湘教版 普通高中课程标准实验教科书

教师教学用书

数学

选修 2-3 理科

主编：傅晋玖
编者：张 弘 郑 璋 叶文榕 周裕燕
叶 婷

湖南教育出版社

编 写 说 明

本书是《普通高中课程标准实验教科书·数学选修 2-3（理科）》的教师教学用书，编写时按教材分章、节安排，每章首先阐述了该章的教学目标、教材说明、课时安排建议、教学建议、评价建议，然后按教材分节编写，每节内容包括教材线索、教学目标、教材分析、教学建议、例题解析、相关链接．在每章的最后给出教材中练习、习题和复习题的参考解答．

编写此书的目的是为了帮助教师更好地把握教材，包括教材线索、教学目标、教材分析及教学中应予以关注的重点和难点，所提教学建议及例题解析仅供教师在教学过程中参考．在相关链接中所提供的短文是编者精心编写并与该章、节相关的内容，旨在扩大教师的知识视野，使教师用较高的观点把握教材，不要求学生掌握．

希望本书能成为教师使用教材的好帮手，恳请广大教师在使用过程中提出宝贵意见和建议．谢谢！

目　　录

第 7 章　计数原理

一、教学目标

1. 通过实例总结出分类加法计数原理、分步乘法计数原理，能根据具体问题的特征，选择分类加法计数原理或分步乘法计数原理解决一些简单的实际问题.

2. 通过实例理解排列、组合的概念，能利用计数原理推导排列数公式、组合数公式，并能解决简单的实际问题.

3. 能用计数原理证明二项式定理，会用二项式定理解决与二项展开式有关的简单问题.

二、教材说明

在本模块中，学生将学习计数基本原理、排列、组合、二项式定理及其应用，了解计数与现实生活的联系，会解决简单的计数问题.

1. 本章分为计数原理、排列、组合、二项式定理四节.

计数问题是数学中的重要研究对象之一，它大量存在于我们的学习和日常生活中。分类加法计数原理、分步乘法计数原理是解决计数问题的最基本、最重要的方法，也称为基本计数原理，它们为解决很多实际问题提供了思想和工具. 计数原理应用广泛，不仅是学习后面的概率统计知识以及进一步学习高等数学有关分支的基础，而且由于其思想方法较为独特灵活，所以它也是发展学生抽象能力和逻辑思维能力的好素材. 最后介绍的二项式定理，既是初中代数有关乘法公式的推广，又是学习后面概率知识的必要基础.

一首诗：“设赌摸球骗局深，迷图八阵费搜寻. 神机妙算杨辉数，组合排列有乾坤”总结了本章的知识和特点.

2. 本章教材以王蒙的故事作为引子，通过研究街头中奖游戏的欺骗性，吸引学生研究计数方法，让学生认识到计数问题大量存在于我们的学习和日常生活中.

3. 教材一开始提出了分类计数原理与分步计数原理这两个关于计数的基本原理，并将这两个原理的运用贯穿于全章学习的始终. 实际上，这两个原理体现了解决问题时将其分解的两种常用方法：将问题分类解决或分步解决. 教材接着以两个基本原理为基础，介绍了排列、组合的概念，排列数公式、组合数公式及其在计数问题上的应用，然后运用组合数的两个性质推导了二项式定理，同时通过研究二项式系数的性质深化对组合数的认识.

4. 对于如何解本章的应用题，教材介绍了两种思路：正向思考与逆向思考. 正向思考时，可通过“分类”或“分步”，对稍复杂的问题进行分解；逆向思考，用集合的观点看，

就是先从问题涉及的集合在全集中的补集入手，这种方法常使一些较复杂的问题得到简化.

5. 本章教材的重点是分类计数原理与分步计数原理，排列和组合的意义，以及排列数、组合数计算公式，二项式定理.

6. 本章教材的主要难点如下：

如何正确运用有关公式解决应用问题. 在解决问题时，由于对问题本身和有关公式的理解不够准确，常常发生重复或遗漏计算、用错公式等情况. 为了突破这一难点，教学中应强调一些容易混淆的概念之间的联系与区别，强调运用各个公式的前提条件，并对学生计算中出现的一些典型错误进行认真剖析.

三、课时安排建议

本章教学时间约需 14 课时，具体分配如下(仅供参考)：

7.1 两个计数原理

7.1.1 分类加法计数原理 1 课时

7.1.2 分步乘法计数原理 2 课时

7.2 排列

7.2.1 排列与排列数公式 1 课时

7.2.2 排列数的应用 2 课时

7.3 组合

7.3.1 组合与组合数公式 1 课时

7.3.2 组合数的性质和应用 2 课时

7.4 二项式定理 3 课时

小结与复习 2 课时

四、教学建议

1. 分类加法计数和分步乘法计数是处理计数问题的两种基本思想方法，它们既是推导排列数公式、组合数公式的基础，也是解决排列、组合问题的主要依据. 教学中，应引导学生严格根据计数原理分析、处理问题，而不应机械地套用公式.

2. 注意分类计数原理和分步计数原理的地位的区别. 分类计数原理更具有一般性，解决复杂问题时往往需要先分类，每类中再分成几步. 在排列、组合教学的起始阶段，要严格按原理去分析问题，才会做到分类有据、分步有方，为排列、组合的学习奠定坚实的基础.

