中，都至少有一个学生能跳过 1 米 5 的高度.

在这个命题中，有两个量词“任何一所”、“至少有一个”，对于这样的命题，不要求学生理解和掌握，也不要求对这样的命题进行否定.

教学建议

这部分内容是《课标》新增加的内容，旨在使学生认识到这两类量词是现实生活世界中经常使用的两类量词，会判断含全称量词和存在量词命题的真假，会正确的写出这两类命题，为我们从量的形式和范围上认识、解决问题提供了新的思路和方法. 同时使学生体会从特殊到一般的认知过程和规律，培养和提高学生对问题的抽象和概括的能力. 量词的教学也需要通过实例，帮助学生理解全称量词与存在量词的意义. 教学中只要求理解和掌握含有一个量词的命题，对于含有量词的命题的否定，也只要求对含有一个量词的命题进行否定. 在这部分内容的教学中，应以学生已经学过的数学内容为载体，帮助学生学会正确的使用全称量词和存在量词，加深对已学过的数学知识之间的逻辑联系和数学本质的认识.

全称量词是指：所有的、一切、任意一个、每一个等；

存在量词是指：存在一个、至少有一个、有个、某个、有的、有些等.

教学中举例要注意数学用语的准确性、简洁性和示范性，避免对逻辑用语的机械记忆和抽象解释.

例如，作为对全称命题的示例，“所有成功的人都很勤奋”这样的例子不能引入. 这里“成功”、“勤奋”并不是一个准确的表述词汇.

例如，所有能被 3 整除的数都是奇数，

否定为：（1）存在一个能被 3 整除的整数不是奇数；

（2）有些能被 3 整除的整数不是奇数；

（3）有些能被 3 整除的整数是偶数；

（4）所有能被 3 整除的数不都是奇数.

也可以写作：（5）并非所有能被 3 整除的整数都是奇数.

错误的否定写法：所有能被 3 整除的数都不是奇数.

但是我们认为（1）、（2）、（3）、（4）的写法更符合《课标》的教学目标，从量的角度用明确的量词形式进行否定，用词上更符合数学的表述方式，有利于培养学生的数学思维能力.

例题解析

例 1 指出下列两个含有量词的命题中使用了什么量词及量词的作用范围，并把量词用相应的数学符号取代.

（1）对任意正实数 a，$a^2-a-2>0$；

（2）对某个大于 10 的正整数 n，$(\sqrt{2})^n=1\ 024$.

分析 常用的量词有

全称量词：所有的、一切、任意一个、每一个等；

存在量词：存在一个、至少有一个、有个、某个、有的、有些等.

量词的使用范围可注意命题的大前提.

例 2 判断下列命题的真假，并给出证明.

（1）$\forall x\in(5,+\infty)$，$f(x)=x^2-4x-2>0$；

（2）$\forall x\in(3,+\infty)$，$f(x)=x^2-4x-2>0$；

（3）$\exists a\in\mathbf{Z}, a^2=3a-2$；

（4）$\exists a\geqslant 3, a^2=3a-2$；

（5）设 A，B，C 是平面上不在同一直线上的三点，在平面上存在某个点 P 使得 $PA=PB=PC$.

分析 判断含有全称量词的命题是真命题，要证明一般情况下命题是真命题；要判断含有全称量词的命题是假命题，只要举出一个反例即可. 判断含有存在量词的命题是真命题，只需找到一种情况能使命题成立即可；判断含有存在量词的命题是假命题，则需要证明对一般情况，命题均不成立.

例 3 对下面含有量词的命题作否定：

（1）p：任意有理数都可以写成两个整数之商；

（2）q：$\exists x\in\mathbf{R}$，使得 $x^2+2x+3\leqslant 0$.

分析 一般地对含有量词的命题进行否定，可以总结为：命题“$\forall x\in I$，$p(x)$”的否定是“$\exists x\in I$，$\neg p(x)$”；命题“$\exists x\in I$，$p(x)$”的否定是“$\forall x\in I$，$\neg p(x)$”.

教材习题参考解答

1.1.1 练习（教材 P.3）

（1）不是. （2）是，真命题. （3）是，真命题.

习题 1（教材 P.4）

1.（1）假命题（取 $a=b=0$ 即可）. （2）真命题（$\because x^2\geqslant 0$，当 $x=0$ 时“$=$”成立；$\because y^2\geqslant 0$，当 $y=0$ 时“$=$”成立. $\therefore x^2+y^2\geqslant 0$ 当且仅当 $x=0$，$y=0$ 时，“$=$”成立）.

2.（1）$\because \Delta=1+4m$，$\therefore$ 当 $m>0$ 时，$\Delta>0$.

$\therefore$ 方程 $x^2+x-m=0$ 有两个不同的实数根.

$\therefore$ 命题“若 $m>0$，则 $x^2+x-m=0$ 有两个不同的实数根”是真命题.

（2）取 $m=-\dfrac{1}{6}$，则方程 $x^2+x-m=0$ 的 $\Delta=1+4m>0$，即 $m>-\dfrac{1}{4}$，此时 $m<0$.

所以 $x^2+x-m=0$ 有两个不同的实数根.

$\therefore$ 命题“若 $x^2+x-m=0$ 有两个不同的实数根，则实数 $m>0$”是假命题.

3. 在四边形 $ABCD$ 中，对角线 $AC\perp BD$，但 AD 与 BC 不平行，则四边形 $ABCD$ 不是平行四边形，所以，命题“两条对角线互相垂直的四边形一定是菱形”是假命题.

4. 略.

1.1.2 练习（教材 P.8）

1.（1）原命题：若两个三角形全等，则它们的面积相等；

逆命题：若两个三角形的面积相等，则它们全等；

否命题：若两个三角形不全等，则它们的面积不相等；

逆否命题：若两个三角形的面积不相等，则它们不全等.

（2）原命题：若 $a>0$，则 $a^3>0$；

逆命题：若 $a^3>0$，则 $a>0$；

否命题：若 $a\leqslant 0$，则 $a^3\leqslant 0$；

逆否命题：若 $a^3\leqslant 0$，则 $a\leqslant 0$.

2. 逆命题：若四边形的对角线互相垂直，则它是正方形；（假命题）

否命题：若四边形不是正方形，则它的对角线不互相垂直；（假命题）

逆否命题：若四边形的对角线不互相垂直，则它不是正方形.（真命题）

3. 不正确.

例如，原命题：“若 $a=b$，则 $a^3=b^3$”是真命题；

否命题：“若 $a\neq b$，则 $a^3\neq b^3$”也是真命题.

习题 2（教材 P.8）

1.（1）原命题：若四边形是正方形，则它的四条边相等；

逆命题：若四边形的四条边相等，则它是正方形；

否命题：若四边形不是正方形，则它的四条边不相等；

逆否命题：若四边形的四条边不相等，则它不是正方形.

（2）原命题：若一个整数的末位是 5，则它可以被 5 整除；

逆命题：若一个整数可以被 5 整除，则它的末位是 5；

否命题：若一个整数的末位不是 5，则它不可以被 5 整除；

逆否命题：若一个整数不可以被 5 整除，则它的末位不是 5.

（3）原命题：若 $a>0$，则函数 $y=ax+b$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增；

逆命题：若函数 $y=ax+b$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，则 $a>0$；

否命题：若 $a\leqslant 0$，则函数 $y=ax+b$ 在 $\mathbf{R}$ 上不单调递增；

逆否命题：若函数 $y=ax+b$ 在 $\mathbf{R}$ 上不单调递增，则 $a\leqslant 0$.

2.（1）逆命题：设 a，b，c 是任意实数，若 $ac=bc$，则 $a=b$；（假命题）

否命题：设 a，b，c 是任意实数，若 $a\neq b$，则 $ac\neq bc$；（假命题）

逆否命题：设 a，b，c 是任意实数，若 $ac\neq bc$，则 $a\neq b$.（真命题）

（2）逆命题：若直线是圆的切线，则它到圆心的距离等于圆的半径；（真命题）

否命题：若直线到圆心的距离不等于圆的半径，则它不是圆的切线；（真命题）

逆否命题：若直线不是圆的切线，则它到圆心的距离不等于圆的半径.（真命题）

（3）逆命题：若 x 是方程 $x^2-4x-5=0$ 的根，则 $x=5$；（假命题）

否命题：若 $x\neq 5$，则 x 不是方程 $x^2-4x-5=0$ 的根；（假命题）

逆否命题：若 x 不是方程 $x^2-4x-5=0$ 的根，则 $x\neq 5$.（真命题）

3.（1）正确.　（2）正确.

4.（1）原命题：若两个数是偶数，则它们的积是一个偶数；

逆命题：若两个数的积是一个偶数，则这两个数是偶数；

否命题：若两个数不都是偶数，则它们的积不是一个偶数；

逆否命题：若两个数的积不是一个偶数，则这两个数不都是偶数.

（2）原命题：若 $\alpha=30°$，则 $\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$；

逆命题：若 $\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则 $\alpha=30°$；

否命题：若 $\alpha\neq 30°$，则 $\tan\alpha\neq\frac{\sqrt{3}}{3}$；

逆否命题：若 $\tan\alpha\neq\frac{\sqrt{3}}{3}$，则 $\alpha\neq 30°$.

（3）原命题：若点 P 是直线 l 外一点，则过点 P 能够作一条直线与 l 平行；

逆命题：若过点 P 能够作一条直线与 l 平行，则点 P 是直线 l 外一点；

否命题：若点 P 不是直线 l 外一点，则过点 P 不能够作一条直线与 l 平行；

逆否命题：若过点 P 不能够作一条直线与 l 平行，则点 P 不是直线 l 外一点.

5.（1）逆命题：设 a 是整数，若 a^3 是 8 的倍数，则 a 是 4 的倍数.

证明：取 $a=2$，则 $a^3=8$ 是 8 的倍数，但 $a=2$ 不是 4 的倍数，所以，命题“设 a 是整数，若 a 是 4 的倍数，则 a^3 是 8 的倍数”的逆命题是假命题.

（2）逆命题：若一个函数的图象有对称轴，则它是二次函数.

证明：取函数 $f(x)=\sin x$，则它的图象有对称轴 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$（$k\in\mathbf{Z}$），但它不是二次函数.

所以，命题“若一个函数的图象有对称轴，则它是二次函数”是假命题.

6.（1）原命题：设 a，b，c 是任意三个实数，若 $a>b$，则 $ac>bc$；（假命题）

逆命题：设 a，b，c 是任意三个实数，若 $ac>bc$，则 $a>b$；（假命题）

否命题：设 a，b，c 是任意三个实数，若 $a\leqslant b$，则 $ac\leqslant bc$；（假命题）

逆否命题：设 a，b，c 是任意三个实数，若 $ac\leqslant bc$，则 $a\leqslant b$.（假命题）

（2）原命题：若函数是 $y=x^2$，则它在区间 $(1，+\infty)$ 上单调递增；（真命题）

逆命题：若函数在区间 $(1，+\infty)$ 上单调递增，则它是 $y=x^2$；（假命题）

否命题：若函数不是 $y=x^2$，则它在区间 $(1，+\infty)$ 上不单调递增；（假命题）

逆否命题：若函数在区间 $(1，+\infty)$ 上不单调递增，则它不是 $y=x^2$.（真命题）

1.1.3　练习（教材 P.12）

1. 命题（3）、（4）.
2. 式子（2）、（3）.
3. （1）充要条件.　（2）必要而不充分条件.　（3）充分而不必要条件.

习题 3（教材 P.12）

1.（1）充分而不必要条件.　（2）充要条件.　（3）既不充分也不必要条件.

（4）充要条件.　（5）充要条件.

2.（1）取 $x=1$，$y=-2$，$x>y$，但 $|x|<|y|$，所以 p 推不出 q；

取 $x=-2$，$y=1$，则 $|x|>|y|$，但 $x<y$，所以 q 推不出 p；

所以 p 是 q 的既不充分也不必要条件.

（2）设 $\triangle ABC$ 的边 BC 的中线为 AM，则 $S_{\triangle ABM}=S_{\triangle ACM}$，因为 D 在 AM 上，所以 $S_{\triangle BDM}=S_{\triangle CDM}$，从而 $S_{\triangle ABD}=S_{\triangle CBD}$，当 D 在 AM 的延长线上时，有 $S_{\triangle ABD}=$

$S_{\triangle CBD}$，但点 D 不在边 BC 的中线上，所以 p 是 q 的充分而不必要条件.

（3）$2\lg a=\lg(5a-6)\Rightarrow a^2=5a-6\Rightarrow a^2-5a+6=0\Rightarrow a=2$ 或 $a=3$，

所以 p 推不出 q；

$a=2\Rightarrow a^2=5a-6>0\Rightarrow 2\lg a=\lg(5a-6)$，所以 $q\Rightarrow p$；

所以 p 是 q 的必要而不充分条件.

（4）$A\subseteq B$ 说明 A 是 B 的子集，则 $A\cap B=A$，所以 $p\Rightarrow q$；

$A\cap B=A$ 说明 A 是 B 的子集，所以 $A\subseteq B$，即 $q\Rightarrow p$；

所以 p 是 q 的充要条件.

3. 不是. 因为 $x=-1\Rightarrow x^2=1$，即"$x\neq 1$"推不出"$x^2\neq 1$"，

所以"$x^2\neq 1$"不是"$x\neq 1$"的必要条件.

4. $\because x>1>0$，$\therefore \dfrac{1}{x}<1$，即 $x>1\Rightarrow \dfrac{1}{x}<1$.

取 $x=-1$，则 $\dfrac{1}{x}<1$，但 $x<1$，即 $\dfrac{1}{x}<1$ 推不出 $x>1$.

所以"$x>1$"是"$\dfrac{1}{x}<1$"的充分而不必要条件.

5. 充分性：$a>0$，$b>0\Rightarrow a+b>0$，$ab>0$.

必要性：$\because ab>0$，$\therefore a$，b 同号.

又 $a+b>0$，所以 a，b 同为正数，即 $a>0$，$b>0$.

所以"$a>0$，$b>0$"是"$a+b>0$，$ab>0$"的充要条件.

6.（1）假命题. 因为 $a^2>b^2$ 时，可以 $a<b<0$.

（2）假命题. 因为取 $c=0$，当 $a>b$ 时，仍有 $ac=bc=0$.

（3）真命题. 根据不等式的性质即可得出.

1.2.1 练习（教材 P. 16）

1.（1）$p\wedge q$：$2=2$ 且 $2<2$；$p\vee q$：$2=2$ 或 $2<2$.

（2）$p\wedge q$：$\sqrt{2}$是实数且$\sqrt{2}>1$；$p\vee q$：$\sqrt{2}$是实数或$\sqrt{2}>1$.

2.（1）$p\wedge q$：10 是偶数且是质数；（假命题）

$p\vee q$：10 是偶数或是质数；（真命题）

$\neg p$：10 不是偶数.（假命题）

（2）$p\wedge q$：$x=1$ 且 $x=-1$ 是方程 $x^3-3x+2=0$ 的根；（假命题）

$p\vee q$：$x=1$ 或 $x=-1$ 是方程 $x^3-3x+2=0$ 的根；（真命题）

$\neg p$：$x=1$ 不是方程 $x^3-3x+2=0$ 的根.（假命题）

习题 4（教材 P. 17）

1.（1）真命题.（2）真命题.

2.（1）$p\wedge q$：方程 $x^2+1=0$ 没有实数根且方程 $x^2-5=0$ 没有实数根；（假命题）

$p\vee q$：方程 $x^2+1=0$ 或方程 $x^2-5=0$ 没有实数根；（真命题）

$\neg p$：方程 $x^2+1=0$ 有实数根.（假命题）

（2）$p\wedge q$：π 是无理数且 π 是实数；（真命题）

$p\vee q$：π 是无理数或 π 是实数；（真命题）

$\neg p$：π 不是无理数.（假命题）

3.（1）$\neg p$：$y=\cos x$ 在$(0,2)$内不单调递增；（假命题）

$p\vee q$：$y=\cos x$ 在$(0,2)$内单调递增或在$(0,\pi)$内恒大于 0；（假命题）

$p\wedge q$：$y=\cos x$ 在$(0,2)$内单调递增且在$(0,\pi)$内恒大于 0.（假命题）

（2）$\neg p$：2 不是集合 $\{2\}$ 中的元素；（假命题）

$p\vee q$：2 是集合$\{2\}$中的元素或 2 不是集合$\{3,4,5\}$中的元素；（真命题）

$p\wedge q$：2 是集合$\{2\}$中的元素且不是集合$\{3,4,5\}$中的元素.（真命题）

（3）$\neg p$：集合 A 不是 $A\cap B$ 的子集；（真命题）

$p\vee q$：集合 A 是 $A\cap B$ 或 $A\cup B$ 的子集；（真命题）

$p\wedge q$：集合 A 是 $A\cap B$ 且 $A\cup B$ 的子集.（假命题）

（4）$\neg p$：方程 $x^2+3x-1=0$ 的两根符号相同；（假命题）

$p\vee q$：方程 $x^2+3x-1=0$ 的两根符号不同或两根之和为 3；（真命题）

$p\wedge q$：方程 $x^2+3x-1=0$ 的两根符号不同且两根之和为 3.（假命题）

4.（1）当$(\neg p)\wedge(\neg q)$是真命题时，

$\neg p$，$\neg q$ 都是真命题，所以 p，q 都是假命题，

所以 $p\vee q$ 是假命题，故$\neg(p\vee q)$为真命题，反之亦然.

（2）当$(\neg p)\vee(\neg q)$是真命题时，

$\neg p$，$\neg q$ 必有一个是真命题，不妨设 $\neg p$ 为真命题，

则 p 都是假命题，

所以 $p\wedge q$ 是假命题，故$\neg(p\wedge q)$为真命题，反之亦然.

1.2.2 练习（教材 P. 20）

1.（1）命题中有量词“任意”，这是一个全称量词，它的作用范围是区间 $(0,\pi)$.

命题可以写成“$\forall x\in(0,\pi)$，$\sin x>0$”.

（2）命题中有量词“某个”，这是一个存在量词，它的作用范围是有理数.

命题可以写成“$\exists x\in\mathbf{Q}$，$4^x=\dfrac{1}{2}$”.

2.（1）假命题.　（2）真命题.

3.（1）我们班上有个同学不是男生.

（2）$\forall x\in\mathbf{R}$，有 $x^2-2\neq 0$.

习题 5（教材 P.20）

1.（1）存在某个人的寿命是无限的.

（2）对任意的整数 a，都有 $a^2\neq a$.

2.（1）假命题.　（2）真命题.

3.（1）取 $x=\frac{1}{3}$，则 $3x+2=3>0$，但 $2x^2-x=-\frac{1}{9}<0$，所以是假命题.

（2）取 $x=0$，则 $3x+2=2>0$，但 $2x^2-x=0$，所以是假命题.

（3）当 $\log_a 3=2$ 时，$a=\sqrt{3}\notin\mathbf{Z}$，所以是假命题.

（4）当 $a=\sqrt{3}$ 时，$\log_a 3=2$，即函数 $y=\log_{\sqrt{3}}x$ 的图象过点$(3,2)$，所以是真命题.

（5）取 A，B 的中点 M，过点 M 作平面 α，使得 $AB\perp\alpha$，则平面 α 上任意一点到 A，B 的距离相等，所以是真命题.

（6）假命题. 例如 $\triangle ABC$ 中，$a=2$，$b=2$，$c=2$，$\triangle A'B'C'$ 中，$a'=b'=c'=1$，则 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 中任意两个角都等于 60°，但这两个三角形不全等.

4.（1）已知直线 l，存在过直线 l 外的一点或不可以作或可以作一条以上的直线与已知直线平行；

（2）存在某个实数，它不能写成平方和的形式.

复习题一（教材 P.24）

1.（1）原命题：若 a 是偶数，则它可以被 4 整除；（假命题）

逆命题：若 a 可以被 4 整除，则它是偶数；（真命题）

否命题：若 a 不是偶数，则它不可以被 4 整除；（真命题）

逆否命题：若 a 不可以被 4 整除，则它不是偶数.（假命题）

（2）原命题：若整数 a 可以写成两个奇数之和，则它是偶数；（真命题）

逆命题：若整数 a 是偶数，则它可以写成两个奇数之和；（真命题）

否命题：若整数 a 不可以写成两个奇数之和，则它不是偶数；（真命题）

逆否命题：若整数 a 不是偶数，则它不可以写成两个奇数之和.（真命题）

（3）原命题：设 E，F 是 $\triangle ABC$ 的边 AB，AC 上的点. 若 E，F 是 AB，AC 的中点，则 $EF\parallel AB$；（真命题）

逆命题：设 E，F 是 $\triangle ABC$ 的边 AB，AC 上的点. 若 $EF\parallel AB$，则 E，F 是 AB，AC 的中点；（假命题）

否命题：设 E，F 是$\triangle ABC$ 的边 AB，AC 上的点. 若 E，F 不是 AB，AC 的中点，则 EF 不平行 AB；（假命题）

逆否命题：设 E，F 是$\triangle ABC$ 的边 AB，AC 上的点. 若 EF 不平行 AB，则 E，F 不是 AB，AC 的中点.（真命题）

（4）原命题：设 A，B 是两个集合，若 $A\cup B=B$，则 $A\subseteq B$；（真命题）

逆命题：设 A，B 是两个集合，若 $A\subseteq B$，则 $A\cup B=B$；（真命题）

否命题：设 A，B 是两个集合，若 $A\cup B\neq B$，则 $A\nsubseteq B$；（真命题）

逆否命题：设 A，B 是两个集合，若 $A\nsubseteq B$，则 $A\cup B\neq B$.（真命题）

2.（1）与（4）、（2）与（5）、（3）与（6）互为充要条件.

3.（1）$\exists m>0$，使得方程 $x^2+x-m=0$ 没有实数根.

（2）$\forall m>0$，使得方程 $x^2+x+m=0$ 没有实数根.

4. 若 $a+b$ 不是偶数，则 a,b 不都是偶数.

5. 6 不是偶数或不是 3 的倍数.　　6. 略.

7. 设 p：a，b 都是整数；q：方程 $x^2+ax+b=0$ 有且仅有整数解.

取 $a=-2$，$b=-1$，方程 $x^2-2x-1=0$ 的两根为 $x_1=1+\sqrt{2}$，$x_2=1-\sqrt{2}$ 都不是整数，所以 p 推不出 q；

另一方面，当方程 $x^2+ax+b=0$ 有整数解 x_1，x_2，则有 $a=-(x_1+x_2)$，$b=x_1x_2$，所以 a，b 都是整数，即 $q\Rightarrow p$.

所以 p 是 q 的必要不充分条件.

8.（1）正确.

（2）不正确. 可改为："$|x|\neq 3$"的充要条件是"$x\neq 3$ 且 $x\neq -3$".

9. $0<a<\dfrac{25}{3}$.

10.（1）真命题.

证明：设 $f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}=\dfrac{(x-1)^2+1}{x-1}=(x-1)+\dfrac{1}{x-1}$.

易证 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$，$(2,+\infty)$ 单调递增，在 $(0,1)$，$(1,2)$ 单调递减，

所以 $f(x)\leqslant f(0)=-2$，或 $f(x)\geqslant f(2)=2$. 故原命题是真命题.

（2）假命题.

证明：设菱形的一个内角为 θ，则 $S_{菱形}=1\times 1\times \sin\theta=\sin\theta\leqslant 1$，

$S_{正三角形}=\dfrac{1}{2}\times 2\times 2\times \sin 60^\circ=\sqrt{3}>1$.

所以，满足题设的菱形不存在.

11. 略.

第 2 章　圆锥曲线与方程

一、教学目标

1. 借助实例，了解圆锥曲线的实际背景，感受圆锥曲线在刻画现实世界和解决实际问题中的作用.

2. 经历从具体情境中抽象出椭圆模型的过程，掌握椭圆的定义和标准方程、几何图形及简单性质.

3. 了解双曲线的定义、几何图形和标准方程，知道双曲线的有关性质.

4. 借助实例了解抛物线的模型，掌握抛物线的定义和标准方程，几何图形及简单性质.

5. 初步学会利用工具画圆锥曲线的图形.

6. 能用坐标法解决一些与圆锥曲线有关的简单几何问题（如直线与圆锥的位置关系）和实际问题，并了解圆锥曲线的初步应用.

7. 通过圆锥曲线的学习，进一步体会数形结合的思想.

8. 认识圆锥曲线的性质，形成运动、变化和对立统一的观点.

9. 研究曲线及其方程的实例，了解曲线与方程的对应关系，进一步感受数形结合的基本思想.

10. 运用现代信息技术，观察方程中参数的变化对方程所表示的曲线的影响，理解曲线与方程的关系.

11. 了解圆锥曲线的离心率和统一方程. 初步学会用圆锥曲线的第二定义解决问题.

二、教材说明

远在两千多年前，古希腊许多学者为了解决几何三大作图问题中的倍立方问题，开始研究圆锥曲线. 著名数学家门内马斯、欧几里得、阿基米德都对圆锥曲线的研究做出了很大的贡献.

到了 17 世纪，由于生产发展的需要，推动了天文学、力学和光学的发展. 德国天文学家开普勒发现天体运行轨道是椭圆；意大利物理学家伽利略得到抛掷物体的轨道是抛物线；法国科学家迈多尔日发展了圆锥曲线在光学中的应用. 17 世纪初期，笛卡儿和费马创立了解析几何，用坐标法和方程来研究圆锥曲线. 在本章教学中可以介绍圆锥曲线的由来，使学生对本章要学习的内容产生兴趣. 教学时可以让学生自己动手切割圆锥形的食物、胶泥等，以加深对圆锥曲线的认识. 有条件的学校可以利用计算机演示.

关于本章第 1 个数学实验“生活中的圆锥曲线”，本书主编的几句评语可供教师参考.

评语 数学需要实验观察

这是一个非常有特色的数学实验，与本套书中大多数别的实验不同，它不需要用到计算机，而只是观察生活中的现象. 实验的“仪器”是生活中的日常用品：喝水的杯子，照明的台灯、手电筒. 这个实验大家都可以做.

实验的目的是让学生对圆锥曲线有直观的印象，同时也培养学生在日常生活中观察数学现象的良好习惯.

什么是圆锥曲线？所有的中学课本都告诉我们：到一个定点和定直线距离之比等于定值的点的轨迹称为圆锥曲线.

既然叫作圆锥曲线，总应当与圆有关系吧！以这样一种抽象的方式得到的曲线与圆锥有什么关系呢？

答案很简单：圆锥表面被平面截得的截痕所在的曲线就是圆锥曲线. 既然是用圆锥截出来的，当然与圆锥有关系，叫作圆锥曲线就很自然了.

这个答案，一教就懂. 但要给出一个严格的数学证明并不容易，至少不适合作为中学生的必学内容.

不能教你如何证明，干脆就不让你知道结论. 于是，很多书在讲圆锥曲线时闭口不谈圆锥曲线与圆锥的关系. 其潜在的理由是“不但要知其然，还要知其所以然”. 倒过来就变成“不能知其所以然，干脆不让你知其然.”

“知其所以然”当然是好的. 但是，一个人的知识结构，其实只能对少数核心知识是能够“知其所以然”，大部分知识是只知其然而不知其所以然. 如果将这些知识都删去不让知道，那么你的知识就太单薄太贫乏了.

要给出严格的理论证明太困难，但还是可以给出一点令人信服的理由. 比如，可以采取实验观察的方式：做一个圆锥，用一个平面去截，观察截痕的形状，看它是否是熟悉的椭圆、抛物线、双曲线.

用什么材料做圆锥？用木头、金属做圆锥，太难加工，即使加工好了，再用什么平面去截？没有专门的机械加工设备，很难实现.

用泥巴做一个圆锥，再用刀作为平面去截，似乎还可以实现. 但很难做出一个精确的圆锥，不容易得到精确的截线，达不到实验的效果.

我们在生活中找到了别的圆锥和平面. 喝水的一次性杯子的内壁是圆锥面的一部分，所装的水的表面可以看做平面，水面的边缘就是截线. 台灯罩上下方照出来的光束照到墙壁上，光束可以看成圆锥，墙壁是平面，光影的边缘就是圆锥截线. 手电筒照出来的光束照到墙上或地面上，也得到圆锥截线.

圆锥、平面、圆锥截线这些数学概念，不仅仅出现在书本上、考试卷中，在你生活中处处都有，就看你是否能认出它们.

本章的主要内容：椭圆的定义、标准方程、几何性质；双曲线的定义、标准方程、几

何性质；抛物线的定义、标准方程、几何性质；以及它们在实际中的简单应用. 曲线与方程的对应关系.

本章教材力求突出主干知识、精选内容. 在研究椭圆的标准方程和几何性质之后，可以让学生学会用研究椭圆的方法去学习双曲线、抛物线的标准方程、几何性质.

本章各部分内容之间的知识是对立统一的. 在教学中应引导学生通过对比找出它们的共同点和不同点，了解圆锥曲线的离心率和统一方程.

本章内容注重数形结合的基本思想的培养. 用坐标法研究几何问题是本章的重点和难点. 例如，在求椭圆和双曲线的标准方程时，会遇到比较复杂的根式化简问题；利用待定系数法求圆锥曲线的标准方程时，会遇到由两个二元二次方程组成的方程组问题. 教学时，要将这些内容当作新知识认真安排，组织练习，不可一带而过.

曲线与方程的教学应以学习过的曲线为主，注重使学生体会曲线与方程的对应关系，感受数形结合的基本思想. 学生要真正掌握这些知识，需要有一个过程，而且必须结合具体曲线的学习来完成. 有条件的学校应充分发挥现代教育技术的作用，通过一些软件向学生演示方程中的参数的变化对方程所表示的曲线的影响，使学生进一步理解曲线与方程的关系.

三、课时安排建议

本章教学时间约需 **16** 课时，具体分配如下（仅供参考）：

2.1　椭圆	
2.1.1　椭圆的定义与标准方程	2 课时
2.1.2　椭圆的简单几何性质	2 课时
2.2　双曲线	
2.2.1　双曲线的定义与标准方程	2 课时
2.2.2　双曲线的简单几何性质	2 课时
2.3　抛物线	
2.3.1　抛物线的定义与标准方程	2 课时
2.3.2　抛物线的简单几何性质	2 课时
2.4　圆锥曲线的应用	1 课时
2.5　曲线与方程	2 课时
小结与复习	1 课时

四、教学建议

1. 教学要体现课程改革的基本理念. 在教学设计中要充分考虑数学的学科特点，高中学生的心理特点，不同水平层次、不同兴趣学生的学习需要，运用多种教学方法和手段，引导学生积极主动地学习，帮助学生掌握数学的基础知识和基本技能，以及它们所体现的

数学思想方法，发展学生的应用意识和创新意识，从而形成对数学较为全面地认识，提高其数学素养，养成积极的情感态度，培养自主学习数学的能力，为未来发展和进一步学习打好基础.

2. 对于椭圆、双曲线、抛物线定义的引入，在教学中应充分利用教具体现画图过程（也可以让学生自己动手实验，有条件的学校可用多种现代化手段加以演示），使学生掌握好三种圆锥曲线的定义.

3. 坐标法是借助坐标系，以代数中数与式的知识为基础来研究几何问题的一种数学方法. 坐标法的教学是本章的重点，在教学中要引导学生学会建立适当的坐标系解决几何问题. 同时要重视椭圆、双曲线标准方程的推导过程的教学.

4. 本章教学中应充分体现数形结合的数学思想. 在椭圆、双曲线、抛物线的简单几何性质教学中，应引导学生从图象上进行观察、归纳总结，同时学会总结对比三种曲线的几何性质的相同点和不同点，加深对圆锥曲线的几何性质的认识，并能加以应用.

5. 由曲线求方程，要解决如何将曲线上的点所满足的条件转化为曲线上点的坐标所适合的方程. 在解析几何里所讨论的曲线的性质通常包括：(1) 曲线的范围；(2) 曲线的对称性；(3) 曲线的截距（与坐标轴交点的坐标），以及不同曲线所具有的一些特殊性质. 学生要真正掌握这些知识，需要一个过程. 教材采用了反复训练、逐步提高的方法，教师在教学中也应循序渐进.

6. 在曲线与方程的教学中，教师要引导学生了解圆锥曲线的离心率与统一方程. 教学中应体现从特殊到一般、分类讨论的数学思想. 在教材 P.82 例 5 的教学中应重视分类讨论思想的应用，同时让学生合作讨论，共同完成从椭圆与直线的位置关系迁移到双曲线与直线的位置关系.

7. 在圆锥曲线的应用教学中，教师应向学生充分展示圆锥曲线在实际中的应用. 例如，投掷铅球的运行轨迹、卫星的运行轨迹等.

五、评价建议

美国著名的心理学家 B.S. 布鲁姆提出了一种学校的学习理论，他所著的《人类的特性与学校的学习》一书中，强调如何改变学生中学习的个别差异，他认为：掌握学习是能够成功地给与大多数学生带来高水平的成绩和进一步提高学习兴趣的种种教学策略中的一种策略.

数学学习的评价，既要重视学生知识、技能的掌握和能力的提高，又要重视其情感、态度和价值观的变化；既要重视学生学习水平的区别，又要重视其学习过程中主观能动性的发挥；既要重视定量的认识，又要重视定性的分析；既要重视教育者对学生的评价，又要重视学生的自评、互评.

数学学习评价涉及的面很广，为了使数学教学的评价有利于营造良好的育人环境，有利于数学教与学活动过程的调控，有利于学生和教师的共同成长. 下面给出一些具体评价的建议与要求.

1. 对学生学习目的和动机的评价，应关注学生是否积极主动参与数学学习活动.

2. 对学生学习数学的兴趣的评价，应关注学生是否愿意和能够与同伴交流数学学习的体会、能否与他人合作探究数学问题.

3. 对学生在课堂上表现情况的评价，应重视考查学生能否理解并有条理地表达数学内容，关注学生能否不断反思自己的数学学习过程并改进学习方法.

4. 对学生完成作业的情况的评价，应关注学生是否肯于思考、善于思考、坚持思考并不断改进思考的方法与过程.

5. 对学生课外活动表现的评价.

6. 对学生的数学修养与气质的评价.

7. 对学生的考试成绩的评价，应关注学生平时掌握基础知识和基本技能的情况，还应关注学生的考试心理以及学生的发展过程.

8. 对学生学习能力的评价，应关注学生能否独立举出一定数量的用于说明问题的正例和反例；能否利用已掌握的知识去解决综合性问题和数学实际应用问题.

9. 对学生的数学水平的评价，应关注学生能否选择有效的方法和手段收集信息，提出解决问题的思路，建立恰当的数学模型，进而尝试解决问题.

2.1 椭圆

2.1.1 椭圆的定义与标准方程

教材线索

本小节从画图实验开始，引入椭圆的定义，并给出焦点、焦距的概念. 再通过建立适当的坐标系，由椭圆的定义建立方程，通过化简方程得到椭圆的标准方程，并用定义法及待定系数法求出椭圆的标准方程.

教学目标

（一）知识与技能

掌握椭圆的定义，导出椭圆的标准方程，根据条件会求椭圆的标准方程，初步学会用坐标法解决几何问题.

（二）过程与方法

经历用坐标法建立椭圆的标准方程的过程，研究用椭圆的定义，待定系数法求椭圆的标准方程的方法，研究建立坐标系的方法，探究利用中间变量求点的轨迹的方法.

（三）情感、态度与价值观

认识椭圆的定义，让学生体会数学的对称美、简洁美，形成数形结合的数学思想.

教材分析

1. 重点

（1）椭圆的定义和椭圆的标准方程；

（2）会用定义法、待定系数法求椭圆的标准方程.

2. 难点

（1）椭圆标准方程的推导；

（2）用椭圆的定义求椭圆的方程.

3. 在椭圆定义中，对定值加了一个条件（即大于$|F_1F_2|$），这样规定是为了避免出现两种特殊情况，即轨迹为一条线段或无轨迹，以便于利用标准方程讨论椭圆的几何性质.

4. 求椭圆的标准方程，首先要建立坐标系，为了使方程简单，必须注意坐标系的选择. 在求椭圆的标准方程时，选择经过两个定点F_1，F_2为x轴，并且使坐标原点与线段F_1F_2的中点重合，这样两个定点的坐标比较简单，便于推导方程.

在求方程时，设椭圆的焦距$2c$（$c>0$），椭圆上任意一点到两个焦点的距离之和为$2a$（$a>0$），这是为了使焦点及长轴两个端点的坐标不出现分数形式，以便导出的椭圆方程形式简单. 令$a^2-c^2=b^2$是为了使方程的形式整齐而便于记忆，同时b还有特定的几何意义，b的几何意义将在下一节说明.

5. 带根式的方程的化简是学生感到困难的，特别是由点M适合的条件所列出的方程为两个根式的和等于一个非零常数，化简时要进行两次平方，方程中字母超过三个，且次数高、项数多，初中数学中没有做过这样的题目，教学时，要注意说明这类方程化简的方法，即（1）方程中只有一个根式时，需将它单独留在方程的一边，把其他各项移到另一边；（2）方程中有两个根式时，需将它们分别放在方程的两边，并使其中一边只有一项.

6. 教材在推导中心在原点、焦点在y轴上的椭圆的标准方程$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）中，重点介绍了解法2. 在这里教材的意图是让学生了解对称思想在解析几何中的应用，在教学中应向学生说明.

在给出中心在原点，焦点在y轴上的椭圆的标准方程$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）以后，应让学生明确以下几点：

（1）在椭圆的两种标准方程中，总有$a>b>0$；

（2）椭圆的焦点总是在长轴上；

（3）a，b，c始终满足关系式$c^2=a^2-b^2$. 如果焦点在x轴上，则焦点坐标为$(c,0)$，

$(-c,0)$；如果焦点在 y 轴上，则焦点坐标为 $(0,c)$，$(0,-c)$；

(4) 在遇到形如 $Ax^2+By^2=C$ 的方程中，只要 A，B，C 同号且 $A\neq B$，就是椭圆方程，可以化成 $\frac{Ax^2}{C}+\frac{By^2}{C}=1$，即 $\frac{x^2}{\frac{C}{A}}+\frac{y^2}{\frac{C}{B}}=1$.

教学建议

根据椭圆的定义判断轨迹是否是椭圆，在标准形式下，设出相应的方程，用待定系数法求方程，熟练掌握椭圆的定义和诸元素（长轴、短轴、焦距、焦点坐标）之间的内在联系是本节教学的关键.

例题解析

例 1 设平面上建立了直角坐标系使两焦点在 x 轴上并且关于原点对称，坐标分别为 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，其中 $c>0$(如教材 P. 33 图 2-4 所示).设椭圆是到 F_1，F_2 两点距离之和为定值 $2a$ 的点的轨迹，且 $2a>2c$.求椭圆的方程.

说明 本例是本节教学的重点和难点所在，在分析解题过程时应特别强调几点：

(1) 建立坐标系应强调对称性；

(2) 化简方程要将两个根号分到等式的两边，有利于简化运算；

(3) 换元 $b^2=a^2-c^2$ 也是化简方程形式的一个手段.

例 2 建立适当的直角坐标系，使椭圆的两个焦点在 y 轴上，关于原点对称，坐标分别为 $(0,c)$，$(0,-c)$，其中 $c>0$(如教材 P. 33 图 2-5 所示).椭圆上任意一点到两焦点的距离之和为 $2a(a>c)$.求椭圆的方程.

说明 本例是求焦点在 y 轴上的椭圆标准方程，教学时可让学生自己仿照例 1 的方法来化简方程. 解法 1 省略的化简过程如下：

椭圆上的点 $P(x，y)$ 满足的充分必要条件是：$|PF_1|+|PF_2|=2a$.

即 $\sqrt{x^2+(y+c)^2}+\sqrt{x^2+(y-c)^2}=2a$.

移项得：$\sqrt{x^2+(y+c)^2}=2a-\sqrt{x^2+(y-c)^2}$.

两边平方得：$x^2+y^2+2cy+c^2=4a^2-4a\sqrt{x^2+(y-c)^2}+x^2+y^2-2cy+c^2$.

移项得：$4a\sqrt{x^2+(y-c)^2}=4a^2-4cy$.

约去 4，再平方得：$a^2x^2+a^2y^2-2a^2cy+a^2c^2=a^4-2a^2cy+c^2y^2$.

移项得：$a^2x^2+(a^2-c^2)y^2=a^2(a^2-c^2)$.

令 $b^2=a^2-c^2$ 得：$a^2x^2+b^2y^2=a^2b^2$，

两边同除以 a^2b^2 得：$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$.

解法 2 的主要思想是将焦点在 y 轴上的椭圆方程利用关于直线 $x=y$ 对称的方法，转化为焦点在 x 轴上的椭圆方程来求.

例 3 求下列椭圆的焦点坐标，以及椭圆上任一点到两焦点距离的和.

(1) $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$；　　(2) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{5}=1$；

(3) $4x^2+3y^2=4$.

说明 本例是由标准方程求焦点坐标以及由定义求 $2a$ 的值的椭圆练习题. 主要是让学生熟练掌握 a，b，c 之间的关系，以及正确区分椭圆的两种标准方程.

例 4 求下列椭圆的方程.

(1) 焦点坐标为$(-3，0)$和$(3，0)$，椭圆上任一点到两个焦点的距离之和为 10；

(2) 焦点坐标为$(0，-2)$和$(0，2)$，且椭圆经过点 $(3，2)$.

说明 本例的第(1)小题是已知焦点坐标以及椭圆上的点到两焦点距离之和求椭圆方程. 第(2)小题是已知焦点坐标及椭圆上一点求椭圆方程.

本例在教学中突出用定义法求椭圆标准方程，尤其在第(2)小题的教学中，教师可以把它和用待定系数法求标准方程进行对比，会发现这种方法的计算量较小.

相关链接

折纸游戏——椭圆

准备一张纸片（如图 2-1）.

（其中点 O 表示圆心，点 F 表示圆内除点 O 以外的任意一点.）

将圆纸片翻折，使翻折上去的圆弧通过点 F，如图 2-2，将折痕用笔画上颜色. 继续上述过程，绕圆心一周. 观察看到了什么？想一想为什么？

直线围成了椭圆，如图 2-3.

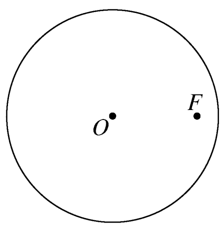


图 2-1

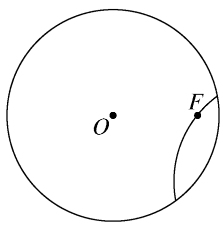


图 2-2

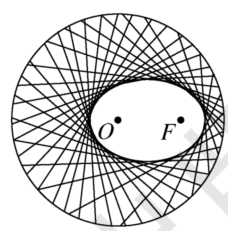


图 2-3

如图 2-4，设折痕为 l，那么点 F 关于直线 l 的对称点 Q 一定在圆弧上. 连接 OQ，交 l 于点 P，连接 PF，则 $OP+PF=OP+PQ=$半径长（定值），所以点 P 的轨迹是椭圆.

根据对称性，找到了折痕上一点满足到两定点的距离之和等于定长，从而满足椭圆定义，得出结论.

在这个问题中，怎么知道椭圆上的点恰好是图 2-4 中的点 P 呢？

点 P 是直线 l 上到两点 O，F 距离之和最小的点（易证），由包络图可以知道，椭圆上

的点应该是椭圆过该点的切线上到两点 O，F 距离之和最小的点（图 2-5）. 这就从反面证明了，如果椭圆上的点不是折痕上的点 P 的话，那么点 P 就在椭圆内部了，这与图形不符.

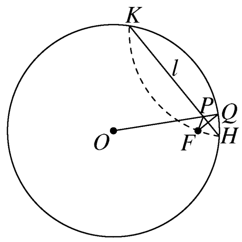


图 2-4

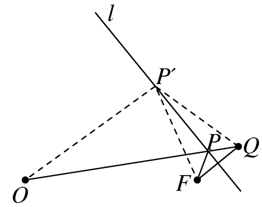


图 2-5

通过上述折纸过程及分析、证明过程的讨论，使同学们对椭圆的定义有更深的理解，并且对椭圆的几何性质也有了一个初步的认识.

在这个问题中，涉及到很多的数学知识，如这些折痕实际上是椭圆的切线. 在图 2-4 中，由对称性可知，$\angle HPF=\angle HPQ=\angle OPK$，这一点反映在椭圆的光学性质上——如果有一束光从点 F 出发，经椭圆反射后，反射光一定通过点 O，北京天坛公园里的回音壁就是根据这个原理建造的.

2.1.2 椭圆的简单几何性质

教材线索

通过椭圆的图象研究椭圆的几何性质，通过椭圆标准方程的讨论，掌握椭圆的几个性质. 掌握椭圆的范围、对称性、顶点、长轴、短轴，a，b，c 的几何意义；了解离心率的定义以及离心率确定椭圆的扁圆程度；知道怎样用代数方法研究曲线的几何性质.

教学目标

（一）知识与技能

1. 掌握椭圆的范围、对称中心、对称轴、顶点. 了解 a，b，c 的几何性质及长轴与短轴的几何意义. 了解离心率的定义及离心率的几何意义.

2. 掌握直线与椭圆位置关系的判断方法，运用方程、不等式的知识解决问题.

（二）过程与方法

借助椭圆的标准方程探求椭圆的范围，尝试用点的坐标的对称性来研究椭圆的对称性. 体验解析几何中常用的设而不求法.