3. 分析、判定有序无序，分清排列与组合. 排列与组合的区别在于问题是否与顺序有关. 与顺序有关的是排列问题，与顺序无关是组合问题. 顺序对排列、组合问题的求解特别重要，排列问题可以理解为先组合后全排列.

4. 联系生活实际，正确领会问题的实质. 排列、组合的教学应当大量采用学生熟悉的

生活事例，从生活经验、知识经验、具体情景出发，正确领会问题的实质，然后用数学的原理和语言表述具体做事的过程，逐步提高学生逻辑思维能力．

5．在这部分教学中，应避免烦琐的、技巧性过高的计算问题．

6．在二项式定理中介绍我国古代数学成就，介绍所学方法在社会生活中的广泛应用，以丰富学生对数学文化价值的认识．

五、评价建议

数学学习评价，既要重视学生知识、技能的掌握和能力的提高，又要重视其情感、态度和价值观的变化；既要重视学生学习水平的甄别，又要重视其学习过程中主观能动性的发挥；既要重视定量的认识，又要重视定性的分析；既要重视教育者对学生的评价，又要重视学生的自评、互评．总之，应将评价贯穿于数学学习的全过程中，既要发挥评价的甄别与选拔功能，更要突出评价的激励与发展功能．相对于结果，过程更能反映每个学生的发展变化，更能体现学生成长的历程．因此，数学学习的评价既要重视结果，又要重视过程．对学生数学学习过程的评价，包括学生参与数学活动的兴趣和态度、数学学习的自信心、独立思考的习惯、合作交流的意识、数学认知的发展水平等方面．

数学教学的评价应有利于营造良好的育人环境，有利于数学教与学活动过程的调控，有利于学生和教师的共同成长．

下面给出一些具体评价内容的建议与要求．

1．通过数学学习过程的评价，努力引导学生正确认识数学的价值，从而产生积极的数学学习态度、动机和兴趣．独立思考是数学学习的基本特点之一，评价中应关注学生是否勤于思考、善于思考、坚持思考并不断地改进思考的方法与过程，应关注学生是否积极主动地参与数学学习活动、是否愿意和能够与同伴交流数学学习的体会、是否能够与他人合作探究数学问题等等．学生学好数学的自信心、勤奋、刻苦以及克服困难的毅力等良好的意志品质，也是数学学习过程评价的重要内容．

2．评价应当重视考察学生能否理解并有条理地表达数学内容．关注学生能否不断反思自己的数学学习过程，并改进学习方法．可以要求学生在本章学习后写出本章的学习小结，经过自评、互评，然后放入学生成长记录袋．

3．评价对数学的理解，可以关注学生能否独立举出一定数量的用于说明问题的正例和反例．特别地，对核心概念学习的评价应该在高中数学学习的整个过程中予以关注．可以要求学生通过排列、组合、二项式定理的实际应用加深对有关计数原理的理解，布置学生完成一次实习作业．

4．定性评价可采取评语或成长记录等形式，评语或成长记录中应使用激励性语言全面、客观地描述学生的状况．

5．进行一次章测试，了解学生掌握基础知识和基本技能的状况，关注学生对两个计数原理、排列组合方法、二项式定理以及对这些数学知识所蕴涵的数学思想的掌握水平．

7.1 两个计数原理

7.1.1 分类加法计数原理

教材线索

本小节从日常生活的实例入手，引出分类加法计数方法，结合图示对分类加法计数原理进行阐释.

教学目标

（一）知识与技能

理解分类加法计数原理.

（二）过程与方法

会利用分类加法计数原理分析、解决一些简单的应用问题.

（三）情感、态度与价值观

体会、感悟理性思维和朴素的数学思维方式.

教材分析

1. 重点：

分类加法计数原理.

2. 难点：

分类加法计数原理的准确理解.

3. 分类加法计数原理是关于计数的基本原理，是涉及完成一件事的不同方法的种数. 分类计数原理中的“做一件事，完成它可以有 n 类办法”，是对完成这件事的所有方法的一个分类.

4. 使用分类加法计数原理必须注意对完成任务的方法进行分类. 分类时，首先要根据问题的特点确定一个分类的标准，然后利用这个分类标准进行分类；其次分类时要注意满足以下两个基本原则：一是完成这件事的任何一种方法必须分入相应的类，二是分别属于不同两类的两种方法都是不同的方法. 满足以上两条基本原则就可以使计数不重不漏.

5. 我们可以从集合的角度来理解分类计数原理. 完成一件事有 A，B 两类办法，即集

合 A，B 互不相交，在 A 类办法中有 m_1 种方法，B 类办法中有 m_2 种方法，即 $\mathrm{card}(A)=m_1$，$\mathrm{card}(B)=m_2$，那么完成这件事的不同方法的种数是 $\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B)$，这就是当 $n=2$ 时的分类计数原理.

教学建议

1．分类加法计数原理是在人们大量实践经验的基础上归纳出来的基本规律．它们不仅是推导排列数、组合数计算公式的依据，而且其基本思想方法贯穿于解决本章应用问题的始终．事实上，从思想方法的角度看，分类计数原理的运用是将一个问题进行“分类”的思考，从而达到分解问题、解决问题的目的.

2．分类加法计数原理是排列、组合的开头课．学习它所需的先行知识跟学生已熟知的数学知识联系很少，在教学中应当多列举一些学生熟悉的生活中的实例，帮助学生准确理解分类的原则，掌握分类的方法，从而达到对分类计数原理的正确理解.

3．分类加法计数原理(加法原理)中，“完成一件事，有 n 类办法”是说每种办法“互斥”，即每种方法都可以独立地完成这件事，同时它们之间没有重复也没有遗漏．进行分类时，要求各类办法彼此之间是相互排斥的，不论哪一类办法中的哪一种方法，都能独立完成这件事．只有满足这个条件，才能直接用加法原理，否则不可以.

4．在解决具体问题时，应当要求学生首先确定分类标准，然后强调使用分类原则判断完成一件事的方法的类别和不同方法的种数，做到计数不重不漏，同时为下一节学习分步乘法计数原理做准备.

例题解析

教材本节问题 1 从北京到长春的交通工具分成三类，有飞机、火车和长途汽车，对每个类别有不同的选择，其中乘飞机有 4 种选择，乘火车有 3 种选择，乘长途汽车有 5 种选择，所以一共有 $4+3+5=12$ 种选择.

教材本节问题 2 对书架上的图书进行分类，一共有 5 类，分别是语文书、数学书、英语书、小说、历史书．这 5 类书的数量分别是 8 册、8 册、7 册、12 册、3 册，一共是 $8+8+7+12+3=38$ 册．从中选择一本时可以有 38 种不同的选择方式.

7.1.2 分步乘法计数原理

教材线索

本小节从日常生活的实例入手，引出分步乘法计数方法，结合图示对分步乘法计数原理进行阐释.

教学目标

（一）知识与技能

理解分步乘法计数原理.

（二）过程与方法

会利用分类加法计数原理和分步乘法计数原理分析、解决一些简单的应用问题.

（三）情感、态度与价值观

体会、感悟理性思维和朴素的数学思维方式.

教材分析

1．重点：

分步乘法计数原理.

2．难点：

分步乘法计数原理的准确理解及其与分类加法计数原理的区别.

3．分步乘法计数原理与分类加法计数原理一样，都是涉及完成一件事的不同方法的种数．分类加法计数原理与“分类”有关，如果完成一件事有 n 类办法，这些办法之间是相互独立的，用其中任何一种方法都可以完成这件事，求完成这件事的方法数时，用分类加法计数原理；而分步乘法计数原理与“分步”有关，如果完成一件事需要分成 n 个不可缺少的步骤，只有各个步骤都完成了，这件事才算完成，而完成每一个步骤都有若干不同的方法，求完成这件事的方法数时，用分步乘法计数原理.

4．分步乘法计数原理中的“做一件事，完成它需要分成 n 个步骤”，是指完成这件事的任何一种方法，都要分成 n 个步骤，使用分步乘法计数原理必须注意对完成任务的方法进行分步，分步时首先要根据问题的特点确定一个分步的标准；其次分步时还要注意满足完成一件事必须并且只需连续完成这 n 个步骤后这件事就算完成．只有满足这些条件，才能用分步计数原理.

教学建议

1. 分类加法计数原理与分步乘法计数原理是关于计数的基本原理，它们是在人们大量实践经验的基础上归纳出来的基本规律。它们不仅是推导排列数、组合数计算公式的依据，而且其基本思想方法贯穿于解决本章应用问题的始终. 从思想方法的角度看，分类计数原理的运用是将一个问题进行“分类”的思考，分步计数原理是将问题进行“分步”的思考，从而达到分解问题、解决问题的目的. 因此，学生对这两个基本原理的掌握和运用程度，成为学好本章内容的一个关键.

2. 本节分析问题时应紧扣原理，弄清完成事情的前后经过，分清完成这件事是有 n 类方法还是有 n 个步骤，然后决定采用分类加法计数原理还是采用分步乘法计数原理.

3. 利用分步乘法计数原理解决问题，首先应当要求学生根据问题的特点确定一个分步的标准；其次分步时还要注意完成一件事必须并且只需连续完成这 n 个步骤后这件事才算完成，只有满足这些条件，才能用分步乘法计数原理.

4. 应用两个基本原理分析、解决问题，应紧扣原理，以完成事情为目标，分清是分类还是分步，或分类中含分步、分步中含分类，无论是分类、分步，关键是做到不重不漏.

5. 我们可以从集合的角度去理解分步乘法计数原理. 完成一件事需要分成 A，B 两个步骤. 在实行 A 步骤时有 m_1 种方法，在实行 B 步骤时有 m_2 种方法，即 $\text{card}(A)=m_1$，$\text{card}(B)=m_2$，那么完成这件事的不同方法种数是 $\text{card}(A \cdot B)=\text{card}(A)\cdot\text{card}(B)=m_1\cdot m_2$. 这就是当 $n=2$ 时的分步乘法计数原理.

例题解析

教材本节问题 1 从 A 到 C 必须经过两个步骤，第一步从 A 到 B，第二步从 B 到 C，所以采用分步乘法计数原理. 从 A 到 B 有三条路径，从 B 到 C 有四条路径，共有 $3\times4=12$ 种. 如图 7－1.