(三) 情感、态度与价值观

认识椭圆的几何性质、感受椭圆的对称美，了解设而不求法的应用，感受数学中的演算技巧，增强学生学习数学的兴趣.

教材分析

1. 重点

(1) 掌握从方程中转化出 $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ 及 $x=\pm\frac{b}{a}\sqrt{b^2-y^2}$ 后讨论 x，y 的范围的方法；

(2) 通过已学过的对称概念和关于 x 轴、y 轴、原点对称的点的坐标之间的关系去了解椭圆的对称性；

(3) 熟练掌握 a，b，c 的几何性质与椭圆方程的关系；

(4) 掌握离心率的定义及计算离心率 e，$0<e<1$.

2. 难点

(1) 根据椭圆的几何性质求椭圆的方程；

(2) 讨论直线与椭圆的位置关系.

3. 根据曲线的方程研究它的性质. 画图是解析几何的基本技能. 本小节通过对椭圆标准方程的讨论，一方面要使学生掌握椭圆的几个性质、掌握 a，b，c 的几何意义. 同时，通过对标准方程的讨论，使学生知道在解析几何中怎样用代数方法研究曲线的性质.

4. 在讨论椭圆的对称性之前，应先复习初中学过的关于数的对称的概念和关于 x 轴、y 轴、原点对称的点的坐标之间的关系，然后说明"以 $-x$ 代 x，或以 $-y$ 代 y，或同时以 $-x$ 代 x，以 $-y$ 代 y 方程不变，则图形关于 y 轴、x 轴、原点对称"的道理.

5. 通过求椭圆的顶点，得到 a，b 的几何意义，这里要特别提醒学生注意 a 是长半轴的长，b 是短半轴的长，又由 $c^2=a^2-b^2$，可得已知椭圆的四个顶点，求焦点的几何作法.

6. 通过对椭圆的范围、对称性及特殊点的讨论，可以从整体上把握曲线的形状、大小和位置，椭圆的焦点决定椭圆的位置，范围决定椭圆的大小，对称性是曲线的重要性质，顶点是椭圆与对称轴的交点，是椭圆重要的特殊点.

7. 对教材例题的处理应重点放在对方程组解的个数的讨论上，同时要教会学生掌握数形结合的数学思想，这样有时可减少运算量. 例如，直线 $y=kx+1$（$k\in\mathbf{R}$）与焦点在 x 轴上的椭圆 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{m}=1$ 总有公共点，则 m 的取值范围是________.

解法 1 联立方程组 $\begin{cases} y=kx+1, & ① \\ \frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{m}=1, & ② \end{cases}$ 将①代入②得：$(m+5k^2)x^2+10kx+5(1-m)=0$.

$\therefore \Delta=100k^2-20(1-m)(m+5k^2)\geqslant 0$.

即 $5mk^2+m^2-m\geqslant 0$.

$\because m>0$，

$\therefore 5k^2+m-1\geqslant 0$ 对 $k\in \mathbf{R}$ 恒成立.

$\therefore -20(m-1)\leqslant 0$， $m\geqslant 1$. 又$\because m<5$，

$\therefore m\in[1,5)$.

解法 2 如果注意到直线 $y=kx+1$ 过定点(0，1)，椭圆$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{m}=1$ 的最高点为$(0,\sqrt{m})$，如果点(0,1)在椭圆的边界与内部，则直线与椭圆必有公共点，即 $m\geqslant 1$，又椭圆的焦点在 x 轴上，$\therefore m<5$，$\therefore m\in[1,5)$.

教学建议

为了学生能顺利完成直线与椭圆的位置关系的判定，有必要复习一些二次不等式的解法及二次方程根的判别式的应用.

例题解析

例 1 下列方程的图象是什么曲线？并请说出图象的分布范围.

(1) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$；

(2) $9x^2+4y^2=1$；

(3) $4x^2+4y^2=1$.

说明 本例是根据方程求曲线的范围的练习，即根据椭圆的标准方程求出 a，b. 第(1)小题可直接根据椭圆的范围来求.第(2)小题应先将方程化为椭圆的标准方程,然后求范围.第(3)小题化为圆的标准方程来求范围,其方法可与椭圆相类似.

例 2 过两点 P_1(2，2)，P_2(−3，−1) 作一个椭圆，使它的中心在原点，焦点在 x 轴上. 求椭圆的方程，以及椭圆的长半轴、短半轴的长度和离心率.

说明 本例在教学中应重视介绍在用待定系数法求椭圆的标准方程时，应将$\frac{1}{a^2}$，$\frac{1}{b^2}$看作未知数，将方程化为二元一次方程组来求解. 这里也可采用换元的形式，令 $m=\frac{1}{a^2}$，$n=\frac{1}{b^2}$，将方程转化为$\begin{cases}4m+4n=1,\\9m+n=1\end{cases}$来进行求解. 求出 m，n 之后，再转成 a^2 和 b^2，用 $c^2=a^2-b^2$ 求出 c，再求离心率 $e=\frac{c}{a}$.

例 3 对不同的实数值 m，讨论直线 $y=x+m$ 与椭圆$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的公共点的个数.

说明 本例的教学应侧重复习直线与圆的交点个数中学过的用方程根的个数来判断直线与圆的交点个数的方法. 用同样的方法来讨论直线与椭圆的交点个数. 这里教师可以总结根据判别式来判断直线与椭圆的交点个数的几种类型，这样对后面的学习会有很大帮助.

讲完例 3 后，教师可引导学生想一想，任意一条直线与椭圆的交点个数是否也是上述三种不同的情况，特别是可举一些过定点，斜率在变的直线来进行分析说明.

相关链接

椭圆的光学性质

从椭圆的一个焦点发出的光线或声波在经过椭圆圆周的反射后，反射线都经过椭圆的另一个焦点. 下面证明这个性质：

已知，经过椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）左焦点 F_1 的入射光线射到椭圆上的另外一点 $P(x_0,y_0)$，如图 2-6，求证：反射光线经过右焦点 F_2.

证明 设椭圆在点 P 处的切线是直线 l.

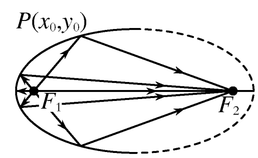


图 2-6

由$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 可得

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y\cdot y'}{b^2}=0\Rightarrow y'=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y},$$

则直线 l 的斜率 $k=-\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\dfrac{x_0}{y_0}$,

$$\tan\alpha=\frac{\dfrac{y_0}{x_0+c}-k}{1+k\cdot\dfrac{y_0}{x_0+c}}=\frac{y_0-k(x_0+c)}{x_0+c+ky_0}=\frac{-ck-(kx_0-y_0)}{(x_0+ky_0)+c},$$

$$\tan\beta=\frac{k-\dfrac{y_0}{x_0-c}}{1+k\cdot\dfrac{y_0}{x_0-c}}=\frac{k(x_0-c)-y_0}{x_0-c+ky_0}=\frac{-ck+(kx_0-y_0)}{(x_0+ky_0)-c}.$$

由 $k=-\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\dfrac{x_0}{y_0}$可得 $\qquad -ck=\dfrac{b^2c}{a^2}\cdot\dfrac{x_0}{y_0}$,

$$kx_0-y_0=-\frac{b^2x_0^2}{a^2y_0}-y_0=-\frac{b^2x_0^2+a^2y_0^2}{a^2y_0}=-\frac{a^2b^2}{a^2y_0}=-\frac{b^2}{y_0},$$

$$x_0+ky_0=x_0-\frac{b^2x_0}{a^2}=\frac{c^2}{a^2}x_0.$$

则

$$\tan\alpha=\frac{\dfrac{b^2c}{a^2}\cdot\dfrac{x_0}{y_0}+\dfrac{b^2}{y_0}}{\dfrac{c^2}{a^2}x_0+c}=\frac{\dfrac{b^2}{y_0}\cdot\left(\dfrac{c}{a^2}x_0+1\right)}{c\cdot\left(\dfrac{c}{a^2}x_0+1\right)}=\frac{b^2}{cy_0},$$

$$\tan\beta=\frac{\frac{b^2c}{a^2}\cdot\frac{x_0}{y_0}-\frac{b^2}{y_0}}{\frac{c^2}{a^2}x_0-c}=\frac{\frac{b^2}{y_0}\cdot\left(\frac{c}{a^2}x_0-1\right)}{c\cdot\left(\frac{c}{a^2}x_0-1\right)}=\frac{b^2}{cy_0}.$$

所以 $\alpha=\beta$.

椭圆的光学性质在实践中也有着广泛的应用，例如，电影放映机的聚光灯有一个反射镜，它的形状是旋转椭圆面，为了使片门（电影胶片通过的地方）处获得最强的光线，可将灯丝 F_2 与片门 F_1 位于椭圆的两个焦点处，如图 2-7.

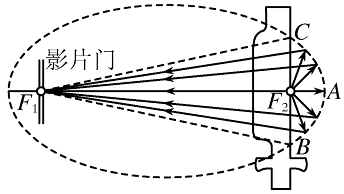


图 2-7

2.2 双曲线

2.2.1 双曲线的定义与标准方程

教材线索

本小节从画图实验入手，观察到两个定点 F_1 和 F_2 的距离之差等于 d 的点的轨迹的形状，从而引入双曲线的定义，并给出焦点、焦距的概念，建立适当的坐标系，利用双曲线的定义建立方程，并化简方程为标准方程，通过教材例题掌握用定义法及待定系数法求双曲线的标准方程.

教学目标

（一）知识与技能

掌握双曲线的定义，导出双曲线的标准方程. 根据条件会求双曲线的标准方程. 运用待定系数法求双曲线的方程，掌握用双曲线的定义求轨迹方程的方法.

（二）过程与方法

经历导出双曲线标准方程的过程，复习待定系数法. 探究如何用“定义法”求动点的

轨迹.

（三）情感、态度与价值观

认识双曲线的图象，体会数学的对称美. 初步体会应用“定义法”求动点的轨迹可使运算量大大减少，提高解题的速度与质量，增强学生学习数学的兴趣.

教材分析

1. 双曲线的定义、标准方程与椭圆类似，教材的处理方法也相仿，也就是说，本小节在数学思想和方法上没有新内容，因此，这一小节的教学可以参照 2.1.1 节进行，教学中要着重对比椭圆与双曲线的相同点和不同点，特别是它们的不同点.

2. 与建立椭圆的标准方程一样，建立双曲线的标准方程是从“平面内到两定点的距离的差的绝对值是常数（与椭圆不同，这个常数要大于 0 且小于 $|F_1F_2|$）的点的轨迹”这个双曲线的定义出发，推导出它的标准方程. 推导过程说明双曲线上任意一点的坐标都适合方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，但关于坐标适合方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的点都在双曲线上，同椭圆一样，教材中未加证明.

3. 讲述双曲线的标准方程时，可与椭圆比较如下：

（1）设 $M(x,y)$为双曲线上任意一点，若点 M 在双曲线的右支上，则$|MF_1|>|MF_2|$，$|MF_1|-|MF_2|=2a(a>0)$；若点 M 在双曲线的左支上，则$|MF_1|<|MF_2|$，$|MF_1|-|MF_2|=-2a$，因此$|MF_1|-|MF_2|=\pm 2a$，这是与椭圆不同的地方.

（2）当得到$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$后，可以与椭圆一样的处理，因为 $a<c$，所以 $c^2-a^2>0$. 令 $c^2-a^2=b^2$，则 $c=\sqrt{a^2+b^2}$，这与椭圆不同.

（3）通过比较两种不同类型的双曲线方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$与$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$），向学生说明，如果 x^2 项的系数是正数，那么焦点在 x 轴上；如果 y^2 项的系数是正数，那么焦点在 y 轴上. 对于双曲线而言 a 不一定大于 b，因此不能象椭圆那样通过比较分母的大小来判定焦点在哪一条坐标轴上.

（4）教师在讲授过程中，可抓住双曲线与椭圆标准方程的异同，指导学生列表进行对比，使学生掌握椭圆、双曲线的标准方程以及它们之间的区别和联系.

椭圆	双曲线
$\lvert MF_1\rvert+\lvert MF_2\rvert=2a$	$\lvert MF_1\rvert-\lvert MF_2\rvert=\pm 2a$
$\because a>c>0$，$\therefore$令 $a^2-c^2=b^2$（$b>0$）	$\because 0<a<c$，$\therefore$令 $c^2-a^2=b^2$（$b>0$）
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1\begin{pmatrix}a>0，b>0，\\ a\text{ 不一定大于 }b\end{pmatrix}$

4. 在本小节的教学中，要进一步加强对学生进行坐标法的训练，从教材中配备的练习题来看，可以在课内增加用待定系数法求双曲线方程的例题，即已知双曲线的标准方程，

在使用待定系数法时，是将标准方程中的 a，b 作为待定系数，通过解方程组的办法求出 a，b，由于 a，b 在分母上，并且是二次的，所以应采用换元法，把方程化为二元一次方程来求解.

教学建议

在本小节的教学中，要特别重视双曲线画图的试验，有条件的学校还可以利用课件来演示作图的过程，让学生对双曲线的形状有一个直观的认识. 另外，在本小节的教学中，教师应指导学生利用对比的学习方法，通过与椭圆标准方程推导的过程进行比较来学习.

例题解析

例 1～例 4 教材中 P. 43～P. 46 的例 1～例 4.

说明 对于本节教材中 4 个例题的教学，例 1 的教学可先采用引导、点拨的方式组织学生讨论，然后利用已学过的推导椭圆标准方程的方法让学生自主探究，自己完成整个推导过程.

在例 1 的教学完成之后，教师还应引导学生对比椭圆与双曲线的两种标准方程，看看有哪些相同点与不同点，可以用表格的形式来完成. 让学生掌握类比、归纳的数学思想方法.

例 2、例 3 都是已知双曲线的两个交点坐标，结合双曲线的定义求双曲线的标准方程. 教材在例 3 的处理上采用了与椭圆相同的方法，即用两点距离公式结合定义来求解.

例 4 是灵活运用双曲线的定义及焦点坐标计算公式讨论方程表示双曲线的条件.

例 5 已知方程 $\frac{x^2}{2-k}+\frac{y^2}{k-1}=1$ 表示的图形是：(1) 双曲线；(2) 椭圆；(3) 圆，分别求出 k 的范围.

解 (1) 由 $(2-k)(k-1)<0$，得 $k<1$ 或 $k>2$，

当 $k<1$ 或 $k>2$ 时，方程表示双曲线.

(2) 由 $\begin{cases}2-k>0,\\ k-1>0,\\ 2-k\neq k-1,\end{cases}$ 得 $1<k<2$ 且 $k\neq\frac{3}{2}$，

当 $1<k<2$ 且 $k\neq\frac{3}{2}$ 时，方程表示椭圆.

(3) 由 $\begin{cases}2-k>0,\\ k-1>0,\\ 2-k=k-1,\end{cases}$ 得 $k=\frac{3}{2}$，

当 $k=\frac{3}{2}$ 时，方程表示圆.

例 6 求经过点 $P(3,2\sqrt{7})$ 和 $Q(-6\sqrt{2},7)$ 的双曲线方程.

解 设所求的双曲线方程为：

$$\frac{x^2}{m}+\frac{h^2}{n}=1,$$

∵双曲线经过点$(3，2\sqrt{7})$，点$(-6\sqrt{2}，7)$，

∴$\begin{cases}\dfrac{9}{m}+\dfrac{28}{n}=1,\\ \dfrac{73}{m}+\dfrac{49}{n}=1,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}m=-75,\\ n=25.\end{cases}$

∴双曲线的标准方程为$\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{75}=1$.

点评 在设方程时用到了换元的思想，直接将方程转化为二元一次方程组来解.

例 7 求与$\odot M$：$x^2+(y+5)^2=49$ 和$\odot N$：$x^2+(y-5)^2=1$ 都外切的$\odot P$ 的圆心 P 的轨迹方程.

解 设点 $P(x,y)$.

∵$\odot P$ 与$\odot M$，$\odot N$ 都外切，

∴$|PM|-7=|PN|-1$，即$|PM|-|PN|=6$.

∵$|MN|=10>6$，

∴点 P 的轨迹是以 $M(0,-5)$，$N(0,5)$为焦点，实半轴 $a=3$ 的双曲线的上支.

∵$a=3$，$c=5$，∴$b^2=c^2-a^2=16$.

∴点 P 的轨迹方程为$\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$（$y\geqslant3$）.

相关链接

双曲线的包络线

折纸方法：

取一圆形的纸片，在圆外部任意标出一点 F_2，然后把纸片折叠起来，不过，要使翻转过来的圆弧都通过 F_2，当折叠的次数够多时，这些折痕就会“包”出一个双曲线，如图 2-8.

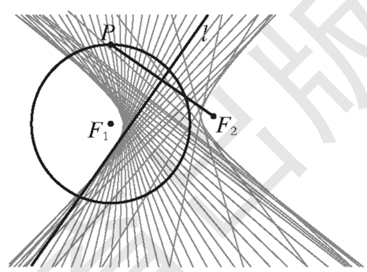


图 2-8

作图说明：

（1）在圆 F_1 是任取一点 P，圆外任取一点 F_2；

（2）连接线段 PF_2；

（3）作线段 PF_2 的中垂线 l；

则直线 l 所包出来的轨迹即为所求. 如图 2-8.

理论依据：

双曲线的一焦点对其任意切线的对称点构成一个圆，此圆的圆心为另一焦点，而半径为椭圆之实轴的长.

2.2.2 双曲线的简单几何性质

教材线索

双曲线的几何性质的教学，也可与椭圆的性质对比进行，着重指出它们的联系与区别. 本小节从研究范围、对称性、顶点、渐近线四个部分讨论双曲线的几何性质，教材重点突出讲解渐近线的比较严格的定义，对于圆锥曲线来说，渐近线是双曲线所特有的，利用双曲线的渐近线来画双曲线特别方便.

教学目标

（一）知识与技能

掌握双曲线的范围、对称性、顶点、渐近线、离心率等几何性质，能根据双曲线的标准方程求出双曲线的实半轴长、虚半轴长、焦点坐标、渐近线方程，初步应用双曲线的渐近线画出双曲线的草图. 运用坐标法建立曲线方程，讨论圆锥曲线的位置关系；掌握数形结合的数学思想及方程的思想；运用“点差法”解决双曲线中点弦问题.

（二）过程与方法

观察双曲线渐近线的特征，探索无穷的奥秘. 研究点在双曲线的内部、外部的情形；探究如何用“点差法”解决双曲线的中点弦的问题.

（三）情感、态度与价值观

初步体会无穷的奥妙，认识数学的科学价值. 了解双曲线与直线的位置关系；获得“设而不求”的方法，感受数学的几何美学及代数运算的简洁美，增强学生学习解析几何的兴趣.

教材分析

1. 范围

由标准方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，可得 $x^2\geqslant a^2$，当 $|x|\geqslant a$ 时，y 才有实数值，对于 y 的任何值，x 都有实数值，要讲清双曲线在直线 $x=a$，$x=-a$ 之间没有图象，当 x 的绝对值无限增大时，y 的绝对值也无限增大，所以曲线是无限延伸的，不像椭圆那样是封闭曲线.

2. 对称性

双曲线的对称性与椭圆完全相同，可逐一提问，让学生回答双曲线具有的对称性，并说明原因.

3. 顶点

双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$有两个顶点$(a,0)$，$(-a,0)$.令 $x=0$ 时，方程 $y^2=-b^2$ 无实数根，所以它与 y 轴无交点，$2b$ 是双曲线的虚轴的长，因为学生没有学过共轭双曲线，所以对虚轴不好理解，容易把虚轴与椭圆的短轴混淆，教学中要提醒学生注意. 另外，双曲线只有两个顶点，而椭圆有四个顶点，这是它们的不同点.

4. 渐近线

对圆锥曲线来说，这是双曲线特有的性质，利用双曲线的渐近线来画双曲线的草图特别方便，而且较为精确，只要作出双曲线的两个顶点和两条渐近线，就能画出它的近似图形.

对于双曲线与渐近线无限接近的说明是本节的难点之一，教学中应予以重视，若曲线上的点到某一直线的距离为 d，当点趋向于无穷远时，d 趋近于 0，则这条直线称为该曲线的渐近线.

由双曲线的标准方程可得：

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}.$$

当 x 无限增大时，$\frac{a^2}{x^2}$趋近于 0，也就是说这时双曲线 $y=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$ 与 $y=\pm\frac{b}{a}x$ 直线无限接近，这使我们有理由猜想直线 $y=\pm\frac{b}{a}x$ 为双曲线的渐近线. 教材是用第一象限内的点在相同横坐标下直线 $y=\frac{b}{a}x$ 与双曲线 $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ 的点的纵坐标之差 d 接近于 0 来证明.

也可如图 2-9 这样说明.

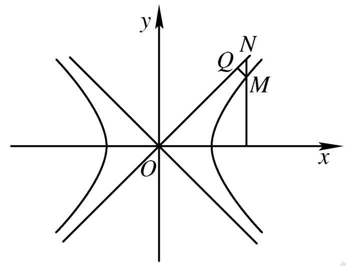


图 2-9

设点 M 到直线 $y=\frac{b}{a}x$ 的距离为 $|MQ|$，在 $\mathrm{Rt}\triangle MQN$ 中，若斜边的长趋近于 0，当然直角边的长也趋近于 0，所以当 $|MN|\to 0$ 时，立刻可得 $|MQ|\to 0$，这就证明了当 x 无限增大时，点 M 到直线 $y=\frac{b}{a}x$ 的距离趋近于 0.

5. 离心率

与椭圆类似，但双曲线的离心率 $e=\frac{c}{a}>1$.

6. 与椭圆一样，教材着重讲第一标准方程的双曲线性质，对于第二个标准方程的双曲线性质，教师可引导学生通过对此来进行归纳和小结.

教学建议

在本小节教学中，有条件的学校最好能运用课件演示双曲线的图形，让学生观察它的几何性质，尤其是观察曲线无限接近于渐近线的这一趋势，对渐近线的教学有很好的辅助

作用. 另外在本节教材 P. 53 例 5 的教学中，要重点介绍用数形结合的数学思想来讨论直线与双曲线的交点问题. 这对学生今后做选择题或填空题有很大帮助.

例题解析

例 1 求双曲线 $4y^2-9x^2=-4$ 的实半轴长、虚半轴长、焦点坐标、渐近线方程和离心率，并画出曲线的草图.

说明 本例是根据双曲线的标准方程求双曲线的实半轴长、虚半轴长、焦点坐标、渐近线方程及离心率的例题. 在教学中主要要让学生分辨方程代表的双曲线的焦点在哪条坐标轴上，熟练掌握 a，b，c 及渐近线方程的求法，在画图过程中要突出渐近线与顶点的作用.

例 2 已知双曲线的两焦点坐标 $F_1(0,-2)$，$F_2(0,2)$，以及双曲线上一点 P 的坐标 $(3,-2)$. 求双曲线的方程、顶点坐标和渐近线方程.

说明 本例的教学可以类比椭圆中学过的定义法求方程来进行，再由方程求出渐近线方程.

例 3 以下方程的图象是不是双曲线？如果是，求它的焦点坐标、顶点坐标和渐近线方程.

（1）$4x^2-5y^2=-20$；（2）$4x^2-5y^2=1$；（3）$4x^2-5y^2=0$.

说明 在本例的教学中应引导学生注意(1)、(2)两个小题中的标准方程 $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{5}=1$ 和 $\frac{x^2}{\frac{1}{4}}-\frac{y^2}{\frac{1}{5}}=1$，将“1”改为“0”后所得的两条直线方程都是：$y=\pm\frac{2}{5}\sqrt{5}x$. 引导学生得出对一般的双曲线方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 或 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$，只要将方程中的“1”改为“0”，即可得到双曲线的两条渐近线方程：$y=\pm\frac{b}{a}x$ 和 $y=\pm\frac{a}{b}x$.

通过此结论可以反过来由已知双曲线的两条渐近线方程 $Ax+By=0$ 来假设双曲线方程为 $A^2x^2-B^2y^2=\lambda$，用待定系数法求出 λ，从而得到双曲线方程.

例 4 反比例函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图象是双曲线，两条坐标轴是它的渐近线. 求它的实半轴长和半焦距. 以它的中心为原点，实轴所在的直线为 x 轴重新建立直角坐标系，求双曲线在这个坐标系中的方程.

说明 本例通过学生熟悉的反比例函数 $y=\frac{1}{x}$ 的双曲线图象，介绍了中心在原点，对称轴不在 x 轴上的双曲线的原点坐标、实半轴长、虚半轴长、半焦距的求法. 同时介绍了反比例函数 $y=\frac{1}{x}$ 在以对称轴为 x 轴的新坐标系中方程的求法，让学生了解方程转化的基

本方法.

例 5 讨论直线 $y=x+b$ 与双曲线 $x^2-y^2=1$ 的公共点的个数.

说明 本例首先从讨论方程组 $\begin{cases} y=x+b, ① \\ x^2-y^2=1 ② \end{cases}$ 的解入手，得到方程 $2bx+b^2+1=0$. ③ 再对方程③中的 x 的系数 b 进行讨论.

当 $b=0$ 时，方程③无解，则 l 与双曲线无交点. 这时 l 即双曲线的一条渐近线.

当 $b\neq 0$ 时，即 l 平行与渐近线的一条，l 与双曲线有一个交点.

例 6 讨论直线 $x=m$ 与双曲线 $x^2-y^2=1$ 的公共点的个数.

说明 本例从方程组 $\begin{cases} x=m, ① \\ x^2-y^2=1 ② \end{cases}$ 入手，得到方程 $y^2=m^2-1$. ③

当 $m^2-1<0$ 即 $-1<m<1$ 时，方程③无实数根，直线与双曲线无交点.

当 $m^2-1>0$ 即 $m<-1$ 或 $m>1$ 时，方程③有两个不同的实根，直线与双曲线相交，有两个交点.

当 $m^2-1=0$ 即 $m=-1$ 或 $m=1$ 时，方程③有两个相等的实数根，直线与双曲线有唯一的交点 $(-1,0)$ 或 $(1,0)$.

例 7 讨论直线 $y=-2x+b$ 与双曲线 $x^2-y^2=1$ 的公共点的个数.

说明 联立方程组 $\begin{cases} y=-2x+b, \\ x^2-y^2=1, \end{cases}$ 得到方程 $-3x^2+4bx-b^2-1=0$. ①

判别式 $\Delta=4b^2-12$.

当 $\Delta>0$ 即 $b^2>3$ 时，方程①有两解，直线与双曲线相交，有两个交点.

当 $\Delta<0$ 即 $b^2<3$ 时，方程①无解，直线与双曲线无交点.

当 $\Delta=0$ 即 $b^2=3$ 时，方程①有两个相等的实数根，直线与双曲线相切.

在例 5，例 6，例 7 的教学过程中应充分利用数形结合的数学思想，引导学生对比例 5，例 6，例 7 中三种不同的直线位置，了解教材的意图在于分类讨论直线与双曲线的位置关系，分直线与渐近线平行，与 y 轴平行以及与渐近线不平行三种类型，分别利用方程组的解来讨论直线与双曲线的位置关系.

例 8 已知双曲线方程为 $3x^2-y^2=3$.

(1) 求以定点 $A(2,1)$ 为中点的弦所在的直线方程；

(2) 以定点 $B(1,1)$ 为中点的弦存在吗？若存在，求出其所在直线的方程，若不存在，说明理由.

解 (1) 设过点 $A(2,1)$ 的直线与双曲线 $3x^2-y^2=3$ 相交于点 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$.

则 $\begin{cases} 3x_1^2-y_1^2=3, & ① \\ 3x_2^2-y_2^2=3. & ② \end{cases}$

两式相减得：

$$3(x_1-x_2)(x_1+x_2)-(y_1-y_2)(y_1+y_2)=0. \quad ③$$

∵$x_1+x_2=4$，$y_1+y_2=2$，代入③得：

$$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=6\text{，即 } k_{PQ}=6.$$

则直线 PQ 的方程为 $6x-y=11$.

将 $x=2$ 代入 $3x^2-y^2=3$，得 $y=\pm3$.

∴点 $A(2,1)$在双曲线的内部，故过点 A 的直线必然与双曲线相交.

∴所求的直线方程为 $6x-y-11=0$.

（2）设过点 $B(1,1)$的直线与双曲线 $3x^2-y^2=3$ 相交于 $M(x_3,y_3)$，$N(x_4,y_4)$两点，则由①可得：

$$3(x_3+x_4)(x_3-x_4)-(y_3+y_4)(y_3-y_4)=0. \quad ④$$

∵$x_3+x_4=2$，$y_3+y_4=2$，代入④得：

$$\frac{y_3-y_4}{x_3-x_4}=3\text{，即 } k_{MN}=3.$$

则直线 MN 的方程为 $3x-y-2=0$.

又点 B 在双曲线的外部，故要检验 MN 与双曲线是否相交，

将 $y=3x-2$ 代入 $3x^2-y^2=3$ 得：$6x^2-12x+7=0$，　$\Delta=-24<0$，

∴直线与双曲线无交点.

∴以点 B（1，1）为中点的弦不存在.

点评　解决圆锥曲线弦的问题，一般不求直线与圆锥曲线的交点，而是利用韦达定理或者“点差法”求解.

解求中点弦问题应注意：如果点在双曲线的内部，则以该点为中点的弦一定存在；如果点在双曲线的外部，则以该点为中点的弦有可能存在，也有可能不存在. 因此，中点在双曲线内部时无须检验，中点在双曲线外部时必须检验.

已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$），

若$\frac{x_0^2}{a_0^2}-\frac{y_0^2}{b_0^2}>1$，则点$(x_0,\ y_0)$在双曲线内部；

若$\frac{x_0^2}{a_0^2}-\frac{y_0^2}{b_0^2}<1$，则点$(x_0,\ y_0)$在双曲线外部.

相关链接

解析几何的产生

16 世纪以后，由于生产和科学技术的发展，天文、力学、航海等方面都对几何学提出了新的需要. 比如，德国天文学家开普勒发现行星是绕着太阳沿着椭圆轨道运行的，太阳

处在这个椭圆的一个焦点上；意大利科学家伽利略发现投掷物体是沿着抛物线运动的；等等. 这些发现都涉及到圆锥曲线，要研究这些比较复杂的曲线，原先的一套方法显然已经不适应，这就导致了解析几何的出现.

1637 年，法国的哲学家和数学家笛卡儿发表了他的哲学著作《方法论》，这本书的后面有三篇附录，一篇叫《屈光学》，一篇叫《气象学》，一篇叫《几何学》. 当时的这个“几何学”实际上指的是数学，就像我国古代“算术”和“数学”是一个意思一样.

笛卡儿的《几何学》共分三卷，第一卷讨论尺规作图；第二卷是曲线的性质；第三卷是立体和“超立体”的作图，但它实际是代数问题，探讨方程的根的性质. 后世的数学家和数学史学家都把笛卡儿的《几何学》作为解析几何的起点.

从笛卡儿的《几何学》中可以看出，笛卡儿的中心思想是建立起一种“普遍”的数学，把代数、几何统一起来. 他设想，把任何数学问题化为一个代数问题，再把任何代数问题归结到去解一个方程式.

为了实现上述设想，笛卡儿从天文和地理的经纬度出发，指出平面上的点和实数对（x，y）的对应关系. x，y 的不同数值可以确定平面上许多不同的点，这样就可以用代数的方法研究曲线的性质. 这就是解析几何的基本思想.

具体地说，平面解析几何的基本思想有两个要点：第一，在平面建立坐标系后，平面上每一个点的坐标与一组有序的实数对相对应；第二，在平面建立坐标系后，平面上的一条曲线就可由带两个变量的一个代数方程来表示了. 从这里可以看到，运用坐标法不仅可以把几何问题通过代数的方法解决，而且还把变量、函数以及数和形等重要概念密切联系起来.

解析几何的产生并不是偶然的. 在笛卡儿写《几何学》以前，就有许多学者研究过用两条相交直线作为一种坐标系；也有人在研究天文、地理的时候，提出了一个点的位置可由两个“坐标”（经度和纬度）来确定. 这些都对解析几何的创建产生了很大的影响.

在数学史上，一般认为和笛卡儿同时代的法国业余数学家费马也是解析几何的创建者之一，应该分享这门学科创建的荣誉.

费马是一个业余从事数学研究的学者，对数论、解析几何、概率论三个方面都有重要贡献. 他性情谦和，好静成癖，对自己所写的“书”无意发表. 但从他的通信中知道，他早在笛卡儿发表《几何学》之前，就已写了关于解析几何的小文，就已经有了解析几何的思想. 只是直到 1679 年，费马死后，他的思想和著作才从给友人的通信中公开发表.

笛卡儿的《几何学》作为一本解析几何的书来看，是不完整的，但重要的是引入了新的思想，为开辟数学新园地做出了贡献.

2.3 抛物线

2.3.1 抛物线的定义与标准方程

教材线索

引入抛物线的定义，可以像引入椭圆、双曲线一样从画图开始，这样定义抛物线，便于导出它的标准方程，也可以使学生一开始就看到抛物线和椭圆、双曲线之间的联系，为后面对圆锥曲线进行小结做好准备.

教学目标

（一）知识与技能

掌握抛物线的四种标准方程及图象、焦点坐标、准线方程.

（二）过程与方法

讨论抛物线的标准方程，初步应用抛物线的定义解决轨迹问题.

（三）情感、态度与价值观

了解抛物线与二次函数图形的异同，了解知识呈螺旋式上升的过程.

教材分析

1. 在由抛物线的定义导出它的标准方程时，可先让学生考虑怎样选择坐标系. 由定义可知直线 DF 是曲线的对称轴，所以把 DF 作为 x 轴可以使方程中不出现 y 的一次项；因为线段 DF 的中点适合条件，所以它在抛物线上，故而以 DF 的中点为原点，就不会出现常数项. 这样建立坐标系，得出的方程形式比较简单.

2. 在导出标准方程的过程中，设焦点到准线的距离为 $|FD|=p$（$p>0$），这就是抛物线方程中参数 p 的几何意义，因为抛物线的顶点是 FD 的中点，所以焦点 $F\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$和准线 $x=-\frac{p}{2}$都可以根据 p 求出.

通过抛物线的焦点作垂直于 x 轴而交抛物线于 A，B 两点的线段 AB，称为抛物线的“通径”，由 $A\left(\frac{p}{2},p\right)$，$B\left(\frac{p}{2},-p\right)$，可得出通径的长 $|AB|$ 等于 $2p$.

必须向学生着重指出，p 是抛物线的焦点到准线的距离，所以 p 的值永远大于 0，使学生在抛物线标准方程的一次项系数为负时，也不至于弄错.

还应向学生指出，画图时应特别注意不要把抛物线看成双曲线的一支.

3. 与求椭圆和双曲线的标准方程类似，如果所选取的坐标系不同，或者说抛物线在坐标平面内的位置不同，同一条抛物线的标准方程还有其他的几种形式：

$$y^2=-2px,\ x^2=2py,\ x^2=-2py\ (p>0).$$

教学建议

教材上所求的都是处于标准位置的抛物线，若已知抛物线不处于标准位置时，只能用定义来求方程. 例如，已知抛物线的焦点为 (3，3)，准线为 x 轴，求抛物线的方程.

解　设 $M(x,y)$为抛物线上任意一点,则由抛物线的定义得：

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}=|y|\text{，即 } y=\frac{1}{6}x^2-x+3.$$

抛物线的定义可以这样理解：定义的实质是“一动三定”，一个动点，设为 M；一个定点 F 叫作抛物线的焦点；一条定直线 l 叫作抛物线的准线；一个定值，即点 M 与点 F 的距离和它到直线 l 的距离之比等于 1.

例题解析

例 1　已知定点 F，定直线 l 且 $F\notin l$. 动点 P 到 F 与 l 的距离相等. 在适当的直角坐标系中求动点 $P(x,y)$的轨迹的方程.

说明　本例是建立适当的坐标系，求满足一定条件的动点 P 的轨迹方程. 讲解本例时，可让学生讨论坐标系应如何建立，才能使动点 P 到定点 F 和到定直线 l 的距离表示起来比较方便，同时又尽量使方程比较简单. 这里教师不必拘泥于书上的建系方法，可让学生自己从不同的方向进行建系. 这样可以让学生通过探索，自主发现抛物线的几种不同的标准方程，从而给出抛物线的定义以及抛物线标准方程的定义.

例 2　求如下抛物线的焦点坐标和准线方程：

(1) $y^2=4x$；　　　　(2) $y=ax^2$，其中 $a>0$.

说明　本例是已知抛物线的标准方程，求抛物线的焦点坐标和准线方程.

(1) $y^2=4x$，先确定焦点坐标在 x 轴的正半轴上，再由 $2p=4$ 得出 $\frac{p}{2}=1$，从而得出焦点坐标为 $\left(\frac{p}{2},\ 0\right)=(1,0)$，准线方程为 $x=-\frac{p}{2}$，即 $x=-1$.

(2) $y=ax^2$ $(a>0)$，先化方程为 $x^2=\frac{1}{a}y$，确定焦点在 y 轴上，再由 $2p=\frac{1}{a}$ 得出 $\frac{p}{2}=\frac{1}{4a}$，从而求得焦点坐标为 $\left(0,\ \frac{1}{4a}\right)$，准线方程为 $y=-\frac{1}{4a}$.

通过本例可向学生说明焦点在 x 轴上的抛物线可统一成 $y^2=2ax$ $(a>0)$ 的形式，焦

点在 y 轴上的抛物线可统一成 $x^2=2ay$（$a>0$）的形式.

相关链接

抛物线反射镜和汽车前灯

你知道吗？当把汽车的前灯开关由亮转到暗时，就有数学在起作用. 具体地说，是抛物线原理在玩花样.

如果你留心会发现，汽车前灯后面的反射镜呈抛物线的形状. 事实上，它们是抛物面（抛物线环绕它的对称轴旋转形成的三维空间中的曲面）. 明亮的光束是由位于抛物线反射镜焦点上的光源产生的.

因此，光线沿着与抛物线的对称轴平行的方向射出. 当光变暗时，光源改变了位置. 它不再在焦点上，结果光线的行进不与轴平行. 现在近光只向上下射出，向上射出的被屏蔽，所以只有向下射出的近光，射到比远光所射的距离短的地方.

抛物线是一种古老的曲线，它是梅内克缪斯在试图解决用尺规作出体积为给定立方体两倍的立方体时发现的.

几个世纪以来，人类已经得到了有关抛物线的一些新的用途和发现. 例如，伽利略证明投掷物体的路线是抛物线. 今天人们可以到电器店去买一台高能效抛物线电热器（即反射型取暖器），它只用 1 000 瓦，但是与用 1 500 瓦的电热器产生同样多的热量.

2.3.2 抛物线的简单几何性质

教材线索

对于抛物线的几何性质的研究，可以让学生根据已学过的研究椭圆、双曲线的几何性质的方法来自主探究，找出它与椭圆、双曲线几何性质的不同点：它只有一个焦点、一个顶点、一条对称轴、一条准线，它没有中心等. 教材通过例题进一步加强学生对抛物线的标准方程、焦点、顶点、准线等知识的掌握，并着重介绍了直线与抛物线的位置关系的判断.

教学目标

（一）知识与技能

掌握抛物线的几何性质，研究各种开口方向的抛物线的几何性质. 掌握直线与抛物线的位置关系，运用抛物线的定义及几何性质解决问题.

（二）过程与方法

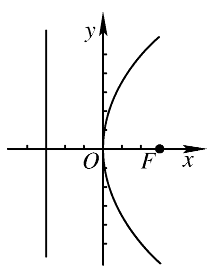
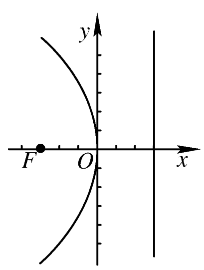
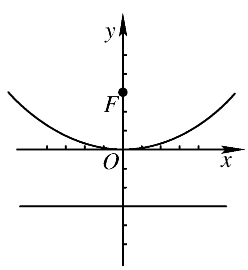
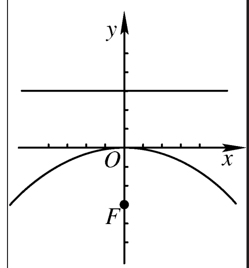
模仿椭圆、双曲线，探求用抛物线的几何性质求抛物线方程的方法．复习“点差法”、韦达定理．研究直线与抛物线的位置关系．

（三）情感、态度与价值观

形成数学建模的思想，进一步感受“设而不求”的魅力，树立学习数学的信心．

教材分析

1．对于抛物线的四种标准方程，应要求学生熟练掌握．教师可设计如下的表格让学生自己填写：

项目	内　　容			
定义	平面内与一个定点 F 和一条定直线 l 的距离相等的点的轨迹叫作抛物线.			
标准方程	$y^2=2px$（$p>0$）	$y^2=-2px$（$p>0$）	$x^2=2py$（$p>0$）	$x^2=-2py$（$p>0$）
图象				
范围	$x\geqslant 0$，$y\in\mathbf{R}$	$x\leqslant 0$，$y\in\mathbf{R}$	$x\in\mathbf{R}$，$y\geqslant 0$	$x\in\mathbf{R}$，$y\leqslant 0$
对称轴	x 轴	x 轴	y 轴	y 轴
焦点	$F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$	$F\left(-\dfrac{p}{2},0\right)$	$F\left(0,\dfrac{p}{2}\right)$	$F\left(0,-\dfrac{p}{2}\right)$
准线	$x=-\dfrac{p}{2}$	$x=\dfrac{p}{2}$	$y=-\dfrac{p}{2}$	$y=\dfrac{p}{2}$
原点	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$

在抛物线的几何性质中最重要、应用最广的是范围、对称性、顶点坐标．在解题过程中，首先要由所给条件确定抛物线属于四种类型中的哪一种类型，然后利用确定的类型，针对它们的几何性质求解．注意抛物线的离心率 $e=1$，可以与椭圆、双曲线的离心率 e 进行对比．

2．四种标准方程的联系与区别．

（1）p 的几何意义：焦参数 p 是焦点到准线的距离，所以 p 恒为正数．

（2）方程右边一次项的变量与焦点所在坐标轴的名称相同，一次项系数的符号决定抛物线的开口方向．

（3）焦点的非零坐标是一次项系数的$\dfrac{1}{4}$．

3. 通过焦点且垂直于对称轴的抛物线的弦叫作抛物线的通径，它的长为 $2p$，这就是标准方程中 $2p$ 的一种几何意义.

4. 求抛物线的标准方程常用的方法是待定系数法或轨迹法. 为避免开口不定而分成 $y^2=2px$（$p>0$）或 $y^2=-2px$（$p>0$），$x^2=2py$（$p>0$），$x^2=-2py$（$p>0$）的情况求解的麻烦，可以设成 $y^2=mx$，或 $x^2=ny$（$m\neq 0$，$n\neq o$），若 $m>0$，开口向右，$m<0$，开口向左，m 有两解，则抛物线的标准方程有两个；若 $n>0$，开口向上，$n<0$，开口向下，n 有两解，则抛物线的标准方程有两个.

5. 抛物线上的点到焦点的距离根据定义转化为到准线的距离，即 $|PF|=|x|+\dfrac{p}{2}$ 或 $|PF|=|y|+\dfrac{p}{2}$，它们在解题中有重要的作用，注意运用.

例如，抛物线的顶点在原点，对称轴是 x 轴，抛物线上一点 $(-5,2\sqrt{5})$ 到焦点的距离是 6，求抛物线方程.

解 由已知设抛物线方程为 $y^2=-2px(p>0)$，焦点为 $F\left(-\dfrac{p}{2},0\right)$，准线方程为 $x=\dfrac{p}{2}$，

则 $|-5|+\dfrac{p}{2}=6$，$\therefore p=2$. $\therefore$ 抛物线方程为 $y^2=-4x$.

6. 直线和抛物线的位置关系可通过讨论直线方程与抛物线方程联立的方程组实数解的个数来确定，通常消去方程组中变量 y（或 x）得到关于 x（或 y）的一元二次方程，考虑该一元二次方程的判别式，则有：

$\Delta>0\Leftrightarrow$ 直线与抛物线相交于两点；

$\Delta<0\Leftrightarrow$ 直线与抛物线相离；

$\Delta=0\Leftrightarrow$ 直线与抛物线相切.

特别要提醒学生注意的是，直线与抛物线只有一个交点和直线与抛物线相切并不等价.

教学建议

本节由于抛物线的标准方程的多种形式，所以相应的几何性质之间的差别就比较大. 教学时应注意类比的手段，让学生自己进行归纳总结.

本节教学中应重视学生建模能力的初步培养以及将数形结合的数学思想进一步运用到解题中去. 例如，若点 A 的坐标为（3，2），F 为抛物线 $y^2=2x$ 的焦点，点 P 在该抛物线上移动，为使得 $|PA|+|PF|$ 取最小值，点 P 的坐标是多少？

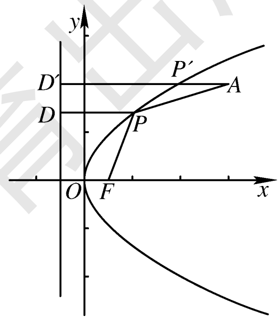


图 2-10

解 根据抛物线的定义，点 P 到焦点 F 的距离等于点 P 到准线的距离 $|PD|$，

$\therefore |PA|+|PF|=|PA|+|PD|$.