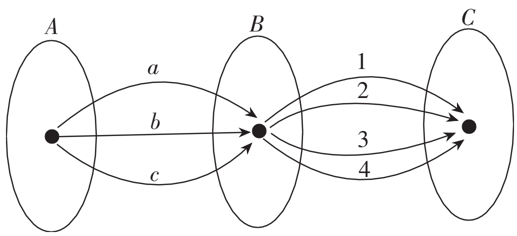


图 7－1

教材本节问题 2 完成两枚不同颜色的骰子的投掷，必须经过两个步骤，可以把投掷第 1 枚骰子视为第一步，把投掷第 2 枚骰子视为第二步，采用分步乘法计数原理. 第一步有六种结果. 第二步有六种结果. 第一步的每一个结果都可以和第二步的 6 个结果搭配，所以一共有 $6\times6=36$ 个不同的结果.

教材中的例 1 和例 2 都是用于巩固分类加法计数原理和分步乘法计数原理的简单题，其中每个例题中的第(1)小题都是单独利用分类加法计数原理解决问题，第(2)小题都是单独利

用分步乘法计数原理解决问题，这样有助于学生理解两个基本原理的意义及其区别.

本节教材的例 3 与例 6 是一个用分步乘法计数原理解决的重复排列问题，它在实际应用中经常遇到，具有一定的典型性. 例 3 在分析中要帮助学生认识到组成一个三位数可以分成三个步骤完成：

第一步，确定百位上的数字，从 5 个数字中任选 1 个数字，共有 5 种选法；

第二步，确定十位上的数字，由于数字允许重复，仍有 5 种选法；

第三步，确定个位上的数字，同理，它也有 5 种选法.

根据分步乘法计数原理，得到可以组成的三位数的个数是 $5\times5\times5=125$.

例 6 可以采用同样的方法分析.

例 4 是分步乘法计数原理的一般情形，通过例 4 的学习，既可以帮助学生避免对分步乘法计数原理产生不正确的狭义理解，又为下一节排列数公式的学习做好准备.

例 5 利用分步乘法计数原理研究多项式的积展开后的项数，为二项式定理的学习打下基础.

相关链接

课程标准对计数原理定位

计数问题是数学中的重要研究对象之一，分类加法计数原理、分步乘法计数原理是解决计数问题的最基本、最重要的方法，也称为基本计数原理，它们为解决很多实际问题提供了思想和工具. 在本模块中，学生将学习计数基本原理、排列、组合、二项式定理及其应用，了解计数与现实生活的联系，会解决简单的计数问题.

分类加法计数和分步乘法计数是处理计数问题的两种基本思想方法. 教学中，应引导学生根据计数原理分析、处理问题，而不应机械地套用公式. 同时，在这部分教学中，应避免烦琐的、技巧性过高的计数问题.

7.2 排　列

7.2.1 排列与排列数公式

教材线索

本小节从实例入手，提出了两个求排列数的具体问题，以分步乘法计数原理为依据，

采用了分步解决的思考方法，归纳出一般的排列数公式.

教学目标

（一）知识与技能

1. 正确理解排列的意义，掌握排列数的计算公式，了解排列数公式的推导.

2. 理解阶乘的意义，会求正整数的阶乘.

3. 熟悉并掌握一些分析和解决排列问题的基本方法，能够熟练运用排列知识和方法解决一些简单的实际问题.

（二）过程与方法

培养学生的计算能力和分析、解决问题的能力.

（三）情感、态度与价值观

体会排列知识在实际中的应用，增强学生学习数学的兴趣. 让学生学会通过对事物现象、本质的进一步分析，得出一般的规律，体会、感悟理性思维和朴素的数学思维方式.

教材分析

1. 重点：

排列的概念，排列数公式，排列数公式的简单应用.

2. 难点：

排列数公式的推导，排列数公式的简单应用.

3. 从知识体系看，本小节处于一个承上启下的地位. 推导排列数公式的过程就是分步计数原理的重要应用，而排列数公式又是推导组合数公式的主要依据.

4. 本节从两个简单的排列问题入手，以分步乘法计数原理为依据，采用了分步解决的思考方法，列出了问题中的所有排列，使得学生比较容易接受分析的结果的正确性.

问题 1 的处理可以使用树形图表示，这样学生的认识会更直观，教学效果更好.

5. 从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素，按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列.

这里的 n 个元素是互不相同的，且抽取的 m 个元素是从 n 个元素中没有重复抽取的，因而这 m 个元素也是互不相同的，这就决定了 $m\leqslant n$（而在重复排列的问题里允许 $m>n$）. 教学中应向学生明确：我们在研究排列问题时，是从一些不同元素中任取部分不同元素，这里既没有重复元素，又没有重复抽取相同的元素.

排列的定义中包含两个基本内容：一是“取出元素”；二是“按照一定的顺序排列”. 因此排列要完成的“一件事情”是“取出 m 个元素，再按一定的顺序排列”，“一定的顺序”就是与位置有关，在分析问题 1 和问题 2 时要引导学生细心观察是否与位置有关，但学生可能对“一定的顺序”的理解有困难，可以举一些例子，例如：1，2 这 2 个数排成一个两位数，12 和 21 是不同的，与位置有关. 因此按照排列的定义，若干个元素排成一列，元素

不同或元素相同但顺序不同的排列都是不同的排列. 两个排列相同，当且仅当这两个排列的元素完全相同，而且元素的排列顺序也完全相同.

6. 从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素的所有排列的个数，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数，用符号 A_n^m 表示. 排列这一小节研究的主要问题，就是推导出从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数的公式，并运用排列数公式解决有关排列数的应用问题.

"排列数"与"一个排列'两个概念是不同的，"一个排列"是指"从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素，按照一定的顺序排成一列"，它不是数；"排列数"是指"从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素的所有排列的个数"，它是一个正整数，所以符号 A_n^m 只表示排列数，而不表示具体的排列.

7. 排列数公式的推导是本小节教学的一个关键，教材中对排列数公式的推导方法是不完全归纳法，不是严格的证明，排列数公式的严格证明需要采用数学归纳法，这里不要求学生进行证明.

在推导 $A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-m+1)$时，采用以下方法逐步说明：

第一步，从 n 个元素中选取一个，有 n 种方法；

第二步，从余下的 $n-1$ 个元素中选取一个，有 $n-1$ 种方法；

……

第 m 步，从余下的 $n-m+1$ 个元素中选取一个，有 $n-m+1$ 种方法.

再按照分步计数原理可得 $A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-m+1)$.

8. 公式 $A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-m+1)$的特点：第一个因数是 n，后面每一个因数比它前面一个少 1，最后一个因数是 $n-m+1$，共有 m 个连续的正整数因数. 当 n，m 是比较复杂的文字式子时，容易将 $n-m+1$ 算错.

9. 规定 $A_n^n=n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot2\cdot1=n!$（$n!$ 叫做 n 的阶乘）. 公式 $A_n^m=n(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-m+1)$就可以用阶乘来表示，写成：$A_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$，这样表示主要有两个作用：

(1)当 n，m 较大时，利用科学计算器可以直接按出相应的排列数 A_n^m，计算比较方便.

(2)对含有字母的排列数的式子进行变形和论证时，这种形式比较有利于发现相互之间的关系.

10. 在排列的定义里，如果 $m<n$，表示只选一部分元素进行排列，因此又叫做选排列；从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$个元素的选排列个数是 A_n^m.

如果 $m=n$，表示将全体元素进行排列，所以又叫做全排列. n 个不同元素的全排列个数是 $A_n^n=n(n-1)\cdot\cdots\cdot3\cdot2\cdot1=n!$.

11. 排列数的应用在本小节既是重点，也是难点. 通过这一部分的教学，可以使学生初步学会分析问题的方法，解决有关排列的简单应用问题.

12. 特别规定当 $n=0$ 时，$n!=0!=1$.

教学建议

1. 学生在初学阶段对排列的概念的理解存在一定的困难，教学中对具体问题的分析一定要详细，紧紧扣住分步乘法计数原理，采用分步解决的思考方法，列出问题中韵所有排列，使得学生比较容易接受分析的结果的正确性. 也可以使用树形图表示，这样教学效果更好.

2. 排列的定义中包含两个基本内容：一是“取出元素”；二是“按照一定的顺序排列”. 学生对“一定的顺序”的理解有困难，可以多举一些学生熟悉的例子. 引导学生细心观察顺序与位置的关系，从而理解“一定的顺序”就是与位置有关.

3. 教学中，要引导学生注意区分“排列数”与“一个排列”两个概念的差异，“一个排列”是指“从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素，按照一定的顺序排成一列”，它不是数；“排列数”是指“从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素的所有排列的个数”，它是一个正整数，所以符号 A_n^m 只表示排列数，而不表示具体的排列. 可以举这样的例子：从 1，2，3 中任取 2 个数的排列有 12，21，13，31，23，32 等. 其中每一个都是一个排列，共有 6 个，6 就是从 1，2，3 中任取 2 个数的排列数.

4. 排列数公式的推导是本小节教学的一个关键，教学中应先将问题 1，2 的结果列出，引导学生观察结果的特点，注意分析结果与 n，m 的关系，从而猜想排列数公式的规律. 排列数公式的推导方法是不完全归纳法，不是严格的证明，排列数公式的严格证明需要采用数学归纳法，这里不要求学生进行证明.

学生对第 m 步有 $n-m+1$ 种方法的理解有一定的困难，可以通过一些简单、具体的例子帮助学生掌握. 例如：令 $n=12$，$m=5$，第一步从 12 个元素中选取一个，有 12 种方法，$12=12-1+1$；

第二步从余下的 11 个元素中选取一个，有 11 种方法，$11=12-2+1$；

……

第五步从余下的 8 个元素中选取一个，有 8 种方法，$8=12-5+1$.

归纳成口诀：“尾减头加一”，这样可以帮助学生记忆排列数公式.

5. 教学中应引导学生认真分析公式 $\mathrm{A}_n^m=n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-m+1)$ 的特点：第一个因数是 n，后面每一个因数比它前面一个少 1，最后一个因数是 $n-m+1$，共有 m 个连续的正整数因数. 提高学生对公式记忆的准确率，当 n，m 是比较复杂的文字式子时，应提醒学生 $n-m+1$ 容易算错.

6. 应用排列数公式解决一些简单的排列问题时，应确定原有元素和取出元素的个数，即 n，m 的值，然后根据实际问题的具体要求求出排列数.

例题解析

1. 本节教材中的问题 1 和问题 2 是两个简单的排列问题，以分步乘法计数原理为依

据，采用了分步解决的思考方法，问题1列出了问题中的所有排列，使得学生比较容易接受分析的结果的正确性.

问题1需要分3个步骤：

第一步，先确定左边的字母，在4个字母中任取1个，有4种方法；

第二步，确定中间的字母，从余下的3个字母中取，有3种方法；

第三步，确定右边的字母，只能从余下的2个字母中取，有2种方法.