如图 2-10，欲使 $|PA|+|PD|$ 最小，应使 A，P，D 三点

在一条直线上.

∴点 P 的纵坐标为 $y=2$，代入 $y^2=2x$，得 $x=2$.　∴点 $P(2,2)$.

例题解析

例 1～例 5　教材 P. 62～P. 64 的例 1～例 5

说明　教材中的例 1 是用待定系数法求抛物线方程，要提醒学生注意先根据条件判断是哪一种标准方程.

在例 2 的教学中应注意复习曲线与方程的一些基本思想，如何验证点在直线上的方法，深刻剖析解析几何的基本原理，用代数的方法去解决几何问题.

例 3 是抛物线方程及抛物线几何性质的实际应用，应引导学生将实际问题中的条件转化为数学模型解决问题. 同时应强调注意实际问题中对变量的限制条件.

例 4，例 5 的教学是本节的难点. 不但要回顾椭圆、双曲线与直线位置关系的学习过程，同时还要说明抛物线与直线只有一个交点时，除了直线与抛物线相切的情况之外，还有直线与抛物线的对称轴平行的情况.

相关链接

抛物线的光学性质

下面是中学数学中的一个典型习题：

如图 2-11，已知抛物线 $y^2=2px\ (p>0)$ 内有一点 $A(a,y_0)$，F 为抛物线的焦点，试在抛物线上找一点 M，使得 $|MA|+|MF|$ 最小.

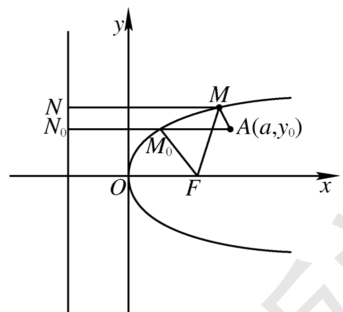


图 2-11

解决这个问题并不难，过点 M 作抛物线的准线的垂线，垂足为 N，过点 A 作抛物线的准线的垂线，垂足为 N_0，并交抛物线于点 M_0，则 $|MA|+|MF|=|MA|+|MN|\geqslant|M_0A|+|M_0N_0|=|AN_0|$（定值），所以，点 $M_0\left(\dfrac{y_0^2}{2p},y_0\right)$即所求的点.

由于在直线部分也讨论过距离和最小的问题，并且与光线反射紧密联系在一起，同时学生有一定的光学基础，于是可以向学生提出这样一个问题：

既然光线沿着最短的路线行走，那么，从 F 射出的光线要经过抛物线反射到 A，是否沿着 $F\to M_0\to A$ 的路线？此问题既让学生感到有趣，又体现了数学与物理学之间的联系.

由于是经一曲线反射，我们还是运用极限的思想，把抛物线上的每一小段看成是直线，这一点在学习光的漫反射时用到过，是能接受的. 如把 $M_0(x_0,y_0)$附近看成线段，这条线段所在的直线近似于过 M_0 的抛物线的切线，下面我们先来求这条切线 l 的斜率.

设所求切线 l 的方程为 $x-x_0=m(y-y_0)$，将其代入抛物线方程 $y^2=2px$ 中消去 x，

得 $y^2-2pmy+2pmy_0-2px_0=0$，即 $y^2-2pmy+2pmy_0-y_0^2=0$. 令 $\Delta=0$ 可得 $m=\frac{y_0}{p}$. 所以 $k_l=\frac{p}{y_0}$. 又 $k_{M_0F}=\frac{2py_0}{y_0^2-p^2}$，$k_{M_0A}=0$，易验证：$l$ 到 M_0F 的角等于 l 到 M_0A 的角（当 $y_0=0$ 时显然成立），所以，光线由点 F 出发到点 M_0 经抛物线反射后恰好通过 A 点，即：从焦点发出的光线，经过抛物线上的一点反射后，反射光线平行于抛物线的轴（如图 2-12）.

这个结论的应用意义是非常大的，例如，探照灯的反射面就是抛物线的旋转面，而光源就在它的焦点处，灯光经抛物面反射后就能射出一束很强的平行光线（如图 2-13）；太阳能灶上装有一个旋转抛物面形的反光镜，当它的轴与太阳光线平行时，太阳光线经过反射后集中于焦点处，则这一点的温度就会升高（如图 2-14）.

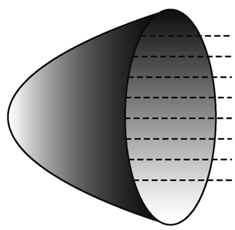


图 2-12

图 2-13

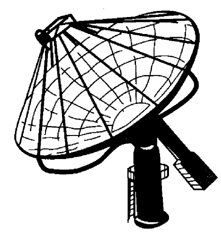


图 2-14

2.4 圆锥曲线的应用

教材线索

圆、椭圆、抛物线、双曲线统称为圆锥曲线，它们都可以由平面去截圆锥面而得到，这里教材配有相应的课件，有条件的学校最好演示给学生看；也可以教师自己做一些课件. 本节教材中介绍了三种圆锥曲线应用的例子：（1）斜抛物体的轨迹；（2）天体运动的轨道；（3）光学性质及其应用. 从实际问题中学习数学建模的思想方法，从实际问题中感受圆锥曲线的应用方法，用圆锥曲线的几何性质解决实际问题.

教学目标

（一）知识与技能

了解圆锥曲线在三个方面的应用：（1）斜抛物体的轨迹；（2）天体运动的轨道；（3）

光学性质及其应用．了解数学建模的基本方法．

（二）过程与方法

借助坐标法及圆锥曲线的定义、几何性质研究实际问题．

（三）感情、态度与价值观

了解圆锥曲线在自然界的存在，了解圆锥曲线在生活、科学技术中的应用，养成学生用数学去探究，解决实际问题的习惯．

教材分析

1．重点

熟悉斜抛物体的轨迹、天体运动轨道以及光学性质应用中所用到的圆锥曲线类型，使学生进一步认识本章所学的知识在解决实际问题中的作用，培养学生的数学应用意识．同时，另一方面，通过课件演示、教师引导，开阔学生视野，激发学生学习数学的兴趣，让学生了解数学建模的思想方法在解决实际问题中的作用，掌握建模的过程，进一步巩固所学的“坐标法”及圆锥曲线的几何性质．

2．难点

光学性质及其应用是本节难点，对于学习有余力的学生，可指导他们阅读“数学实验：圆锥曲线的光学性质”，从圆锥曲线的切线和法线性质去了解光学性质及其应用．

教学建议

本节教学特别适合应用信息技术，除了可以演示平面截圆锥面得到圆锥曲线之外，还可以做一些有关斜抛物体的轨迹，天体运动的轨道，以及圆锥曲线光学性质等相关的课件进行演示，让学生在实际问题中体验和了解圆锥曲线，建议教师在本节的教学中运用相关课件．

例题解析

例 1　将物体向斜上方抛出，抛出时的速度大小为 v_0，方向与水平方向的夹角为 α．假如只考虑重力，不计空气阻力，求证斜抛物体的运动轨迹是抛物线的一部分，并求这条抛物线的焦点与准线之间的距离．

说明　本例是求斜抛物体运动轨迹的问题．斜抛运动可以分解成水平方向的运动和竖直方向的运动来解决，这些知识学生在物理中已经学过，接受起来比较简单．本例的难点在于求轨迹方程，动点坐标 (x, y) 满足方程 $\begin{cases} x=v_0 t\cos\alpha, \\ y=-\dfrac{1}{2}gt^2, \end{cases}$ 这实际上是一个关于 t 的参数方程，在本章中由于没有介绍圆锥曲线的参数方程，所以在本例的教学中教师可以介绍一下参数方程中的消参法，让学生有些初步的了解．

例 2　某颗彗星的轨道是一个椭圆，太阳位于椭圆的一个焦点处（如教材 P.69 图 2-23 所示）．彗星离太阳的最近距离是 1.486 天文单位，最远距离是 5.563 天文单位（1 天文单

位是太阳与地球之间的平均距离，约为 1.50×10^8 km，是度量太空中的距离的一种单位).求轨道椭圆的长半轴和短半轴之长各是多少个天文单位.

说明 本例是椭圆的定义及几何性质的应用. 在教学中，教师应强调数形结合的数学思想，说明当距离之差 $|PF_1|-|PF_2|\leqslant|F_1F_2|=2c$，只有当 F_1，F_2，P 成一条直线且 F_2 在 F_1 和 P 之间时，$|PF_1|-|PF_2|$ 达到最大值 $2c$. 教学时，可以用三角形两边之差小于第三边，当三点共线时，其差最大来证明，也可用向量的模来证明.

$$\overrightarrow{F_2F_1}=\overrightarrow{PF_1}-\overrightarrow{PF_2},$$

$$|\overrightarrow{F_2F_1}|=2c=|\overrightarrow{PF_1}-\overrightarrow{PF_2}|\geqslant|\overrightarrow{PF_1}|-|\overrightarrow{PF_2}|,$$

当且仅当 $\overrightarrow{PF_1}$ 与 $\overrightarrow{PF_2}$ 反向时，$|\overrightarrow{PF_1}-\overrightarrow{PF_2}|=\|\overrightarrow{PF_1}|-|\overrightarrow{PF_2}\|$，

当 $|\overrightarrow{PF_1}|>|\overrightarrow{PF_2}|$，即 F_2 在 F_1 与 P 之间，

$$|\overrightarrow{PF_1}-\overrightarrow{PF_2}|=|\overrightarrow{PF_1}|-|\overrightarrow{PF_2}|=2c.$$

例 3 探照灯反射镜由抛物线的一部分绕轴旋转而成，光源位于抛物线的焦点处，这样可以保证发出的光线经过反射之后平行射出，（如教材 P. 70 图 2-24）. 已知灯口圆的直径为 60 cm，灯的深度为 40 cm.

（1）将反射镜的旋转轴与镜面的交点称为反射镜的顶点. 光源应安置在旋转轴上与顶点相距多远的地方？

（2）为了使反射的光更亮，增大反射镜的面积，将灯口圆的直径增大到 66 cm，并且保持光源与顶点的距离不变. 求灯的深度.

说明 光学性质应用的原理要从圆锥曲线的切线和法线的性质来解释，教材中把圆锥曲线的光学性质放在数学实验中，而在本例之前直接给出了抛物线、椭圆、双曲线的光学性质，举例说明它们的应用，教师在教学中应对此点向学生说明，并指导学生课后阅读“数学实验：圆锥曲线的光学性质”. 至于本例的教学可直接应用抛物线的光学性质，建立直角坐标系求抛物线的标准方程.

相关链接

漫谈圆锥曲线

圆锥曲线包括椭圆、抛物线、双曲线和圆，通过直角坐标系，它们又与二次方程对应，所以，圆锥曲线又叫作二次曲线. 圆锥曲线一直是几何学研究的重要课题之一，在我们的实际生活中也存在着许许多多的圆锥曲线.

我们生活的地球每时每刻都在环绕太阳的椭圆轨道上运行，太阳系中其他行星也如此，太阳则位于椭圆的一个焦点上. 如果这些行星运行速度增大到某种程度，它们就会沿抛物线或双曲线运行. 人类发射人造地球卫星或人造行星就要遵照这个原理. 相对于一个物体，按万有引力定律受它吸引的另一物体的运动，不可能有任何其他的轨道了. 因而，圆锥曲

线在这种意义上讲，它构成了我们宇宙的基本形式.

由抛物线绕其轴旋转，可得到一个叫作旋转抛物面的曲面. 它也有一条轴，即抛物线的轴. 在这个轴上有一个具有奇妙性质的焦点，任何一条过焦点的直线由抛物面反射出来以后，都成为平行于轴的直线. 这就是我们为什么要把探照灯反光镜做成旋转抛物面的道理.

由双曲线绕其虚轴旋转，可以得到单叶双曲面，它又是一种直纹曲面，由两组母直线族组成，各组内母直线互不相交，而与另一组母直线却相交. 人们在设计高大的立塔时，就采取单叶双曲面的体形，既轻巧又坚固.

由此可见，对于圆锥曲线的价值，无论如何也不会估计过高.

数学实验

圆锥曲线的光学性质

实验 1： 圆锥曲线的光学性质.

实验目的： 将圆锥曲线绕轴旋转得到的曲面作为反射镜面，研究从焦点发出的光线经过反射之后发出的光束的性质.

实验内容与过程

1. 对于抛物线方程 $y^2=2px$，可过焦点 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ 作入射光线 FP，过点 P 作抛物线的切线 l，过点 P 作 $PN\perp l$，作 $\angle NPM=\angle FPN$，则 PM 为反射光线. 如图 2-15.

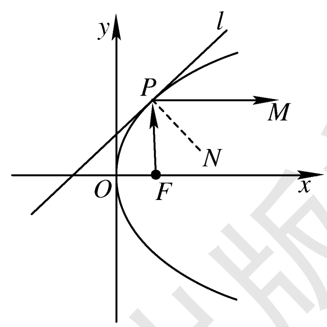


图 2-15

可验证：$k_{PM}=0$ 即 $PM\parallel x$ 轴，具体证明如下：

过点 $P(x_0,y_0)$ 的切线 l：$y_0y=p(x+x_0)$，则 $k_l=\frac{p}{y_0}$，

$\therefore k_{PN}=-\frac{y_0}{p}$，$k_{PF}=\frac{y_0}{x_0-\frac{p}{2}}$，$k_{PM}=0$.

$$\therefore \tan\angle FPN=\frac{k_{PN}-k_{PF}}{1+k_{PN}\cdot k_{PF}}=\frac{-\frac{y_0}{p}-\frac{y_0}{x_0-\frac{p}{2}}}{1+\left(\frac{-y_0}{p}\right)\frac{y_0}{x_0-\frac{p}{2}}}=\frac{-y_0\left(x_0+\frac{p}{2}\right)}{px_0-\frac{p^2}{2}-y_0^2}.$$

$\because P(x_0,y_0)$在抛物线上，$\therefore y_0^2=2px_0$.

$$\therefore \tan\angle FPN=\frac{-y_0\left(x_0+\dfrac{p}{2}\right)}{-\dfrac{p^2}{2}-px_0}=\frac{-y_0\left(x_0+\dfrac{p}{2}\right)}{-p\left(x_0+\dfrac{p}{2}\right)}=\frac{y_0}{p},$$

$$\tan\angle NPM=\frac{k_{PM}-k_{PN}}{1+k_{PM}\cdot k_{PN}}=\frac{\dfrac{y_0}{p}}{1}=\frac{y_0}{p}.$$

$\therefore \angle NPM=\angle FPN$.

2. 对于椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，可以证明过左焦点 F_1 的入射光线 F_1P，其反射光线过右焦点 F_2，如图 2-16.

具体证明如下：

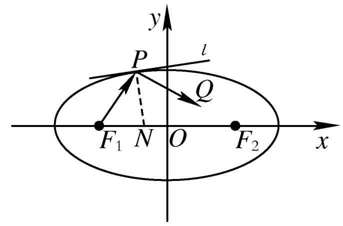


图 2-16

设点 $P(x_0,y_0)$，则$\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$，即 $bx_0^2+ay_0^2=a^2b^2$.

过点 P 的切线 l：$\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$. $\therefore k_l=-\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$.

$\therefore k_{PN}=\dfrac{a^2y_0}{b^2x_0}$，$k_{PF_1}=\dfrac{y_0}{x_0+c}$，$k_{PF_2}=\dfrac{y_0}{x_0-c}$.

$$\therefore \tan\angle F_1PN=\frac{k_{PN}-k_{PF_1}}{1+k_{PN}\cdot k_{PF_1}}=\frac{\dfrac{a^2y_0}{b^2x_0}-\dfrac{y_0}{x_0+c}}{1+\dfrac{a^2y_0}{b^2x_0}\cdot\dfrac{y_0}{x_0+c}}$$

$$=\frac{a^2x_0y_0+a^2cy_0-b^2x_0y_0}{x_0^2b^2+cx_0b^2+y_0^2a^2}=\frac{c^2x_0y_0+a^2cy_0}{a^2b^2+cx_0b^2}$$

$$=\frac{cy_0(cx_0+a^2)}{b^2(cx_0+a^2)}=\frac{cy_0}{b^2},$$

$$\tan\angle NPF_2=\frac{k_{PF_2}-k_{PN}}{1+k_{PF_2}\cdot k_{PN}}=\frac{\dfrac{y_0}{x_0-c}-\dfrac{a^2y_0}{b^2x_0}}{1+\dfrac{y_0}{x_0-c}\cdot\dfrac{a^2y_0}{b^2x_0}}$$

$$=\frac{b^2x_0y_0-a^2x_0y_0+a^2cy_0}{x_0^2b^2-cx_0b^2+y_0^2a^2}=\frac{-c^2x_0y_0+a^2cy_0}{a^2b^2-cx_0b^2}$$

$$=\frac{cy_0(a^2-cx_0)}{b^2(a^2-cx_0)}=\frac{cy_0}{b^2}.$$

$\therefore \angle F_1PN=\angle NPF_2$.

3. 对于双曲线方程$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，可以证明从右焦点 F_2 射出的入射光线 F_2P，其反射光线 PQ 的反向延长线过左焦点 F_1，如图 2-17.

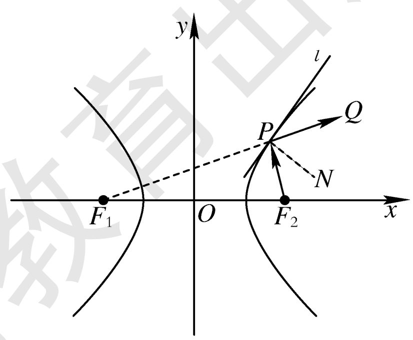


图 2-17

具体证明方法可仿照 2 中椭圆的证明方法进行.

实验 2： 探照灯的反射镜面.

实验目的： 寻找一种平面曲线，将它绕某一条轴旋转所成的曲面作为探照灯的反射镜面，可以将轴上适当的位置 F 安置的光源发出的光线经反射后平行射出.

实验说明： 此实验的方法可参照教材 P.74 所述的步骤进行，即可得曲线为抛物线，然后再加以验证即可.

而如果将实验 2 中的要求改为如下：

1. 在 x 轴的正半轴上取两点 $F_1(h_1,0)$，$F_2(h_2,0)$，使 $0<h_1<h_2$，要求从 F_1 发出的光线经镜面反射之后会照到 F_2.

照此要求作出的曲线可验证为椭圆.

2. 在 x 轴的正半轴、负半轴上各取一个点 $F_1(h_1,0)$，$F_2(-h_2,0)$，使 $h_1>0>-h_2$，要求从 F_1 发出的光线经镜面反射之后看起来是从 F_2 射出的.

照此要求作出的曲线可验证为双曲线.

2.5　曲线与方程

教材线索

本节先介绍了曲线与方程的定义. 一般地，在直角坐标系中，如果曲线上的点与一个二元方程 $f(x,y)=0$ 的实数解建立了如下关系：

（1）曲线上的点的坐标都是这个方程的解；

（2）以这个方程的解为坐标的点都是曲线上的点.

那么这个方程叫作曲线的方程，这条曲线叫作方程的曲线.

然后，教材设置了例题 1，帮助学生进一步理解曲线与方程的定义.

接下来，教材总结了求曲线的方程的步骤. 在这五个步骤中，第二步要求写出适合条件的集合 $P=\{M|P(M)\}$，也就是明确“曲线”是什么，以便明确以化简后的方程的解为坐标的点都在曲线上的意义. 第四步的化简强调同解变形，如果不能做到同解变形，那么要就特殊情况作出适当说明，以保证方程所表示的点集与集合 $P=\{M|P(M)\}$ 一致. 另外，通过对方程的检验，也可以确定其中变量的范围.

教学目标

（一）知识与技能

了解曲线与方程的定义，初步学会验证曲线方程的完备性和纯粹性. 掌握求曲线的方程的一般步骤.

（二）过程与方法

了解曲线与方程的对应关系，体验求曲线的方程的过程.

（三）感情、态度与价值观

树立对立统一的观点，体会数形结合的思想，初步形成类比、归纳的数学思想.

教材分析

1. 重点

曲线的方程、方程的曲线的概念.

2. 难点

理解曲线的方程、方程的曲线的概念；求曲线的方程.

3.“曲线上的点的坐标都是这个方程的解”阐明曲线上没有坐标不满足方程的点，也就是说曲线上所有的点都符合条件而毫无例外，这一点阐述其纯粹性；“以这个方程的解为坐标的点都在曲线上”阐明符合条件的所有点都在曲线上而毫无遗漏，这一点阐述其完备性. 根据曲线的方程的概念，要验证其纯粹性与完备性，二者缺一不可. 在教学中可以补充以下例题对曲线的方程的概念予以说明.

例如，已知方程（1）$x-y=0$，（2）$\sqrt{x}-\sqrt{y}=0$，（3）$x^2-y^2=0$，（4）$\dfrac{x}{y}=1$，其中能表示直角坐标系的第一、三象限平分线 C 的方程为________________.

答案：（1）正确.（2）不正确，因为不满足纯粹性.（3）不正确，因为不满足完备性.（4）不正确，因为不满足纯粹性.

4. 坐标法是研究几何问题的重要方法. 教学过程中，要始终贯穿坐标法这一重要思想，不怕重复，通过坐标系，把点和坐标、曲线和方程联系起来，实现了形和数的统一.

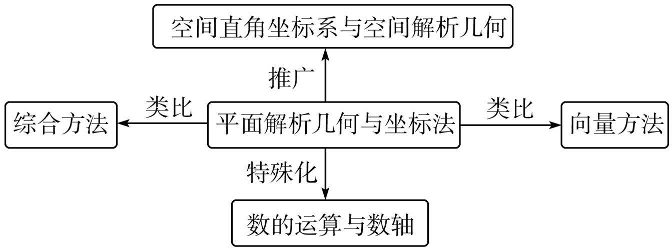
用坐标法解决几何问题时，先用坐标和方程表示相应的几何对象，然后对坐标和方程进行代数讨论；最后再把代数运算结果“翻译”成相应的几何结论. 这就是用坐标法解决平面几何问题的“三步曲”：

第一步：建立适当的平面直角坐标系，用坐标和方程表示问题中涉及的几何元素，将平面几何问题转化为代数问题；

第二步：通过代数运算，解决代数问题；

第三步：把代数运算结果“翻译”成几何结论.

5. 坐标法还可以与平面几何中的综合法、向量方法建立联系，也可以推广到空间，解决立体几何问题. 这种联系可以用下列框图表示.



教学建议

本节在教学时，教师首先应将重点放在曲线与方程的概念上，要特别注意帮助学生理解这个概念. 然后向学生介绍求曲线的方程的步骤，通过例题引导学生掌握这个过程.

例题解析

例 1 已知两定点 A（-4，0），B（4，0），动点 P 使直线 PA，PB 的斜率的乘积为 $-\frac{2}{3}$，证明点 P 的轨迹方程是 $\frac{x^2}{16}+\frac{3y^2}{32}=1$（$y\neq 0$）.

说明 例 1 的目的是帮助学生进一步理解曲线与方程的定义，体验曲线方程的完备性和纯粹性.

例 2 在边长为 $2a$ 的正$\triangle ABC$ 内有一动点 P，已知 $|PA|^2=|PB|^2+|PC|^2$，求点 P 的轨迹方程.

说明 例 2 的目的是要求学生逐步掌握求曲线的方程的一般步骤. 注意未知量的取值范围的确定.

教材习题参考解答

2.1.1 练习（教材 P.34）

1.（1）$c^2=9-4=5$，$c=\sqrt{5}$，焦点坐标$(-\sqrt{5},0)$，$(\sqrt{5},0)$.

（2）$c^2=16-9=7$，$c=\sqrt{7}$，焦点坐标$(0,-\sqrt{7})$，$(0,\sqrt{7})$.

（3）$x^2+\dfrac{y^2}{9}=1$，$c^2=9-1=8$，$c=2\sqrt{2}$，焦点坐标$(0,-2\sqrt{2})$，$(0,2\sqrt{2})$.

2.（1）$c=2$，$a=3$，$b^2=9-4=5$，方程为$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$.

（2）设方程$\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$，将点$(8,3)$代入方程可得：$\dfrac{64}{b^2}+\dfrac{9}{a^2}=1$，将 $b^2=a^2-9$ 代入得 $9a^2-81+64a^2=a^4-9a^2$，$a^4-82a^2+81=0$，$\therefore a^2=81$，$a^2=1$（舍去）. $\therefore b^2=72$.

$\therefore$方程为$\dfrac{x^2}{72}+\dfrac{y^2}{81}=1$.

2.1.2 练习（教材 P.40）

1.（1）$\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{9}=1$，$\therefore a=3$，$b=\sqrt{6}$，$c=\sqrt{3}$.

$\therefore$中心$(0,\ 0)$；焦点坐标 $(0,\ -\sqrt{3})$，$(0,\ \sqrt{3})$；

顶点坐标$(0,\ -3)$，$(0,\ 3)$，$(-\sqrt{6},\ 0)$，$(\sqrt{6},\ 0)$；

长半轴长为 3；短半轴长为$\sqrt{6}$；离心率 $e=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

（2）$\because \dfrac{x^2}{169}+\dfrac{y^2}{144}=1$，$\therefore a=13$，$b=12$，$c=5$.

$\therefore$中心$(0,\ 0)$；焦点坐标 $(-5,\ 0)$，$(5,\ 0)$；

顶点坐标$(-13,\ 0)$，$(13,\ 0)$，$(0,\ -12)$，$(0,\ 12)$；

长半轴长为 13；短半轴长为 12；离心率 $e=\dfrac{5}{13}$.

（3）$\because 4x^2+9y^2=1$，$\therefore \dfrac{x^2}{\frac{1}{4}}+\dfrac{y^2}{\frac{1}{9}}=1$，$\therefore a=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{1}{3}$，$c=\dfrac{\sqrt{5}}{6}$.

$\therefore$中心$(0,\ 0)$；焦点坐标$\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{6},\ 0\right)$，$\left(\dfrac{\sqrt{5}}{6},\ 0\right)$；顶点坐标$\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$，$\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$，$\left(0,\ -\dfrac{1}{3}\right)$，$\left(0,\ \dfrac{1}{3}\right)$；长半轴长为$\dfrac{1}{2}$；短半轴长为$\dfrac{1}{3}$；离心率 $e=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

2. 联立$\begin{cases} y=mx+1, \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1 \end{cases}\Rightarrow 3x^2+4(mx+1)^2=12\Rightarrow(3+4m^2)x^2+8mx-8=0.$

$\therefore \Delta=64m^2+32(3+4m^2)=192m^2+96>0$.

$\therefore$ 直线与椭圆交点个数为 2 个.

习题 1（教材 P. 40）

1. (1) $\frac{x^2}{\frac{1}{2}}+y^2=1$ 是椭圆，焦点坐标$\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

(2) $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{12}=1$ 是椭圆，焦点坐标$(0,-2)$，$(0,2)$.

(3) $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$ 是椭圆，焦点坐标$(-1,0)$，$(1,0)$.

(4) $x^2+y^2=2$ 不是椭圆，表示圆.

2. (1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. $c^2=1$，$c=1$，焦点坐标$(-1,0)$，$(1,0)$，离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$.图略.

(2) $\frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{16}=1$. $c^2=7$，$c=\sqrt{7}$，焦点坐标$(-\sqrt{7},0)$，$(\sqrt{7},0)$，离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{4}$.图略.

(3) $\frac{x^2}{\frac{1}{4}}+y^2=1$. $c^2=\frac{3}{4}$，$c=\frac{\sqrt{3}}{2}$，焦点坐标$\left(0,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.图略.

3. (1) 方程$\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 或 $x^2+\frac{y^2}{2}=1$.　　(2) 方程$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$ 或$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{9}=1$.

(3) 方程$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.　　(4) 方程$\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{73}=1$.

(5) 设方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，将点 $A\left(1,\ \frac{3}{2}\right)$，$B$ (2，0) 代入方程可得：

$$\begin{cases}\frac{1}{a^2}+\frac{\frac{9}{4}}{b^2}=1,\\ \frac{4}{a^2}=1\end{cases}\Rightarrow a^2=4,\ b^2=3.\ \therefore 方程为\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1.$$

(6) $2a=20$，$a=10$. 又$\because e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}$，$\therefore c=6$，$b=8$.

方程$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$ 或$\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{100}=1$.

4. 由$\begin{cases}y=2x+m,\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$消去 y 并整理得

$17x^2+16mx+4m^2-4=0$.　①

若要直线与椭圆没有交点，则必须方程①无实数解.

因此 $(16m)^2-4\times17(4m^2-4)<0$，

即 $m^2>17$，

解得 $m>\sqrt{17}$，$m<-\sqrt{17}$.

5. $\because \frac{a^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$，$\therefore a=4$，$b=3$，$c=\sqrt{7}$.

$\therefore F_1(-\sqrt{7}，0)$，$F_2(\sqrt{7}，0)$.

如图 2-18，由椭圆定义：$AF_1+AF_2=2a$，$BF_1+BF_2=2a$，

$\therefore AF_1+BF_1+AF_2+BF_2=4a$.

即$\triangle ABF_2$ 的周长为 $4a=4\times4=16$.

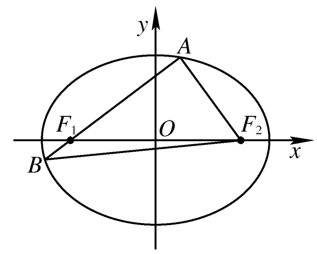


图 2-18

6. $\because |AC|+|BC|+|AB|=18$，而$|AB|=8$，

$\therefore |AC|+|BC|=10$.

即动点 C 到两定点 A，B 的距离之和为定长，所以点 C 的轨迹是椭圆.

又 $c=4$，$a=5$，$b=3$，$\therefore$方程为$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$（$y\neq0$）.

7. 设直线 l 交椭圆于两点 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则$\begin{cases}\frac{x_1^2}{36}+\frac{y_1^2}{9}=1, & ①\\ \frac{x_2^2}{36}+\frac{y_2^2}{9}=1, & ②\end{cases}$

①−②得：$\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{36}+\frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{9}=0$.

$\because \frac{(x_1+x_2)}{2}=4,\frac{(y_1+y_2)}{2}=2$,

$\therefore \frac{(x_1-x_2)\times2}{9}+\frac{(y_1-y_2)\times4}{9}=0\Rightarrow\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{1}{2}=k_l$.

$\therefore$直线 l 的方程：$y-2=-\frac{1}{2}(x-4)\Rightarrow x+2y-8=0$.

8. $\because \frac{c}{a}=0.0192$，$a=1.50\times10^8$，

$\therefore c=1.50\times10^8\times0.0192=2.88\times10^6$.

$\therefore$地球到太阳的最大距离为 $a+c=1.50\times10^8+2.88\times10^6=1.529\times10^8$（km），

地球到太阳的最小距离为 $a-c=1.50\times10^8-2.88\times10^6=1.471\times10^8$（km）.

2.2.1　练习（教材 P.46）

1. (1) $\because c=5$，$a=4$，$\therefore b=3$. 方程为$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$.

(2) $\because c=6$，$\therefore a^2+b^2=36$.

设方程$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$，将点(2，−5)代入方程可得：$\frac{25}{a^2}-\frac{4}{b^2}=1$.

又$\because b^2=36-a^2$，$\therefore a^4-65a^2+900=0$.

$\therefore a^2=20$ 或 $a^2=45$（舍去）. $\therefore b^2=16$.

方程为$\frac{y^2}{20}-\frac{x^2}{16}=1$.

2. 依题意可得：$\begin{cases}2+m>0,\\ m+1>0\end{cases}\Rightarrow m>-1$,或$\begin{cases}2+m<0,\\ m+1<0\end{cases}\Rightarrow m<-2$.

$\therefore m>-1$ 或 $m<-2$.

2.2.2　练习（教材 P.55）

1.（1）$\because \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$，$\therefore a=3$，$b=4$，$c=5$.

$\therefore$实轴长 $2a=6$，虚半轴长 $b=4$，焦点坐标$(-5,0)$,$(5,0)$，

渐近线方程：$y=\pm\frac{4}{3}x$，离心率 $e=\frac{5}{3}$.

（2）$\because \frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$，$\therefore a=3$，$b=4$，$c=5$.

$\therefore$实轴长 $2a=6$，虚半轴长 $b=4$，焦点坐标$(0,-5)$,$(0,5)$，

渐近线方程：$y=\pm\frac{3}{4}x$，离心率 $e=\frac{5}{3}$.

（3）$\because x^2-y^2=1$，$\therefore a=1$，$b=1$，$c=\sqrt{2}$.

$\therefore$实轴长 $2a=2$，虚半轴长 $b=1$，焦点坐标$(-\sqrt{2},0)$,$(\sqrt{2},0)$，

渐近线方程：$y=\pm x$，离心率 $e=\sqrt{2}$.

（4）$\because 4x^2-9y^2=1$，$\frac{x^2}{\frac{1}{4}}-\frac{y^2}{\frac{1}{9}}=1$，$\therefore a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{3}$，$c=\frac{\sqrt{13}}{6}$.

$\therefore$实轴长 $2a=1$，虚半轴长 $b=\frac{1}{3}$，焦点坐标$\left(-\frac{\sqrt{13}}{6},0\right)$，$\left(\frac{\sqrt{13}}{6},0\right)$，

渐近线方程：$y=\pm\frac{2}{3}x$，离心率 $e=\frac{\sqrt{13}}{3}$.

2.（1）方程：$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 或$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$. 图略.

（2）方程：$\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{16}=1$. 图略.

3. 易知，直线 $y=kx+1$ 为过点$(0,1)$的直线.

当 $k=\pm1$ 时，直线 $y=kx+1$ 与渐近线 $y=\pm x$ 平行，此时，直线与双曲线有一个交点；

当 $k>\sqrt{2}$ 或 $k<-\sqrt{2}$ 时，直线与双曲线无交点；

当$-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$，且 $k\neq\pm1$ 时，直线与双曲线有两个交点.

习题 2（教材 P.56）

1.（1）设方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，$c=6$，将点 $A(-5,2)$代入可得：$\frac{25}{a^2}-\frac{4}{b^2}=1$.

又∵$a^2+b^2=36$，∴$a^4-65a^2+900=0$.

∴$a^2=20$ 或 $a^2=45$（舍去）. ∴方程为$\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{16}=1$.

（2）方程为$\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1$ 或$\frac{y^2}{144}-\frac{x^2}{25}=1$.

（3）设方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 或$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$.

分别将点 $A(-7,-6\sqrt{2})$，$B(\sqrt{7},-3)$代入方程可得：

$\begin{cases}\frac{49}{a^2}-\frac{72}{b^2}=1,\\ \frac{7}{a^2}-\frac{9}{b^2}=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\frac{72}{a^2}-\frac{49}{b^2}=1,\\ \frac{9}{a^2}-\frac{7}{b^2}=1.\end{cases}$

解得$\begin{cases}\frac{1}{a^2}=1,\\ \frac{1}{b^2}=\frac{2}{3}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\frac{1}{a^2}=-\frac{2}{3},\\ \frac{1}{b^2}=-1.\end{cases}$（舍去）

∴方程为 $x^2-\frac{3}{2}y^2=1$.

2. B.

3.（1）法 1：因为渐近线方程为 $y=\pm\frac{1}{3}x$，故设方程为 $y^2-\frac{1}{9}x^2=\lambda$（$\lambda>0$）.

∴$\frac{y^2}{\lambda}-\frac{x^2}{9\lambda}=1$，$c^2=16=\lambda+9\lambda$，$\lambda=\frac{8}{5}$.

∴方程为$\frac{y^2}{\frac{8}{5}}-\frac{x^2}{\frac{72}{5}}=1$.

法 2：由$\pm\frac{a}{b}=\pm\frac{1}{3}$，$b=3a$，且 $c=4$，得 $a^2+b^2=16$.

即 $10a^2=16$，$a^2=\frac{8}{5}$，$b^2=\frac{72}{5}$.

∴方程为$\frac{y^2}{\frac{8}{5}}-\frac{x^2}{\frac{72}{5}}=1$.

（2）渐近线倾斜角为$\frac{\pi}{6}$，$k=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，即 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$.

设方程为 $y^2-\frac{1}{3}x^2=\lambda$，将点$(3,-2)$代入方程可得 $\lambda=1$. ∴方程为 $y^2-\frac{1}{3}x^2=1$.

（3）设方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，过点 $P(4\sqrt{2},-3)$，

则$\frac{32}{a^2}-\frac{9}{b^2}=1$.

设两焦点 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，则 $QF_1 \perp QF_2$.

$\therefore \frac{5}{c} \cdot \frac{5}{-c}=-1$，$c^2=25=a^2+b^2$.

$\therefore a^4-66a^2+800=0$.

$\therefore a^2=50$（舍去），$a^2=16$. $\therefore b^2=9$.

$\therefore$方程为$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

（4）设方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，$\because$双曲线过点 $P(-5，3)$，$\therefore \frac{25}{a^2}-\frac{9}{b^2}=1$，$25b^2-9a^2=a^2b^2$.

$\because e=\frac{c}{a}=\sqrt{2}$，$\therefore c=\sqrt{2}a$，$c^2=2a^2$. 又$\because c^2=a^2+b^2$，$\therefore a^2=b^2$.

$\therefore 16a^2=a^4$，$a^2=16=b^2$.

$\therefore$方程为$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{16}=1$.

若设方程为$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$，$\because a^2=b^2$，显然不过点 $P(-5，3)$.

（5）根据题意得椭圆的长半轴长为 $2\sqrt{5}$，以长半轴端点$(-2\sqrt{5},0)$，$(2\sqrt{5},0)$为焦点，则双曲线的 $c=2\sqrt{5}$，

又因为双曲线过点$(-2,0)$，$(2,0)$，$\therefore a=2$，$b^2=20-4=16$.

$\therefore$方程为$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$.

4. 设过点 $P(0，1)$ 的直线为 $y-1=kx$，$y=kx+1$.

联立$\begin{cases} y=kx+1, \\ x^2-\frac{y^2}{3}=1, \end{cases}$ $x^2-\frac{1}{3}(kx+1)^2=1$，$\left(1-\frac{1}{3}k^2\right)x^2-\frac{2}{3}kx-\frac{4}{3}=0$.

当 $\Delta=\frac{4}{9}k^2+\frac{16}{3}\left(1-\frac{1}{3}k^2\right)=-\frac{12}{9}k^2+\frac{16}{3}=-\frac{4}{3}k^2+\frac{16}{3}=0$，

即当 $k=\pm 2$ 时，直线与双曲线有一个公共点；

当 $k=\pm\sqrt{3}$时，直线 $y=kx+1$ 与渐近线平行，则直线与双曲线有一个公共点.

$\therefore$当 $k=\pm 2$，$k=\pm\sqrt{3}$时，直线与双曲线有且仅有一个公共点.

5. 选 C.

由 $|AF_2|-|AF_1|=2a$，$|BF_2|-|BF_1|=2a$，

有 $|AF_2|+|BF_2|-|AB|=4a$，

$\therefore |AF_2|+|BF_2|=4a+m$.

$\therefore \triangle ABF_2$ 的周长为 $4a+m+m=4a+2m$.

6. 选 D.

$\because$点 P 在椭圆上，F_1，F_2 是两个焦点，

$\therefore |PF_1|+|PF_2|=2\sqrt{m}$.

又点 P 在双曲线上，F_1，F_2 是两个焦点，

$\therefore |PF_1|-|PF_2|=2\sqrt{a}$ 或 $|PF_2|-|PF_1|=2\sqrt{a}$.

$\therefore \begin{cases}|PF_1|=\sqrt{m}+\sqrt{a},\\ |PF_2|=\sqrt{m}-\sqrt{a},\end{cases}$ 或 $\begin{cases}|PF_2|=\sqrt{m}+\sqrt{a},\\ |PF_1|=\sqrt{m}-\sqrt{a}.\end{cases}$ $\therefore |PF_1|\cdot|PF_2|=m-a$.

7. 由 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 可得，$c^2=25, c=5, \therefore F_1(-5,0), F_2(5,0)$.

设点 $P(x_1,y_1)$ 在双曲线上，$PF_1\perp PF_2$，$\frac{y_1}{x_1+5}\cdot\frac{y_1}{x_1-5}=-1$.

$\therefore x_1^2=25-y_1^2$. ①　　又 $16x_1^2-9y_1^2=144$，　　②

把①代入②可得 $16(25-y_1^2)-9y_1^2=144$，

$400-16y_1^2-9y_1^2=144, 25y_1^2=256, |y_1|=\frac{16}{5}$.

即点 P 到 x 轴的距离为 $\frac{16}{5}$.

8. 设 $B(x_1,y_1), C(x_2,y_2)$. ∵点 B，C 在双曲线上，

$\therefore \begin{cases}x_1^2-4y_1^2=16,\\ x_2^2-4y_2^2=16.\end{cases}$

两式相减得 $(x_1-x_2)(x_1+x_2)-4(y_1-y_2)(y_1+y_2)=0$，

即 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{x_1+x_2}{4(y_1+y_2)}$.

∵点 $A(6,1)$ 是 BC 中点，　$\therefore x_1+x_2=12, y_1+y_2=2$.

$\therefore k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{12}{2\times 4}=\frac{3}{2}$.

∴直线的方程为 $y-1=\frac{3}{2}(x-6)$，即 $3x-2y-16=0$.

9. 北偏东 $30°$.

2.3.1　练习（教材 P.61）

1. (1) $y^2=16x$，$2p=16$，$p=8$，$\frac{p}{2}=4$. 焦点坐标 $(4, 0)$，准线方程 $x=-4$. 图略.

(2) $y=16x^2$，$x^2=\frac{1}{16}y$，$2p=\frac{1}{16}$，$p=\frac{1}{32}$，$\frac{p}{2}=\frac{1}{64}$. 焦点坐标 $\left(0,\frac{1}{64}\right)$，准线方程 $y=-\frac{1}{64}$，图略.

(3) $y^2=-\frac{1}{4}x$，$2p=\frac{1}{4}$，$p=\frac{1}{8}$，$\frac{p}{2}=\frac{1}{16}$. 焦点坐标 $\left(-\frac{1}{16}, 0\right)$，准线方程 $x=\frac{1}{16}$，图略.

(4) $y=-\frac{1}{4}x^2$，$x^2=-4y$，$2p=4$，$p=2$，$\frac{p}{2}=1$. 焦点坐标 $(0, -1)$，准线方程 $y=1$，图略.

2.（1）由焦点 $F(-2,0)$ 可得 $\frac{p}{2}=2$，$p=4$，$2p=8$，方程 $y^2=-8x$.

（2）由准线方程 $y=-2$ 可得 $\frac{p}{2}=2$，$2p=8$，方程 $x^2=8y$.

2.3.2 练习（教材 P.66）

1.（1）顶点坐标（0，0），对称轴 x 轴，焦点坐标（2，0），准线方程 $x=-2$.

（2）顶点坐标（0，0），对称轴 y 轴，焦点坐标（0，8），准线方程 $y=-8$.

（3）顶点坐标（0，0），对称轴 y 轴，焦点坐标 $\left(0,-\frac{1}{96}\right)$，准线方程 $y=\frac{1}{96}$.

（4）顶点坐标（0，0），对称轴 x 轴，焦点坐标（-4，0），准线方程 $x=4$.

2. 两条. 把点 $M(2,4)$ 代入 $y^2=8x$，满足方程，所以点 $M(2,4)$ 在抛物线上.

所以过点 M 的直线 l 与抛物线 $y^2=8x$ 只有一个公共点的直线有两条，一条与抛物线相切，一条与对称轴平行.

3. 法 1：由 $y^2=4x$ 可得 $2p=4$，$p=2$，$\frac{p}{2}=1$，焦点为（1，0）.

过点(1,0)作直线 $y=k(x-1)$ 与抛物线 $y^2=4x$ 相交得 $k^2(x-1)^2=4x$，

整理得：$k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$.

$\therefore x_1+x_2=\frac{2k^2+4}{k^2}=6$，$4k^2=4$，$k=\pm1$，$x_1\cdot x_2=1$.

$\therefore |AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+1}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{36-4}=8$.

法 2：由 $y^2=4x$ 可得焦点为（1，0），准线方程为 $x=-1$. 进而由抛物线的定义可得 $|AB|=x_1+x_2+2\times1=8$.

习题 3（教材 P.66）

1.（1）$2p=1$，$\frac{p}{2}=\frac{1}{4}$. 焦点坐标 $\left(\frac{1}{4},0\right)$，准线方程 $x=-\frac{1}{4}$，图略.

（2）$2p=1$，$p=\frac{1}{2}$，$\frac{p}{2}=\frac{1}{4}$. 焦点坐标 $\left(0,-\frac{1}{4}\right)$，准线方程 $y=\frac{1}{4}$，图略.

（3）当 $a>0$ 时，$2p=a$，$p=\frac{a}{2}$，$\frac{p}{2}=\frac{a}{4}$. 焦点坐标 $\left(\frac{a}{4},0\right)$，准线方程 $x=-\frac{a}{4}$；

当 $a<0$ 时，$2p=-a$，$p=-\frac{a}{2}$，$\frac{p}{2}=-\frac{a}{4}$. 焦点坐标 $\left(\frac{a}{4},0\right)$，准线方程 $x=-\frac{a}{4}$；图略.

2. 选 D. $y^2=ax$ 的准线方程为 $x=-1$，则 $a>0$，$2p=a$，

$\frac{p}{2}=\frac{a}{4}=1$，$a=4$.

3. 选 A.

4. 设点 $B(x_1,y_1)$,$A(1,2)$，如图 2-19.

$|AF|+|FB|=1+\frac{p}{2}+x_1+\frac{p}{2}=x_1+1+p$.

∵点 A 在抛物线上，∴$4=2p$，$p=2$.

又∵点 A 在直线 $ax+y-4=0$ 上，∴$a+2-4=0$，$a=2$.

联立$\begin{cases}2x+y-4=0,\\y^2=4x\end{cases}$ 得$(4-2x)^2=4x$.

∴$16-16x+4x^2=4x$. ∴$x^2-5x+4=0$.

∴$x_1=1$ 或 $x_2=4$.

当 $x_1=1$ 时，即为点 A（1，2），当 $x_2=4$ 时，即为点 B（4，-4）.

∴$|AF|+|FB|=7$.

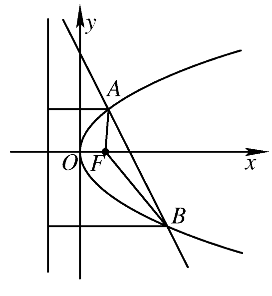


图 2-19

5. 如图 2-20，显然过点 P 的直线 $x=0$，$y=1$ 与抛物线只有一个公共点. 若过点 P 的直线为 $y-1=kx$，

联立$\begin{cases}y=kx+1,\\y^2=2x\end{cases}$得 $k^2x^2+2kx+1=2x$.

$k^2x^2+(2k-2)x+1=0$，

若只有一个公共点,则 $\Delta=(2k-2)^2-4k^2=0$.

即$-8k+4=0$,$k=\frac{1}{2}$.

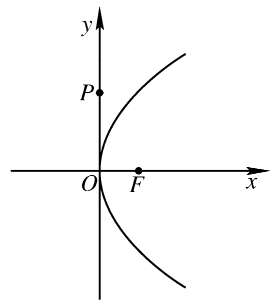


图 2-20

∴直线方程 $y=\frac{1}{2}x+1$，即 $x-2y+2=0$.

∴与抛物线 $y^2=2x$ 只有一个公共点的直线的方程为：$x=0$ 或 $y=1$ 或 $x-2y+2=0$.

6. $y^2=4x$，$\frac{p}{2}=1$，焦点 $F(1,0)$.设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

∴$|AB|=|AF|+|FB|=x_1+1+x_2+1=x_1+x_2+2=8$.

∴$x_1+x_2=6$.

则△OAB 重心的横坐标为 $x=\frac{x_1+x_2+0}{3}=2$.

设 AB 的方程为 $y=k(x-1)$，

则$\begin{cases}y_1=k(x_1-1),\\y_2=k(x_2-1),\end{cases}$ 可得 $y_1+y_2=k(x_1+x_2-2)=4k$.

又$\begin{cases}y_1^2=4x_1,\\y_2^2=4x_2,\end{cases}$ ∴$(y_1-y_2)(y_1+y_2)=4(x_1-x_2)$.

∴$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=k=\frac{4}{y_1+y_2}=\frac{4}{4k}$.

∴$k^2=1$，$k=\pm1$. ∴直线 AB 的倾斜角为 45°或 135°.

7. 如图 2-21，$y^2=4x$，$\frac{p}{2}=1$，即准线方程为 $x=-1$.

∵点 P 到直线 $x+2=0$ 的距离为 5，

则 P 到准线 $x=-1$ 的距离为 4，

∴点 P 到抛物线焦点 F 的距离为 4.

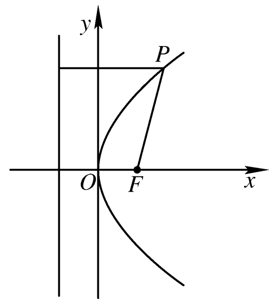


图 2-21

8. 由 $\begin{cases} y=kx+k-2, \\ y^2=4x, \end{cases}$

消去 y 并整理得 $k^2x^2+2(k^2-2k-2)x+(k-2)^2=0$.　　①

直线与抛物线有两个公共点，则必须方程①有两个不等实根，

因此有 $\begin{cases} k^2\neq 0, \\ 4(k^2-2k-2)^2-4k^2(k-2)^2>0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} k\neq 0, \\ k^2-2k-1<0, \end{cases}$

解得 $1-\sqrt{2}<k<1+\sqrt{2}$，且 $k\neq 0$.

因此当 $1-\sqrt{2}<k<1+\sqrt{2}$，且 $k\neq 0$ 时，直线与抛物线有两个公共点.

9. 如图 2-22，$y^2=4x$，准线 l：$x=-1$，$|MF|=|MN|$，

∴ $|MP|+|MF|=|MN|+|MP|$.

当 N，M，P 三点共线时，$|MP|+|MN|$ 值最小，且最小值为 4.

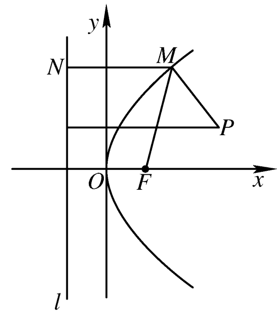


图 2-22

2.4　练习（教材 P.71）

1. 如图 2-23，以圆心为原点，最小半径所在直线为 x 轴建立直角坐标系，设点 $A(13,y_1)$，$B(25,y_2)$ 在双曲线上，且 $y_1-y_2=55$.

设方程为 $\frac{x^2}{12^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

则 $\frac{y_1^2}{b^2}=\frac{13^2}{12^2}-1=\frac{25}{144}$，$\frac{y_1}{b}=\frac{5}{12}$，$y_1=\frac{5}{12}b$.

$\frac{y_2^2}{b^2}=\frac{25^2}{12^2}-1=\frac{481}{144}$，$y_2=-\frac{\sqrt{481}}{12}b$.

∴ $\frac{5}{12}b+\frac{\sqrt{481}}{12}b=55$，$b\approx 25$.

∴方程为 $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{625}=1$.

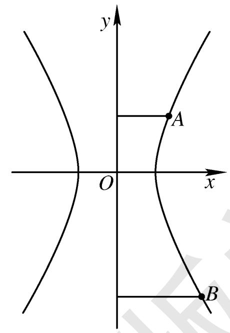


图 2-23

2. 如图 2-24 建立直角坐标系，则抛物线 $x^2=-2py$ 过点 $(3,-3)$，

∴ $9=-2p\times(-3)$，$2p=3$.

∴ $x^2=-3y$.

当车与箱共高 4.5 m 时，即 $y=-0.5$ 时，$x^2=1.5$，

$x=\sqrt{1.5}$.

而 $2x=2\sqrt{1.5}=\sqrt{6}<3$. 所以不可以通过.

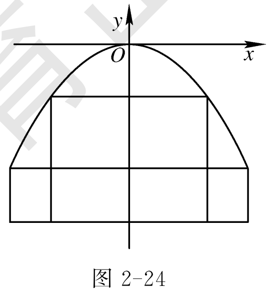


图 2-24

习题 4（教材 P. 71）

1. 过点 B 作 $BO'\perp OC$，以 O' 为原点，OC 所在直线为 x 轴，$O'B$ 所在的直线为 y 轴建立直角坐标系. 如图 2-25.

则 $C(5,\ 0)$，$B(0,\ 5)$.

设方程为 $y=kx^2+5$，代入点$(5,\ 0)$得 $0=25k+5$，

则 $k=\frac{1}{5}$，$\therefore$方程为 $y=-\frac{1}{5}x^2+5$.

将 $x=-4$ 代入得 $y=-\frac{16}{5}+5=\frac{9}{5}$，即 OA 高度为$\frac{9}{5}$ m.

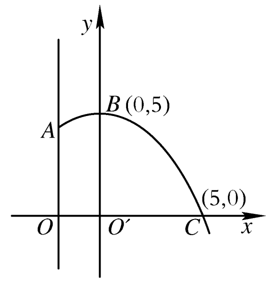


图 2-25

2. 如图 2-26，设方程为 $y^2=2px$，则曲线经过点

$\left(\frac{p}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}d,\ \frac{1}{2}d\right)$，代入得$\left(\frac{1}{2}d\right)^2=2p\left(\frac{p}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}d\right)$.

解得：$\frac{p}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}d$.

$\therefore$最短距离为$\frac{2-\sqrt{3}}{4}d$（万千米）.

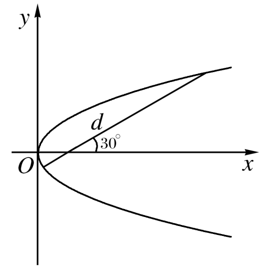


图 2-26

3. （1）设方程为 $y^2=2px$，由曲线过$(0.5,\ 2.4)$ 可得 $p=5.76$.

$\therefore$方程为 $y^2=11.52x$，焦点坐标为$(2.88,\ 0)$.

（2）若口径增大为 5.2 m，则曲线过$(0.5,\ 2.6)$，代入 $y^2=2px$ 得：$2.6^2=2\times p\times 0.5$.

$\therefore p=6.76$，焦点坐标为$(3.38,\ 0)$.

4. 如图 2-27，以拱顶为原点，建立直角坐标系，设抛物线 $x^2=-2py$，代入点$(10,\ -2)$，得：$100=4p$，$p=25$，

$\therefore$方程为 $x^2=-50y$.

$\because$船宽 16 m，船在 $x=\pm 8$ 之间通过，

当 $x=8$ 时，$y=-\frac{1}{50}\times 64=-1.28$.

$\therefore$点 B 离水面的高度为 $6-1.28=4.72$(m)，而船体高 5 m，所以无法通过.

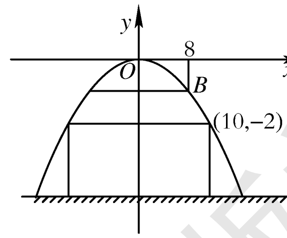


图 2-27

5. 把 $y=4$ 代入 $y^2=4x$ 得 $x=4$，　$\therefore$点 P 坐标为 $P(4,\ 4)$.

由 $2p=4$，$S_{\triangle OFP}=\frac{1}{2}\times 1\times 4=2$，得$\frac{p}{2}=1$.

$\therefore$点 F 坐标为 $F(1,\ 0)$.

根据抛物线的光学原理可知，反射线必过点 F，

$\therefore k_{PQ}=\frac{4}{3}$，$S_{\triangle OFP}=\frac{1}{2}\times 1\times 4=2$.

2.5 练习（教材 P. 84）

1. (1) 如图 2-28，设 $M(x_0, y_0)$是轨迹上的任意一点.

因为点 M 与 x 轴的距离为$|y_0|$，与 y 轴的距离为$|x_0|$，

所以$|x_0|\cdot|y_0|=k$，

即(x_0, y_0)是方程 $xy=\pm k$ 的解.

(2) 设点 M_1 的坐标（x_1，y_1）是方程 $xy=\pm k$ 的解，

则 $x_1y_1=\pm k$，

即$|x_1|\cdot|y_1|=k$.

而$|x_1|$，$|y_1|$正是点 M_1 到纵轴、横轴的距离，因此点 M_1 到这两条直线的距离的积是常数 k，点 M_1 是曲线上的点.

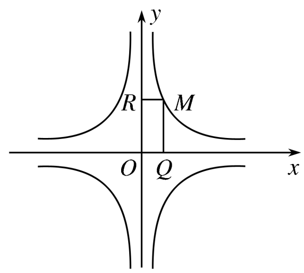


图 2-28

由(1)(2)可知，$xy=\pm k$ 是与两条坐标轴的距离的积为常数 $k(k>0)$的点的轨迹方程.

2. 如图 2-29，取直线 l 为 x 轴，过点 F 且垂直于直线 l 的直线为 y 轴，建立坐标系 xOy.

设点 $M(x, y)$是曲线上任意一点，作 $MB\perp x$ 轴，垂足为 B，那么点 M 属于集合 $P=\{M||MF|-|MB|=2\}$.

由两点间的距离公式，点 M 适合的条件可表示为

$$\sqrt{x^2+(y-2)^2}-y=2, \qquad ①$$

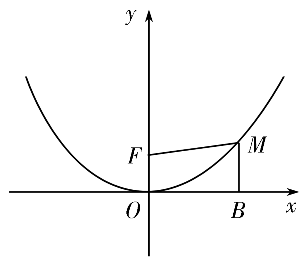


图 2-29

将①式移项后两边平方，得 $x^2+(y-2)^2=(y+2)^2$，

化简得 $y=\dfrac{1}{8}x^2$.

因为曲线在 x 轴的上方，所以 $y>0$.

虽然原点 O 的坐标(0，0)是这个方程的解，但不属于已知曲线，

所以曲线的方程应是 $y=\dfrac{1}{8}x^2$ $(x\neq 0)$.

习题 5（教材 P. 84）

1. 设点 $M(x_0, y_0)$是线段 AB 的垂直平分线上的任意一点，

则$|MA|=|MB|$.

由两点间的距离公式，得$\sqrt{(x_0+1)^2+(y_0+1)^2}=\sqrt{(x_0-3)^2+(y_0-7)^2}$.

上式两边平方，并整理得 $x_0+2y_0-7=0$.

所以点 M 是方程 $x+2y-7=0$ 的一个解.

另一方面，设 $M(x_0, y_0)$是方程 $x+2y-7=0$ 的解，则 $x_0+2y_0-7=0$，

即 $8x_0+16y_0-56=0$，

则 $x_0^2+2x_0+1+y_0^2+2y_0+1=x_0^2-6x_0+9+y_0^2-14y_0+49$，

所以$(x_0+1)^2+(y_0+1)^2=(x_0-3)^2+(y_0-7)^2$，

所以$\sqrt{(x_0+1)^2+(y_0+1)^2}=\sqrt{(x_0-3)^2+(y_0-7)^2}$，

又点 $A(-1,-1)$，$B(3,7)$，所以 $|MA|=|MB|$，

所以点 M 在线段 AB 的垂直平分线上.

由上可知，线段 AB 的垂直平分线的方程是 $x+2y-7=0$.

2. 设 $P(x_0,y_0)(y_0\neq 0)$ 是曲线上任意一点，

则 $k_{PA_1}=\dfrac{y_0}{x_0+6}$，$k_{PA_2}=\dfrac{y_0}{x_0-6}$.

根据题设，有 $\dfrac{y_0}{x_0+6}\cdot\dfrac{y_0}{x_0-6}=-\dfrac{4}{9}$，化简得 $\dfrac{x_0^2}{36}+\dfrac{y_0^2}{16}=1$.

所以 (x_0,y_0) 是方程 $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 的一个解.

另一方面，设 $P(x_0,y_0)(y_0\neq 0)$ 是方程 $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 的解，

那么 $\dfrac{x_0^2}{36}+\dfrac{y_0^2}{16}=1$，即 $y_0^2=\dfrac{4}{9}(36-x_0^2)$.

所以 $k_{PA_1}\cdot k_{PA_2}=\dfrac{y_0}{x_0+6}\cdot\dfrac{y_0}{x_0-6}=\dfrac{y_0^2}{x_0^2-36}=\dfrac{\frac{4}{9}(36-x_0^2)}{x_0^2-36}=-\dfrac{4}{9}$.

即 $P(x_0,y_0)$ 与点 A_1，A_2 所确定直线的斜率积为 $-\dfrac{4}{9}$，

所以点 P 是这条曲线上的点.

由上可知，符合给定条件的点 P 的曲线方程是 $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{16}=1(y\neq 0)$.

3. 分别以两条互相垂直的直线为坐标轴，建立如图 2-30 所示的直角坐标系 xOy，设 M 的坐标为 (x,y).

因为 $\triangle AOB$ 是直角三角形，M 为斜边 AB 的中点，

所以 $OM=\dfrac{1}{2}AB=a$，即 $\sqrt{x^2+y^2}=a$.

两边平方，得 $x^2+y^2=a^2$.

所以，动点 M 的轨迹是以原点为圆心，a 为半径的圆.

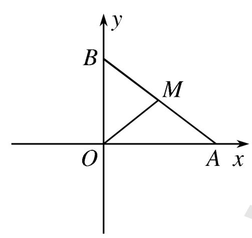


图 2-30

4. 以 A，B 所在的直线为 x 轴，线段 AB 的垂直平分线为 y 轴，建立如图 2-31 所示的直角坐标系 xOy. 令 $AB=2a$，则 A，B 两点的坐标分别为 $(-a,0)$，$(a,0)$.

设 M 点坐标为 (x,y)，依题意，点 M 满足 $\dfrac{MA}{MB}=2$.

由 $MA=\sqrt{(x+a)^2+y^2}$，$MB=\sqrt{(x-a)^2+y^2}$，

得 $\dfrac{\sqrt{(x+a)^2+y^2}}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}=2$，

化简整理，得 $3x^2+3y^2-10ax+3a^2=0$，即 $\left(x-\dfrac{5}{3}a\right)^2+y^2=\dfrac{16}{9}a^2$.

所以，动点 M 的轨迹方程为即 $\left(x-\dfrac{5}{3}a\right)^2+y^2=\dfrac{16}{9}a^2$.

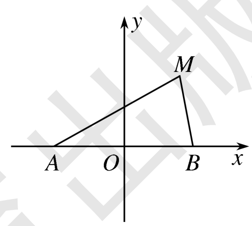


图 2-31

5. 以两条互相垂直的直线为 x 轴，y 轴，交点为原点，建立直角坐标系，设点 $M(x, y)$，由题意得 $xy=k(k>0)$，

即 $y=\frac{k}{x}(k>0)$.

故所求点 M 的轨迹方程为双曲线 $y=\frac{k}{x}(k>0)$.

6. 以 AB 的中点为原点，AB 所在直线为 x 轴，建立直角坐标系，如图 2-32 所示，

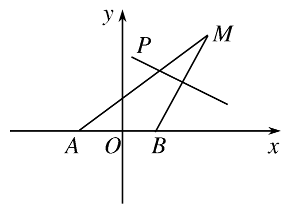


图 2-32

则 $A(-1, 0)$，$B(1, 0)$.

设点 $P(x, y)$.

$\because$ 线段 MB 的中垂线交 AM 于 P，

$\therefore PM=PB$.

$\therefore AM=PA+PM=PA+PB=4$，

$\therefore$ 由椭圆定义可知，点 P 的轨迹是椭圆，且两焦点为 $(-1, 0)$，$(1, 0)$，$a=2$，

$\therefore b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$.

$\therefore$ 点 P 的轨迹方程是 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

7. (1) 由已知得椭圆的长半轴为 2，半焦距 $c=\sqrt{4-b^2}$，

则离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{4-b^2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore b^2=1$，$\therefore$ 椭圆的上顶点为 $(0, 1)$，$\therefore$ 抛物线的焦点为 $(0, 1)$，

$\therefore$ 抛物线的方程为 $x^2=4y$.

(2) 由已知，直线 l 的斜率必存在，则设直线 l 的方程为 $y=k(x+1)$，

设 $E(x_1, y_1)$，$F(x_2, y_2)$.

由 $y=\frac{1}{4}x^2$，得 $y'=\frac{1}{2}x$，

$\therefore$ 切线 l_1，l_2 的斜率分别为 $\frac{1}{2}x_1$，$\frac{1}{2}x_2$.

当 $l_1 \perp l_2$ 时，$\frac{1}{2}x_1 \cdot \frac{1}{2}x_2=-1$，即 $x_1 \cdot x_2=-4$.

由 $\begin{cases} y=k(x+1), \\ x^2=4y, \end{cases}$ 得 $x^2-4kx-4k=0$，

$\therefore \Delta=(4k)^2-4\times(-4k)>0$，解得 $k<-1$ 或 $k>0$.

$\therefore x_1 \cdot x_2=-4k=-4$，即 $k=1$.

此时 $k=1$ 在 k 的取值范围内，

$\therefore$ 直线 l 的方程为 $x-y+1=0$.

8. (1) 由已知得 $a>1$，

$\therefore$ 方程组 $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+y^2=1, \\ x^2+y^2=c^2 \end{cases}$ 有实数解，从而 $\left(1-\frac{1}{a^2}\right)x^2=c^2-1\geqslant 0$，

故 $c^2\geqslant 1$，所以 $a^2=b^2+c^2\geqslant 2$，

即 a 的取值范围是$[\sqrt{2}，-\infty)$.

(2)设椭圆上的点 $P(x，y)$到一个焦点 $F_2(c，0)$的距离为 d，

则 $d^2=(c-x)^2+y^2=x^2-2cx+c^2+1-\dfrac{x^2}{a^2}=\dfrac{c^2}{a^2}x^2-2cx+a^2$

$$=\frac{c^2}{a^2}\left(x-\frac{a^2}{c}\right)^2(-a\leqslant x\leqslant a).$$

$\because \dfrac{a^2}{c}>a$，$\therefore$当 $x=a$ 时，$d_{\min}=a-c$.

于是$\begin{cases}a-c=\sqrt{3}-\sqrt{2},\\a^2-c^2=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=\sqrt{3},\\c=\sqrt{2}.\end{cases}$

$\therefore$所求椭圆方程为$\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$.

(3)由$\begin{cases}y=kx+m,\\x^2+3y^2=3,\end{cases}$得$(3k^2+1)x^2+6mkx+3(m^2-1)=0$.（*）

$\because$直线 l 与椭圆交于不同两点，$\therefore\Delta>0$，即 $m^2<3k^2+1$. ①

设 $M(x_1，y_1)$，$N(x_2，y_2)$，则 x_1，x_2 是方程(*)的两个实数解，

$\therefore x_1+x_2=-\dfrac{6mk}{3k^2+1}$，$\therefore$线段 MN 的中点为$Q\left(-\dfrac{3mk}{3k^2+1}，\dfrac{m}{3k^2+1}\right)$，

又$\because$线段 MN 的垂直平分线恒过点 $A(0，-1)$，$\therefore AQ\perp MN$，

即$-\dfrac{m+3k^2+1}{3mk}\cdot k=-1$，即 $2m=3k^2+1(k\neq 0)$. ②

由①，②得 $m^2<2m$，解得 $0<m<2$. 又由②得 $m>\dfrac{1}{2}$.

$\therefore$实数 m 的取值范围是$\left(\dfrac{1}{2}，2\right)$.

复习题二（教材 P. 95）

1. （1）当 $k<4$ 时，$9-k>0$，$4-k>0$，$\therefore$曲线表示椭圆.

   （2）当 $4<k<9$ 时，$9-k>0$，$4-k<0$，$\therefore$曲线表示双曲线.

2. 当 $\alpha=0°$时，$\cos\alpha=1$，曲线表示单位圆；

   当 $0°<\alpha<90°$时，$\cos\alpha>0$，曲线表示焦点在 y 轴上的椭圆；

   当 $\alpha=90°$时，$\cos\alpha=0$，曲线表示 $x=1$ 和 $x=-1$ 这两条平行于 y 轴的直线；

   当 $90°<\alpha\leqslant 180°$时，$\cos\alpha<0$，曲线表示焦点在 x 轴上的双曲线.

3. 选 A. 方程 $x^2-4x+1=0$ 有两个根 x_1，x_2，$x_1\cdot x_2=1>0$，$x_1+x_2=4>0$，

   $\therefore$必有 $x_1>1$，$0<x_2<1$.

4. 选 B. 设与两圆 $x^2+y^2=1$ 及 $x^2+y^2-8x+12=0$ 都外切的圆的圆心 $M(x，y)$，半径为 r. $x^2+y^2=1$ 圆心 $O(0，0)$，$x^2+y^2-8x+12=0$ 圆心 $A(4，0)$，由 $MA-MO=2-1=1$，可得点 M 在以 O，A 为焦点的双曲线右支上.

5. ∴AB，BC，CA 的长成等差数列，

∴$|AB|+|CA|=2|BC|=4$. ∴点 A 在以 B，C 为两焦点的椭圆上.

∴$2a=4$，$a=2$，$c=1$，$b^2=3$. 又$|AB|>|CA|$，

∴点 A 的轨迹方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$（$x>0$），即轨迹是椭圆在 y 轴的右边部分.

6. 设 $M(x，y)$. 由 $MF_1 \perp MF_2$，$F_1(-5,0)$，$F_2(5,0)$可得

$\dfrac{y}{x+5}\cdot\dfrac{y}{x-5}=-1$，$y^2=-x^2+25$.

∴$x^2+y^2=25$，　　①

又$\dfrac{x^2}{45}+\dfrac{y^2}{20}=1$，　　②

把①代入②得：$20(25-y^2)+45y^2=900$.

∴$y^2=16$，$y=\pm 4$.

代入①得：$x^2=9$，$x=\pm 3$.

∴$M_1(3，4)$，$M_2(3，-4)$，$M_3(-3，4)$，$M_4(-3，-4)$.

7. 选 B. 对于曲线$\dfrac{x^2}{25-k}+\dfrac{y^2}{9-k}=1$（$k<0$），

∵$k<0$，∴$25-k>0$，$9-k>0$.

∴$c^2=25-k-(9-k)=16$，$c=4$.

而对于曲线$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$，$c^2=25-9=16$，$c=4$.

8. 联立$\begin{cases}x-2y+2=0,\\ x^2+4y^2=4,\end{cases}$

∴$(2y-2)^2+4y^2=4$，$8y^2-8y=0$，$y_1=0$，$y_2=1$，$x_1=-2$，$x_2=0$.

∴$A(-2，0)$，$B(0，1)$.

∴$|AB|=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$.

9. 设所求方程为 $9x^2-4y^2=\lambda$，

则$\dfrac{x^2}{\frac{\lambda}{9}}-\dfrac{y^2}{\frac{\lambda}{4}}=1$，$c^2=\dfrac{\lambda}{9}+\dfrac{\lambda}{4}=16$，$\lambda=\dfrac{16\times 36}{13}$.

∴方程为$\dfrac{13}{64}x^2-\dfrac{13y^2}{144}=1$.

10. 方程$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$，$c^2=5$，$c=\sqrt{5}$. 又 $e=\dfrac{\sqrt{5}}{2}=\dfrac{c}{a}$，　∴$a=2$，$b=1$.

∴双曲线方程为$\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$.

11. $e=\frac{c}{a}=2$，$c=2a$.

又 $c^2=a^2+b^2$，$\therefore b^2=3a^2$.

$\therefore$两条渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\sqrt{3}x$.

$\therefore$两条渐近线所成的锐角为 $60°$.

12. 由 $3x^2-y^2=12$，$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$，可得 $c^2=16$，$c=4$，右焦点 $F_2(4,0)$.

$\because$圆心为 $F_2(4,0)$,且圆过原点，$\therefore r=4$.

$\therefore$圆方程为$(x-4)^2+y^2=16$.

13. 把 $y=kx-1$ 代入 $x^2-y^2=4$，得 $x^2-(kx-1)^2=4$，

化简，得$(1-k^2)x^2+2kx-5=0$.

当 $1-k^2=0$ 时，$k=\pm1$，此时直线与双曲线有一个交点.

$\Delta=4k^2+20(1-k^2)=-16k^2+20$.

当 $\Delta=-16k^2+20<0$，即 $k>\frac{\sqrt{5}}{2}$或 $k<-\frac{\sqrt{5}}{2}$时，直线与双曲线没有公共点.

14. 设圆心 $M(x,y)$，则$|y+3|=\sqrt{x^2+(y-3)^2}$，

$\therefore y^2+6y+9=x^2+y^2-6y+9$，$\therefore x^2=12y$.

$\therefore$所求圆心的轨迹方程为 $x^2=12y$，图略.

15. 设抛物线上任意一点 $P(x_1, y_1)$，焦点 $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$，$PF$ 的中点$M(x, y)$，

则$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+\frac{p}{2}}{2}, \\ y=\dfrac{y_1}{2}, \end{cases}$ $\therefore\begin{cases} x_1=2x-\dfrac{p}{2}, \\ y_1=2y. \end{cases}$ 代入 $y^2=2px$，

得：$4y^2=2p\left(2x-\frac{p}{2}\right)$，$2y^2=2px-\frac{p^2}{2}$，

$\therefore$所求点 M 的轨迹方程为 $y^2=px-\frac{p^2}{4}$ $(p>0)$.

16. 设抛物线 $y^2=2px$，则 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$.

当 $x=\frac{p}{2}$时，$y^2=p^2$，$y=\pm p$，$\therefore|BC|=2p$.

设点 $P(x_1,y_1)$在抛物线上，$y_1^2=2px_1$. $\therefore|PQ|=y_1$，$|OQ|=x_1$.

$\because y_1^2=2px_1$，$\therefore|PQ|^2=|BC|\cdot|OQ|$.

$\therefore|PQ|$是$|BC|$和$|OQ|$的比例中项.

17. 以 AB 的中点 O 为原点，AB 所在直线为 x 轴建立直角坐标系，如图 2-33，则 $A(-1,0)$，$B(1,0)$. $\because |DA|+|DB|=4$ 为定值，$\therefore$ 点 D 在以 A，B 为焦点的椭圆上.

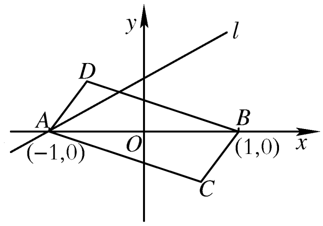


图 2-33

$\therefore a=2$，$c=1$，$b^2=3$. $\therefore$ 椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

由题可得直线 l 的方程为 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x+1)$，将其代入椭圆方程中可得 $13x^2+8x-32=0$.

$\therefore x_1+x_2=-\dfrac{8}{13}$，　$x_1\cdot x_2=-\dfrac{32}{13}$.

$\therefore |x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{\left(-\dfrac{8}{13}\right)^2+4\cdot\dfrac{32}{13}}=\dfrac{24\sqrt{3}}{13}$，

$\therefore$ 暂不加固部分为：$\sqrt{1+\dfrac{1}{3}}\times\dfrac{24\sqrt{3}}{13}=\dfrac{48}{13}$.　$\therefore$ 暂不加固部分长 $\dfrac{48}{13}$ km.

18. 选 A. $\because \dfrac{x^2}{4}-y^2=1$，$\therefore a=2$，$b=1$，$c=\sqrt{5}$.

$\therefore F_1(-\sqrt{5},0)$，$F_2(\sqrt{5},0)$. $\because \overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$，$\therefore \overrightarrow{PF_1}\perp\overrightarrow{PF_2}$.

设 $|PF_1|=r_1$，$|PF_2|=r_2$，

则有 $\begin{cases}|r_1-r_2|=2a=4,\\ r_1^2+r_2^2=(2c)^2=20.\end{cases}$

$\therefore r_1^2-2r_1r_2+r_2^2=16$. $\therefore 2r_1r_2=4$，　$r_1r_2=2$.

19. 如图 2-34，$\because AF=AA'$，$BF=BB'$，

$\therefore \angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$.

则 $\angle A'FB'=180^\circ-(\angle 2+\angle 3)$

$=180^\circ-(90^\circ-\angle 5)-(90^\circ-\angle 6)$

$=180^\circ-90^\circ+\angle 5-90^\circ+\angle 6$

$=\angle 5+\angle 6=180^\circ-\angle A'FB'$，

$\therefore \angle A'FB'=90^\circ$.

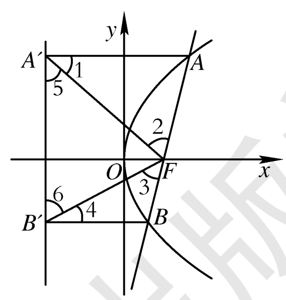


图 2-34

20. $\because 16x^2+25y^2=1\ 600$，$\therefore \dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{64}=1$.

则 $c^2=36$，$c=6$，$F_1(-6,0)$，$F_2(6,0)$.

设 $P(x_1,y_1)(y_1>0)$，则 $k_{PF_2}=-4\sqrt{3}=\dfrac{y_1}{x_1-6}$.

$\therefore y_1=-4\sqrt{3}(x_1-6)$.

代入$\frac{x_1^2}{100}+\frac{y_1^2}{64}=1$可得：$\frac{x_1^2}{100}+\frac{16\times3(x_1-6)^2}{64}=1$.

$\therefore 76x_1^2-900x_1+2\ 600=0.\therefore x_1=\frac{130}{19}, x_2=5$.

把$x_1=\frac{130}{19}$代入$y_1=-4\sqrt{3}\times\frac{16}{19}<0$，舍去.

把$x_2=5$代入$-4\sqrt{3}\times(-1)=4\sqrt{3}>0$，

$\therefore P(5, 4\sqrt{3}), S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}\times12\times4\sqrt{3}=24\sqrt{3}$.

21. 设椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.\therefore\begin{cases}a-c=r_1+R,\\a+c=r_2+R.\end{cases}$

$\therefore a=\frac{r_1+r_2+2R}{2}, c=\frac{r_2-r_1}{2}.\therefore e=\frac{c}{a}=\frac{r_2-r_1}{r_1+r_2+2R}$.

22. 设$M(x,y)$（其中$x>0, y\neq0$），$\angle MAB=\alpha$，则$\angle MBA=2\alpha$.

$\because \tan\angle MBA=\frac{y}{2-x}=\tan 2\alpha$,

$\tan\angle MAB=\frac{y}{x+1}=\tan\alpha$,

又$\because \tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$，$\therefore \frac{y}{2-x}=\frac{2\times\frac{y}{x+1}}{1-\frac{y^2}{(x+1)^2}}$.

整理，可得$\frac{y}{2-x}=\frac{2y(x+1)}{(x+1)^2-y^2}$,

$2(x+1)(2-x)=(x+1)^2-y^2$,

$2(x-x^2+2)=x^2+2x+1-y^2$.

$\therefore 3x^2-y^2=3$，故所求点M的轨迹方程为$x^2-\frac{y^2}{3}=1(x>0)$.

23. (1)由已知得$M(0, t)$，$P\left(\frac{t^2}{2p}, t\right)$.

又N为M关于点P的对称点，故$N\left(\frac{t^2}{p}, t\right)$,

ON的方程为$y=\frac{p}{t}x$，代入$y^2=2px$整理得$px^2-2t^2x=0$,

解得$x_1=0$，$x_2=\frac{2t^2}{p}$. 因此$H\left(\frac{2t^2}{p}, 2t\right)$.

所以N为OH的中点，即$\frac{|OH|}{|ON|}=2$.

(2)直线MH与C除H以外没有其它公共点. 理由如下：

直线MH的方程为$y-t=\frac{p}{2t}x$，即$x=\frac{2t}{p}(y-t)$.

代入$y^2=2px$得$y^2-4ty+4t^2=0$，解得$y_1=y_2=2t$,

即直线MH与C只有一个公共点，

所以除H以外直线MH与C没有其它公共点.

24. 设经过点$P(1, 1)$，斜率为k的直线方程为$y-1=k(x-1)$.

将直线方程代入到双曲线方程 $x^2-\dfrac{y^2}{2}=1$ 得

$(2-k^2)x^2+(2k^2-2k)x-k^2+2k-3=0.$ ①

假设 $A(x_1, y_1)$，$C(x_2, y_2)$，则有 $x_1+x_2=-\dfrac{2k^2-2k}{2-k^2}$.

要求点 $P(1, 1)$为 AC 的中点，则有 $x_1+x_2=2$，解得 $k=2$.

求①式的判别式并令 $\Delta=0$ 得 $-4k+6=0$，要使直线 $y-1=k(x-1)$与双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{2}=1$ 有两个交点，则有 $k<\dfrac{3}{2}$. 这与 $k=2$ 矛盾.

故所求的直线 $y=2x-1$ 不符合条件，这样的直线不存在.

25. 设椭圆与直线交于 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$ 两点，

则由 $\begin{cases}ax^2+by^2=1,\\ x+y-1=0\end{cases}\Rightarrow(a+b)x^2-2bx+b-1=0.$

$\therefore x_1+x_2=\dfrac{2b}{a+b}$，$x_1x_2=\dfrac{b-1}{a+b}$.

$\therefore |AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot|x_1-x_2|=\sqrt{(1+k^2)\cdot[(x_2+x_2)^2-4x_1x_2]}$

$=\sqrt{2}\cdot\dfrac{2\sqrt{a+b-ab}}{a+b}=2\sqrt{2}.$

$\therefore (a+b)^2=a+b-ab.$ ①

又$\because k_{OC}=\dfrac{\frac{y_1+y_2}{2}}{\frac{x_1+x_2}{2}}=\dfrac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=\dfrac{(1-x_1)+(1-x_2)}{x_1+x_2}=\dfrac{2}{x_1+x_2}-1=\dfrac{a}{b}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}b.$ ②

把②代入①得 $b=\dfrac{\sqrt{2}}{3}, a=\dfrac{1}{3}$.

$\therefore$椭圆方程为$\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{\sqrt{2}}{3}y^2=1$.

26.(1)由$\begin{cases}x-y+2=0,\\ y=x^2\end{cases}$求得 $A(-1,1)$,$B(2,4)$,线段 AB 的中点 $Q\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{5}{2}\right)$.

设 PQ 的中点$M(x,y)$，

从而由$\begin{cases}2x=\dfrac{1}{2}+s,\\ 2y=\dfrac{5}{2}+t\end{cases}$得$\begin{cases}s=2x-\dfrac{1}{2},\\ t=2y-\dfrac{5}{2}.\end{cases}$

又点 $P(s,t)$在曲线 C 上,$\therefore 2y-\dfrac{5}{2}=\left(2x-\dfrac{1}{2}\right)^2$,整理得 $y=2x^2-x+\dfrac{11}{8}$.

$\because$点 $P(s,t)$是 L 上的任一点,且点 P 与点 A 和点 B 均不重合,

$\therefore -1<s<2$,$\therefore -1<2x-\dfrac{1}{2}<2$,即$-\dfrac{1}{4}<x<\dfrac{5}{4}$.

$\therefore$线段 PQ 的中点 M 的轨迹方程为 $y=2x^2-x+\dfrac{11}{8}\left(-\dfrac{1}{4}<x<\dfrac{5}{4}\right)$.

(2)(方法一)曲线 G:$(x-a)^2+(y-2)^2=\dfrac{49}{25}$是圆心为$(a,2)$,半径为$\dfrac{7}{5}$的圆.

设圆 G 与直线 $l:x-y+2=0$ 相切于点 $T(x_T,y_T)$，则有 $\frac{|a-2+2|}{\sqrt{2}}=\frac{7}{5}$，即 $a=\pm\frac{7\sqrt{2}}{5}$.

过点 $(a,2)$ 与直线 l 垂直的直线 l' 的方程是 $y-2=-(x-a)$，即 $x+y-2-a=0$.

由 $\begin{cases}x-y+2=0,\\x+y-2-a=0\end{cases}$ 解得 $x_T=\frac{a}{2}$，$y_T=\frac{a}{2}+2$. 当 $a=-\frac{7\sqrt{2}}{5}$ 时，$-1<x_T=-\frac{7\sqrt{2}}{10}<2$.

$\because -1,2$ 分别是区域 D 上点的最小和最大的横坐标，

$\therefore$ 切点 $T\in D$，故 $a_{\min}=-\frac{7\sqrt{2}}{5}$.

(方法二) 曲线 $G:(x-a)^2+(y-2)^2=\frac{49}{25}$ 是圆心为 $(a,2)$，半径为 $\frac{7}{5}$ 的圆.

而点 $(a,2)$ 在直线 $y=2$ 上，要使 a 最小，则 $a<0$，且使圆 G 与区域 D 有公共点，

$\therefore \frac{|a-2+2|}{\sqrt{2}}\leqslant\frac{7}{5}$，即 $-\frac{7\sqrt{2}}{5}\leqslant a\leqslant\frac{7\sqrt{2}}{5}$. 又 $a<0$，$\therefore -\frac{7\sqrt{2}}{5}\leqslant a<0$.

$\therefore$ 要使圆 $G:x^2-2ax+y^2-4y+a^2+\frac{51}{25}=0$ 与区域 D 有公共点，则 a 的最小值为 $-\frac{7\sqrt{2}}{5}$.

第 3 章　空间向量与立体几何

一、教学目标

空间向量为处理立体几何问题提供了新的视角，空间向量的引入，为解决三维空间中图形的位置关系与度量问题提供了一个十分有效的工具. 在本章中，学生将在学习平面向量的基础上，把平面向量及其运算推广到空间，运用空间向量解决有关直线、平面位置关系的问题，体会向量方法在研究几何图形中的作用，进一步发展空间想象能力和几何直观能力. 在本章教学中要达到的教学目标有：

1. 了解空间向量的概念，体会向量及其运算由平面向空间推广的过程.
2. 了解空间向量的基本定理及其意义，掌握空间向量的分解及其坐标表示.
3. 掌握空间向量的线性运算及其坐标表示.
4. 掌握空间向量的数量积及其坐标表示，能运用向量的数量积判断向量的共线与垂直.
5. 理解直线的方向向量与平面的法向量.
6. 能用向量语言表述线线、线面、面面的垂直、平行关系.
7. 能用向量方法证明有关线、面位置关系的一些定理.
8. 能用向量方法解决线线、线面、面面的夹角的计算问题，体会向量方法在研究几何问题中的优势.
9. 本章在学习了平面向量的基础上延拓到空间，促进学生领悟向量处理问题的的方法和思想.
10. 经历概念的形成过程，解题的思维过程，体验数形结合思想的指导作用.
11. 经历用向量方法解决某些简单的几何问题，体会向量是一种处理几何问题的工具，鼓励学生学会选择运用向量方法与综合方法，从不同角度解决立体几何问题.
12. 通过大量实例，体会向量语言或运算在解决数学问题中的工具作用.
13. 向量是沟通代数、几何与三角函数的一种工具，通过本章的学习，体会它们之间的联系.
14. 本章的学习较多地运用了几何直观、类比、特殊到一般等思维方法，教学时应引导学生运用类比的方法，经历向量及其运算由平面向空间推广的过程，并应注意维数增加所带来的影响.
15. 通过本章学习，逐步认识向量的科学价值、应用价值和文化价值，提高学习数学的兴趣，树立学好数学的信心.

二、教材说明

1. 重点和难点

重点是向量的线性运算、数量积运算及其应用.

难点是空间向量的共线条件、共面条件和空间向量分解定理，理解应用向量解决空间图形问题.

2. 内容编排

本章主要包括空间向量的基础知识，空间向量在立体几何中的应用. 教材以平面向量为基础，把平面向量的概念及运算推广到空间，利用类比的方法，经历向量及其运算由平面向空间推广的过程. 介绍了空间向量的加减、数量积运算、空间向量的基本定理（向量共线的条件、向量共面的条件、空间向量基本定理），直线的方向向量、平面的法向量等等，并用向量解决几何问题.

本章的编排特点是：把平面向量的加减和数乘运算推广到空间，并把平面向量基本定理推广到空间，由此推出空间直线和平面的向量表达式. 把平面的数量积运算推广到空间，并利用空间向量的数量积度量空间两条直线的夹角和空间线段的长度，解决两条直线的垂直和平行问题，证明空间直线、平面位置关系的一些定理（三垂线定理、直线与平面垂直定理）. 本章的一个重要内容就是空间向量的基础定理——空间向量分解定理，这个定理是立体几何研究数量化的基础. 依据这个定理，整个空间被三个不共面的基向量所确定，空间一个点、一个向量和实数组（x，y，z）建立起一一对应关系，是利用向量解决空间图形问题的支架和精髓. 自此就可以顺畅地解决空间图形夹角和距离的计算问题、直线与平面成角、点到平面的距离、共面与平行等等.

空间向量的基本概念及其性质是这部分内容的基本知识，是后续学习的前提. 由于空间向量是平面向量的推广，空间向量及其运算所涉及的内容与平面向量及其运算类似，因此，本节的框架结构与必修中平面向量及其运算基本一致.

本章内容涉及的空间向量的应用有以下几个方面：

（1）通过引入直线的方向向量为研究成角（如异面直线成角、线面成角、线线平行与垂直关系等），解决空间图形问题提供新的思路和方法.

（2）通过引入平面的法向量，为解决有关直线与平面、平面与平面成角，共面与平行等空间图形的关系提供新的思路和方法.

（3）本章通过引入向量得到许多重要的向量公式，大大丰富了解决空间图形的数学思想和方法. 比较常用的主要有以下几个.

①两条异面直线的夹角公式：若两条异面直线的方向向量为 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$，则两条异面直线所成角的余弦 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2}{|\boldsymbol{v}_1||\boldsymbol{v}_2|}$.

②直线与平面成角公式：若 $\boldsymbol{n}$ 为平面 α 的法向量，$\boldsymbol{a}$ 表示直线 a 的方向向量，则直线与平面 α 所成的角 $\theta=90°-|90°-\arccos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{a}\rangle|$.

③两个平面所成的角：若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示二面角的两个半平面的法向量，则$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$的大小或补角即为二面角的大小，并且 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$.

④点到面、线到面、面到面的距离.

求点到平面的距离的方法有：作垂线直接求解法、等体积转化法、法向量方向射影法. 法向量方向射影法：平面外一点 P 与平面上任一点 P_0 构成的向量$\overrightarrow{P_0P}$在这个平面的法向量 $\boldsymbol{n}$ 方向上的射影的数量$|\overrightarrow{P_0P}|\cos\langle\overrightarrow{P_0P},\boldsymbol{n}\rangle$的绝对值为点 P 到平面的距离.即，点 P 到平面 α 的距离 $d=||\overrightarrow{P_0P}|\cos\langle\overrightarrow{P_0P},\boldsymbol{n}\rangle|=\left|\dfrac{|\overrightarrow{P_0P}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}\right|$(其中 $P_0\in\alpha,\boldsymbol{n}\perp\alpha,P\notin\alpha$). 求直线到平行平面的距离、两个平行平面的距离的方法是转化为求点到平面的距离. 本章学习的重点是用向量代数方法解决立体问题的奠基性定理. 空间向量的数量积是平面向量的数量积的一种推广，把向量数量积的计算坐标化，通过向量的坐标运算获得空间向量平行和垂直的条件，推导空间直角坐标系上的度量公式，包括求向量的长度距离和夹角公式.