根据分步乘法计数原理，共有 $4\times3\times2=24$ 种不同的排法. 它们是

$$\begin{array}{cccccc} abc & acb & abd & adb & acd & adc \\ bac & bca & bad & bda & bcd & bdc \\ cab & cba & cbd & cdb & cad & cda \\ dbc & dcb & dab & dba & dac & dca \end{array}$$

可以看出，上述排列的特点是无重复、有次序.

问题1的处理可以使用树形图(图7－2)表示.

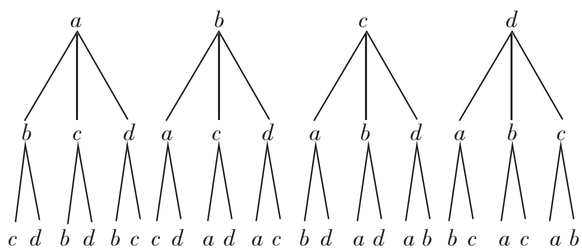


图7－2

问题2在考虑派遣的先后次序时，可以分3个步骤：

第一步，从5艘远洋轮中任选取一艘，有5种方法；

第二步，从其余4艘远洋轮中任选取一艘，有4种方法；

第三步，从其余3艘远洋轮中任选取一艘，有3种方法.

根据分步乘法计数原理，知道一共有 $5\times4\times3=60$ 种派遣方法.

2. 教材在本小节中安排了3个例题，具体解析如下：

例1 我国的邮政编码由6位数字组成，如果每个数字可以是0，1，…，9中的一个，最多可以编排多少个数字互不相同的邮政编码？

解析 本题带有限制条件“数字互不相同”，这样本题就是一个排列问题，一个数字互不相同的邮政编码恰是从0，1，2，…，9这10个数字中任取6个数字的一个排列. 这样的数字一共有 A_{10}^{6}，教学中可以将“数字互不相同”去掉，问学生：“这个问题是否仍然是排列问题，为什么？”

例2 从8名同学中选4人参加 4×100 米接力赛，有多少种不同的参赛方案？

解析 本题是学生比较熟悉的 4×100 米接力赛，选出参赛的4个同学在比赛中的棒次如果不同，排列也是不同的，要抓住“每一种参赛方案恰是从8个同学中选取4个同学的

一个排列”，这样的排列数是 A_8^4.

例 3 某青年志愿者协会组织者将 n 根树苗随机分发给参加“义务植树活动”的 n 名青年志愿者，会有多少种不同结果？

解析 本题是一个全排列的问题. 将参加植树的 n 名青年志愿者从 1 到 n 编号，如果组织者将树苗随机地发给这 n 名青年志愿者，可以这样认为：n 名青年志愿者按顺序站好，将 n 根树苗进行全排列，这样的排列一共有 $n!=n(n-1)\cdot\cdots\cdot2\cdot1$ 个，每一个排列对应一种分法，所以一共会有 $n!$ 个不同的结果.

7.2.2 排列数的应用

教材线索

本小节从排列数公式入手，利用公式解决排列数的化简、证明等问题，引导学生运用排列的知识分析、解决有关排列的实际问题.

教学目标

（一）知识与技能

1. 进一步正确理解排列的意义，掌握排列数的计算公式.

2. 熟练应用排列数公式解决排列数的化简、证明等问题.

3. 熟练运用排列知识和方法解决一些有关排列的实际问题.

（二）过程与方法

培养学生的计算能力和分析、解决问题的能力.

（三）情感、态度与价值观

体会排列知识在实际中的应用，增强学生学习数学的兴趣. 让学生学会通过对事物现象、本质的进一步分析，得出一般的规律，体会、感悟理性思维和朴素的数学思维方式.

教材分析

1. 重点：

排列数公式，排列数公式的应用.

2. 难点：

排列数公式的应用.

3. 本小节根据排列数公式，提出 $A_n^1=n$ 和当 $n>m>1$ 时，$A_n^m=nA_{n-1}^{m-1}$ 的解释，帮助学生进一步认识排列和排列数公式的意义.

4. 熟练利用排列数公式解决排列数的化简、证明等问题.

5. 排列数的应用在本小节既是重点，也是难点. 通过这一部分的教学，可以使学生初步学会分析问题的方法. 解有关排列的应用题时，先将问题归结为排列问题的数学模型，确定原有元素和取出元素的个数，即 n，m 的值，然后根据实际问题的具体要求求出排列数. 主要方法有优先法、捆绑法、插空法、排除法.

教学建议

1. 解有关排列的应用题时，先将问题归结为排列问题的数学模型，确定原有元素和取出元素的个数，即 n，m 的值，然后根据实际问题的具体要求求出排列数. 由于解排列应用题往往难以验证结果的正确性，所以一般应考虑用一种方法计算结果，用另一种方法检查核对，辨别正误.

2. 有关排列的应用题的教学中，对具体问题的分析一定要详细，紧紧扣住分步乘法计数原理，引导学生采用分步解决的思考方法，列出问题中的所有排列，也可以使用树形图表示，这样教学效果更好.

3. 解有关排列的实际问题，主要有位置优先法、捆绑法、插空法、排除法.

(1) 优先法：对于有特殊元素、特殊位置的排列问题，一般应先考虑特殊元素或特殊位置，再考虑其他元素或位置. 比如：

从 6 名运动员中选出 4 人参加 4×100 m 接力，若甲不能跑第一棒和第四棒，求不同的参赛方案有多少种？

解 (解法一)优先考虑特殊元素，让其选位置.