本章的重点任务之一就是研究空间向量在立体几何中的应用，对学生理解向量概念和运用向量解决问题具有重要的意义和作用. 教材建立了位置向量的概念之后，引出直线的方向向量，用向量方法求证直线与直线平行、直线与平面平行、平面与平面平行、用向量运算求证两条直线垂直或求两条直线所成的角，引入平面的法向量，证明了线面垂直的判定定理，并通过向量的平行或垂直条件来讨论平面的平行或垂直. 这一部分是立体几何位置关系判断的核心内容，也是用向量方法处理几何问题的具体体现. 三垂线定理的论证是用向量方法证明几何定理的又一体现. 空间角（直线与直线、直线与平面、平面与平面），空间距离（点与点、点与线、点与面、线与线、线与面、面与面），在必修中学习了综合几何之后，学习以向量为工具研究空间图形具有独特优势，利用向量进行的度量计算，其中直线的方向向量，平面的法向量是解决以上问题的有力工具，应作为重点内容加以学习和研究.

为了拓展学生的知识面，教材的配套习题分为三个层次，“练习”主要配合本节教学内容，帮助理解所学知识，一般可以在课上完成；“学而时习之”是每节课的作业部分，促进学生领会本节内容，熟练掌握相关的方法和技能；“温故而知新”是对本节内容的较高要求和适当延伸. 同时教材还安排了一个“多知道一点”，并通过例子说明向量的应用，希望通过这些栏目增强学生的学习兴趣，拓展数学视野，提升数学素质. 本章最后还有一个小结与复习，对本章的知识、思想和方法以及题型作一个回顾、归纳和提高，帮助学生形成完整的知识网络，提升学生的数学思想和方法，促进学生完成本章的学习任务.

3. 地位与作用

向量是数学中重要的基本的概念，它既是代数对象，也是几何对象. 作为代数对象，向量可以运算，作为几何对象，向量有方向，可以刻画直线与平面之间的位置关系，向量有长度，可以刻画长度、面积、体积等几何度量问题. 向量由大小和方向两个因素确定，

大小反映了向量数的特征，方向反映了向量形的特征，因此它是集数形于一身的数学概念，是数学中数形结合思想的体现，它应成为高中数学的基础知识，同样它在物理学、工程、经济学以及其他科学技术中都有着广泛地应用.

三、课时安排建议

本章教学时间约 **13** 课时，具体分配如下（仅供参考）：

3.1	空间中向量的概念和运算	1 课时
3.2	空间向量的坐标	3 课时
3.3	直线的方向向量	1 课时
3.4	直线与平面的垂直关系	1 课时
3.5	平面的法向量	1 课时
3.6	直线与平面、平面与平面所成的角	2 课时
3.7	点到平面的距离	1 课时
3.8	共面与平行	1 课时
小结与复习		2 课时

四、教学建议

几何发展的根本出路是代数化，引入向量研究几何是几何代数化的需要. 本章内容主要可分为“空间向量及其运算”和“空间向量的应用”. 有了平面向量以及必修中立体几何的基础，向量及其运算由平面向空间推广对学生已不再有很大困难，但仍要一步步地去进行. 例如，要一步步地验证空间向量的运算法则以及运算律. 这样做，既可以温故而知新，又可以进一步培养空间想象能力.

在必修中学生通过立体几何的学习对几何直观视图、几何逻辑证明有了一定的基础，因此本章学习是空间几何的延续和拓展. 通过引入空间向量处理空间问题，将空间元素间的位置关系转化为数量关系，将过去的形式逻辑证明转化为数值计算，化繁难为简易，化复杂为简单，使得空间图形的研究更为直观、更为简明、更具操作性，它是一种重要的解决问题的手段和方法. 教学中可适当选取近几年立体几何的高考试题，让学生感受用空间向量方法求解是高考的新趋势、新动向，增强学生学习空间向量的信心.

本章内容包括空间向量的定义、空间向量的加减运算、空间向量的数乘运算、空间向量的数量积运算、空间向量的分解及其坐标表示、空间向量运算的坐标表示等内容. 它们基本上是平面向量的推广和延伸. 因此学生在学习中比较容易实现知识的迁移和方法的类比. 教学中应注意温故而知新，介绍学习方法，提升学生学习的主动性和参与性.

本章内容概念众多、方法丰富、算法新颖，因此可以有多种多样的教学方法，尤其要多引导学生将其与平面向量及其运算作类比、与实数及其运算作类比，引导学生思考向量运算与通常的实数运算有什么差异，与平面向量的运算有什么联系和区别，从“数、量与

运算”发展的角度理解向量，注意让学生经历向量由平面向空间推广的过程，使学生体会其中的数学思想方法：类比与归纳，体验数学在结构上的和谐性，并学会用数学思想方法指导解题.

本章内容的一个鲜明特点就是操作性比较强，如判断两条直线的平行、求直线与平面的成角、求点到直线的距离、判断共面与平行问题等，都有鲜明的程式化特征，教学中既要讲清它们的来龙去脉，也要归纳总结它们的操作程序，让学生熟悉解题步骤，提高解题效率.

在选取例题时要注意典型性、示范性、拓展性，要利于理解概念、掌握方法、熟悉技能、提升素质. 在处理具体问题时，应采取实事求是的态度，凡是用向量比较容易解决的问题，就以向量为“通法”来解决；而对有些直接使用“形到形”的综合推理方法比较容易解决的问题，仍用传统方法去对待，并适当地加以比较.

五、评价建议

1. 本章学习的主要内容是空间向量与立体几何，因此也是评价学生学习活动的基本内容，评价中要注重评价学生在本章学习过程中对空间图形位置关系的认识和把握，以及对数学思想方法的理解.

2. 本章的学习过程中有丰富的数学学习活动：动手实践、数学实验、数学推理、数学交流等，因此教学的评价要重视过程性评价、活动性评价、发展性评价，教师在教学中要努力创设情景、激发情感，促进学生的主动学习、主动发展. 关注学习内容对学生数学学习情感、态度和价值观方面的促进性影响，通过多种教学形式和活动，如自主探索、合作交流、阅读自学等方式丰富学生的数学教育的内涵. 如在课堂合作与交流过程中观察每个学生的发展变化，评估学生是否积极主动地参与数学学习活动、是否愿意和能够与同伴交流数学学习的体会、与他人合作探究数学问题，关注他们在数学学习上的信心、资质、习惯、个性、沟通能力、数学认知的发展水平等. 通过教学中师生、生生的对话、交流、活动和探讨对每个学生的学习现状、能力、成绩作出客观、全面、多方位的评估和评价.

3. 本章节的教学评价应特别重视考察学生的图感和数学推演运算能力以及从中感悟内涵的数学思想方法，考察学生能否直观、正确的进行空间图形的画图，对空间图形进行合理、科学的形数转换，对空间图形中几何元素关系的理解，并有条理地表达数学推理与求解问题的过程. 对空间图形和立体几何的感悟和处理能力是衡量学生学习能力的重要标志之一，能力是通过日常作业、测试和教学活动表现出来，比如，看学生是否能利用合情推理进行数学探索，主要是要看在日常的数学学习中，是否具有问题意识，是否善于发现和提出问题，而看学生是否能利用演绎推理进行数学证明，就要看学生是否能对解决问题的方案进行质疑、调整和完善，是否能将解决问题的方案与结果，用书面或口头等形式有条理地表达并进行交流，根据问题的实际要求进行分析、讨论或应用. 对学习能力的评价应贯穿于高中学生数学知识建构、数学交流、问题解决等的全过程.

4. 在具体操作上建议对学分的认定应结合综合素质和学业成绩（小节测试、章末测试）两个部分.

（1）综合素质评价建议采用多样化的方式，主要形式有：

①课堂情况：课堂纪律、参与课堂讨论与发言情况、课堂提问等；

②学习规范：缴交作业、作业完成情况等；

③数学习作：数学制图、数学实践、问题探究等.

（2）阶段评估：小节测试、章末测试.

（3）本章学分权重如下：①课堂情况、学习规范、数学习作等占本章学分的10%；②小节测试成绩占本章学分的30%；③章末测试成绩占本章学分的60%.

问题探索

尝试用向量处理空间图形

教材线索

本“问题探索”主要以必修当中学过的向量知识为基础，通过回顾向量解决平面图形的有关知识和方法进而引入如何用向量解决空间图形的一些问题.

从向量定义（向量是既有大小又有方向的量）可以看出向量并没有限制它必须在平面上，因此向量相关的概念和性质都可以推广到空间中，在平面图形中向量的性质都可以适用于空间图形中.

如，对空间中任意两个用有向线段表示的向量，都可以将这两条有向线段平行移动到同一个平面中，看成同一平面内的向量，来定义它们的加法和数量积，以及它们与实数的乘法. 空间中向量运算也同样满足我们所熟悉的那些运算法则，向量加减法的三角形法则、平行四边形法则，以及向量的运算法则等等.

教学目标

1. 用空间向量解决简单空间图形.

2. 学会用数学类比、转化的观点分析和解决问题，强调过程性学习.

3. 培养学生探索发现问题的能力，拓宽学生的视野.

教材分析

本“问题探索”是空间向量内容的引子部分，着重通过一些具体的例子说明平面向量中的相关知识（如向量加减法的三角形法则和平行四边形法则，向量的数量积等）可以推广到空间立体几何中去. 因此只要通过适当的类比就比较容易实现平面向量向空间向量的过渡，教学中重在让学生能“直观感知”，“合情推理”. 教材中通过实例说明直线的垂直关系与向量数量积的关系，线段的长与向量模的关系等等，迅速建立学生对空间向量的“亲切感”，到达学生学习的“最近发展区”.

教学建议

教学中建议先适当复习平面向量的有关知识，为学习空间向量内容作好基础性的准备工作. 应当让学生了解到单纯地用几何推理或坐标方法解决立体几何问题通常要比解决平面几何问题更难. 我们以前所学的向量定义和运算并不只是平面向量，其实也适用于空间向量，只需要大胆地应用，就可以解决空间中的许多几何问题，有道是“平面空间向量同，不须插翅便腾空”.

本“问题探索”的内容主要是由平面向量的知识、方法、思想推广而来，因此要进行类比推广，合情推理并结合数学的推理证明，促进学生数学素质的提高.

在本“问题探索”的教学中应介绍和归纳利用向量方法解决空间图形问题中的一些常用的解题方法和技能，如“回路”的方法、基向量的方法、求模先平方等方法. 并注意在解题教学中渗透数学的转化思想、数形结合思想.

由于本“问题探索”的内容与学生的知识背景比较贴近，因此教学中可以采用师生互动，学生自主探索相结合的方法开展课堂教学活动.

例题解析

例 1 已知 a，b，c 是任意实数，（1）求证：$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$；（2）求证：$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$.

例 2 已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 是任意向量，（1）求证：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$；（2）求证：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$.

说明 例 1、例 2 中同一字母的意义不同，但是和的平方公式推导方法和结论形式相同，向量形式有更为丰富的几何意义，它与勾股定理、余弦定理之间的联系更为直观.

例 3 长方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$的棱长 $|AB|=a$，$|AD|=b$，$|AA_1|=c$，（如教材 P.100 图 3-2）. 求对角线 AC_1的长度.

说明 长方体是空间的基本图形之一，许多空间向量知识都与之有关，因此认识、熟悉长方体有助于今后学习. 本题求解立足于利用向量的运算来解决空间图形的问题. 教学中应强调利用向量解决图形问题的一个关键就是要在图形中找到一个向量关系式，从图形中

建立一个向量关系式$\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}$，实际上，这是一个向量的“回路”，由此出发就容易解决问题了. 在解题分析中要重点强调基向量和向量模的处理方法，基向量是利用向量解决空间图形问题最为基础、最为重要的一个要点，理解和掌握基向量的作用对于提高解题能力大有帮助.（一般不共面的三个向量都可以作为空间图形的基向量，这一点在后续的学习当中将要涉及，尤其是长方体、正方体的问题通过建立基向量是有效解题的一个常用的策略.）

解题中用到了一个重要的关系：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2+2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})$，它的一般形式为“若干个向量的和平方，等于这些向量的平方和加上每两个向量的数量积”. 这个结论不仅在平面中成立，在空间中依然成立，同时这些结论与实数的性质相类似，在解题中有广泛的应用，要熟练掌握.

例 4　设 $ABCD$ 是平面四边形，则 $AC\perp BD\Leftrightarrow AB^2+CD^2=BC^2+DA^2$.

说明　通过平面向量的三角形法则，类比初中的代数式运算，让学生知道完全平方式的展开，合并同类项，提取公因式等方法在向量运算中依然成立，让学生学会合情推理.

例 5　设 $ABCD$ 是空间四边形，则 $AC\perp BD\Leftrightarrow AB^2+CD^2=BC^2+DA^2$.

说明　本题是平面四边形性质的推广，也是解决一般四面体的图形性质，传统的综合几何知识可以解决此类问题，而利用向量求解则有它的优势和特点. 教学中可以从以下几方面加以分析：（1）通过比较例 4 的证明方法，类比到空间四边形中；（2）引进基向量的作用，可以介绍和比较多种基向量建立的差异和优劣；（3）分析条件和结论的差异，让学生学会通过转换求解. 即问题的条件和结论的差异是：条件是两条直线的垂直关系（几何关系），结论是线段长的一个等量关系（代数关系），（以前我们可以通过添加辅助线转化为直角三角形求解）；（4）用向量解题的关键是利用向量运算的三角形和平行四边形法则.

3.1　空间中向量的概念和运算

教材线索

本节根据平面向量的相关概念和知识具体地进行推广. 如向量的表示法、向量的加减法运算、实数与向量的乘法、向量的数量积及其运算律，并通过具体例子说明向量方法求证两条直线的垂直、向量的化简、空间图形的位置关系等.

教学目标

（一）知识与技能

理解和掌握向量的基本概念、向量的加减法、实数与向量的乘法、向量的数量积及其

运算律，并利用上述知识解决空间图形问题.

（二）过程与方法

运用向量的概念和运算解决问题，学会从多个角度理解问题.

（三）情感、态度与价值观

增强学生求知感，培养求真务实的精神.

教材分析

1. 重点

空间向量的概念和运算律.

2. 难点

空间向量的应用.

3. 本节详细介绍空间向量的具体的概念和运算律及其证明. 在数学必修中学过的平面向量的基础上，类比地引入了空间向量的概念、表示方法、相同或相等关系，空间向量的加法、减法、数乘及这三种运算的运算律. 因此本节内容比较容易为学生所接受.

通过本节的教学，应使学生达到如下要求：

（1）理解空间向量概念，掌握空间向量的几何表示法和字母表示法.

（2）会用图形说明空间向量的加法、减法、数乘及它们的运算律.

4. 在概念教学中注意以下几点：

空间向量的定义、表示方法及其相等关系都与平面向量相同，可在复习平面向量的定义、表示方法及其相等关系后直接给出，然后说明：平面向量仅限于研究同一平面内的平移，而空间向量研究的是空间内的平移；平面上，若以两个同向向量为对边可构成平行四边形，则这两个向量相等，在空间这个结论同样成立.

两个向量不能比较大小，我们只限于研究它们是否相等，而不研究它们哪个大哪个小，原因是每个向量都由长度和方向两个因素构成，其中长度虽然可以比较大小，但方向无法比较大小，所以，一般地说，向量不能比较大小.

根据向量的定义，既有大小又有方向的量称为向量，向量只与大小和方向有关，与位置无关. 所以很容易将以前在处理平面图形时学过的有关知识迁移到空间中，而不需要补充什么新的知识.

（1）空间的一个平移就是一个向量.

（2）向量一般用有向线段表示，同向等长的有向线段表示同一或相等的向量.

（3）空间的两个向量可用同一平面内的两条有向线段来表示，空间任何两个向量都可以看作同一平面内的向量.

（4）着重强调平面向量和空间向量的区别仅仅在于：在空间中比在平面上有更多的不同的方向.

用有向线段表示向量：在向量的表示法($\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$)中强调：从不同点出发的不同的有向

线段$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CD}$，只要方向和长度相同，所表示的向量就相等：$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$，教学中应通过图形直观地说明相等向量、平行向量的关系.

5. 向量运算及其运算律

（1）向量的加减法：在平面图形中向量的加减法可以通过三角形和平行四边形法则进行运算，对于空间任意两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 都看作同一平面内的向量，教学中要求学生能够熟练地利用三角形法则和平行四边形法则在空间图形中进行向量的加减. 熟悉空间中多个依次用首尾相接的有向线段相加的结果等于起点和终点相连的有向线段.

可引导学生通过图形直观说明空间向量的加法的交换律、结合律、向量与实数相乘的运算律成立. 其中 $\lambda\boldsymbol{a}$ 还可引导学生利用分类推论的方法加以说明.

（2）向量的数量积：空间中两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的数量积是向量中一个重要的概念，它涉及向量的模、向量的夹角、向量的垂直、一个向量在另一个向量上的投影. 它在形式和内容上与平面向量的数量积基本一致，可以按照平面向量的数量积的法则进行. 对于两个向量的数量积的公式 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 要特别强调几点：

第一，$\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$，$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2}$；$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.在解题中有广泛的应用，应要求熟练掌握.

第二，向量的数量积是一个实数，可以是正数、负数和零. 避免认为两个向量的数量积是一个正数或者误认为它是一个向量等.

第三，类似平面图形中，$\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影是指$|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$. 两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角公式 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$在空间图形中仍成立. 有关夹角公式的应用在后续的各节中将陆续深入的学习和研究，因此在本节中有关两个向量的夹角的内容不必作深入的研究.

（3）空间向量的数量积的运算律：对于空间向量的数量积的运算律不作过高的要求，只要能够利用图形和具体的向量加以说明和理解即可. 应说明向量乘法的结合律是不成立的，即 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 是不成立. 事实上，$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$表示与 $\boldsymbol{a}$ 平行的向量，而$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 表示与 $\boldsymbol{c}$ 平行的向量. 也可以利用具体的例子说明向量乘法的结合律是不成立.

数量积的运算律可只要求学生类比平面向量数量积的运算律进行记忆，会用，不要求学生会证明.

以下的证明，仅供教师参考.

①$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$的证明.

当 $\lambda=0$ 时，等式显然成立.

当 $\lambda\neq0$ 时，因为$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=|\lambda\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$，

所以，若 $\lambda>0$，则$|\lambda|=\lambda$，$\langle\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$，

$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$；

若 $\lambda<0$，则$|\lambda|=-\lambda$，$\langle\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\pi-\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$，

$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=-\lambda|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos[\pi-\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle]=\lambda|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$.

综上所述，得$(\lambda \boldsymbol{a})\cdot \boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot \boldsymbol{b})$.

②$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$ 的证明.

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$.

③$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$ 的证明.

分配律等价于各个向量和的投影等于各个向量投影的和.

如图 3-1，设$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{a}$ 的单位向量为 $\boldsymbol{a}_0$. 作轴 l 与 $\boldsymbol{a}$ 共线，则$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$. 又设 OB，BC 确定平面 α，OB，OA 确定平面 β，分别过 B，C 作 $BD\perp OA$ 于 D，$CE\perp OA$ 于 E，

则$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DE}$.

$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}_0\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}_0\cdot\boldsymbol{c}$.

上式两边同乘$|\boldsymbol{a}|$，则得 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$.

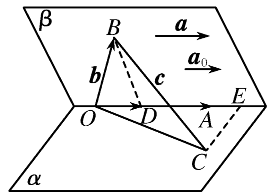


图 3-1

（4）关于数量积的几何意义.

已知向量$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$ 和轴 l，$\boldsymbol{e}$ 是与 l 同方向的单位向量，点 A 在 l 上的射影为 A'，点 B 在 l 上的射影为 B'. 如果用 $A'B'$表示以 A'为起点，B'为终点的有向线段的数量（与 l 同向为正，反向为负），那么 $A'B'$叫作向量$\overrightarrow{AB}$在 l 上（或在向量 $\boldsymbol{e}$ 方向上）的正投影，简称投影，可以证明：

$$A'B'=|\overrightarrow{AB}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}\rangle=|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}\rangle=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}.$$

由此可知，与平面向量一样，空间向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的数量积就是向量 $\boldsymbol{a}$ 的模与 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 方向上的投影$|\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$的乘积.数量积的几何意义在后续学习中有重要作用，因此教学中要重点讲解、多次循环、不断提高.

（5）关于两个向量的夹角.

由于空间中任意两个向量都可转化为共面向量，所以空间两个向量的夹角的定义、取值范围，两个向量垂直的定义和表示符号，以及向量的模的概念和表示符号等，都与平面向量相同.

对于表示两个向量的夹角的符号$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$的教学，除了要求学生理解$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\rangle$外，还应引导学生明确以下几点：

①防止将$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$与表示点的符号$(a,b)$混淆.

②防止混淆图 3-2 和图 3-3 中的两个向量的夹角：图 3-2 的$\angle AOB=\langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\rangle$，图 3-3的$\angle AOB=\pi-\langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\rangle$，就是说$\langle-\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\rangle=\langle\overrightarrow{OA},-\overrightarrow{OB}\rangle=\pi-\langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\rangle$.

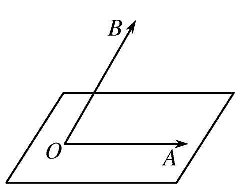


图 3-2

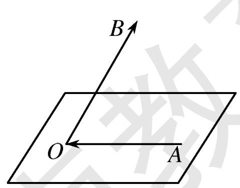


图 3-3

教学建议

本节在平面向量的基础上，类比地引入了空间向量的概念、表示方法、相同或相等关系，空间向量的加法、减法、数乘及这三种运算的运算律. 本节的重点是空间向量的概念、运算和运算律.

本节的内容比较多，但是在形式上学生比较熟悉，所以应注重以旧引新，重在用直观图形说明、重在方法指导、重在知识应用. 在技能上要求学生迅速科学地作出空间图形，有丰富的空间想象能力，通过向量的三角形法则和向量的运算及其运算律进行化简和求值.

教学中应强调：由于空间任意两个向量都可转化为共面向量，所以凡涉及空间两个向量的问题，平面向量中有关结论仍适用于它们(要到空间向量的分解定理、坐标表示及坐标运算时才会显现它们的区别).空间向量加法、减法、数乘的意义及运算律与平面向量类似，教学时要加强直观感知领悟，结合式与图之间的互相转换加深理解，重在学会应用，切忌拔高加深，对公式和法则不要求严格证明，对于学有余力的学生建议课余进行深入的研究.

教学上应注重创设知识情景，合作交流探究，共同研究发现，提高课堂教学的效率.

例题解析

例 1 已知直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$\angle BAC=30^\circ$，$|BC|=1$，$|AA_1|=\sqrt{6}$，M 是棱 CC_1 的中点，(如教材 P. 104 图 3-8)，求证：$AB_1\perp A_1M$.

说明 本题要抓住几点：(1) 基向量的作用；(2) 图形性质与向量关系的转化，即 $AB_1\perp A_1M\Leftrightarrow\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{A_1M}=0$；(3) 数量积公式的应用. 如有条件可以用综合几何方法加以证明，加深对图形和两种解法特点的认识.

例 2 平行四边形 $ABCD$ 平移向量 $\boldsymbol{a}$ 到 $A'B'C'D'$ 的轨迹所形成的几何体，叫作平行六面体，并记作：$ABCD\text{-}A'B'C'D'$. 它的六个面都是平行四边形，每个面的边叫作平行六面体的棱. 已知平行六面体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$，如图 3-4，化简下列向量表达式，并在图中标出化简结果的向量.

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$；　(2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$；

(3) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CC'}$；　(4) $\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'})$.

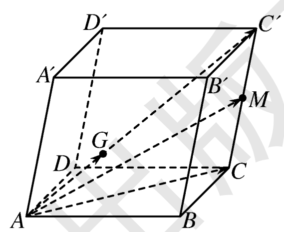


图 3-4

解 (1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$；

(2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$；

(3) 设 M 是线段 CC' 的中点，则 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AM}$；

(4) 设 G 是线段 AC' 的三等分点，则 $\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AG}$.

向量 $\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AC'}$，$\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{AG}$ 如图 3-4 所示.

说明 本题要抓住几点：（1）平行六面体的概念和性质；（2）三角形和平行四边形法则在化简向量加减中的应用，熟悉向量表示的处理方法；（3）熟悉向量中点、三等分点的应用.

例 3 已知空间四边形 $ABCD$，如图 3-5，连接 AC，BD，设 M，G 分别是 BC，CD 的中点，化简下列各表达式，并标出化简结果的向量.

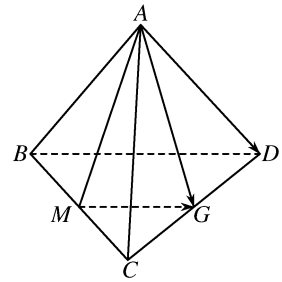


图 3-5

（1）$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$；（2）$\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC})$；

（3）$\overrightarrow{AG}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

解 （1）$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$；

（2）$\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MG}=\overrightarrow{AG}$；

（3）$\overrightarrow{AG}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MG}$.

说明 本题着重讲解向量的三角形法则和向量的中点公式在空间图形中的应用. 应要求学生牢记向量的中点公式.

相关链接

多面体的秘密——欧拉公式

研究图形拓扑性质的方法，可以说是受到欧拉公式的启发，欧拉公式是多面体的顶点数、棱数和面数之间的一个关系，尽管多面体可以千变万化，但这个关系却一定满足，也就是这个关系反映了多面体的本质的拓扑性质.

无论在中国还是外国，正多面体都是最早的研究对象，对于任何的多面体，若用 V 表示顶点数，E 表示棱数，F 表示面数，那么我们数一下，就可以得到下面的表：

	V	E	F
正四面体	4	6	4
正六面体	8	12	6
正八面体	6	12	8
正十二面体	20	30	12
正二十面体	12	30	20

尽管这些数目各不相同，却可以发现，$V-E+F$ 都等于 2，这是不是巧合呢？进一步研究更复杂的多面体，发现这个公式也对，笛卡儿是知道这个公式的. 1750 年，欧拉首先宣布他发现了这个公式，随后又给出了一个证明，尽管他的证明不对，但这个公式后来还是被称为欧拉公式.

那么欧拉公式在什么条件下才成立呢？经过许多数学家的研究，发现只要多面体是实心的（里面没有空洞），只有一个外表面，而且外表面可以变形为环面（和内胎相似），那么不管多面体如何变形，都有 $V-E+F=2$. 总而言之，拓扑学研究图形的某种性质，这种性质在连续变形下不变，这种性质我们可以称为拓扑性质，而在连续变形下不变的量称为拓扑不变量，比如上面讲的 $V-E+F=2$ 就是一种拓扑不变量.

3.2 空间向量的坐标

教材线索

1. 本节内容从平面向量的知识入手，通过类比引入定理 1 和空间向量的基本定理. 并着重介绍了定理 1 和空间向量的基本定理的证明，介绍了空间向量的基本定理在处理空间图形中的初步应用.

2. 从平面向量的坐标表示类比出空间向量的坐标表示以及运算和运算律，进而推出相关的空间向量的模、夹角等概念，并利用相关的知识解决空间图形中有关向量坐标的加减运算、向量的模、平行、三角形的面积等.

3. 初步了解和学习空间向量的坐标应用，贯穿“点 $P\leftrightarrow$ 向量 $\overrightarrow{OP}\leftrightarrow$ 向量 $\overrightarrow{OP}$ 的坐标 (x, y, z)”线索，着重体现几何与代数、向量的转化方法，继续巩固有关距离、向量的模、向量的数量积、向量的夹角、平行、垂直的内容. 通过若干例题和练习达到熟悉相关知识、掌握解题技能、提升数学思想的目的.

教学目标

（一）知识与技能

1. 使学生了解空间向量的基本定理及其意义、掌握空间向量的坐标分解及其坐标表示，并会在简单问题中选用三个不共面向量作为基底表示其他向量.

2. 掌握空间向量的坐标公式，空间向量的坐标运算规律，平行向量与垂直向量坐标之间的关系、距离与夹角公式，会利用向量坐标运算解决简单的向量问题.

3. 理解和掌握空间向量的坐标概念及其初步应用.

（二）过程与方法

1. 会用类比的方法学习空间向量的分解定理，学会用转化的方法将几何问题转化为向量问题.

2. 通过空间坐标系的建立和空间向量坐标运算规律的探索，发展学生的空间想象能

力、探究能力，进一步熟悉类比、由一般到特殊、由直觉猜想到推理论证等思维方法，提高学生的科学思维素养.

（三）情感、态度与价值观

培养学生探索发现以及解决问题的能力. 通过教师的引导、学生探究，激发学生求知欲望和学习兴趣，使学生经历数学思维的全过程，品尝到数学的精妙. 通过空间向量的坐标化方法培养学生探索精神和创新意识，让学生感受数学，体会数学的多样性，激发学生学数学、用数学的热情.

教材分析

1. 重点

（1）空间直角坐标系，向量的坐标运算，空间向量基本定理；

（2）向量的坐标公式及其运算；

（3）空间直角坐标系的建立和向量点的坐标和向量坐标的应用.

2. 难点

（1）空间向量的坐标的确定、运算及其初步应用；

（2）空间向量的坐标运算的运用；

（3）向量坐标的应用.

3. 本节分为三个课时，第一课时：空间向量的分解与坐标；第二课时：空间向量运算的坐标公式；第三课时：点的坐标与向量坐标.

4. 空间向量分解的处理在前面几节课中已经涉及，在本节的第一个课时给予完整详细的叙述和深入的研究. 空间向量分解定理与平面向量基本定理类似. 证明的思路、步骤也基本相同，区别在于基底中多了一个向量，从而分解结果中也多了一“项”. 因此可将空间向量分解定理与平面向量基本定理进行对比教学. 平面是二维的，所以研究平面几何时需要两个基向量，而空间是三维的，所以研究空间图形时需要三个基向量. 因此空间向量分解定理的内容合情合理.

对于 $\boldsymbol{v}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3$ 的唯一性，只要求学生知道和承认，不要求学生证明该结论.

空间向量基本定理说明，用空间三个不共面已知向量组$(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$可以线性表示出空间任意一个向量,而且表示的结果是唯一的.

对于基底 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$，除了应知道 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 不共面，还应明确：

（1）空间任意三个不共面向量都可以作为空间向量的一个基底. 这三个基底可以两两垂直，也可以没有垂直关系，而只要求它们是不共面的就可以，这就使得基底的应用具有简易性、灵活性和广泛性.

（2）一个基底是指一个向量组，一个基向量是指基底中的某一个向量，二者是相关联的不同概念. 应让学生熟练掌握$\overrightarrow{OP}=2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3=(2,3,1)$的直观意义和作图方法.

（3）定理 1 所建立的基底在涉及长方体的问题中常常用到. 定理 2 的使用范围更为广泛

和灵活，定理 2 的应用对基本功和能力都有较高的要求，因此在初学阶段要求要适度，讲解要精细，可通过典型例题（如教材 P. 111 例 3）选择不同的基底组说明基底选择的灵活性和多样性，并从中选择最优的选择方法.

线性组合的概念是数学中常用的一个重要概念，有助于学生领会空间向量的基本定理.线性组合在数学中的许多知识有应用，如直线方程的一般式 $Ax+By+C=0$ 是 x，y 的线性组合.

可介绍 $\boldsymbol{v}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3$ 中 x，y，z 的意义是向量 $\boldsymbol{v}$ 在 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 上的投影，且 x，y，z 均为实数.

5. 第二个课时的主要内容有：空间向量加减、数乘、数量积运算的坐标表示、平行向量、垂直向量之间的关系，向量长度公式、两向量夹角公式、空间两点间的距离公式.

空间向量的坐标运算是在学生学习了空间向量几何形式及其运算、空间向量基本定理的基础上进一步学习的知识内容，是平面向量坐标运算及其研究方法在空间的推广和拓展，沟通了代数与几何的关系，丰富了学生的认知结构，为学生学习立体几何提供了新的视角、新的观点和新的方法，给学生的思维开发提供了更加广阔的空间，为运用向量坐标运算解决立体几何问题奠定了知识和方法基础.

空间向量的坐标运算，加法、减法和数量积与平面向量类似，具有类似的运算法则，教学中可类比推广. 教师应抓住空间向量的坐标表示这一根本去突破，即向量 $\boldsymbol{a}$ 在平面是用唯一确定的有序实数对表示，在空间也是这样定义的，不同点仅是向量在不同空间具有不同的表达形式，如在平面上 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$，在空间中 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$，不论在平面还是在空间都有 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$.

空间两向量平行和平面两向量平行的表达式是不一样的，但实质是一致的，即对应坐标成比例，且比值为 λ. 空间两向量垂直同平面两向量垂直的公式类似.

空间向量长度公式是表示向量的长度，其形式于平面向量长度一致，教学时可用类比的方法进行，它的几何意义是表示长方体对角线的长度.

夹角公式可根据数量积的定义 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$，结合空间向量数量积、空间向量长度的坐标表示推出，其范围是 $0°\leqslant\theta\leqslant180°$，应向学生指明当 $\theta=0°$，$90°$，$180°$时，两向量的位置关系，这时可结合图形加以说明.

两点间距离公式是长度公式的推广，根据向量减法推出向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标表示，然后再用长度公式推出. 两点间的距离公式与向量的模、一个向量与自身的数量积、向量的坐标有密切的关系. 将空间向量的运算与向量的坐标表示结合起来不仅可以解决一些夹角和距离的计算问题，而且起还可以使一些问题的解决变得简单.

6. 第三个课时的内容是空间向量坐标运算与应用的一节承上启下的练习课. 点 $P\leftrightarrow$ 向量 $\overrightarrow{OP}\leftrightarrow$ 向量 $\overrightarrow{OP}$ 的坐标 (x,y,z)，实现了几何与代数、向量的实质性转化，是今后利用向量知识解决问题的重要指导思想之一.

教材的叙述过程提供了几何向坐标转化的重要途径——基底（着重介绍空间直角坐标系），实现$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3$到点$P$的坐标$(x,y,z)$的转化.

应强调当以O为原点，分别以$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$方向为x轴、y轴、z轴的正方向，以$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$共同的长度为单位长，建立空间直角坐标系（这时也称$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$为单位正交基底），则点$P$在此坐标系下的坐标就是向量$\overrightarrow{OP}$的坐标$(x,y,z)$.

有向线段的向量坐标表示、向量的模、两点间的距离、线段的中点坐标都是平面向量相关知识的推广，也是空间向量应用中的基础知识，应给予强化.

教学建议

1. 本节的内容和方法基本都是平面向量的推广，所以教学中要注意比较、归纳、类推，从平面向量的向量分解定理出发容易迁移到空间向量的分解定理.

第一课时的“重头戏”是空间向量的基本定理，价值在于引进了基向量，使得空间图形的研究不仅可以用综合几何加以解决，也可以用向量方法加以解决. 因此教学时要注意细讲与精练相结合，对典型问题可以用综合几何方法和空间向量方法进行比较，加深对空间向量方法的理解.

利用空间向量的分解定理表示向量有一定的技巧性和操作性，教学中应着重介绍通性通法，或通过向量加法的三角形法则，或利用待定系数法，并要求熟悉一些常用的向量分解式：如向量的中点形式、平行四边形法则、平行六面体的体对角线向量可以表示为从一点出发的不共线向量的和（如教材 P. 106 例 1 ）.

由于学生有平面向量的分解定理的基础，因此学生比较容易接受，在教学中应教师主导与学生的主体参与相结合，教师适当点拨，学生参与，交流探究，在学习的过程中掌握数学知识、理解数学思想.

2. 通过本节的教学，应使学生掌握空间向量的坐标运算规律：会根据向量的坐标，判断两个向量共线或垂直；掌握向量长度公式、两向量的夹角公式、空间两点间距离公式；并会用这些知识解决简单立体几何问题. 由于向量的坐标公式涉及较多的向量运算问题，因此要求学生对向量坐标运算的算理、算法、算式要正确理解、融会贯通，对学生的解题规范、解题步骤、运算能力都要落实到位.

鉴于向量兼容了代数、几何的特色，有着其独特的魅力和发展前景，安排几个例题让学生感受“向量坐标法”的特点和解题的过程，让学生掌握向量坐标法的解题程序，切实落实“双基”要求.

教学时可采用“启发探究”和“类比”的教学方法，（1）由教材的特点确立类比思维为教学的主线.（2）根据学情特点可以采用自主探索，交流讨论式的教学方法. 在教学中通过类比引导，启发学生运用科学的思维方法进行自主探索. 将学生的独立思考、自主探究、交流讨论等探索活动贯穿于课堂教学的全过程，突出学生的主体地位. 注重学生学习数学的感受和体验.

3. 本节教学中不仅要求会利用向量的坐标运算求解空间图形问题，而且要从中进行方法的归纳小结（如，利用空间向量的坐标解题的一般步骤），思想的提升（如，位置向量——有向线段——向量坐标体现了向量所具有的数与形的两面性）

第三课时主要学习利用空间直角坐标系解决几何问题. 解题时要注意它的一般步骤：(1) 建立空间直角坐标系；(2) 写出相关点的坐标；(3) 用坐标表示向量的坐标；(4) 解决相关的几何问题.

由于空间直角坐标系是在仿平面直角坐标系的基础上建立的，因此教学中要通过类比推广，在解题指导时提醒学生注意：(1) 单位正交的基底 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 对于建立空间直角坐标系的意义和作用；(2) 解题中选择坐标系时，应注意点 O 的任意性，原点 O 的选择要便于解决问题，既有利于作图的直观性，又要尽可能使各点的坐标为正数.

空间中的点的坐标，如果先建立坐标系再用几何方法作图，比较复杂难懂. 我们用 3 个两两垂直的单位向量做成 3 把“尺子”来度量空间向量得到空间向量的坐标，再将空间每个点 P 对应于从原点出发的有向线段所表示的向量$\overrightarrow{OP}$，用$\overrightarrow{OP}$的坐标作为点 P 的坐标，按照这样的思路，向量和点的坐标运算的相关公式很容易就得出来了. 用一句通俗的话来概括就是“三把尺子量乾坤”.

本节内容操作性、训练性和基础性都比较强，一方面要强调解题的书写规范和步骤，另一方面要引导学生用数学思想方法来指导解题. 在教学中可采用讲练结合的方法，师生互动交流，提高教学效率.

例题解析

例 1 长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长 $|AB|=a$，$|AD|=b$，$|AA_1|=c$，(如教材 P. 106 图 3-9). 求对角线 AC_1 的长度.

说明 本题与本章第 1 个“问题探索”中例 3 一样，在“问题探索”中，我们用向量的有关知识解决过这个问题，现在用向量分解的方法来求解它，可以获得对向量分解方法一个直观的了解. 要说明 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 的具体意义，由于本题的结论在今后解题中有广泛的应用，建议学生牢固掌握. 要求学生注意图形中的垂直关系在解题中的作用.

例 2 已知平行六面体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$，如图 3-6，设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{e}_1$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{AA'}=\boldsymbol{e}_3$，试用基底 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 表示以下向量$\overrightarrow{AC'}$，$\overrightarrow{BD'}$，$\overrightarrow{CA'}$，$\overrightarrow{DB'}$.

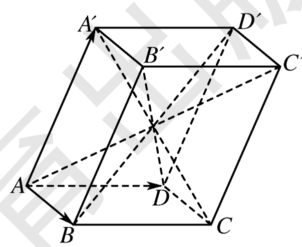


图 3-6

解 $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$，

$\overrightarrow{BD'}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD'}=-\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$，

$\overrightarrow{CA'}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AA'}=-\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$，

$\overrightarrow{DB'}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB'}=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$.

点评 本题通过利用平行六面体和向量加减法的三角形法则来加深对空间向量基本定理的理解. 让学生熟悉平行向量、向量加法的三角形法则的综合应用. 要求熟悉平行六面体这个空间基本图形中相关的图形和向量的性质.

例 3 已知空间四边形 $OABC$，M，N 分别是对边 OA，BC 的中点，点 G 在 MN 上，且 $MG=2GN$，如图 3-7，设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，试用基底 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 表示向量 $\overrightarrow{OG}$.

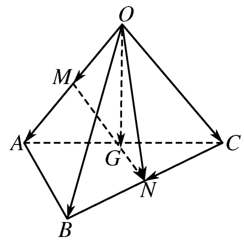


图 3-7

解 $\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MG}=\overrightarrow{OM}+\frac{2}{3}\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CN})$

$$=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\right]$$

$$=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{c}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}-\frac{1}{3}\boldsymbol{c}=\frac{1}{6}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}+\frac{1}{3}\boldsymbol{c}.$$

点评 本题介绍一般的四面体常用的基向量的选择方法，要求熟悉线段中点的向量分解形式. 教学时不妨选用多种基向量组，并加以比较，让学生熟悉基底的选择方式，培养学生良好的空间感和体会基向量在处理空间图形中的优势.

例 4 已知 $\boldsymbol{a}=(3,-2,4)$，$\boldsymbol{b}=(-2,5,-3)$，求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$3\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

解 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3,-2,4)+(-2,5,-3)=(1,3,1)$，

$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(3,-2,4)-(-2,5,-3)=(5,-7,7)$，

$3\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}=3(3,-2,4)-5(-2,5,-3)$

$=(9,-6,12)-(-10,25,-15)=(19,-31,27)$，

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(3,-2,4)\cdot(-2,5,-3)=3\times(-2)+(-2)\times5+4\times(-3)=-28.$

点评 本题是向量坐标公式的直接应用，是一道基础性问题，要求能够熟练正确地进行向量坐标的加减运算、数量积. 并通过与平面向量的加、减、数量积运算相比较，体会空间向量运算是平面向量运算的拓展.

例 5 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,-1,3)$，求向量 $\boldsymbol{b}$，使得 $\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{a}$，且 $|\boldsymbol{b}|=3|\boldsymbol{a}|$.

解 $\because \boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}=(2,-1,3)$， $\therefore$ 可设 $\boldsymbol{b}=\lambda(2,-1,3)$，

由 $|\boldsymbol{b}|=3|\boldsymbol{a}|$ 得 $|\lambda(2,-1,3)|=3|(2,-1,3)|$，解得 $\lambda=\pm3$.

$\therefore \boldsymbol{b}=(6,-3,9)$ 或 $\boldsymbol{b}=(-6,3,-9)$.

点评 本题如果用待定系数法设 $\boldsymbol{b}=(x,y,z)$，需要建立关于 x,y,z 的方程，从思路上是合理的，但是过程比较繁琐，而从 $\boldsymbol{b}=\lambda(2,-1,3)$ 入手就简明了，只需求一个未知数，大大提高了解题效率.

涉及向量的坐标公式和数量积、模等的运算，要求学生选择正确、简明的方法进行求解. 也可以通过不同的解法进行比较来提升学生的解题能力. 要强调在空间中 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow \boldsymbol{a}_1=\lambda\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{a}_2=\lambda\boldsymbol{b}_2$，$\boldsymbol{a}_3=\lambda\boldsymbol{b}_3(\lambda\in\mathbf{R})$ 是解决有关平行问题的一个常用工具.同时也可以通过此题，将空间向量与平面向量的平行性质进行类比，从而让学生学会用类比的方法来学习空间向量知识.

例 6 已知三角形的顶点是 $A(1,-1,1)$，$B(2,1,-1)$，$C(-1,-1,-2)$，试求：(1) $\angle A$ 的正弦；(2) 这个三角形的面积.

解 $\because \overrightarrow{AB}=(1,2,-2),\overrightarrow{AC}=(-2,0,-3)$，

$\therefore |\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}=3$，

$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(-2)^2+0+(-3)^2}=\sqrt{13}$，

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(1,2,-2)\cdot(-2,0,-3)=-2+6=4$.

$$\therefore \cos A=\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\frac{4}{3\times\sqrt{13}}=\frac{4\sqrt{113}}{39}.$$

$$\therefore \sin A=\sin\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle=\sqrt{1-\cos^2\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle}=\frac{13\times\sqrt{101}}{39}.$$

$$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\sin A=\frac{\sqrt{101}}{2}.$$

点评 本题利用向量的坐标运算解决求角和求三角形的面积问题，让学生了解向量数量积公式在求角和求解三角形面积中的作用.

对于已知空间三角形的三个顶点坐标求角的问题，利用向量的数量积比用余弦定理求解更为简明流畅，也更具实用意义.

例 7 在空间中建立了直角坐标系，设两点 A，B 的坐标分别是 $(x_1,\ y_1,\ z_1)$，$(x_2,\ y_2,\ z_2)$，(如教材 P. 112 图 3-11).

(1) 求向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标；

(2) 求两点 A，B 之间的距离；

(3) 求线段 AB 中点 M 的坐标.

说明 本例主要说明向量 $\overrightarrow{AB}$、两点间距离、线段中点与 A，B 两点坐标之间的联系，这些结论比较简单，但是给我们提供了许多有用的工具，应要求熟练掌握.

例 8 已知 $\boldsymbol{a}=(1-t,1-t,t)$，$\boldsymbol{b}=(2,t,t)$.求 $|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|$ 的最小值.

解 $\because \boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=(2,t,t)-(1-t,1-t,t)=(1+t,2t-1,0)$，

$$\therefore \boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\sqrt{(1+t)^2+(2t-1)^2}=\sqrt{5t^2-2t+2}\geqslant\frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

$\therefore |\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|$ 的最小值为 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

点评 本题着重巩固向量的模与距离公式的内容，以及向量模的最值的求法. 应引导学生用函数的观点分析、解决问题，先建立函数关系，再求函数的最值.

例 9 已知 $A(1,0,0)$，$B(0,1,0)$，$C(0,0,2)$，求满足 $DB\parallel AC$，$DB\parallel AB$ 的点 D 的坐标.

解 设 $D(x,y,z)$，则 $\overrightarrow{DB}=(-x,1-y,-z)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,0,2)$，$\overrightarrow{DC}=(-x,-y,2-z)$，

$\overrightarrow{AB}=(-1,1,0)$，

$\because DB /\!/ AC$，$DB /\!/ AB$，

$\therefore \overrightarrow{DB} /\!/ \overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{DB} /\!/ \overrightarrow{AB}$.

$$\therefore \begin{cases} \dfrac{-x}{-1}=-\dfrac{z}{2}, \\ 1-y=0, \\ \dfrac{-x}{-1}=-\dfrac{y}{1}, \\ 2-z=0. \end{cases} \quad 解得 \begin{cases} x=-1, \\ y=1, \\ z=2. \end{cases} \quad 因此点 D 的坐标为 D(-1,1,2).$$

点评 本题说明向量的平行与向量坐标之间的联系，应贯穿转换与化归的思想方法，即在空间中一个向量关系式可以化归为三个代数方程，实现了向量问题向代数问题的转化.

相关链接

数与形的联姻——坐标

解析几何学的诞生是数学思想的一次飞跃，它代表形与数的统一，几何学与代数学的统一，解析几何学的基本内容是：

(1) 引进坐标，使点与数对应.

(2) 使方程与曲线（或曲面）等相互对应.

(3) 通过代数或算术方法解决几何问题，反过来对于代数方程等给出几何直观的解释.

由于几何学的代数化或算术化大大扩展了几何学的研究领域并弥补了综合方法的不足，为后来的数学发展指出了一条康庄大道.

朴素的坐标观念在古希腊甚至古埃及就已经有了，经纬度观念也早就有了，但坐标轴一直到 17 世纪中叶才引入，到 17 世纪末斜角坐标系才普遍使用，这时其余的坐标系也在考虑. 牛顿在 1671 年写成的《解析几何》的手稿，除了以直线为参照系的斜角坐标系及直角坐标系之外，还提出了另外八种坐标系，其中包括极坐标及双极坐标系，并利用它们研究了一系列几何及微积分问题，特别用极坐标研究螺线. 瑞士数学家赫尔曼则于 1729 年正式宣布用极坐标研究轨迹同笛卡儿坐标一样好用，他用 ρ，$\cos\theta$，$\sin\theta$ 为变元，分别用 z，n，m 表示，他还给出由直角坐标系转换成极坐标的一般公式.

最常用的平面解析几何的坐标变换公式为直角坐标 (x,y) 与极坐标 (ρ,θ) 的相互变换，其公式如下：

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta, \\ y=\rho\sin\theta \end{cases} \quad 及 \begin{cases} \rho=\sqrt{x^2+y^2}, \\ \tan\theta=\dfrac{y}{x}. \end{cases}$$

3.3 直线的方向向量

教材线索

处理空间图形中两条直线的关系→两条直线所成的角→直线的方向向量的成角，体现数学转化思想方法的应用. 教材以直线的方向为线索，建立空间直线方向向量的概念，从而为研究空间两条直线垂直、平行、成角关系奠定了基础. 即 $AB\perp CD\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$，$AB/\!/CD\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$，$k\in\mathbf{R}$，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CD}$成角$\Leftrightarrow\cos\alpha=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{CD}|}$，并通过几个典型的例题和练习来帮助学生理解和掌握这些内容.

立体几何中有一些基本的计算问题，例如求异面直线的夹角和距离、直线与平面的夹角、两个平面的夹角、点到平面的距离、两个平行平面的距离等，传统的中学教材给出了这些概念的定义，但是没有给出一般的计算方法，只能在某些特殊情形下直接利用定义来计算.

然而，利用向量可以将这些问题彻底解决.

解决这一系列计算问题的“万能钥匙”是：

1. 直线 a 的方向用它的方向向量（与 a 平行的非零向量）$\boldsymbol{a}$ 来表示.

2. 平面 π 的方向用它的法向量（与 π 垂直的非零向量）$\boldsymbol{n}$ 表示.

掌握了这两把“万能钥匙”，解决有关直线、平面的角度和距离问题就可以所向披靡了. 在所有的情况下，这些问题都可以通过直线的方向向量、平面的法向量转化为向量的运算问题，用现成的算法来解决.

1. 角度问题：

异面直线 a，b 所成的角＝方向向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 所成的角.

直线 a 与平面 π 的夹角＝直线的方向向量 $\boldsymbol{a}$ 与平面的法向量 $\boldsymbol{n}$ 所成角的余角. 特别地，直线 a 垂直于平面 $\pi\Leftrightarrow\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{n}$；直线 a 平行于平面 $\pi\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{n}$.

两个平面 π_1，π_2 所成的角＝它们的法向量 $\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{n}_2$ 所成的角. 特别地，$\pi_1/\!/\pi_2\Leftrightarrow\boldsymbol{n}_1/\!/\boldsymbol{n}_2$；$\pi_1\perp\pi_2\Leftrightarrow\boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2$.

2. 距离问题：

点到平面的距离＝点到平面的任一向量在平面的法向量上的投影长.

异面直线的距离＝连接两条直线的任一向量在它们的公垂向量上的投影长.

直线的方向向量是解决空间向量的“万能钥匙”，它是破解空间几何问题的有力工具.

教学目标

（一）知识与技能

理解直线方向向量的概念，掌握利用直线方向向量求解两条直线成角的方法.

（二）过程与方法

学会用转化思想、方程思想解决空间两条直线的成角问题，促进技能与思维能力的同步发展.

（三）情感、态度与价值观

体验数学问题解决过程，增强研究数学问题的兴趣和能力

教材分析

1. 重点

直线的方向向量及其应用.

2. 难点

直线方向向量的应用.

3. 介绍引入直线方向向量的合理性和必要性. 通过分析空间图形中涉及的两条直线所成的角，涉及两条直线的垂直和平行关系. 其中直线的垂直和平行是两条直线成特殊角的情形，垂直是两条直线成直角的情形，平行是两条直线不重合且成 0° 的情形. 从中发现两条直线所成角的核心和本质与两条直线的方向有关，与直线所处的位置没有关系. 因此用直线的方向向量来刻画空间直线的位置关系是合理、直观和科学的.

4. 关于直线的方向向量概念

如果向量 $\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}$ 与直线 l 平行，就称 $\boldsymbol{v}$ 是 l 的方向向量. 要注意的是方向向量是非零向量.

直线的方向可以用向量来表示：在直线 l 上任取两个不同点 A,B，则有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 所代表的向量 $\overrightarrow{AB}$ 就表示直线的方向，称 $\overrightarrow{AB}$ 为直线 l 的方向向量. 当然，$\overrightarrow{BA}$ 也是直线 l 的方向向量. 强调直线的方向向量只与有向线段有关，而与直线的位置无关.

在解析几何中用直线方程的倾斜角、斜率来刻画直线的倾斜程度，现在用直线的方向向量来刻画直线的位置. 虽然形式略有不同，但本质是一致的. 因此倾斜角——斜率——方向向量既有区别又有联系.

从定义可以看出一条直线的方向向量应该是非零的，同时根据向量的知识，如果 $\boldsymbol{v}$ 是直线 l 的方向向量，则 $k\boldsymbol{v}(k\neq0,k\in\mathbf{R})$ 也是直线的方向向量.引入方向向量为解决空间直线的成角问题提供了一条简明的思路.

5. 两条直线的成角问题.

空间两条直线的成角问题一般可以转化为两条直线的方向向量的成角，利用向量的数量积公式 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 求解，这与平面图形中向量的数量积形式是一样的，只是使用范围更为广泛，因此学生是比较容易接受的.

由于两条直线 AB，CD 所成的角 α，只要先计算它们的方向向量 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CD}$ 所成的角 α_1，如果 $0\leqslant\alpha_1\leqslant\frac{\pi}{2}$，则 $\alpha=\alpha_1$；如果 $\frac{\pi}{2}<\alpha_1\leqslant\pi$，则 $\alpha=\pi-\alpha_1$. 角 α_1 可以通过计算 $\cos\alpha_1$ 得到：$\cos\alpha_1=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CD}|}$，则不论 α_1 是否大于直角，都可以由 $\cos\alpha=|\cos\alpha_1|=\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CD}|}$ 得出 α.这里取绝对值就保证了异面直线的成角范围为 $0<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$.

由于向量的表示有几何形式（有向线段）以及坐标形式，因此解决空间两条直线的成角问题的工具有两种选择，上述的两个例子着重是用向量的几何形式，如果问题的图形比较特殊，易于进行坐标运算，那么运用坐标的方法也是一种简明有效的解题方法.

教学建议

本节内容是平面向量中有关直线方向向量的延伸，是利用向量解决空间图形问题的一个重要工具，同时思想内涵丰富、解题操作性比较强.

教学应从具体应用实例入手，通过简单、直观的例题说明利用直线的方向向量解决问题的益处，对典型的例题可通过与综合几何的解法作比较，让学生感受到向量方法的优越性和独特性.

可通过例题教学阐述数学思想方法的应用，如数形结合、化归与转化，让学生用转化的观点、数形结合的思想来观察问题、分析问题、解决问题.

本节课着重研究的是直线的方向向量的应用，两条直线的垂直、平行、夹角关系，涉及的知识比较多，因此要注意适时复习和巩固有关直线、向量的知识和图形的几何性质，特别要强化对特殊图形（如正四面体、正方体、正棱锥等）的了解和应用，提高学生解题能力.

例题解析

例 1 已知单位正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$，点 E，F 分别是棱 B_1C_1 和 C_1D_1 的中点，(如教材 P. 115 图 3-14). 求 AD_1 与 EF 所成的角.

说明 熟悉正方体中建立的直角坐标系；快速写出相关点的坐标、相关向量的坐标，并求两条直线的夹角.

例 2 若一非平面四边形对边长相等，证明两对角线中点连线垂直于两对角线.

说明 证法 1 将 $2\overrightarrow{MN}$ 分解成 $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$ 后灵活运用余弦定理和向量夹角公式则显得简单一些. 证法 2 需多次将 AC 作变形，难度较大. 它的好处是得出了 $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{AD}^2-\overrightarrow{CD}^2)$ 这一本质结论，虽然这一结论对于本题来说并没有太大的意义，但对今后学习有莫大好处. 特别注意关于线段的相等问题常常通过平方进行转化也是一种有效的处理方法.

（一）空间向量的夹角与相关系数

通过两个向量 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ 夹角的余弦 $\cos\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle$，我们可以知道这两个向量是否很靠近(这时 $\cos\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle$接近 1)，或反向(这时 $\cos\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle$接近$-1$)，或不相关,即接近于垂直(这时 $\cos\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle$接近于 0).

假设 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 是来自试验的数据. 例如，$\boldsymbol{x}$ 是 10 个学生数学考试的得分向量，而 $\boldsymbol{y}$ 是这 10 个学生物理考试的得分向量. 设 0 是每次考试的平均得分，使得正得分是一个在平均分以上的成绩，负得分是一个在平均分以下的成绩. 这时，$\cos\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle$告诉我们两个向量如何密切相关，并且有助于我们预测未来数学和物理考试之间的关系. 假如 $\cos\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle$为 0.8，那么这两次考试的成绩密切相关，我们也能从这个学生在一次数学(物理)考试中的成绩,有效地预测他在物理(数学)考试中的成绩.假如可能取得一个低于平均分的分数. 比如 $\cos\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle$接近于 0，那么这两个成绩几乎不相关,不能通过一个考试的成绩预测另一个考试的成绩.

实际上，我们知道 $\boldsymbol{x}$ 的平均值一般是不为 0 的，$\bar{\boldsymbol{x}}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{x}_i$，这时可以由每一个 $\boldsymbol{x}_i$ 减去 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 得到一个以 0 为平均值的修正向量，对于 $\boldsymbol{y}$ 也可以进行同样的工作，这时的夹角公式变为：

$$\cos\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=\frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(\boldsymbol{x}_i-\bar{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{y}_i-\bar{\boldsymbol{y}})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(\boldsymbol{x}_i-\bar{\boldsymbol{x}})^2\sum\limits_{i=1}^{n}(\boldsymbol{y}_i-\bar{\boldsymbol{y}})^2}}.$$

（二）直线的向量方程

给定一个定点 A 和一个向量 $\boldsymbol{a}$,再任给一个实数 t,以 A 为起点作向量$\overrightarrow{AP}=t\boldsymbol{a}$. ①

这时点 P 的位置被完全确定，当 t 在实数集 $\mathbf{R}$ 中取遍所有值时，点 P 的轨迹是一条通过点 A 且平行于向量 $\boldsymbol{a}$ 的直线 l.

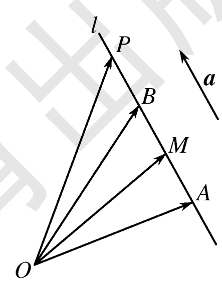


图 3-8

反之，在直线 l 上任取一点 P，一定存在一个实数 t，使$\overrightarrow{AP}=t\boldsymbol{a}$，向量方程$\overrightarrow{AP}=t\boldsymbol{a}$ 通常称为直线 l 的参数方程，向量 $\boldsymbol{a}$ 称为该直线的方向向量.

直线的向量方程$\overrightarrow{AP}=t\boldsymbol{a}$，还可以如下表示：对空间任一个确定的点 O，如图 3-8，点 P 在直线 l 上的充要条件是存在唯一的实数 t，满足等式$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\boldsymbol{a}$. ②

如果在 l 上取 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，则②式可化为

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\,\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+t(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}),$$

即 $\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\,\overrightarrow{OB}$.　　③

①，②，③都称为空间直线的向量参数方程，它们都与平面的直线向量参数方程相同.

在③中当 $t=\dfrac{1}{2}$ 时，我们就可以得到线段中点的向量表达式. 设 M 是线段中点，则 $\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$，这就是线段 AB 中点的向量表达式.

3.4　直线与平面的垂直关系

教材线索

通过回顾必修中有关直线与平面的垂直关系引入立体几何的重要定理（三垂线定理及其逆定理)，教材以例题的形式介绍了三垂线定理及其逆定理的内容和向量的证明方法，并利用三垂线定理和逆定理证明空间图形中的若干问题.

教学目标

（一）知识与技能

1. 理解掌握三垂线定理及其逆定理的内容，弄清定理中的三种垂直关系.

2. 能够运用三垂线定理及其逆定理论证和解决有关问题.

（二）过程与方法

1. 通过问题的探索，培养学生的空间想象能力、逻辑思维能力和转化能力.

2. 能够用“线线垂直”⇒“线面垂直”及“线面垂直”⇒“线线垂直”.

（三）情感、态度与价值观

1. 通过观察、分析、发现、探索、找出结论，激发学生学习兴趣.

2. 培养学生主动探索、发现的精神，揭示正逆定理的对立统一关系.

教材分析

1. 重点

三垂线定理及其逆定理的证明和初步应用.

2. 难点

三垂线定理及逆定理中各线、面的作用.

3. 教学中应注意以下几点：

（1）本节是必修中直线与平面位置关系的继续和深入，涉及的概念比较多，如正射影（射影），斜线，垂线等，明确这些概念的定义和几何背景是学好三垂线定理的前提，因此教学中回顾和复习是十分必要的.

（2）三垂线定理和逆定理是立体几何的重要定理之一，教材的篇幅不大，但是教学处理的回旋余地广阔，深入挖掘定理的内涵有助于学生理解和掌握.

（3）对于定理可从以下几方面加以阐释.

①认清定理中一面和四线：平面 α，α 的斜线 AB，垂线 BB'，AB 在 α 上的射影 AB' 及平面 α 内的直线 m. “一面四线”中面的垂线是关键，运用三垂线定理解题时，首先要确定平面 α，再抓住面的垂线 BB'，其他直线则相应产生，即可在各种变式情况下分清各元素的关系.

②三垂线定理体现了一种重要的数学转换思想，即：线⊥线$\xrightarrow{\text{判断}}$线⊥面$\xrightarrow{\text{性质}}$线⊥线.

③三垂线定理证明过程中充分发挥了向量加法法则和向量的数量积，这种方法正是利用向量解决空间图形问题常用的方法和工具.

（4）三垂线定理和逆定理既有联系又有区别：

从条件上看，三垂线定理的条件是“和射影垂直”；其逆定理的条件是“和斜线垂直”.

从功能上看，三垂线定理用于解决已知共面垂直，证明异面垂直的问题；逆定理正好相反.

（5）强调三垂线定理及其逆定理的作用.

三垂线定理和它的逆定理都是反映空间直线和直线垂直的，是判定空间两条直线垂直的常用工具. 三垂线定理和它的逆定理都涉及四条直线：平面内的一条直线，平面的一条垂线，平面的一条斜线，斜线在平面内的射影. 平面内的这条直线，有三条直线和它垂直，三垂线定理因此而得名. 显然平面内的这条直线垂直于那三条直线所在的平面. 口诀“垂直射影，则垂直斜线”与“垂直斜线，则垂直射影”.

用三垂线定理及其逆定理证明线线垂直的关键在于构造三垂线定理的基本图形，创设应用定理的环境. 构造三垂线定理基本图形时要抓住下面三个环节：①确定投影面；②作出垂线；③确定射影. 在应用三垂线定理时，具体题目的图形可能不像教材中图形那样标准、一目了然，所以必须牢牢抓住定理的实质，善于从题设条件中找到“一面四线”，从而发现解题的思路.

（6）熟悉几个常用结论

三垂线定理内容有许多应用的结果，熟悉其中一些常用的结论有助于增强空间图形感，提高解题效率.

如果一个角所在平面外一点到角的两边距离相等，那么这一点在平面内的射影在这个

角的平分线上.

经过一个角的顶点引这个角所在平面的斜线，如果斜线与这个角两边的夹角相等，那么斜线在平面内的射影是这个角的平分线所在直线.

空间四边形 $ABCD$ 中，有下列常用结论：

①若 $AB=AC=AD$，则点 A 在面 BCD 内的射影为 $\triangle BCD$ 的外心.

②若点 A 到边 BC，CD，BD 的距离相等，且射影在 $\triangle ABC$ 内部，则点 A 在面 BCD 内的射影为 $\triangle BCD$ 的内心.

③若 $AB\perp CD$，$AC\perp BD$，则点 A 在面 BCD 内的射影为 $\triangle BCD$ 的垂心.

④若 $AB\perp CD$，$AC\perp BD$，则 $AD\perp BC$.

以上结论都可以用三垂线定理进行证明，这些结论是用来确定点、斜线在平面内的射影位置的重要方法和依据，必须牢固掌握.

教学建议

三垂线定理有丰富的数学问题情境，创设问题情境有助于激发学生的学习情感，如利用学生再熟悉不过的订书机来“发现”定理，通过学生动手操作简单直观的模型，吸引学生发现问题，逐次抽象，揭示本质，即空间中的斜线、射影、射影面内的直线这样三条线的垂直关系. 这样可以把教学内容与启动思维有机地结合起来. 加强对学生学习方法的指导和培养，使学生从“学会”到“会学”，可借助数学模型，进行数学实验，在此基础上进行抽象和论证，培养学生“观察—猜想—证明”的科学学习方法.

三垂线定理和逆定理既有联系又有差异，教学中应对三垂线定理和逆定理进行比较归纳，为了完整准确地认识定理，帮助学生对比分析两个定理，归纳为两点：

(1) 两个定理是有区别的统一的整体. 区别在于三垂线定理是“知与射影垂直，推出与斜线垂直”，而逆定理正好相反；同时，两个定理又是一致的，统一在斜线与射影共同垂直于射影面内的直线；

(2) 定理的作用是判定直线与直线垂直，并根据定理的依据是直线和平面垂直，强调指出应用的关键是“找平面的垂线”.

三垂线定理在本节中较多的体现了综合几何的特征，教学中应科学定位，将三垂线定理作为空间图形的解题工具，而向量方法应是处理问题的灵魂，在三垂线定理证明中用的是向量方法而不是传统的综合几何方法，体现向量在解决空间图形中的作用和地位（教材这里并不用综合几何的方法证明，说明教学中应突出向量的地位），因此教学中例题的取舍，解题方法的选择，教学方式的处理都要有所讲究.

同时本节课的篇幅不大，对三垂线定理内容的定位要适当，避免难、怪、偏的题型，重在体现方法性和工具性，重在直观感悟，因此例题、习题的难度要适中，不宜作过多过难的解题训练.

例题解析

例 1 设直线 l 是平面 α 的斜线，l' 是 l 在平面 α 上的射影，m 是平面 α 内的直线.

求证：(1) 如果 $m\perp l'$，则 $m\perp l$；(2) 如果 $m\perp l$，则 $m\perp l'$.

说明 本题以问题形式出现，力求体现三垂线定理与其逆定理之间的内在联系. 三垂线定理及其逆定理，是立体几何中一个重要图形. 既有线面垂直问题，又有线线垂直问题，既有三垂线定理的应用，又有平面几何知识的运用. 着重培养学生学会看图，学会找斜线、找射影、找平面.

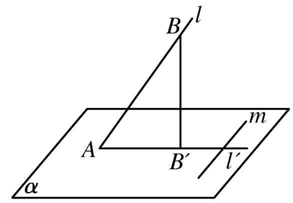


图 3-9

例 2 如教材 P. 121 图 3-18 所示，在四棱锥 P-$ABCD$ 中，$PD\perp$ 底面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 为正方形，E，F 分别为 AB，PB 的中点. 求证：$EF\perp CD$.

说明 本题给出了两种证法，证法 1 是直接应用三垂线定理来证明，也是传统的几何证明方法，证法 2 是用向量这一新方法来证明的. 比较两种证法，都比较直观明了. 对于本题而言，直接用三垂线定理来证更简单，但是向量法更具有普遍性. 教师在教学时，可以根据实际情况，予以介绍.

例 3 如图 3-10，PA 垂直于以 AB 为直径的圆 O 平面，C 为圆 O 上任一点（异于 A，B）. 试判断图中共有几个直角三角形，并说明理由.

分析 可以比较直观地看出的是 $\text{Rt}\triangle PAC$，$\text{Rt}\triangle PAB$，$\text{Rt}\triangle ABC$，比较容易忽视的是 $\text{Rt}\triangle PCB$.

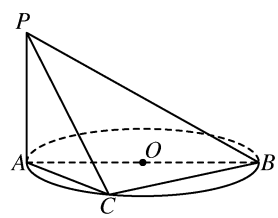


图 3-10

因为 $PA\perp$ 平面 ABC，$PC\cap$ 平面 $ABC=C$，

又因为 $BC\perp AC$，且 $BC\subset$ 平面 ABC，

所以 $PC\perp BC$，所以 $\triangle PCB$ 为直角三角形.

说明 本题图形比较典型，既有线面垂直问题，又有线线垂直，既有三垂线定理的应用，又有平面几何知识的运用，在这个图形分析中要抓住平面 ABC 的垂线 PA 是关键，这时对于每一条的斜线及其射影都要给予关注，结合三垂线定理的内容就可以作出正确的回答.

同时要熟悉这个非常典型的图形，即图形 P-ABC 是一个三棱锥，这个三棱锥的四个面都可以是直角三角形，要求学会用三垂线定理及其逆定理来观察、分析图形.

例 4 如图 3-11，PA 垂直矩形 $ABCD$ 所在的平面，且 $AB=3$，$AD=4$，$PA=3$，求点 P 到 CD，AB 和 BD 的距离.

解 如图 3-12，连接 PB.

因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$AB\perp BC$，且 $BC\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $PB\perp BC$，于是 PB 为点 P 到直线 BC 的距离.

在 $\text{Rt}\triangle PAB$ 中，有 $PB=\sqrt{PA^2+AB^2}=3\sqrt{2}$.

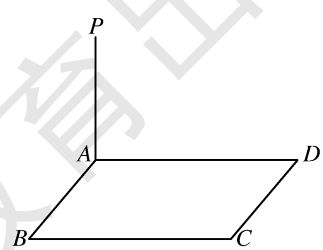


图 3-11

同理，连接 PD，因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，且 $AD\perp DC$，

所以 $PD\perp CD$，则 PD 为点 P 到直线 CD 的距离.

在 $\mathrm{Rt}\triangle PAD$ 中解得 $PD=5$，即点 P 到 CD 的距离为 5.

在平面内过点 A 作 $AH\perp BD$ 于 H，连结 PH. 由三垂线定理可得 $PH\perp BD$，所以 PH 为点 P 到直线 BD 的距离. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，有 $AH=\dfrac{AB\cdot AD}{BD}=\dfrac{12}{5}$.

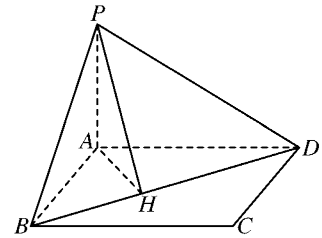


图 3-12

在 $\mathrm{Rt}\triangle PAH$ 中，$PH=\sqrt{3^2+\left(\dfrac{12}{5}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{41}}{5}$.

说明 本题着重让学生熟悉不同的图形背景下如何应用三垂线定理，本题也可以用向量方法求解，但会增加解题难度.

相关链接

公理法

选取少数不加定义的原始概念（基本概念）和无条件承认的规定（公理）作为出发点，再加严格的逻辑推理，将某一数学分支建成演绎系统的方法，叫数学系统的公理化方法，简称“公理法”.

两千多年来，欧几里得的《原本》在传播几何知识方面做出了巨大的贡献，并一直被人们作为标准的教科书使用.《原本》的特点是建立了一个比较严密的几何体系，提出了几何学的“根据”和它的逻辑结构问题. 但是，随着时间的推移，人们逐渐发现《原本》的体系还存在不少破绽和漏洞，例如使用一些未知的定义来解释另一个未知的定义，这样的定义既不能逻辑地确定几何名词和术语，也不能在逻辑推理中起作用，《原本》也使用了一些未曾定义的概念，如“连续”的概念就未被定义而被使用. 正是由于对《原本》在逻辑结构方面存在的破绽和漏洞的发现，推动了几何学的不断发展.

1899 年，德国数学家希尔伯特在他的《几何基础》一书中，首次用公理化的方法提出一个比较完善的几何学的公理系统，即希尔伯特公理体系，克服了《原本》中的一些缺点.

希尔伯特公理体系的主要思想包含：

(1) 把几何中的点、直线、平面等概念，作为不加定义的“原始”概念，叫基本对象.

(2) 给出几何元素的一些基本关系，结合关系、顺序关系、合同关系.

(3) 规定了五组公理，用它阐述基本对象的性质.

希尔伯特还提出建立一个公理化体系的原则，即在一个公理体系中，取哪些为公理. 应包含多少公理，必须考虑以下三点：

第一，相容性，即各公理必须是互相不矛盾的，同存于一个体系中.

第二，独立性，即每条公理都是各自独立的，不能由其他公理推出.

第三，完备性，即体系中所包含的公理应足以推出本学科的任何命题.

欧几里得的几何体系实际上是公理化体系的雏形，常称之为古典公理体系.

公理化方法给几何学的研究带来了一个新的观点.在公理体系中，由于基本对象不加以定义，因此就不必考虑研究对象的直观形象，只要研究抽象的对象之间的关系、性质，凡符合公理体系的元素都可以作为这个几何体系的直观解释，或称几何学的模型.因此，几何学的研究对象更广泛，其含义也更抽象.

20世纪以来，由于公理化方法在研究几何基础方面所取得的成就，促使公理化方法渗透到数学的其他分支，诸如代数、泛函、拓扑等比较抽象的数学分支的研究.公理化方法对近代数学的发展所产生的巨大影响，已成为举世公认的事实.公理化方法早已超过数学理论范围，进入其他自然科学的领域.如20世纪40年代波兰数学家巴拿赫完成了理论力学的公理化，物理学家还将相对论表述为公理体系等等，当然，公理化方法若不与实验方法相结合，不与科学方法相结合，也不能很好地解决和发现问题.

3.5 平面的法向量

教材线索

本节从直线的方向向量引入如何用向量刻画平面的方向问题，是与平面平行的向量还是与平面垂直的向量作为平面的方向？为什么用与平面垂直的向量作为平面的方向是合理而科学的？从而合情合理地引入平面的法向量的概念，并重点研究了平面法向量的代数解法，以及法向量在解决空间图形中的应用.

教学目标

（一）知识与技能

理解并掌握平面法向量的概念和求法.

（二）过程与方法

利用转化的方法将空间图形问题转化为向量问题，加深对数形结合思想的理解.

（三）情感、态度与价值观

通过利用法向量解决几何问题体会数学不同分支之间的内在联系，体会数学的应用价值，提高学习数学的兴趣.

教材分析

1. 重点

平面的法向量概念及其求法.

2. 难点

平面法向量的求法和应用.

3. 本节一个重要概念就是平面的法向量. 法向量的定义是基于平面而言的，与平面 α 垂直的非零向量称为 α 的法向量，平面的法向量可以代表平面的方向. 从法向量的定义可以看出其中两个关键词“垂直”和“非零”. 一个平面的法向量是互相平行的.

向量 $\overrightarrow{AB}$ 与平面 α 垂直：如果有向线段 AB 所在直线与平面 α 垂直，则向量 $\overrightarrow{AB}$ 与平面 α 垂直. 因此只可能有两个相反方向，能够确定平面的方向. 与平面平行的向量各有不同的方向，不适合用来表示平面的方向. 由于与同一平面 α 垂直的向量相互平行，与同一非零向量垂直的不同的平面相互平行，因此用与平面垂直的向量作为平面的方向是合理而科学的.

4. 平面法向量的求法. 平面的法向量求法主要有两种，(1) 如果图形比较特殊可以借助几何知识求出平面的法向量. (2) 利用向量的坐标，它的主要步骤是（以教材 P. 123 例 2 为例）：①建立适当的空间直角坐标系；②假设法向量为 $\boldsymbol{n}=(x, y, z)$，并列出关系式 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0$，$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BA_1}=0$；③将 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0$，$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BA_1}=0$ 转化为代数方程，求出 x，y，z，并将其中一个字母赋予特殊值，解得一个平面的法向量. 用代数方法求一个平面的法向量是本节课的重点内容.

使用“向量解法”，求解的关键在于选择基底或建立适当的空间直角坐标系（建立空间直角坐标系的基本原则是：使图中尽可能多的点落在坐标轴上，这样便于用坐标表示相关的点及向量），然后利用坐标系确定各相关的点及向量坐标，再借助向量坐标运算法则及公式，无需添加辅助线，即可达到解题的目的.

5. 平面法向量主要应用于研究直线与平面的垂直，以及后面就要涉及的点到平面的距离、直线与平面成角、共面与平行等问题.

教学建议

1. 要适当创设概念的背景，通过介绍向量与平面平行、向量和平面垂直概念，从而使学生感受到用与平面垂直的向量作为平面法向量是合情合理、水到渠成的.

通过具体的例子（如教材中直三棱柱）让学生感受到利用法向量可以刻画平面的位置特征. 同时也应说明与平面垂直的向量相互平行，因此只可能有两个相反方向，能够确定平面的方向.

2. 由于平面法向量的求法比较直观而且可操作性比较强，教学中应要求学生熟练掌握. 平面法向量的求法一般有两种，一是图形比较简单特殊，可以通过综合几何的方法加以判断（如教材 P. 122 例 1），二是通过建立空间直角坐标系的方法，列方程组求解（如教材 P. 123 例 2）.

3. 由于向量、几何、代数有密切的关系，因此教学中应阐述向量方法与它们之间的转化关系和优势，促进学生用数学的思想方法来指导数学学习和数学解题.

例题解析

例 1 在直棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，（如教材 P. 122 图 3-19），与哪些棱平行的向量与平面 ABC 平行，这些向量是否两两相互平行？与哪些棱平行的向量与平面 ABC 垂直，这些向量是否两两相互平行？

说明 本例是为引入概念设置的一个铺垫，主要说明利用与平面垂直的向量作为平面法向量的合理性.

例 2 已知正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$，（如教材 P. 123 图 3-20），求平面 BDA_1 的一个法向量.

说明 本例是讲如何用向量坐标方法求一个平面的法向量，本题虽然比较简单，但“麻雀虽小，五脏俱全”，它能够比较完整地说明用向量坐标方法求一个平面法向量的过程和基本步骤，应让学生熟练掌握.

例 3 如图 3-13，在四棱锥 $S\text{-}ABCD$ 中，$\angle DAB=\angle ABC=\dfrac{\pi}{2}$，$SA\perp$平面 $ABCD$，且 $SA=AB=BC=a$，$AD=2a$，求平面 SCD 的法向量.

解 分别取$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AS}$的方向为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向，建立空间直角坐标系，则 $B(0,a,0)$,$C(a,a,0)$,$D(2a,0,0)$,$S(0,0,a)$，

$$\overrightarrow{SD}=(2a,0,-a),\quad \overrightarrow{SC}=(a,a,-a),$$

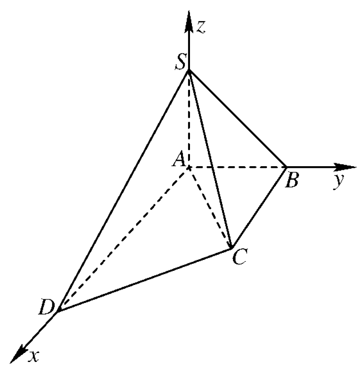


图 3-13

设平面 SCD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{SC}$，

即 $ax+ay-az=0$，$x=-y+z$.

因为 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{SD}$，即 $2ax-az=0$，即 $x=\dfrac{1}{2}z$.

所以$\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}z,\\ y=\dfrac{1}{2}z.\end{cases}$ 令 $z=2$，则 $x=y=1$，

解得 $\boldsymbol{n}=(1,1,2)$.

说明 本题着重让学生明确和熟悉用向量法解题的基本步骤，即（1）建立适当的空间直角坐标系；（2）假设法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,并列出关系式$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0$，$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BA_1}=0$；（3）对于不定方程进行赋值，求出一个满足要求的法向量. 其中在列出的方程中关于 x，y，z 的方程只有两个，因此 x，y，z 的值应该是不唯一的，在解题中通过对 x，y，z 之一进行赋值（应尽量使 x，y，z 的值均为整数），求出一个具体的法向量，这种方法在求法向量时必须熟练掌握. 通过法向量的求解为今后研究两个平面的位置、两个平面的垂直关系奠定基础.

高中数学教师教学用书

例 4 如图 3-14，在正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别为 BB_1，CD 的中点，

(1) 求平面 DEA 和平面 A_1FD_1 的法向量；

(2) 求 $\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2$ 的值，并对结论的几何意义作出说明.

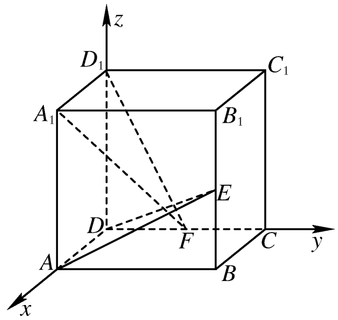


图 3-14

解 (1) 如图 3-14，建立空间直角坐标系 D-xyz，

令 $DD_1=2$，则 $D(0,0,0)$，$D_1(0,0,2)$，$A(2,0,0)$，$A_1(2,0,2)$，$F(0,1,0)$，$E(2,2,1)$，

设 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$ 分别是平面 DEA，A_1FD_1 的法向量，

则 $\boldsymbol{n}_1\perp\overrightarrow{DA}$，$\boldsymbol{n}_2\perp\overrightarrow{D_1F}$，

所以 $\begin{cases}(x_1,y_1,z_1)\cdot(2,0,0)=0,\\(x_2,y_2,z_2)\cdot(0,1,-2)=0.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_1=0,\\2y_1+z_1=0.\end{cases}$

令 $y_1=-1$ 得 $\boldsymbol{n}_1=(0,-1,2)$，同理可得 $\boldsymbol{n}_2=(0,2,1)$.

(2) 因为 $\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=(0,-1,2)\cdot(0,2,1)=0$，

由于平面的法向量代表平面的方向，且 $\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=0$，可得平面 $DEA\perp$ 平面 A_1FD_1.

说明 本题(1)的解答 $\begin{cases}x_1=0,\\2y_1+z_1=0\end{cases}$ 说明法向量在平面 yDz 上，所以只需对 y 或 z 取值即可，这一步骤要从代数和几何的角度加以说明. (2)的解答说明研究平面的关系可以转化为研究它们的法向量，体现了法向量的工具作用. 本题也可以提倡学生用综合几何的方法加以求解并进行比较，体现向量方法在探索和研究几何性质问题中的优势.

相关链接

利用法向量解高考题

利用平面的法向量解决空间图形问题是近年高考的一个显著特点，以下举两个例子供参考.

例 1 （05 全国卷Ⅱ）如图 3-15，在四棱锥 P-$ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，$PD\perp$ 底面 $ABCD$，$AD=PD$，E，F 分别为 CD，PB 的中点.

(1) 求证：$EF\perp$ 平面 PAB；

(2) 设 $AB=\sqrt{2}BC$，求 AC 与平面 AEF 所成角的大小.

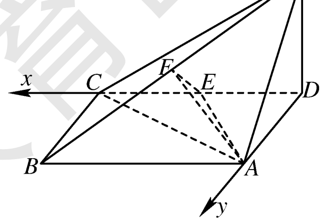


图 3-15

分析 本题考查的是立体几何的重点内容：直线与平面垂直和直线与平面所成的角，考查空间想像能力和推理论证能力.

(1) **证明** 建立空间直角坐标系（如图 3-15），设 $AD=$

$PD=1$，$AB=2a(a>0)$，

则 $E(a,0,0)$，$C(2a,0,0)$，$A(0,1,0)$，$B(2a,1,0)$，$P(0,0,1)$，$F\left(a,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

得$\overrightarrow{EF}=\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{PB}=(2a,1,-1)$，$\overrightarrow{AB}=(2a,0,0)$.

由$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\cdot(2a,0,0)=0$，得$\overrightarrow{EF}\perp\overrightarrow{AB}$，即 $EF\perp AB$，

同理 $EF\perp PB$，又 $AB\cap PB=B$，所以，$EF\perp$平面 PAB.

（2）**解** 由 $AB=\sqrt{2}BC$，得 $2a=\sqrt{2}$，即 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

得 $E\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,0\right)$，$F\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，$C(\sqrt{2},0,0)$.

有$\overrightarrow{AC}=(\sqrt{2},-1,0)$，$\overrightarrow{AE}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-1,0\right)$，$\overrightarrow{EF}=\left(0,\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right)$.

设平面 AEF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,1)$，

$$由\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EF}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x,y,1)\cdot\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=0,\\ (x,y,1)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-1,0\right)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}=0,\\ \frac{\sqrt{2}}{2}x-y=0,\end{cases}解得\begin{cases}y=-1,\\ x=-\sqrt{2}.\end{cases}$$

于是 $\boldsymbol{n}=(-\sqrt{2},-1,1)$.

设 AC 与面 AEF 所成的角为 θ，$\overrightarrow{AC}$与 $\boldsymbol{n}$ 的夹角为 $\langle\overrightarrow{AC},\boldsymbol{n}\rangle$.

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AC},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{AC}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{|(\sqrt{2},-1,0)\cdot(-\sqrt{2},-1,1)|}{\sqrt{2+1+0}\sqrt{2+1+1}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

得 $\theta=\arcsin\frac{\sqrt{3}}{6}$.

所以，AC 与平面 AEF 所成角的大小为 $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{6}$.

点评 用传统的几何方法，在限定的时间内，很难找到 AC 与平面 AEF 所成的角. 而利用平面的法向量解题，可顺利地避开这一切麻烦，只要找到平面的法向量 $\boldsymbol{n}$，利用向量间的代数运算，可方便简捷地解决此题.

例 2 （05 全国卷Ⅰ）如图 3-16，已知四棱锥 P-$ABCD$ 的底面为直角梯形，$AB\parallel DC$，$\angle DAB=90°$，$PA\perp$底面 $ABCD$，且 $PA=AD=DC=\frac{1}{2}AB=1$，M 是 PB 的中点.

（1）证明：面 $PAD\perp$面 PCD；

（2）求 AC 与 PB 所成的角；

（3）求面 AMC 与面 BMC 所成二面角的大小.

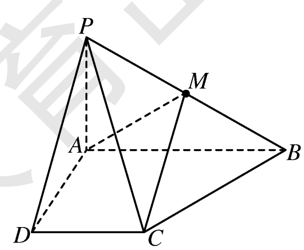


图 3-16

分析 本题求二面角的大小，由于不易找到二面角的平面角，无论是用传统的几何方法还是用一般的向量方法，都很不容易解决，这也是造成立体几何解答题得分不高的原因之一，如果采用平面的法向量解题，情况就大不相同了，请大家仔细体会. 证明过程请教师指导学生写出.

平面的法向量是解决空间几何图形的有力工具. 利用平面法向量解题，方法简便，易于操作，可以避开传统几何中作图、证明的麻烦，又可弥补空间想像能力的不足，发挥代数运算的长处. 深入了解法向量的作用，可以有效地提高解题能力.

3.6 直线与平面、平面与平面所成的角

教材线索

1. 复习综合几何中有关概念，介绍直线与平面成角的相关概念，并研究如何利用直线的方向向量和平面的法向量求解直线与平面成角的问题.

2. 从复习以前学过的有关二面角的概念开始，延续本章的法向量的研究，探讨如何利用平面的法向量来解决有关二面角的平面角的问题，是以前学过的二面角的研究的继续和补充.

教学目标

（一）知识与技能

1. 理解并掌握斜线在平面内的射影、直线和平面所成角的概念，根据概念先找直线射影后确定线面夹角从而熟练求解直线和平面所成角，并推导出求直线与平面成角的向量形式的公式，同时通过若干例题说明公式的应用.

2. 理解并掌握“二面角”、“二面角的平面角”的概念.

（二）过程与方法

培养化归能力、分析能力、观察思考能力和空间想象能力等.

（三）情感、态度与价值观

创设和谐融洽的教学气氛，激发学生学习兴趣，培养学生认真参与，积极交流的主体意识及乐于探索、勇于创新的科学精神. 培养数学空间图形美感，提高学生学习数学特别是立体几何的兴趣.

教材分析

1. 重点

（1）直线与平面成角的概念，利用向量求直线与平面的成角公式的推导；

（2）二面角和二面角的平面角的概念.

2. 难点

（1）直线与平面成角公式的应用；

（2）二面角的平面角的形成过程.

3. 本节分为两个课时，第一课时：直线与平面所成的角；第二课时：平面与平面所成的角.

4. 直线与平面成角是异面直线夹角研究的继续，也是为后面学习面面夹角作准备，它们都是立体几何的重要概念，利用综合几何方法研究的思路就是转化与化归，转化为直线与它的射影成角问题，一般来说是转化为解三角形. 斜线和平面所成角的定义中给出了求解斜线和平面所成角的步骤：

（1）确定斜线和平面的交点（即斜足）；

（2）经过斜线上除斜足以外的任意一点作平面的垂线，从而确定斜线的射影；

（3）由垂线段、斜线及其射影构成直角三角形，通过解此三角形，得到斜线和平面所成的角，同时要注意直线和平面所成角的范围.

在求解斜线和平面所成角的过程中，确定点在直线上或平面上的射影是关键，确定点在平面上的射影位置有以下几种方法：

（1）斜线上任意一点在平面上的射影必在斜线在平面的射影上；

（2）利用垂直关系得出线面垂直，确定射影.

上述方法在实际解题中对空间想象能力和解题技巧有较高的要求，在具体求线面夹角时要先找垂线，后找射影，最后确定夹角，而且在不同的视图状态下进行变式训练需要较多的课时和训练，因此教材介绍的向量方法更容易被学生接受和掌握.

5. 教材力求突出向量坐标方法在解决直线与平面成角中的作用和地位，如异面直线的夹角主要是求出两条异面直线的方向向量 $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$，并求 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2}{|\boldsymbol{v}_1||\boldsymbol{v}_2|}$，本节则是利用平面的法向量和斜线的方向向量，通过 $\sin\theta=\cos\theta_1=\frac{|\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{v}||\boldsymbol{n}|}$进行求解. 同时也应该看到如果问题比较特殊，求直线与平面成角也可以转化为求直线的方向向量与这条直线在平面上射影对应的方向向量的成角问题.

6. 平面外的直线和其在平面内的射影的夹角，是直线与平面内任意直线夹角中的最小值，平面外的直线和其在平面内的射影的夹角的大小，仅取决于直线和平面的位置，说明了直线和平面夹角概念的合理性.在传统的综合几何中求解直线和平面夹角的关键是找出直线在平面中的射影，并求解三角形从而得到直线与平面的成角.应用向量方法求解直线与平面成角的思路，是通过求直线的方向向量与平面的法向量的成角的余角（或直接求直线的方向向量与这条直线在平面上射影的方向向量的成角）进行求解，这样回避繁琐的叙述和过多的技巧，重要的是根据图形特征建立适当的空间直角坐标系，正确运用公式和准确计算.