甲元素特殊，此时务必注意甲是否参赛，分成两类：

第一类，若甲不参赛，则有 A_5^4 种参赛方案；

第二类，若甲参赛，则有 $A_2^1A_5^3$ 种参赛方案.

故不同的参赛方案有 $A_5^4+A_2^1A_5^3=240$(种).

(解法二)优先考虑特殊位置，让其选元素.

第一、四棒位置特殊，共有 5 个元素供选择，有 A_5^2 种选法，其余两棒有 4 个元素供选择，有 A_4^2 种选法，故不同参赛方案有 $A_5^2\times A_4^2=240$(种).

(2) 捆绑法：对于某几个元素要求相邻的排列问题，可先将相邻的元素“捆绑”起来当做一个元素与其他元素排列，然后再对相邻元素内部进行排列. 比如：

7 人站成一排，甲、乙、丙三人必须相邻，有多少种不同的排法？

解 将甲、乙、丙三人看做一个整体与其他 4 个人一起排列，然后再考虑甲、乙、丙三人的排列，所以排法共有 $A_5^5A_3^3=720$(种).

(3) 插空法：对某几个元素要求互不相邻的排列问题，可先将其他元素排好，然后将互不相邻的元素在已排好的元素之间及两端的空隙之间插入. 比如：

7 人站成一排，若要求甲、乙、丙三人互不相邻，则有多少种不同的排法？

解　先将除甲、乙、丙三人外的 4 个人排列，4 个人之间及两端有 5 个空隙，将甲、乙、丙三人排到 5 个空隙中，共有不同的排法 $\mathrm{A}_4^4\mathrm{A}_5^5=1\ 440$(种).

(4) 排除法：当问题反面明了时，采用此法较易，从总体中排除不符合条件的方法数，这是一种间接解题的方法. 比如：

若$\{a, b, c\}\subseteq\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$，求符合条件的二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的解析式有多少种？

解　从八个数字中任取三个数字的排列，有 A_8^3 种，但 $a=0$ 时的 A_7^2 种应去掉，

∴　$\mathrm{A}_8^3-\mathrm{A}_7^2=294$ 种.

(教材中只介绍了捆绑法的例子，对于其他方法可以适当补充一些范例进行说明)

4. 从 n 个不同元素里取出 m 个可以重复选取的元素，按照一定的顺序排成一列，称为 n 个不同元素允许重复的 m 个元素的选排列，简称重复排列. 由于在一个排列的每个位置上有 n 种选取元素的方法，根据分步乘法计数原理，这种排列的种数是 n^m. 对于重复排列来说，可以不受 $m\leqslant n$ 这个条件的限制.

在本章末专门讨论重复排列问题，但从一开始，就已经涉及重复排列的问题. 例如教材 7.1.2 节的例 3 与例 6 以及本节例 5 的(1)都可看做重复排列问题. 但我们可以不从重复排列的角度去分析它们，而看做运用分步乘法计数原理分步完成的一件事，因而有关重复排列的计算公式也不必去记. 在教学中，应注意把握这一教学要求.

例题解析

教材在本小节中安排了 5 个例题，具体解析如下：

例 1　验证排列数 A_n^m 满足：

(1) $\mathrm{A}_n^1=n$；　　　　(2)当 $n>m>1$，$\mathrm{A}_{mn}=n\mathrm{A}_{n-1}^{m-1}$.

解析　本题是验证排列数 A_n^m 满足(1)$\mathrm{A}_n^1=n$，(2)当 $n>m>1$，$\mathrm{A}_n^m=n\mathrm{A}_{n-1}^{m-1}$. (1)$\mathrm{A}_n^1=n$ 的解释：从 n 个不同的元素中选出一个进行排列，一共有 n 个选法. (2)$\mathrm{A}_n^m=n\mathrm{A}_{n-1}^{m-1}$ 的解释：从 n 个不同的元素中选出 m 个进行排列，相当于第一步选出一个排在第 1 位，有 n 种方法；第二步在其余的 $n-1$ 个元素中选择 $m-1$ 个，依次排在第 2 位，第 3 位，…，第 m 位，有 A_{n-1}^{m-1}种排法. 利用分步乘法计数原理知道不同的排列总数是 $n\mathrm{A}_{n-1}^{m-1}$个.

例 2　计算：

(1) A_6^4；

(2) $\mathrm{A}_3^2+\mathrm{A}_4^3+\mathrm{A}_5^3$.

点评　本题是排列数公式的简单应用.

例 3　解方程：

(1) $3\mathrm{A}_x^3=2\mathrm{A}_{x+1}^2+6\mathrm{A}_x^2$；

(2) $3\mathrm{A}_8^x=4\mathrm{A}_9^{x-1}$.

点评　本题应用排列数公式将问题转化为关于 x 的方程，解方程求出相应的未知数 x.

教学中应提醒学生注意 $m\leqslant n$ 且 m，$n\in\mathbf{N}^*$ 这个制约条件.