7. 对于二面角的平面角的理解：

（1）二面角的平面角需要具有以下三个特点：顶点在棱上；两边分别在两个面内；与棱都垂直.

（2）二面角的大小范围为 $0°\sim180°$，即 $[0°，180°]$；

（3）二面角的平面角的大小是由二面角的两个面的相互位置所确定的，与定义中棱上点的位置的选择无关，这体现了二面角定义的合理性和科学性.

二面角的图形要求熟练掌握两种画法：平卧式和直立式.

8. 求二面角大小的三个步骤.

（1）用综合几何方法：

①找或作出二面角的平面角（本着先找后作的原则）；

②证明其符合定义；

③指出某角即为所求的二面角的平面角并计算.

（2）利用法向量方法：

①求出二面角的两个半平面的法向量 $\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{n}_2$；

②利用 $\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}$求出这两个法向量的夹角 α；

③求出 α 的补角.

9. 求解二面角的平面角常用的方法有以下几种.

（1）定义法：在棱上找一点 O，在二面角的两个面内分别作棱的垂线 AO，BO，则 $\angle AOB$ 为二面角的平面角；

（2）垂线法：用三垂线定理（或逆定理）作二面角的平面角，从二面角的一个面内选一个特殊点 A，由 A 向另一个平面作垂线，垂足为 B，再由 B 向棱作垂线交于 C，则 $\angle ACB$ 就是二面角的平面角；

（3）垂面法：作棱的垂面，作垂直于二面角棱或二面角两个半平面的垂面，则该垂面与二面角两个半平面交线所成的角就是二面角的平面角；

（4）法向量法：设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 分别是两个半平面的方向向量，则$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$大小即为二面角大小，由公式 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$可求得；

（5）设 $\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{n}_2$ 分别是 α，β 两平面的法向量，则由 $\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}$可求得，而 $\langle\boldsymbol{n}_1，\boldsymbol{n}_2\rangle$ 的大小或其补角即为二面角的大小，应注意 $\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{n}_2$ 的方向.

实际计算二面角或两个平面所成的角的大小时，有时不容易确定二面角的平面角，因此通过两个平面的法向量来解决二面角问题比较简便.由于课时比较少，因此着重介绍向量法求二面角，过于复杂的、技巧性过强的题目不宜在课堂上介绍，可供学有余力的学生学习.

教学建议

1. 直线和平面所成角问题中主要是斜线和平面成角问题，教学时有必要先回忆和巩固

直线与平面成角的相关概念，让学生形成正确的概念，为研究直线与平面成角奠定良好的基础.

2. 在初学阶段应强调利用向量求解直线与平面成角的基本步骤，即（1）建立空间直角坐标系（选择适当的空间直角坐标系是降低运算量，提高解题效率的关键）；（2）求出直线的方向向量 $\boldsymbol{v}$ 和平面的法向量 $\boldsymbol{n}$；（3）求出向量 $\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{n}$ 的夹角 θ_1；（4）求出直线与平面所成的角 $\theta=\frac{\pi}{2}-\theta_1$. 由于向量方法对计算有较高的要求，因此应提醒学生在解题时要仔细计算、认真检验，否则一着不慎，满盘皆输.

3. 由于本节内容思路比较简明，因此在教学时要注重学生学习的自主建构和实践体验，让学生多讲多练，可采用讲练结合、启发式、演示法相结合等教学方式. 在掌握线面夹角的概念和求法的同时也发展学生的观察思考能力和空间想象能力.

4. 由于本节内容是以前学过的二面角知识的继续和延伸，因此教学中进行复习回顾是必须和必要的. 熟悉二面角的相关内容都有益于本节的学习.

5. 利用平面的法向量求二面角的实质就是求两个平面的法向量夹角的补角，因此要适当复习平面几何中的结论（如圆内接四边形的对角互补）.

6. 现代认知学认为，揭示知识的形成过程，对学生学习新知识是十分必要的. 通过展现二面角的平面角的向量求法的推导、求解过程，给学生思考、探索、发现和创新提供了大量的空间，可以使学生在整个教学过程中始终处于积极的思维状态，进而培养他们独立思考和大胆探索的精神，这样才能全面落实本节的教学目标.

7. 有条件的学校可借助多媒体进行教学，多媒体画面丰富生动，使学生的多种感官获得外部刺激，有利于完善认知结构.

例题解析

例 1 已知正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$，（如教材 P.125 图 3-21），求直线 AB 与平面 BDA_1 所成的角 θ 的正弦值.

说明 本例要求熟练掌握平面法向量和直线方向向量的求法. 熟悉正方体（常用的几何体）的有关图形和向量性质. 对于求得的法向量 $\boldsymbol{n}=(1, 1, 1)$ 可结合图形或综合几何解法加以说明.

例 2 如图 3-17，三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的底面边长为 a，侧棱长为 $\sqrt{2}a$.

(1) 建立适当的坐标系，并写出点 A，B，A_1，C_1 的坐标；

(2) 求 AC_1 与侧面 ABB_1A_1 所成的角.

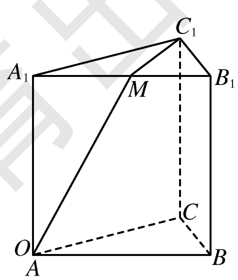


图 3-17

解 (1) 以点 A 为坐标原点 O，以 AB 所在直线为 Oy 轴，以 AA_1 所在直线为 Oz 轴，以经过原点且与平面 ABB_1A_1 垂直的直线为 Ox 轴，建立空间直角坐标系，如图 3-18.

由已知，得 $A(0,0,0)$，$B(0,a,0)$，$A_1(0,0,\sqrt{2}a)$，$C_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a,\frac{a}{2},\sqrt{2}a\right)$.

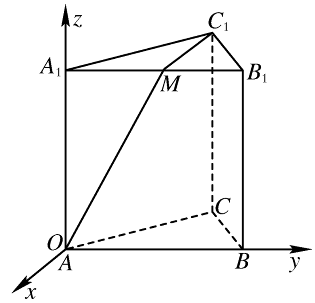


图 3-18

(2) 法 1：取 A_1B_1 的中点 M，于是有 $M\left(0,\frac{a}{2},\sqrt{2}a\right)$，连 AM，MC_1，有 $\overrightarrow{MC_1}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a,0,0\right)$，且 $\overrightarrow{AB}=(0,a,0)$，$\overrightarrow{AC_1}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a,\frac{a}{2},\sqrt{2}a\right)$，$\overrightarrow{AM}=\left(0,\frac{a}{2},\sqrt{2}a\right)$.

不难证明平面 ABB_1A_1 的法向量为$\overrightarrow{MC_1}$.

$\therefore AC_1$ 与侧面 ABB_1A_1 所成的角为

$$\sin\theta=\cos\langle\overrightarrow{AC_1},\overrightarrow{MC_1}\rangle=\frac{\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{MC_1}}{|\overrightarrow{AC_1}||\overrightarrow{MC_1}|}=\frac{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a,\frac{a}{2},\sqrt{2}a\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a,0,0\right)}{\sqrt{3}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\frac{\frac{3}{4}a}{\frac{3}{2}a}=\frac{1}{2}.$$

即 $\theta=30^\circ$，因此 AC_1 与侧面 ABB_1A_1 所成的角为 30°.

法 2：由于$\overrightarrow{AA_1}=(0,0,\sqrt{2}a)$，$\overrightarrow{MC_1}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，$\overrightarrow{MC_1}\cdot\overrightarrow{AA_1}=0$，

所以 $MC_1\perp$面 ABB_1A_1.

$\therefore AC_1$ 与 AM 所成的角就是 AC_1 与侧面 ABB_1A_1 所成的角.

$\because\overrightarrow{AC_1}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a,\frac{a}{2},\sqrt{2}a\right)$，$\overrightarrow{AM}=\left(0,\frac{a}{2},\sqrt{2}a\right)$，$\therefore\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{AM}=0+\frac{a^2}{4}+2a^2=\frac{9}{4}a^2$.

而$|\overrightarrow{AC_1}|=\sqrt{\frac{3a^2}{4}+\frac{a^2}{4}+2a^2}=\sqrt{3}a$，$|\overrightarrow{AM}|=\sqrt{\frac{a^2}{4}+2a^2}=\frac{3}{2}a$，

$$\therefore\cos\langle\overrightarrow{AC_1},\overrightarrow{AM}\rangle=\frac{\frac{9}{4}a^2}{\sqrt{3}a\cdot\frac{3}{2}a}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

所以 AC_1 与侧面 ABB_1A_1 所成的角为 30°.

点评　本例介绍了用适当的空间直角坐标系表示正三棱柱的点、向量，并解决有关的直线与平面所成角问题(可通过建立不同的直角坐标系进行比较优选).本题也可以结合图形的特点，找出斜线在平面上的射影，然后利用解三角形的方法或向量方法求斜线与射影所成的角，也是一种灵活的处理方法，这种处理可以避免求解平面的法向量，提高解题效率.

例 3　在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，求二面角 $A_1\text{-}BD\text{-}C_1$ 的大小.

解　法 1：不妨设正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，以$\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{DD_1}$为单位基底，建立如图 3-19 所示的空间直角坐标系 $D\text{-}xyz$，取 BD 的中点 E，连接 A_1E，C_1E.

因为$\triangle BDA_1$ 和$\triangle BDC_1$ 都是正三角形，所以 $A_1E\perp BD$，$C_1E\perp BD$，所以$\angle A_1EC_1$

是二面角 A_1-BD-C_1 的平面角，也就是$\overrightarrow{EA_1}$与$\overrightarrow{EC_1}$的夹角.

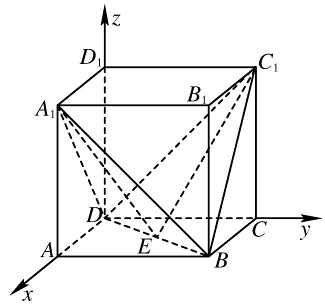


图 3-19

$\because E\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right),A_1(1,0,1),C_1(0,1,1)$,

$\therefore \overrightarrow{EA_1}=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right),\overrightarrow{EC_1}=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)$,

$|\overrightarrow{EA_1}|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1}=\frac{\sqrt{6}}{2},|\overrightarrow{EC_1}|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

$\therefore \overrightarrow{EA_1}\cdot\overrightarrow{EC_1}=-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1=\frac{1}{2}$.

由 $\cos\langle\overrightarrow{EA_1},\overrightarrow{EC_1}\rangle=\frac{\overrightarrow{EA_1}\cdot\overrightarrow{EC_1}}{|\overrightarrow{EA_1}||\overrightarrow{EC_1}|}=\frac{1}{3}$，得到$\angle A_1EC_1\approx 70.53°$，

因此二面角 A_1-BD-C_1 的大小约为 $70.53°$

法 2：不妨设正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，以$\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{DD_1}$为单位基底，建立如图 3-19 所示的空间直角坐标系 D-xyz，则$\overrightarrow{DB}=(1,1,0),\overrightarrow{DC_1}=(0,1,1)$，

设平面 C_1BD 的法向量为$\boldsymbol{n}_1=(x,\ y,\ z)$，

则 $\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{DB}=0$，$\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{DC_1}=0$.

整理得 $x+y=0$，$y+z=0$，令 $x=1$，则 $y=-1$，$z=1$，

因此 $\boldsymbol{n}_1=(1,-1,1)$是平面 C_1BD 的一个法向量，且$|\boldsymbol{n}_1|=\sqrt{3}$.

同理，$\boldsymbol{n}_2=(-1,1,1)$是平面 A_1BD 的一个法向量，$|\boldsymbol{n}_2|=\sqrt{3}$.

$\therefore \boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=-1-1+1=-1$，　$\therefore\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=-\frac{1}{3}$.

$\therefore$向量 $\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{n}_2$ 的夹角约为 $109.47°$，所求的二面角的平面角与这个夹角互补，它的大小约为 $70.53°$.

点评　本题通过两种处理方法介绍了求解二面角的平面角常用的向量法解题思路：一是直接根据二面角的平面角的定义；二是利用平面的法向量求解.第一种解法要求对图形的几何知识非常熟悉、数形结合；第二种解法适合图形比较复杂，而又易于用法向量求解的问题.

例 4　如图 3-20，点 P 是二面角α-AB-β 棱上的一点，分别在 α，β 平面上引射线 PM，PN，如果$\angle BPM=\angle BPN=45°$，$\angle MPN=60°$，求二面角 α-AB-β 的大小.

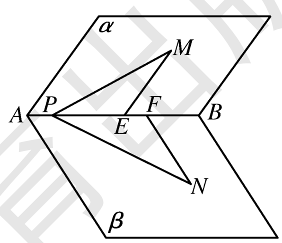


图 3-20

解　不妨设$\overrightarrow{PM}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{PN}=\boldsymbol{b}$，作 $ME\perp AB$，$NF\perp AB$.

因为$\angle EPM=\angle FPN=45°$，故$|\overrightarrow{PE}|=\frac{|\boldsymbol{a}|}{\sqrt{2}},|\overrightarrow{PF}|=\frac{|\boldsymbol{b}|}{\sqrt{2}}$.

于是 $\overrightarrow{EM}\cdot\overrightarrow{FN}=(\overrightarrow{PM}-\overrightarrow{PE})\cdot(\overrightarrow{PN}-\overrightarrow{PF})$

$$=\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}-\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PF}-\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}$$

$=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos 60^\circ-|\boldsymbol{a}|\cdot|\overrightarrow{PF}|\cos 45^\circ-|\boldsymbol{b}|\cdot$

$|\overrightarrow{PE}|\cos 45^\circ+|\overrightarrow{PE}||\overrightarrow{PF}|\cos 0^\circ$

$=\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}|\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}|\boldsymbol{b}|\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-|\boldsymbol{b}|\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}|\boldsymbol{a}|\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}|\boldsymbol{a}|\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}|\boldsymbol{b}|=0.$

$\therefore \overrightarrow{EM}\perp\overrightarrow{FN}$. 又$\because EM$，$FN$ 分别为两条与棱 AB 垂直的直线，

$\therefore EM$ 与 FN 之间的夹角就是所求二面角的大小，所以 α-AB-β 的大小为 90°.

点评 本题体现向量在求解二面角的平面角时的灵活性和优势性. 利用向量的三角形法则和数量积的有关知识简明地解决问题. 它无须添加辅助线，思路简明，叙述简洁.

例 5 已知单位正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$，E，F 分别是棱 B_1C_1 和 C_1D_1 的中点，(如教材 P. 126 图 3-22). 试求：

(1) AF 与平面 BED_1 所成的角的正弦值；

(2) 二面角 C_1-DB-B_1 的余弦值.

说明 本例着重介绍如何利用平面的法向量求二面角的平面角.

在解题过程中，建立空间直角坐标系的方法是一样的，都是右手系，只是两者的视觉角度不一样，在解题中适当转化视觉角度有利于看清图形中相关的几何元素的关系，这种处理方法值得借鉴和学习.

3.7 点到平面的距离

教材线索

从复习求点到平面距离的有关概念入手，利用斜线段在平面法向量上射影的几何意义导入点面距离的向量法求解思路，从而得到点到平面距离的公式（向量形式），并通过典型例题说明点到平面距离公式的应用.

教学目标

(一) 知识与技能

理解点到平面的距离的向量意义和求法.

(二) 过程与方法

培养学生转化能力和应用能力，理解距离公式（向量形式）的来龙去脉.

(三) 情感、态度与价值观

在学习中培养发现、探索、应用的能力.

教材分析

1. 重点

点到平面的距离的向量求法.

2. 难点

点到平面距离的向量公式的记忆和应用.

3. 通过回顾点到平面的距离的几何意义，即求点到这个点在平面上的投影点之间的距离（或求点到垂足之间的垂线段的长度），增强对点到平面的距离的空间感. 利用综合几何的方法求点到平面的距离主要是根据点到直线距离的定义转化为解三角形或等体积的方法进行求解，它的难度在于要判断或求出垂足的位置.

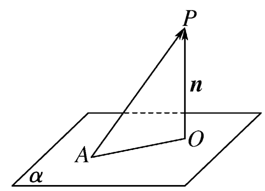


图 3-21

4. 本节探讨如何用向量的方法来求解点到平面的距离，可通过具体直观的图形加以说明. 如图 3-21，$OP\perp$平面 α，则 $d=|OP|=|\overrightarrow{AP}\cdot \boldsymbol{n}_0|=\left|\overrightarrow{AP}\cdot \dfrac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right|=\dfrac{|\overrightarrow{AP}\cdot \boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}$. 它的本质是利用向量$\overrightarrow{AP}$在平面 α 的单位向量 $\boldsymbol{n}_0$ 上的投影来实现点到平面距离的向量求法.

这样，就可以由$\overrightarrow{AP}$与 $\boldsymbol{n}$ 通过数量积运算求得 d.

教学中要讲清点到平面的距离公式的来源，各个字母、项的意义，并学会熟练操作. 同时要对各种不同形态的几何图形下的射影、斜线、垂线段、点到平面的距离进行辨识，不能只停留在对标准图形的认知和研究.

5. 求点到平面距离的一个关键就是平面的法向量，求法向量常有以下两种方法：(1) 利用空间的线面关系找垂线；(2) 设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，由$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot \boldsymbol{a}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot \boldsymbol{b}=0\end{cases}$解方程求得. 在用向量方法解决求距离问题时，一般遇到正棱锥或有一条棱垂直底面的棱锥、长方体、正方体、底面含有一直角的直棱柱等几何体，采用向量方法解决比较方便，解题关键是建立适当的空间直角坐标系，准确求出相关点的坐标.

6. 利用向量求解点到平面距离的优势主要是思路明晰、程序性强、淡化技巧、以“算”取胜，回避了对垂足位置的求解和判断，当然它对学生的运算能力提出了更高的要求. 但不可否认，传统方法也有它的优越性，一旦空间的位置关系搞清楚了，计算量较小，正确率高，在教学中可适当的介绍.

教学建议

1. 教学中可先复习有关射影、垂足、斜足、垂线等相关概念，应结合图形或几何模型帮助学生理解相关的概念，为学习点到平面距离的向量求法奠定基础.

2. 应注意让学生理解点到平面距离向量公式的来源，抓住斜线在平面法向量上的射影

的绝对值即为点到平面的距离这条主线，即 $|\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{AP}\cdot \boldsymbol{n}_0|=\left|\overrightarrow{AP}\cdot\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right|$. 讲清射影、斜线、法向量、单位向量、数量积等相关概念对正确理解公式很有好处.

3. 在点到平面距离公式中对斜线并没有特殊的要求，在具体解题中对斜线应有所选择，可选与已知条件有关、点的坐标比较简单、比较容易直观检验的斜线.

4. 本节的相关内容根据学生实际情况可进行适当的延拓，开展探究性、研究性学习，探讨有关直线与平面的距离、异面直线的距离等，以拓宽学生的数学视野.

例题解析

例 1 在三棱锥 S-ABC 中，棱长 $|SA|=a$，$|SB|=b$，$|SC|=c$，$\angle ASB$，$\angle BSC$，$\angle CSA$ 都是直角，（如教材 P.129 图 3-25），求底面 ABC 上的高.

说明 （1）由于底面不是水平面，因此首先要引导学生正确视图；（2）这个图形是空间图形中最为基本的图形，因此要求学生熟悉它的性质和向量处理方法；（3）应当让学生思考能否通过 $\overrightarrow{SB}$ 或 $\overrightarrow{SC}$ 在 $\boldsymbol{n}$ 上的投影来求解呢？（可以，结论是相同的.）着重强调斜线段对应的向量的选取是比较灵活的，可根据题意进行选择，同时我们也可以从所求的结论 $h=\frac{|\overrightarrow{SA}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{|(a,0,0)\cdot(bc,ac,ab)|}{\sqrt{(bc)^2+(ac)^2+(ab)^2}}=\frac{abc}{\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}$ 看出结论是关于 a，b，c 对称的.

例 2 如图 3-22，在直三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 中，$AC=CB=AA_1=4$，$\angle ACB=90°$，E，F 分别是 AA_1，AB 的中点，点 G 在 AC 上，且 $CG=\frac{1}{4}CA$.（1）求证：$EF\perp B_1C$；（2）求点 A_1 到平面 EFG 的距离.

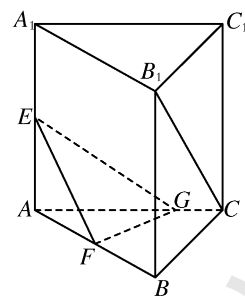


图 3-22

分析 题设条件中有垂直条件、中点条件，建立空间直角坐标系有助于解决问题，关键是将相关点、有向线段表示成坐标形式.（1）要证 $EF\perp B_1C$，只要证明 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{B_1C}=0$；（2）利用点到平面的距离向量公式求解即可.

解 法 1：（1）建立如图 3-23 的空间直角坐标系 O-xyz，则 $E(0,-4,2)$，$F(2,-2,0)$，$B_1(4,0,4)$，

$\therefore \overrightarrow{EF}=(2,2,-2)$，$\overrightarrow{CB_1}=(4,0,4)$.

$\because \overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{CB_1}=2\times4+2\times0+(-2)\times4=0$，

$\therefore \overrightarrow{EF}\perp\overrightarrow{CB_1}$，即 $EF\perp CB_1$.

（2）设 $\boldsymbol{n}=(x,y,1)$ 是平面 EFG 的一个法向量，

则有 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{EF}$，$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{EG}$，

$\therefore \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EF}=0$，$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EG}=0$.

即 $2x+2y-2=0$，且 $3y-2=0$，

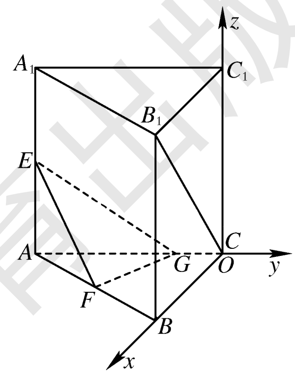


图 3-23

解得 $x=\frac{1}{3}, y=\frac{2}{3}$，故 $\boldsymbol{n}=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\right)$.

设点 A_1 到平面 EFG 的距离为 d，则 d 等于向量$\overrightarrow{EA}$在向量 $\boldsymbol{n}$ 上的投影，

即 $d=\left|\overrightarrow{EA}\cdot\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right|=\frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3)\cdot(0,0,2)=\frac{6}{\sqrt{14}}=\frac{3}{7}\sqrt{14}$.

故点 A_1 到平面 EFG 的距离为$\frac{3}{7}\sqrt{14}$.

法 2：(1) 如图 3-24，连接 A_1B，BC_1，$\because E$，F 分别是 AA_1，AB 的中点，

$\therefore EF /\!/ A_1B$，且 $EF=\frac{1}{2}A_1B$.

在直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，由 $BC=AA_1=CC_1$，

可知侧面 BCC_1B_1 是正方形，$\therefore B_1C\perp BC_1$.

$\because AC\perp BC$，$AC\perp CC_1$，$\therefore A_1C_1\perp$平面 BCC_1B，

$\therefore A_1B$ 在平面 BCC_1B_1 上的射影是 BC_1，由三垂线定理可得 $A_1B\perp B_1C$，$\therefore EF\perp B_1C$.

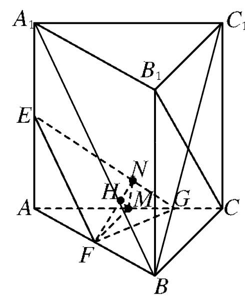


图 3-24

(2) 如图 3-24，取 AC 的中点 M，

$\because F$ 是 AB 的中点，$\therefore FM /\!/ BC$.

$\therefore FM\perp$平面 AC_1，因此$\triangle FMN$ 是直角三角形.

过 M 作 $MN\perp EG$，连接 FN，则 $FN\perp EG$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle FMN$ 中，作 $MH\perp FN$ 于点 H，易证 $EG\perp$平面 MNF，

$\therefore MH\perp EG$，$\therefore MH\perp$平面 EFG. 即 MH 是点 M 到平面 EFG 的距离.

在 $\mathrm{Rt}\triangle MNF$ 中，不难求得 $MN=\frac{2}{\sqrt{13}}$，$FM=2$，$FN=\frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{13}}$，

因此 $MH=\frac{FM\cdot MN}{FN}=\frac{\sqrt{14}}{7}$. 又 $AG=3MG$，点 E 是 AA_1 的中点，

$\therefore$点 A_1 到平面 EFG 的距离为$\frac{3\sqrt{14}}{7}$.

点评　从两种解法可以看出综合几何的解法需要对图形有深刻的理解，对辅助线的添加技巧要求比较高，而向量解法思路简明，可是对计算需要一丝不苟，否则一招不慎，满盘皆输.

3.8 共面与平行

教材线索

本节从复习平面的基本性质开始，逐步深入研究共面与平行问题，教材着重从法向量与直线的方向向量关系入手探讨共面与平行的向量的解法，总结出向量方法解决共面与平行问题的主要线索：若 $\boldsymbol{n}$ 是平面 α 的一个法向量，$\boldsymbol{v}$ 是直线 l 的方向向量，则 $\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{n}\Leftrightarrow l /\!/ \alpha$ 或 $l\subset\alpha$. 在此基础上通过几个例题和练习加强解题方法和思想的训练.

教学目标

（一）知识与技能

用向量的方法解决共面与平行的问题.

（二）过程与方法

学会用转化的思想方法将共面与平行的几何问题转化为向量问题.

（三）情感、态度与价值观

通过解题体验数学的转化方法，培养学生探索问题和解决问题的能力.

教材分析

1. 重点

用向量方法解决共面和平行问题.

2. 难点

用向量方法解决共面和平行问题.

3. 关于共线向量与共面向量的理解

空间向量的平行（共线）的定义，共线向量的定理等与平面向量完全相同，都是平面向量的相关知识向空间的推广. 不要求会证共线向量定理，只要求理解此定理在空间仍成立.

对于空间任意两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$（$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$），共线向量定理可分解为以下两个命题：

（1）$\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{b}\Rightarrow$存在唯一实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$；

（2）存在唯一实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}\Rightarrow\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{b}$.

可以看出（2）是空间向量共线的判定定理. 若要用此结论判定 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 所在直线平行，还需 $\boldsymbol{a}$（或 $\boldsymbol{b}$）上有一点不在 $\boldsymbol{b}$（或 $\boldsymbol{a}$）上. 这两个定理的本质是体现了转化方法的应用.

共线向量定理的推论可解决三点共线问题的表示和判定.

4. 直线的向量参数方程（如 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$ 等）的出现，将涉及对向量等式的变形，向量等式有下列与实数等式类似的性质：

（1）向量等式也有传递性；

（2）向量等式两边加（减）相同的向量，仍为等式，即“移项法则”仍成立；

（3）向量等式两边同乘以相等的数或点乘相等的向量，仍为等式.

直线的向量参数方程（如 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$ 等）是利用待定系数法求平行向量的一个重要方法.

5. 当 $\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 都是非零向量时，共面向量定理实际上是 $\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 所在的三条直线共面的充要条件，但用于判定时，还需要证明其中一条直线上有一点在另外两条直线所确定的平面内.

6. 用平面的法向量来研究共面与平行问题，应熟悉它的解题思路：设 $\boldsymbol{n}$ 是平面 ABC 的任意一个法向量，则 A，B，C，D 共面$\Leftrightarrow$直线 AD 在平面 ABC 内$\Leftrightarrow\overrightarrow{AD}\perp\boldsymbol{n}$.

一般地，设 $\boldsymbol{n}$ 是平面 α 的一个法向量，$\boldsymbol{v}$ 是直线 l 的方向向量，则 $\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{n}\Leftrightarrow l\parallel\alpha$ 或 $l\subset\alpha$.

如果 $\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{n}$ 且 l 上至少有一点 $A\in\alpha$，则 $l\subset\alpha$；如果 $\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{n}$ 且 l 上至少有一点 $A\notin\alpha$，则 $l\parallel\alpha$.

用向量方法研究共面与平行问题的优势在于思路直接，以“算”取胜，可以避免许多添加辅助线的技巧. 在解题时讲究空间直角坐标系的选取和基底的建立. 同时它也对计算的快捷性和准确性提出更高的要求.

7. 用向量证明直线与直线平行、直线与平面平行、平面与平面平行的方法主要依据是：设直线 l_1 和 l_2 的方向向量分别为 $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$，则由向量的共线条件，得到 $l_1\parallel l_2$（或 l_1 和 l_2 重合）$\Leftrightarrow\boldsymbol{v}_1\parallel\boldsymbol{v}_2$.

已知两个非零向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 与平面 α 共面，一条直线 l 的一个方向向量为 $\boldsymbol{v}$，则由共线向量定理，可得 $l\parallel\alpha$ 或 l 在 α 内$\Leftrightarrow$存在两个实数 x，y 使得 $\boldsymbol{v}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$. 本结论教材没有作介绍，可根据学生情况酌情处理.

教学建议

由于空间向量平行（共线）的定义，共线向量的定理等与平面向量完全相同，都是平面向量的相关知识向空间的推广，所以这时的教学应继续紧扣推广这一重要环节. 教学中应注意以下几点：

1. 要继续明确：当我们说 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线时，表示 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的两条有向线段所在直线既可能是同一直线，也可能是平行直线；当我们说 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$ 时，也具有同样的意义.

2. 要引导学生运用确定平面的条件判定，这类空间向量问题一定能转化为平面向量问题，因此才可以说空间的上述概念“与平面一样”，平面内的上述定理“在空间也成立”，从而确认把上述平面内的概念定理推广到空间的合理性与正确性.

3. 建议教学中多让学生通过交流、探索、练习，领会向量解决共面与平行的方法和步骤，体验数学思想方法在解题中的应用.

例题解析

例 1 设在空间建立了直角坐标系，已知三点 $A(1, 0, 0)$，$B(0, 1, 0)$，$C(0, 0, 1)$，（如教材 P. 132 图 3-27），而 $P(x, y, z)$ 是空间任意一点，求 A，B，C，P 四点共面的充要条件.

说明 本题着重介绍已知不共线的三点坐标，探求四点共面的充要条件；巩固平面法向量的求解方法. 可适当将本题结论进行拓展介绍，即 $x+y+z=1$ 是平面 ABC 的方程. 一般来说，关于 x，y，z 的三元一次方程 $ax+by+cz=d$ 表示的是一个平面的方程.

例 2 如教材 P. 132 图 3-28，已知矩形 $ABCD$ 和矩形 $ADEF$ 垂直，以 AD 为公共边，但它们不在同一平面上. 点 M，N 分别在对角线 BD，AE 上，且 $|BM|=\frac{1}{3}|BD|$，$|AN|=\frac{1}{3}|AE|$. 证明：$MN /\!/$ 平面 CDE.

说明 由于本题没有给出坐标系，因此可以有两种解题思路，一是建立适当的空间直角坐标系，二是建立基底的方法进行求解. 证法 1 注重向量的坐标运算，证法 2 讲究的是向量三角形法则的应用.

相关链接

空间向量解题中数学思想方法的应用

数学思想是解决数学问题的灵魂，是将知识转化为能力的重要桥梁，在求解空间向量问题中，若能渗透数学思想方法可以明晰思路、高屋建瓴、化难为易.

一、函数思想

函数思想是数学的重要思想方法之一，它的思路就是根据题意引入适当的参变量，建立目标函数，利用函数的性质进行问题求解.

例 1 如图 3-25，已知矩形在 $ABCD$ 中，$AB=1$，$BC=a$ $(a>0)$，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，且 $PA=1$. 问 BC 边上是否存在点 Q 使得 $PQ\perp QD$？并说明理由.

解 （1）如图 3-25，以 A 为原点建立空间直角坐标系，设 $BQ=x$，

则 $Q(1,x,0)$，$P(0,0,1)$，$D(0,a,0)$，

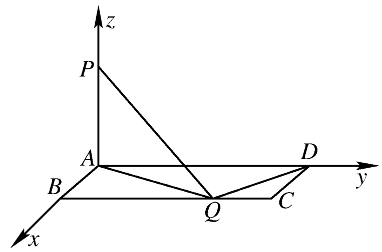


图 3-25

得 $\overrightarrow{PQ}=(1,x,-1)$，$\overrightarrow{QD}=(-1,a-x,0)$.

由 $\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{QD}$，有 $(1,x,-1)\cdot(-1,a-x,0)=0$，得

$$x^2-ax+1=0. \quad ①$$

若方程①有解，必为正数解，且小于 a. 由 $\Delta=(-a)^2-4\geqslant 0$，$a>0$，得 $a\geqslant 2$.

(1) 当 $a\geqslant 2$ 时，BC 上存在点 Q，使 $PQ\perp QD$；

(2) 当 $0<a<2$ 时，BC 上不存在点 Q，使 $PQ\perp QD$.

二、方程思想

由于空间向量也具有代数的特征，因此在求解问题时就会涉及方程问题，方程思想在解决有关线段、夹角、法向量的求解中有广泛的应用. 解题时关键要从问题的数量关系入手，寻找等量关系，构造方程，然后通过解方程使问题获解.

例 2 如图 3-26，已知正四棱柱 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 的底面边长为 2，M 是 AC 和 BD 的交点，在棱 AA_1 所在直线上有且仅有一个点 P 使 $PM\perp PC_1$，求棱 AA_1 的长.

解 如图 3-26，建立空间直角坐标系，设棱 AA_1 的长为 m，AP 的长为 x，

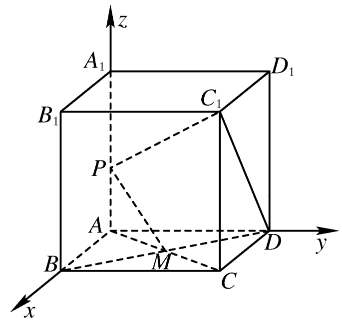


图 3-26

则 $M(1,1,0)$，$P(0,0,x)$，$C_1(2,2,m)$，

$\therefore \overrightarrow{PM}=(1,1,-x)$，$\overrightarrow{PC_1}=(2,2,m-x)$.

由于 $PM\perp PC_1$，$\therefore \overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PC_1}=0$.

$\therefore x^2-mx+4=0$，由已知得方程 $x^2-mx+4=0$ 有且仅有一解，$\therefore \Delta=0$.

$\therefore m=4$，此时 $x=2$，所以棱 AA_1 的长为 4.

三、正难则反

空间向量中有些问题直接求解有难度，转换视角，正难则反是一种有效的处理方法，反证法就是其中一例.

例 3 如果三个不共面的向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 满足等式 $k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}+k_3\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，求证：$k_1=k_2=k_3=0$.

证明 假设 k_1，k_2，k_3 中至少有一个不为零，不妨设 $k_3\neq 0$，则由已知 $k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}+k_3\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，得 $\boldsymbol{c}=-\dfrac{k_1}{k_3}\boldsymbol{a}-\dfrac{k_2}{k_3}\boldsymbol{b}$，

由共面向量定理，可得向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 共面，这与已知三向量不共面矛盾.

所以假设不成立，故 $k_1=k_2=k_3=0$.

四、整体思想

根据问题的特征把某些特殊元素看成一个整体，考虑问题的整体形式和结构特征，把握问题的实质，可以避免复杂运算，一气呵成. 这种整体思想的处理是向量运算常用的一种解题策略.

例 4 已知 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ 与 $7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$ 与 $7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 垂直，求 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$.

解 由条件知 $(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})=7|\boldsymbol{a}|^2-15|\boldsymbol{b}|^2+16\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$， ①

且 $(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=7|\boldsymbol{a}|^2+8|\boldsymbol{b}|^2-30\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

两式相减，得 $46\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=23|\boldsymbol{b}|^2$，$\therefore \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\dfrac{1}{2}|\boldsymbol{b}|^2$.

代入①得到 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，$\therefore \cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{1}{2}$.

$\therefore \langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=60^\circ$.

教材习题参考解答

3.1 练习（教材 P.105）

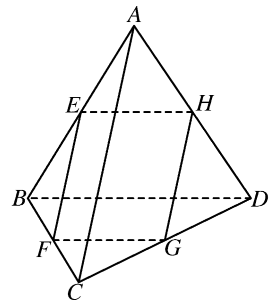


图 3-27

1. $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}^2=9+3\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}-32=-23+6\sqrt{3}$.

2. 如图 3-27，设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{c}$，

(1) $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$.

同理$\overrightarrow{HG}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$. $\therefore EF\parallel HG$，因此 E，F，G，H 四点共面.

(2) $\because\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\boldsymbol{c}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})$，

且 $B\notin$面 $EFGH$，$\therefore BD\parallel$面 $EFGH$.

习题 1（教材 P.105）

1. (1) $\overrightarrow{AC_1}$. (2) $\overrightarrow{AC}$. (3) $\overrightarrow{AD_1}$. (4) $\overrightarrow{AD}$.

2. (1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos 60^\circ=4\times\frac{1}{2}=2$.

(2) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD}=|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{BD}|\cos 120^\circ=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-2$.

(3) $\overrightarrow{GF}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{DF})\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{GD}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{AC}$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AC}$$

$$=\frac{1}{2}\times2\times2\cos 60^\circ+\frac{1}{2}\times2\times2\times\cos 60^\circ=2.$$

(4) $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\times2\times2\cos 60^\circ=1$.

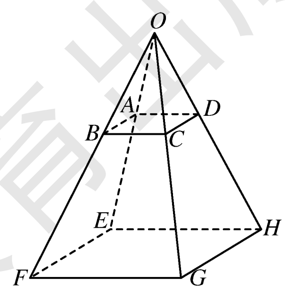


图 3-28

3. 如图 3-28，(1) $\because\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OE}=3(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=3\overrightarrow{AB}$，同理可得$\overrightarrow{GH}=3\overrightarrow{CD}$，$\therefore EF\parallel GH$. $\therefore E$，F，G，H 四点共面.

(2) $\because\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OE}=3(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=3\overrightarrow{AB}$，

$\therefore EF\parallel AB$，$EF\not\subset$面 $ABCD$，$EF\parallel$面 $ABCD$.

$\because\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OE}=3\overrightarrow{OD}-3\overrightarrow{OA}=3\overrightarrow{AD}$，

$\therefore EH\parallel AD$，$EH\not\subset$面 $ABCD$，

$\therefore EH /\!/$ 面 $ABCD$，且 $EF \cap EH = E$. $\therefore$ 平面 $AC /\!/$ 平面 EG.

3.2 练习（教材 P.113）

1. B.

2. $\overrightarrow{MG}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})=-\frac{1}{6}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}.$$

3. $\because \boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 平行，$\therefore$ 设 $\boldsymbol{b}=k(2,-1,2)$，由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-12$，
$\therefore k(2,-1,2)(2,-1,2)=-18$. 即 $k(2^2+1+2^2)=-18$.
$\therefore 9k=-18$. $\therefore k=-2$. $\therefore \boldsymbol{b}=-2(2,-1,2)=(-4,2,-4)$.

4. $\because \boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}=(2,2,0),\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BC}=(-1,0,-1)$，
（1）$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2^2+2^2+0^2}=2\sqrt{2}$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{(-1)^2+0^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$.
（2）$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{(2,2,0)\cdot(-1,0,-1)}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}$，$\therefore \langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=120^\circ$.
（3）$\because (k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(k\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=0$，$\therefore k^2\boldsymbol{a}^2-k\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}^2=0$.
$\therefore 8k^2+2k-4=0$. 即 $4k^2+k-2=0$.
解得 $k=\frac{-1\pm\sqrt{33}}{8}$.

5. 设 $AE=BF=t$，如图 3-29 建立空间直角坐标系，
则 $\overrightarrow{A_1F}=(-t,\ a,\ -a)$，$\overrightarrow{C_1E}=(a,\ t-a,\ -a)$.
$\therefore \overrightarrow{A_1F}\cdot\overrightarrow{C_1E}=-ta+a(t-a)+(-a)(-a)=0$.
$\therefore A_1F \perp C_1E$.

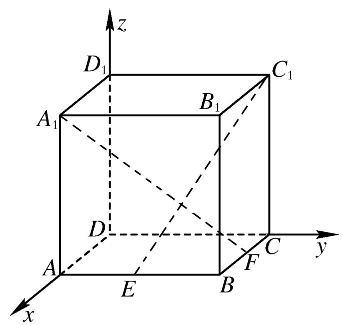


图 3-29

习题 2（教材 P.114）

1. C.

2. $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})-\frac{2}{3}\boldsymbol{a}$.

3. $\because \overrightarrow{AB}=(0,2,0),\overrightarrow{AC}=(1,2,3),\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle=\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{4}{2\times\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{14}}{7}$，

$$\therefore \sin\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle=\sqrt{1-\cos^2\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{14}}{7}\right)^2}=\sqrt{\frac{5}{7}}=\frac{\sqrt{35}}{7}.$$

$$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{0^3+2^2+0^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+3^2}\cdot\frac{\sqrt{35}}{7}=\frac{1}{2}\times$$

$$2\times\sqrt{14}\times\frac{\sqrt{35}}{7}=\frac{\sqrt{2\times7\times7\times5}}{7}=\sqrt{10}.$$

4. 如图 3-30. 设$\overrightarrow{DA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{DD_1}=\boldsymbol{c}$，且$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$，

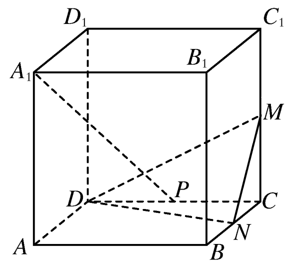


图 3-30

则$\overrightarrow{A_1P}+\overrightarrow{A_1D}+\overrightarrow{DP}=-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CM}=\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$，

$\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CN}=\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$. ∴$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{DN}-\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})$.

$$\begin{aligned}\therefore\overrightarrow{A_1P}\cdot\overrightarrow{DM}&=\left(-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right)\cdot\left(\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}\right)\\&=-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}^2-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-\frac{1}{2}\boldsymbol{c}^2+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0,\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{A_1P}\cdot\overrightarrow{MN}=\left(-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right)\cdot\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})=0.$$

∴$A_1P\perp DM$，$A_1P\perp MN$. ∵$MN\cap DM=M$，∴$A_1P\perp$面 DMN.

5. ∵$\overrightarrow{AB}=(2\cos\theta-\cos\alpha,\ 2\sin\theta-\sin\alpha,\ -2)$，

$$\begin{aligned}\text{则}|\overrightarrow{AB}|^2&=(2\cos\theta-\cos\alpha)^2+(2\sin\theta-\sin\alpha)^2+4\\&=9-4(\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha)=9-4\cos(\theta-\alpha),\end{aligned}$$

∴$5\leqslant|\overrightarrow{AB}|^2\leqslant 13$，即$\sqrt{5}\leqslant|\overrightarrow{AB}|\leqslant\sqrt{13}$.

6. ∵$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{(1,0,-1)\cdot(-1,2,1)}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，　∴$\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

(1) ∴$S=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\sqrt{2}\times\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{6}}{3}=2\sqrt{2}$.

(2) ∴$h_1=\frac{S}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=2$，　$h_2=\frac{S}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

7. ∵$\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3=(1,2,3)+(-2,3,-1)+(3,-4,5)=(2,1,7)$，

$\overrightarrow{AB}=(3,1,2)-(1,-2,1)=(2,3,1)$，

∴$\vec{W}=\vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}=(2,1,7)\cdot(2,3,1)=14$.

3.3　练习（教材 P. 117）

1. 选 B. 线面成角的方法就是求平面的斜线与这条斜线在平面的射影所成的角，

因此 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{(1,0,1)\cdot(0,1,1)}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$，∴$\theta=60°$.

2. 如图 3-31 建立空间直角坐标系，则 $A_1(4,0,5)$，$A(4,0,0)$，$C(0,3,0)$，

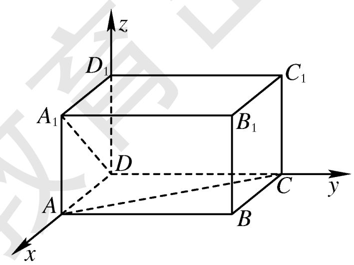


图 3-31

∴$\overrightarrow{DA_1}=(4,0,5)$，$\overrightarrow{AC}=(0,3,0)-(4,0,0)=(-4,3,0)$.

$$\begin{aligned}\therefore\cos\langle\overrightarrow{DA_1},\overrightarrow{AC}\rangle&=\frac{\overrightarrow{DA_1}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{DA_1}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{(4,0,5)(-4,3,0)}{\sqrt{41}\cdot\sqrt{25}}\\&=-\frac{16}{5\sqrt{41}}=-\frac{16\sqrt{41}}{205}.\end{aligned}$$

又∵异面直线所成角的范围为$\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，

所以直线 DA_1 与 AC 所成角的余弦值为$\dfrac{16\sqrt{41}}{205}$.

习题 3（教材 P. 117）

1. 如图 3-32 建立空间直角坐标系，则 $E\left(0,0,\dfrac{1}{2}\right)$，

$F\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},0\right)$，$G\left(1,1,\dfrac{1}{2}\right)$，$C(0,1,0)$，

$\therefore \overrightarrow{EF}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{CF}=\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},0\right)$.

（1）$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{CF}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},0\right)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}=0$，

$\therefore EF\perp CF$.

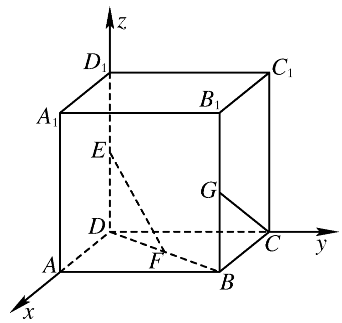


图 3-32

（2）∵$\overrightarrow{CG}=\left(1,0,\dfrac{1}{2}\right)$，

$\therefore \overrightarrow{EF}$，$\overrightarrow{CG}$所成角的余弦 $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{CG}}{|\overrightarrow{EF}||\overrightarrow{CG}|}=\dfrac{\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)\left(1,0,\dfrac{1}{2}\right)}{\sqrt{\dfrac{3}{4}}\cdot\sqrt{\dfrac{5}{4}}}=\dfrac{\sqrt{15}}{15}$.

2. 如图 3-33 建立空间直角坐标系，则 $A(1,0,0)$，$B(0,1,0)$，

$C_1(0,0,2)$，$A_1(1,0,2)$，$B_1(0,1,2)$，$M\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},2\right)$，$N(1,0,1)$，

$\therefore \overrightarrow{BM}=\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},2\right)$，$\overrightarrow{BN}=(1,-1,1)$.

（1）$|\overrightarrow{BN}|=\sqrt{3}$.

（2）$\overrightarrow{BA_1}=(1,-1,2)$，　$\overrightarrow{CB_1}=(0,1,2)$，

$\therefore \cos\langle\overrightarrow{BA_1},\overrightarrow{CB_1}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{BA_1}\cdot\overrightarrow{CB_1}}{|\overrightarrow{BA_1}||\overrightarrow{CB_1}|}=\dfrac{3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{30}}{10}$.

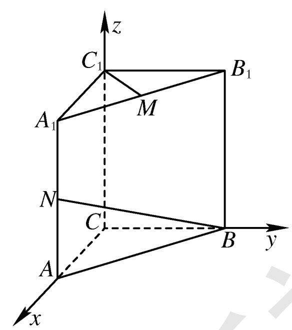


图 3-33

（3）∵$\overrightarrow{A_1B}=(-1,1,-2)$，　$\overrightarrow{C_1M}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},0\right)$，

$\therefore \overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{C_1M}=(-1,1,-2)\cdot\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},0\right)=0$.　$\therefore A_1B\perp C_1M$.

3. 如图 3-34 建立空间直角坐标系，则 $A(1,-1,0)$，$B(1,1,0)$，

$D(-1,-1,0)$，$E\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},2\right)$，$F\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},2\right)$，

$\therefore \overrightarrow{BE}=\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{3}{2},2\right)$，$\overrightarrow{DF}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2},2\right)$.

则 BE，DF 所成角的余弦

$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{DF}}{|\overrightarrow{BE}||\overrightarrow{DF}|}$

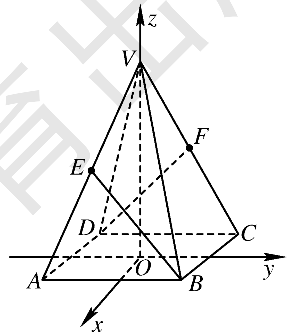


图 3-34

$$=\frac{-\frac{1}{4}-\frac{9}{4}+4}{\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2+2^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2+2^2}}=\frac{3}{13}.$$

$\therefore \sin\theta=\frac{4\sqrt{10}}{13}, \tan\theta=\frac{4\sqrt{10}}{3}.$

3.4　练习（教材 P. 121）

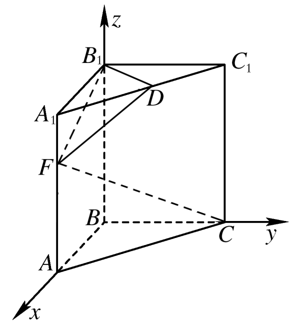


图 3-35

如图 3-35 建立空间直角坐标系，设 $|\overrightarrow{AF}|=x$，

则 $\overrightarrow{B_1F}=(\sqrt{2}a,\ 0,\ x-3a)$，$\overrightarrow{B_1D}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,\ \frac{\sqrt{2}}{2}a,\ 0\right)$，

$\overrightarrow{CF}=(-\sqrt{2}a,\ \sqrt{2}a,\ -x)$. $\because \begin{cases}\overrightarrow{B_1F}\cdot\overrightarrow{CF}=0,\\ \overrightarrow{B_1D}\cdot\overrightarrow{CF}=0,\end{cases}$

$\therefore x^2-3ax+2a^2=0$. $\therefore x=a$ 或 $x=2a$.

$\therefore |\overrightarrow{AF}|=a$ 或 $|\overrightarrow{AF}|=2a$.

习题 4（教材 P. 121）

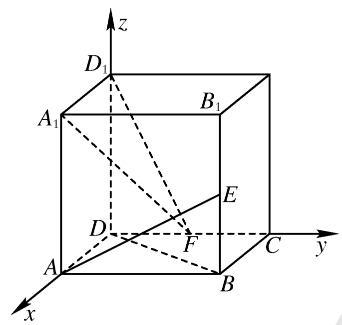


图 3-36

1. 如图 3-36 建立空间直角坐标系，则 $A(1,0,0)$, $A_1(1,0,1)$, $D_1(0,0,1)$, $F\left(0,\frac{1}{2},0\right)$,

$\therefore \overrightarrow{AE}=\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{A_1D_1}=(-1,0,0)$, $\overrightarrow{D_1F}=\left(0,\frac{1}{2},-1\right)$.

$\therefore \overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{A_1D_1}=\left(0,1,\frac{1}{2}\right)\cdot(-1,0,0)=0$,

$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{D_1F}=\left(0,1,\frac{1}{2}\right)\cdot\left(0,\frac{1}{2},-1\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$.

$\therefore AE\perp$ 平面 A_1D_1F.

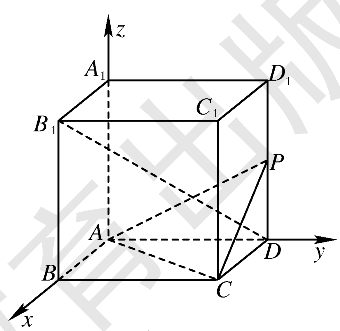


图 3-37

2. 如图 3-37 建立空间直角坐标系，则 $C(a,a,0)$, $B_1(a,0,a)$, $D(0,a,0)$,

$\therefore \overrightarrow{AC}=(a,a,0)$, $\overrightarrow{B_1D}=(-a,a,-a)$.

设 $PD=x$，则 $\overrightarrow{AP}=(0,a,x)$,

$\overrightarrow{B_1D}\cdot\overrightarrow{AC}=(-a,a,-a)\cdot(a,a,0)=-a+a=0$,

$\overrightarrow{B_1D}\cdot\overrightarrow{AP}=(-a,a,-a)\cdot(0,a,x)=0$,

$\therefore x=a$. $\therefore$ 存在这样的点 P, $DP=a$.

3. 如图 3-38，设 $\overrightarrow{DA'}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{DB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{c}$.

$\because \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=0$，$\therefore |\boldsymbol{b}|=2|\boldsymbol{a}|$.

(1) $\overrightarrow{BA'}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BA'}\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$,

$\overrightarrow{BA'}\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2-|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}|\cos 60^\circ=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}^2=0$,

$\therefore BA'\perp$平面 $A'CD$.

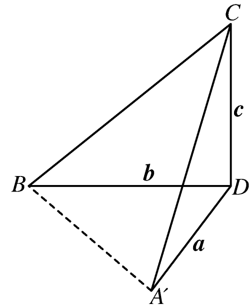


图 3-38

(2) 设直线 $A'C$ 与 BD 所成的角为 θ，则 $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{A'C}\cdot\overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{A'C}||\overrightarrow{BD}|}=$

$$\frac{(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\cdot(-\boldsymbol{b})}{\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{c}|^2}\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{-\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}\cdot|\boldsymbol{b}|}=$$

$$\frac{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 60^\circ}{\sqrt{3}|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

3.5 练习（教材 P. 123）

1. $\because\overrightarrow{AC}=(4,0,6),\overrightarrow{AB}=(2,-2,1)$，设法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

$\therefore\begin{cases}(x,y,z)\cdot(4,0,6)=0,\\(x,y,z)\cdot(2,-2,1)=0.\end{cases}$ 即 $\begin{cases}4x+6z=0,\\2x-2y+z=0.\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}x=-\dfrac{3}{2}z,\\y=-z.\end{cases}$

令 $z=1$，得到平面 α 的一个法向量为 $\left(-\dfrac{3}{2},-1,1\right)$.

2. 如图 3-39，建立空间直角坐标系，则 $A(a,0,0),C_1(0,a,a),C(0,a,0),B_1(a,a,a),D_1(0,0,a)$，

$\therefore\overrightarrow{AC_1}=(-a,a,a),\overrightarrow{CB_1}=(a,0,a),\overrightarrow{D_1B_1}=(a,a,0)$.

$\therefore\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{CB_1}=(-a,a,a)\cdot(a,0,a)=-a+a=0$,

$\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{D_1B_1}=(-a,a,a)\cdot(a,a,0)=-a+a=0$.

$\therefore\overrightarrow{AC_1}\perp$平面 CB_1D_1，故 $\overrightarrow{AC_1}$ 是平面 CB_1D_1 的法向量.

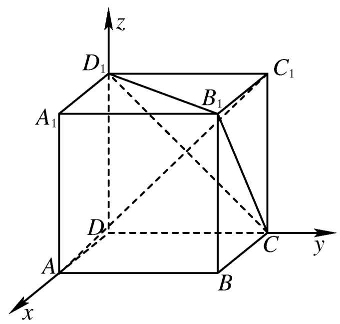


图 3-39

习题 5（教材 P. 124）

1. 如图 3-40 建立空间直角坐标系，

设所求的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

(1) $\boldsymbol{n}=(0,0,3)$.

(2) $\boldsymbol{n}=(0,3,0)$.

(3) $\overrightarrow{BC}=(0,3,0),\overrightarrow{PB}=(3,0,-3)$，

由 $\begin{cases}(x,y,z)(0,3,0)=0,\\(x,y,z)(3,0,-3)=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=-z,\\y=0.\end{cases}$

$\therefore\boldsymbol{n}=(1,0,-1)$.

(4) $D(0,3,0),\overrightarrow{PD}=(0,3,-3),\overrightarrow{DC}=(3,0,0)$.

由 $\begin{cases}(x,y,z)\cdot(0,3,-3)=0,\\(x,y,z)\cdot(3,0,0)=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=0,\\y=z.\end{cases}$ $\therefore\boldsymbol{n}=(0,1,1)$.

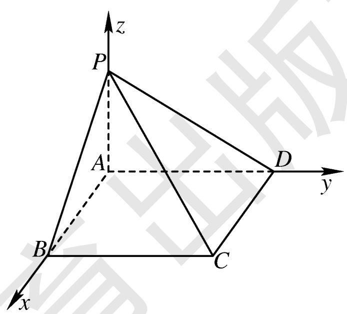


图 3-40

2. 如图 3-41 建立空间直角坐标系，

$\because \angle ADB=30°$，$\therefore AB=\frac{\sqrt{3}}{3}BD=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{2}BC=\frac{\sqrt{6}}{3}BC$.

设 $BC=CD=a$，则 $AB=\frac{\sqrt{6}}{3}a$，$A\left(0,0,\frac{\sqrt{6}}{3}a\right)$，$C(a,0,0)$，$D(a,a,0)$，$E\left(\frac{a}{2},0,\frac{\sqrt{6}}{6}a\right)$，$F\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},\frac{\sqrt{6}}{6}a\right)$，

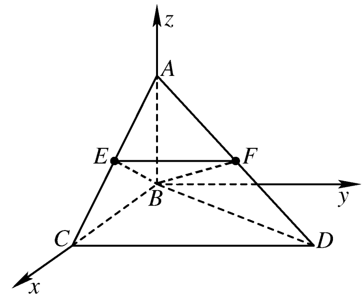


图 3-41

显然平面 ABC 的法向量 $\boldsymbol{n}_1=(0,1,0)$.

设平面 BEF 的法向量 $\boldsymbol{n}_2=(x,y,z)$，

$\because \overrightarrow{BE}=\left(\frac{a}{2},0,\frac{\sqrt{6}}{6}a\right)$，$\overrightarrow{BF}=\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},\frac{\sqrt{6}}{6}a\right)$，

由$\begin{cases}(x,y,z)\cdot\left(\frac{a}{2},0,\frac{\sqrt{6}}{6}a\right)=0,\\(x,y,z)\cdot\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},\frac{\sqrt{6}}{6}a\right)=0,\end{cases}$ 得$\begin{cases}x=-\frac{\sqrt{6}}{3}z,\\x+y+\frac{\sqrt{6}}{3}z=0,\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}x=-\frac{\sqrt{6}}{3}z,\\y=0.\end{cases}$

令 $z=1$，则 $x=-\frac{\sqrt{6}}{3}$，

即平面 BEF 的法向量 $\boldsymbol{n}_2=\left(-\frac{\sqrt{6}}{3},0,1\right)$.

$\therefore \boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=0$，$\therefore$面 BEF 与面 ABC 垂直.

3. 如图 3-42，建立空间直角坐标系，则 $A(0,0,0)$，$B(1,0,0)$，$C(1,1,0)$，$D\left(0,\frac{1}{2},0\right)$，$S(0,0,1)$，

$\therefore \overrightarrow{SD}=\left(0,\frac{1}{2},-1\right)$，$\overrightarrow{DC}=\left(1,\frac{1}{2},0\right)$.

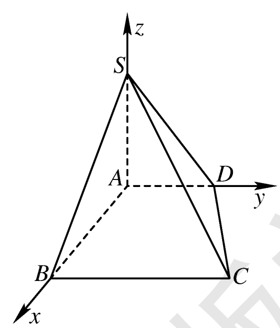


图 3-42

设平面 SDC 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$，

由$\begin{cases}(x,y,z)\cdot\left(0,\frac{1}{2},-1\right)=0,\\(x,y,z)\cdot\left(1,\frac{1}{2},0\right)=0,\end{cases}$ 得$\begin{cases}\frac{1}{2}y-z=0,\\x+\frac{1}{2}y=0,\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}x=-z,\\y=2z.\end{cases}$

令 $z=1$，则 $\boldsymbol{n}_1=(-1,2,1)$.

显然平面 SAB 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(0,1,0)$.

设 $\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2$ 所成的角为 θ，则 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{(-1,2,1)\cdot(0,1,0)}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{1}}=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

所以两个法向量所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{6}}{3}$.

3.6 练习（教材 P.127）

1. C.　　2. D.

习题 6（教材 P. 128）

1. 如图 3-43 建立空间直角坐标系，则 $A(2,0,0)$，$B(0,2,0)$，$C(0,0,0)$，$D(1,1,0)$，$A_1(2,0,2)$，

$\therefore \overrightarrow{CD}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{AB}=(-2,2,0)$，$\overrightarrow{AA}=(0,0,2)$.

(1) $\overrightarrow{AB}=(-2,2,0)$，$AA_1=(0,0,2)$，

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=(-2,2,0)\cdot(1,1,0)=-2+2=0$，

$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AA_1}=(1,1,0)\cdot(0,0,2)=0$，

$\therefore CD\perp$ 平面 ABB_1A_1.

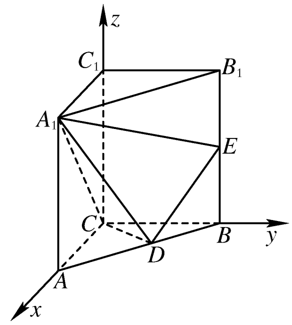


图 3-43

(2) $\because \overrightarrow{A_1D}=(-1,1,-2)$，设 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$ 为平面 A_1CD 的法向量，由 $\overrightarrow{CD}\perp\boldsymbol{n}_1$，$\overrightarrow{A_1D}\perp\boldsymbol{n}_1$ 得

$\begin{cases}(x,y,z)\cdot(1,1,0)=0,\\(x,y,z)\cdot(-1,1,-2)=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-y,\\z=y.\end{cases}$

$\therefore \boldsymbol{n}_1=(-1,1,1)$.

显然平面 A_1AC 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(0,1,0)$.

设 $\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2$ 所成的角为 θ，$\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{(-1,1,1)\cdot(0,1,0)}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore$ 二面角 D-A_1C-A 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

2. 如图 3-44，以 BD 中点为原点，OB 为 x 轴，OC 为 y 轴，OA 为 z 轴，建立空间直角坐标系，

设 $|OB|=a$，则 $B(a,0,0)$，$C(0,a,0)$，$A(0,0,a)$.

设平面 ACD 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$，

$\because \begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{CD}=0,\\\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AC}=0,\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}(x,y,z)\cdot(a,-a,0)=0,\\(x,y,z)\cdot(0,a,-a)=0.\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}x=y,\\z=y.\end{cases}$

令 $z=1$，则 $\boldsymbol{n}_1=(1,1,1)$.

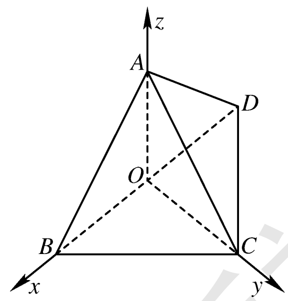


图 3-44

设平面 OCD 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2$，显然 $\boldsymbol{n}_2=(0,0,1)$.

$\therefore \cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

所以二面角 A-CD-B 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

3. 如图 3-45，以点 C 为原点，过点 C 作 CB 的垂线 CD，以 CD 为 x 轴，CB 为 y 轴，CP 为 z 轴建立空间直角坐标系，则 $P(0,0,a)$，$B(0,a,0)$，$A\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}a,\dfrac{1}{2}a,0\right)$.

设平面 PAB 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$，

$\because \begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{PB}=0,\\\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AB}=0,\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}(x,y,z)\cdot(0,a,-a)=0,\\(x,y,z)\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}a,\dfrac{1}{2}a,0\right)=0.\end{cases}$

$\therefore \begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}z, \\ y=z. \end{cases}$ 令 $z=3$，则 $\boldsymbol{n}_1=(\sqrt{3},3,3)$.

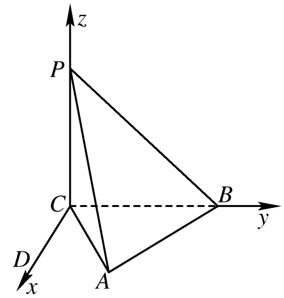


图 3-45

设平面 PCA 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x,y,z)$,

$\because \begin{cases} \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{CP}=0, \\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{CA}=0, \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} (x,y,z)\cdot(0,0,a)=0, \\ (x,y,z)\cdot\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}a,\dfrac{1}{2}a,0\right)=0. \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}y, \\ z=0. \end{cases}$ $\therefore \boldsymbol{n}_2=(-\sqrt{3},3,0)$.

$\therefore \cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{(\sqrt{3},3,3)\cdot(-\sqrt{3},3,0)}{\sqrt{21}\cdot\sqrt{12}}=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$.

$\therefore$ 二面角 B-AP-C 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{7}}{7}$.

3.7 练习（教材 P.130）

1. 如图 3-46 建立空间直角坐标系，则 $A(1,0,0)$，$B(1,1,0)$，$D_1(0,0,1)$.

显然平面 AB_1C 的法向量为 $\boldsymbol{n}=\overrightarrow{D_1B}=(1,1,-1)$，要求直线 DA_1 与 AC 间的距离，只需求点 D 到平面 AB_1C 的距离，且 $\overrightarrow{AD}=(-1,0,0)$,

$\therefore d=\left|\dfrac{\overrightarrow{AD}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right|=\dfrac{|(-1,0,0)\cdot(1,1,-1)|}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

即直线 DA_1 与 AC 间的距离为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

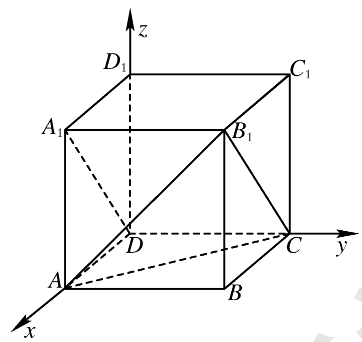


图 3-46

2. $\because \overrightarrow{AB}=(2,-2,1)$，$\overrightarrow{AC}=(4,0,6)$，设平面 ABC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$.

$\because \begin{cases} (x,y,z)\cdot(2,-2,1)=0, \\ (x,y,z)\cdot(4,0,6)=0, \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} 2x-2y+z=0, \\ 2x+3z=0. \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} x=-\dfrac{3}{2}z, \\ y=-z. \end{cases}$

令 $z=2$，则 $\boldsymbol{n}=(-3,-2,2)$.

$\because \overrightarrow{AD}=(-7,-7,7)$,

$\therefore d=\dfrac{|\overrightarrow{AD}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{|(-7,-7,7)\cdot(-3,-2,2)|}{\sqrt{9+4+4}}=\dfrac{49}{\sqrt{17}}=\dfrac{49\sqrt{17}}{17}$.

即点 D 到平面 ABC 的距离为 $\dfrac{49\sqrt{17}}{17}$.

习题 7（教材 P. 130）

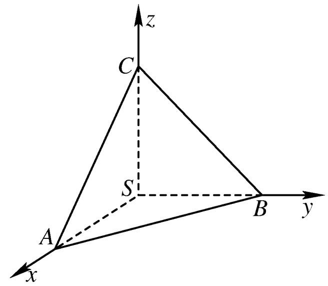


图 3-47

1. 如图 3-47 建立空间直角坐标系，则 $A(a,0,0)$，$B(0,b,0)$，$C(0,0,c)$，

$\therefore \overrightarrow{AC}=(-a,0,c)$，$\overrightarrow{AB}=(-a,b,0)$，

设平面 ABC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

由$\begin{cases}(x,y,z)\cdot(-a,0,c)=0,\\(x,y,z)\cdot(-a,b,0)=0,\end{cases}$ 得$\begin{cases}x=\dfrac{c}{a}z,\\y=\dfrac{a}{b}x=\dfrac{c}{b}z.\end{cases}$

令 $z=ab$，则 $\boldsymbol{n}=(cb,ac,ab)$. $\because \overrightarrow{AS}=(-a,0,0)$，

$\therefore$点 S 到平面 ABC 的距离

$$d=\left|\frac{\overrightarrow{AS}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right|=\left|\frac{(-a,0,0)\cdot(cb,ac,ab)}{\sqrt{(cb)^2+(ac)^2+(ab)^2}}\right|=\frac{abc}{\sqrt{(cb)^2+(ac)^2+(ab)^2}}.$$

$\therefore V_{C-ABS}=V_{S-ABC}$. $\therefore \frac{1}{3}S_{\triangle ABS}SC=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}d$. $\therefore abc=S_{\triangle ABC}\dfrac{abc}{\sqrt{(cb)^2+(ac)^2+(ab)^2}}$.

整理得 $S_{\triangle ABC}^2=\frac{1}{4}[(cb)^2+(ac)^2+(ab)^2]$

$$=\left(\frac{1}{2}cb\right)^2+\left(\frac{1}{2}ac\right)^2+\left(\frac{1}{2}ab\right)^2$$

$$=S_{\triangle SBC}^2+S_{\triangle SAC}^2+S_{\triangle SAB}^2.$$

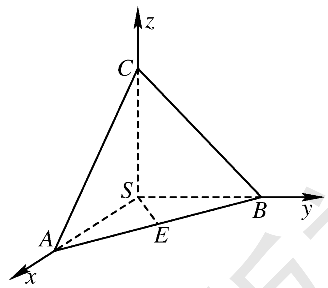


图 3-48

2. 如图 3-48 建立空间直有坐标系，则 $A(2,0,0)$，$E(1,1,0)$，$D(0,0,x)$，

$\therefore \overrightarrow{AD}=(-2,0,x)$，$\overrightarrow{BE}=(1,1,0)$.

$\because AD,BE$ 所成角的余弦为$\frac{\sqrt{10}}{10}$，

$\therefore \cos\theta=\left|\dfrac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BE}}{|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{BE}|}\right|=\left|\dfrac{(-2,0,x)\cdot(1,1,0)}{\sqrt{4+x^2}\sqrt{2}}\right|=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

解得$x=4$.

$\therefore$四面体的体积为 $V=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot BD=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times4=\frac{8}{3}$.

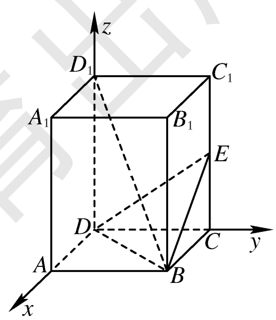


图 3-49

3. 如图 3-49 建立空间直有坐标系，则 $A(1,\ 0,\ 0)$，$B(1,\ 1,\ 0)$，$C(0,\ 1,\ 0)$，$A_1(1,\ 0,\ 2)$，$B_1(1,\ 1,\ 2)$，$C_1(0,\ 1,\ 2)$，$D_1(0,\ 0,\ 2)$，$E(0,\ 1,\ 0)$，

$\therefore \overrightarrow{BE}=(-1,\ 0,\ 1)$，$\overrightarrow{DE}=(0,\ 1,\ 1)$，$\overrightarrow{D_1B}=(1,\ 1,\ -2)$.

设平面 BDE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,\ y,\ z)$.

由$\begin{cases}(x,y,z)\cdot(-1,0,1)=0,\\(x,y,z)\cdot(0,1,1)=0,\end{cases}$ 得$\begin{cases}x=z,\\y=-z.\end{cases}$ 令 $z=1$,则 $\boldsymbol{n}=(1,-1,1)$.

∴点 D_1 到平面 BDE 的距离为

$$d=\frac{|\overrightarrow{D_1B}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{|(1,1,-2)\cdot(1,-1,1)|}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

3.8 练习（教材 P.133）

1. 法 1：如图 3-50，建立空间直角坐标系，则 $B(1,0,0)$，$C(1,1,0)$，$D(0,1,0)$，$M\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$，$N\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

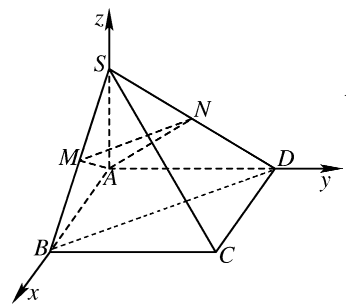


图 3-50

设平面 AMN 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

∴$\begin{cases}(x,y,z)\cdot\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)=0,\\(x,y,z)\cdot\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=0.\end{cases}$

∴$\begin{cases}x=y,\\y=-z.\end{cases}$ 即$\begin{cases}x=-z,\\y=-z.\end{cases}$ 令 $z=1$,则 $\boldsymbol{n}=(-1,-1,1)$.

∵$\overrightarrow{BD}=(-1,1,0)$,∴$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0$.∴$BD$∥平面 AMN.

法 2：连接 BD. ∵M，N 分别为 SB，SD 的中点，∴MN∥BD.

∵$MN\subset$平面 AMN，$BD\not\subset$平面 AMN，

∴BD∥平面 AMN.

2. 如图 3-51，设$\overrightarrow{DA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{DD_1}=\boldsymbol{c}$，

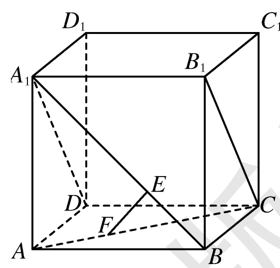


图 3-51

则$\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA_1}$

$$=\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+\boldsymbol{b}+\frac{1}{3}(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})=\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}),$$

显然平面 A_1B_1CD 的法向量为$\overrightarrow{D_1A}$,且$\overrightarrow{D_1A}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$，

$\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})=\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{c}^2)=0$，

∴EF∥平面 A_1B_1CD.

习题 8（教材 P.133）

1. 如图 3-52，设$\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BE}=\boldsymbol{c}$，正方形$ABCD$，$ABEF$ 的边长为 1. ∵$AN=DM$，

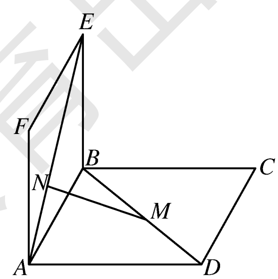


图 3-52

∴$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AN}=(1-x)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-\boldsymbol{b}+(1-x)(-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})$

$\quad=-x\boldsymbol{b}+(1-x)\boldsymbol{c}$.

显然平面 EBC 的法向量为 $\boldsymbol{a}$，又∵$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0$，

∴$\overrightarrow{MN}\cdot\boldsymbol{a}=[-x\boldsymbol{b}+(1-x)\boldsymbol{c}]\cdot\boldsymbol{a}=-x\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}+(1-x)\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=0$.

∴MN∥平面 EBC.

（本题也可以利用空间直角坐标系求解）

2. 如图 3-53 所示，设$\overrightarrow{DA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{DD_1}=\boldsymbol{c}$，

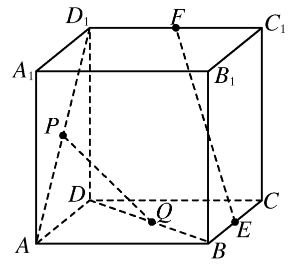


图 3-53

（1）依题意得$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BQ}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})+\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$

$$=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{c}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}).$$

∵平面 DCC_1D_1 的法向量为 $\boldsymbol{a}$，

且$\overrightarrow{PQ}\cdot\boldsymbol{a}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}-\frac{1}{2}\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=0$，

∴PQ∥平面 DCC_1D_1.

（2）∵$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=a$，$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$，

∴$|\overrightarrow{PQ}|^2=\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\right]^2=\frac{1}{4}(\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}^2)=\frac{1}{4}(a^2+a^2)=\frac{1}{2}a^2$.∴$|\overrightarrow{PQ}|=\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

（3）∵$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{C_1F}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{c})+\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right)=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$，

显然平面 BB_1D_1D 的法向量为$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$，

且$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{c}^2)=0$，

∴EF∥平面 BB_1D_1D.

3. 如图 3-54 所示，设$\overrightarrow{DA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{DD_1}=\boldsymbol{c}$，

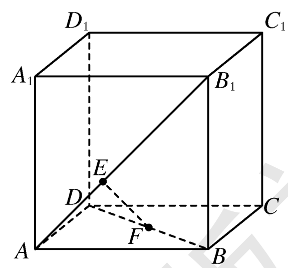


图 3-54

且$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=a$，

则$\overrightarrow{AE}=x(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$，$\overrightarrow{DF}=(\sqrt{2}a-x)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，

∴$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}$

$$=-(\sqrt{2}a-x)(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})-\boldsymbol{a}+(\sqrt{2}a-x)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$$

$$=(\sqrt{2}a-x-1)\boldsymbol{a}-(\sqrt{2}a-x)\boldsymbol{c}.$$

显然平面 BCC_1B_1 的法向量是$\overrightarrow{CD}=-\boldsymbol{b}$，

∴$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{CD}=[(\sqrt{2}a-x-1)\boldsymbol{a}-(\sqrt{2}a-x)\boldsymbol{c}]\cdot(-\boldsymbol{b})$

$$=-(\sqrt{2}a-x-1)\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+(\sqrt{2}a-x)\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}=0.$$

∴EF∥平面 BCC_1B_1.

（本题也可以利用空间直角坐标系求解）

复习题三（教材 P.142）

1. 选 C. ∵$\boldsymbol{a}$∥$\boldsymbol{b}$，∴$\frac{2x}{1}=\frac{1}{2y}=\frac{3}{9}$，即 $x=\frac{1}{6}$，$y=-\frac{3}{2}$.

2. $\because \boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，$\therefore \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$. $\therefore 2m^2+m(m+1)-10=0$.解得 $m=\dfrac{5}{3}$或 $m=-2$.

$\therefore \boldsymbol{a}=\left(\dfrac{10}{3},\dfrac{5}{3},2\right),\boldsymbol{b}=\left(\dfrac{5}{3},\dfrac{8}{3},-5\right),\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\left(5,\dfrac{13}{3},-3\right)$，

或 $\boldsymbol{a}=(-4,-2,2),\boldsymbol{b}=(-2,-1,-5),\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(-6,-3,-3)$.

3. $\because |\overrightarrow{AB}|^2=(1+x)^2+(2x-1)^2+0^2=5\left(x-\dfrac{1}{5}\right)^2+\dfrac{9}{5}$，

$\therefore$当 $x=\dfrac{1}{5}$时，$|\overrightarrow{AB}|_{\min}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

4. $\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{(1,1,0)\cdot(1,0,1)}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$.

5. 设$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，则$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$，

$\therefore \boldsymbol{a}\cdot\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{c}|\cos 60^\circ-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 60^\circ=0$.

$\therefore \overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{BC}$. $\therefore \cos\langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{BC}\rangle=0$.

6. 如图 3-55，以 D 为原点，DC 为 x 轴，DA 为 y 轴，DP 为 z 轴建立空间直角坐标系，则 $P(0,0,1),A(0,1,0)$，$C(2,0,0)$，$B(1,1,0)$，

$\therefore \overrightarrow{PC}=(2,0,-1),\overrightarrow{BD}=(-1,-1,0)$.

$\therefore \cos\langle\overrightarrow{PC},\overrightarrow{BD}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{PC}||\overrightarrow{BD}|}=\dfrac{(2,0,-1)\cdot(-1,-1,0)}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}}$

$=\dfrac{-2}{\sqrt{10}}=-\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

$\therefore$异面直线 PC 与 BD 所成的角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

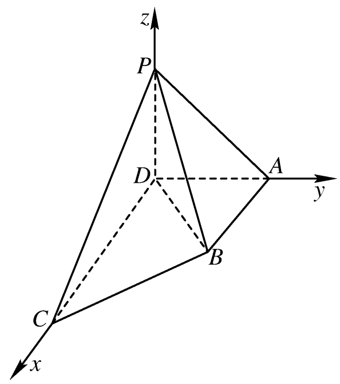


图 3-55

7. 选 A. 显然，由$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ 可以推出 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，反之不对.

8. 设$\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$，则$(1,2,2)=x(3,4,5)+y(9,14,16)$，

所以$\begin{cases}3x+9y=1,\\4x+14y=2,\\5x+16y=2,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=-\dfrac{2}{3},\\y=\dfrac{1}{3}.\end{cases}$ 因此 A，B，C，D 四点共面.

9. 因为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(\cos\alpha+\sin\alpha,2,\sin\alpha+\cos\alpha)$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(\cos\alpha-\sin\alpha,0,\sin\alpha-\cos\alpha)$，

所以 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=0$,所以$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=90^\circ$.

10.（1）因为 $x_1^2+y_1^2=1$，$x_2^2+y_2^2=1$，$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle=\dfrac{(x_1,y_1,0)\cdot(1,1,1)}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $x_1+y_1=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

因为 $x_1^2+y_1^2=1$，所以 $(x_1+y_1)^2-2x_1y_1=1$，所以 $x_1y_1=\dfrac{1}{4}$.

（2）由 $\begin{cases}x_1^2+y_1^2=1,\\ x_1+y_1=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\end{cases}$ 消去 y_1 得 $x_1^2+\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}-x_1\right)^2=1$，

即 $2x_1^2-\sqrt{6}x_1+\dfrac{1}{2}=0$. 同理得 $2x_2^2-\sqrt{6}x_2+\dfrac{1}{2}=0$.

所以 x_1，x_2 为 $2x^2-\sqrt{6}x+\dfrac{1}{2}=0$ 的两根，所以 $x_1+x_2=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$，$x_1x_2=\dfrac{1}{4}$.

同理 $y_1y_2=\dfrac{1}{4}$.　因此 $\cos\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{1}{2}$.

11.（1）以 D 为原点，分别以 $\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{DD_1}$ 为 x，y，z 轴的正方向，建立直角坐标系，则 $M(2,0,4)$，$N(4,2,4)$，$E(0,2,4)$，$F(2,4,4)$，

$\therefore \overrightarrow{MN}=(2,2,0)$，$\overrightarrow{EF}=(2,2,0)$，$\therefore MN\parallel EF$.

$\therefore \overrightarrow{NA}=(0,-2,-4)$，$\overrightarrow{ED}=(0,-2,-4)$，$\therefore NA\parallel ED$.

因此平面 MNA 平行平面 $EFBD$.

（2）设平面 MNA 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MN}=2x+2y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{NA}=-2y-4z=0,\end{cases}$

所以 $\begin{cases}x+y=0,\\ y+2z=0.\end{cases}$ 令 $z=1$，则 $y=-2$，$x=2$，所以 $\boldsymbol{n}=(2,-2,1)$.

因此 $d=\dfrac{|\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\left|\dfrac{(0,4,0)\cdot(2,-2,1)}{3}\right|=\dfrac{8}{3}$.

12. 如图 3-56 建立空间直角坐标系，则 $A(2,0,0)$，$D(0,0,0)$，$B(2,2,0)$，$C(0,2,0)$，

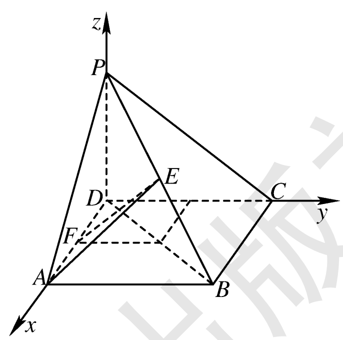


图 3-56

（1）设 $P(0,0,2x)$，则 $E(1,1,x)$，$\overrightarrow{AE}=(-1,1,x)$，$\overrightarrow{DP}=(0,0,2x)$，

$\because \cos\langle\overrightarrow{DP},\overrightarrow{AE}\rangle=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，　$\therefore \dfrac{\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{AE}}{|\overrightarrow{DP}||\overrightarrow{AE}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

即 $\dfrac{2x^2}{2|x|\sqrt{x^2+2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，解得 $x=1$，因此 $E(1,1,1)$.

（2）设平面 PAD 内任意一点 $F(x,0,z)$，

则 $\overrightarrow{EF}=(x-1,-1,z-1)$.

$\because EF\perp$ 平面 PCB，

$\therefore \overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{PC}=0$.

得 $\begin{cases}2(x-1)=0,\\ (z-1)(-2)-2=0,\end{cases}$　解得 $\begin{cases}x=1,\\ z=0.\end{cases}$

$\therefore F(1,0,0)$，即点 F 为 AD 的中点.

13. (1) 如图 3-57 建立空间直角坐标系，

则 $A(8,0,0)$，$D(0,0,0)$，$C(0,5,0)$，$M(6,5,4)$，

$\therefore \overrightarrow{AM}=(-2,5,4)$，$\overrightarrow{A_1D}=(-8,0,-4)$.

$\therefore \cos\langle\overrightarrow{AM},\overrightarrow{A_1D}\rangle=\dfrac{(-2,5,4)(-8,0,-4)}{|\overrightarrow{AM}||\overrightarrow{A_1D}|}=0$.

$\therefore \cos\langle\overrightarrow{AM},\overrightarrow{A_1D}\rangle=0$.

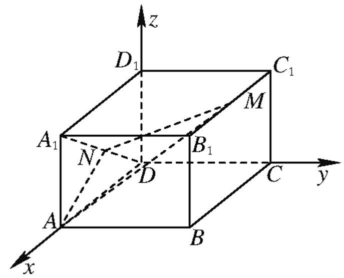


图 3-57

(2) 由(1)知 $AM\perp A_1D$ 且 $AN\perp A_1D$，

所以 $A_1D\perp$ 平面 AMN.

又$\because A_1D$ 为平面 AMN 的法向量，

所以 $\cos\langle\overrightarrow{A_1D},\overrightarrow{AD}\rangle=\dfrac{(-8,0,-4)\cdot(-8,0,0)}{\sqrt{80}\cdot\sqrt{64}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

所以直线 AD 与平面 AMN 所成角的正弦值为$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

(3) 平面 $ABCD$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(0,0,1)$，

平面 ANM 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(-8,0,-4)$，

所以 $\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\dfrac{(-8,0,-4)\cdot(0,0,1)}{\sqrt{80}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

因此平面 $ABCD$ 与平面 ANM 所成角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，正切值为 2.

14. 如图 3-58，设$\overrightarrow{PA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{PB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{PC}=\boldsymbol{c}$，

则 $\cos\langle\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\rangle=\dfrac{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})}{|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|}=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}^2}{|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|}=$

$\dfrac{\boldsymbol{c}^2}{|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|}>0$，

$\therefore \angle C$ 为锐角，同理$\angle B$，$\angle A$ 也是锐角.

因此$\triangle ABC$ 为锐角三角形.

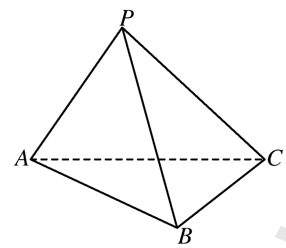


图 3-58

15. 如图 3-59，以点 C 为原点，CD 为 x 轴，CB 为 y 轴，CG 为 z 轴建立空间直角坐标系，则 $C(0,0,0)$，$D(4,0,0)$，$B(0,4,0)$，$A(4,4,0)$，$G(0,0,2)$，$F(4,2,0)$，$E(2,4,0)$.

设平面 GEF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，$\because\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EF}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EG}=0,\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}(x,y,z)(2,-2,0)=0,\\ (x,y,z)(-2,-4,2)=0.\end{cases}\therefore\begin{cases}2x-2y=0,\\ -2x-4y+2z=0.\end{cases}$

即$\begin{cases}x=y,\\ x+2y-z=0.\end{cases}$令 $z=1$，则 $x=\dfrac{1}{3}$，$y=\dfrac{1}{3}$，

因此 $\boldsymbol{n}=\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},1\right)$.

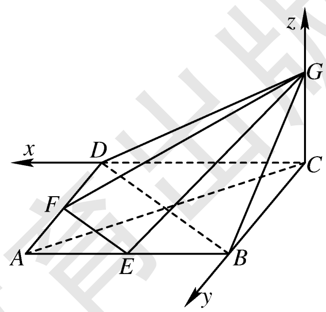


图 3-59

因为$\overrightarrow{BG}=(0,-4,2)$，所以点 B 到平面 EFG 的距离

$$d=\left|\overrightarrow{BG}\cdot\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right|=\left|(0,-4,2)\cdot\frac{\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},1\right)}{\sqrt{\frac{11}{9}}}\right|=\left|\frac{-\frac{4}{3}+2}{\frac{\sqrt{11}}{3}}\right|=\frac{2\sqrt{11}}{11}.$$

16. (1) 设 $P\in\alpha$，则 $P(x,y,z)$，$\overrightarrow{AB}=(-a,b,0)$，$\overrightarrow{BC}=(0,-b,c)$，

因为$\begin{cases}(x,y,z)(-a,b,c)=0,\\(x,y,z)(a,-b,c)=0,\end{cases}$ 所以$\begin{cases}x=\frac{c}{a},\\y=\frac{c}{b},\\z=1.\end{cases}$ $\therefore\boldsymbol{n}=\left(\frac{c}{a},\frac{c}{b},1\right)$.

由 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0$，得$\left(\frac{c}{a},\frac{c}{b},1\right)\cdot(x-a,y,z)=0$，整理得$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

(2) 设平面 α 上任意一点 $P(x,y,z)$，点 $M(1,0,0)$，$\because\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PM}=0$，

$\therefore(1,1,1)\cdot(1-x,-y,-z)=0$. $\therefore1-x-y-z=0$，即平面 α 为 $x+y+z=1$.

(3) 设平面 α 上任意一点 $P(x,y,z)$，点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，

$\because P(x,y,z)\in\alpha\Leftrightarrow\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{P_0P}$.

$\therefore(A,B,C)\cdot(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=0$.

即 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

(4) 任取平面上两点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，$P_2(x,y,z)$，平面 α 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(t_1,t_2,t_3)$，

$\because P_1P_2\in\alpha$，$\therefore\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{P_0P}$. $\therefore(t_1,t_2,t_3)(x-x_1,y-y_1,z-z_1)=0$.

$\therefore t_1(x-x_1)+t_2(y-y_1)+t_3(z-z_3)=0$.

即 $t_1x+t_2y+t_3z=t_1x_1+t_2y_1+t_3z_1$.

$\because$已知平面 α 的方程 $Ax+By+Cz+D=0$，

$\therefore$令 $t_1=\lambda A$，$t_2=\lambda B$，$t_3=\lambda C$，则$(t_1,t_2,t_3)=\lambda(A,B,C)$.

即 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$是平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的法向量.

(5) ①根据(4)知平面 $x+y+z=1$ 的法向量为(1，1，1)，

在平面 α 上任取一点 P_0(0，0，1)，

$\therefore$点 P(1，1，1) 到平面 $x+y+z=1$ 的距离

$$d=\left|\overrightarrow{P_0P}\cdot\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right|=\left|(1,1,0)\cdot\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}\right|=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

②设平面 α 的方程为 $Ax+By+Cz+D=0$，不失一般性地在平面 α 上任取一点 $P_0\left(0,0,-\frac{D}{C}\right)$，则点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$到平面的距离

$$d=\left|\overrightarrow{P_0P_1}\cdot\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right|=\left|\left(x_1,y_1,z_1+\frac{D}{C}\right)\cdot\frac{(A,B,C)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|=\left|\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|.$$