例 4　由数字 1，2，3，4，5 组成没有重复数字的五位数，其中小于 50 000 的偶数共有多少个？

解析　本题用数字 1，2，3，4，5 组成小于 50 000 的没有重复数字的五位数的偶数，这是一个的限制条件的排列问题. 分析这个问题时，应当明确限制条件有两个，一是偶数，二是小于 50 000，在排列时应分三步，第一步排个位数，因为要求是偶数，所以只能排 2 或 4，排法有 A_2^1 种；第二步是排万位数，小于 50 000 的五位数，万位数只能用 1，3 或用排个位数时余下的 2，4 中的一个，排法有 A_3^1 种；在首末两位数排定后，第三步排中间 3 个数字时，排法有 A_3^3 种. 根据分步乘法计数原理，要求的偶数有 $A_2^1A_3^1A_3^3=2\times3\times3\times2\times1=36$(个). 本题也可以采用逆向思考的方法：先求用数字 1，2，3，4，5 组成的小于50 000 的五位数，再从中减去不是偶数的排列数.

例 5　解答下面的问题.

(1) 从 5 种不同的书(每种不少于 3 本)中买 3 本送给 3 名同学，每人各 1 本，共有多少种不同的送法？

(2) 4 个读者到 4 个服务台排队还书，有且只有一个服务台没有这 4 个读者还书的排队有多少种？

解析　(1)根据分步乘法计数原理，一共有 $5^3=125$ 种方法. 这是重复排列的问题. (2)采用捆绑法，第一步从 4 个读者中选出 2 个“捆绑”在一起，视为 1 个“读者”，有 A_4^2 种方法，第二步从 4 个服务台中取定 3 个，将以上的“3 个读者”依次排列在这 3 个服务台，有 A_4^3 种方法，根据分步乘法计数原理，一共有 $A_4^2A_4^3=288$ 种方法. 教学中，当某些元素要求必须相邻时，应先将这些元素排列，并把这个排列看做一个元素，然后再与其他元素进行排列.

7.3　组　合

7.3.1　组合与组合数公式

教材线索

本小节从实例入手，提出了三个求组合数的具体问题，通过研究三个问题的特点，引出组合与组合数的概念，并引导学生体会组合概念与排列概念的联系与区别.

教学目标

（一）知识与技能

理解组合的意义，正确认识组合与排列的联系与区别，掌握组合数的计算公式，运用公式解决一些简单的应用问题.

（二）过程与方法

培养学生掌握由特殊到一般的研究方法，增强学生的探究能力.

（三）情感、态度与价值观

通过组合数公式的推导过程，要求学生会用联系的观点看问题，从排列与组合的概念中找到区别和联系，加深对概念的认识，增强对组合数公式的记忆效果.

教材分析

1. 重点：

组合的概念、组合数公式的推导及其应用.

2. 难点：

组合数公式的推导和应用.

3. 组合与排列所研究的问题是完全平行的，组合数公式的推导要依据排列数公式.

4. 从 n 个不同的元素中，取出 $m(m\leqslant n)$ 个不同的元素，不论次序地构成一组，称为一个组合. 在本章里不研究重复组合问题，上述抽取 m 个元素强调取出的元素不能有重复，也就是指无放回的抽取，因而有 $m\leqslant n$ 的限制. 如果允许重复抽取，也可以有 $m>n$.

5. 排列概念与组合概念的共同点，就是都要“从 n 个不同元素中，任取 m 个不同元素”；而不同点就是对于所取出的 m 个元素，排列要“按照一定的顺序排成一列”，而组合却是“不管顺序地构成一组”，即排列与顺序有关，组合与顺序无关. 两个组合相同，当且仅当这两个组合的元素完全相同.

6. 用符号 C_n^m 表示所有不同的组合个数，称 C_n^m 为从 n 个不同的元素中取 m 个元素的组合数. 在教学中应引导学生注意区分“组合数”和“一个组合”这两个概念，“一个组合”是指“从 n 个不同元素中取出 m 个元素构成一组”，它不是数；“组合数”是指“从 n 个不同元素中取出 m 个元素的所有组合的个数”，它是一个正整数，所以符号 C_n^m 只表示组合数，而不表示具体的组合.

7. 组合数公式的推导，从研究组合与排列的关系入手，分两步完成：

第一步，先从这 n 个不同元素中取出 m 个元素，不考虑次序地构成一个组合，共有 C_n^m 个组合；

第二步，将每一个组合中的 m 个元素进行全排列，全排列数是 $A_m^m=m!$.

根据分步乘法计数原理，得到 $A_n^m=C_n^m A_m^m$.

因此得到组合数 C_n^m 的计算公式：

$$C_n^m=\frac{A_n^m}{A_m^m}=\frac{n(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-m+1)}{m!}，(0\leqslant m\leqslant n).$$

这样就更清楚地揭示出组合与排列的对应关系．在教学中，应强调上述分两步解决问题的思路，可以利用组合与相应排列的对应图，以加深学生对它们之间关系的认识．

组合数的另一个公式：$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}(0\leqslant m\leqslant n)$，当 n，m 较大时，利用这个公式可以借助计算器比较方便地进行计算．

8．当 $m=0$ 时，规定 $C_n^0=1$，这样对 n，m(其中 $m=0$，1，2，…，n，$n\in\mathbf{N}^+$)都有

$$C_n^m=C_n^{n-m}.$$

上面公式的解释：从 n 个不同的元素中选取 m 个，余下的 $n-m$ 个不论次序地构成一组，所以从 n 个不同元素中选取 m 个元素的组合数与从 n 个不同元素中选取 $n-m$ 个元素的组合数相等．利用组合数公式的计算，可以证明上面公式是成立的．

教学建议

1．学生对排列概念与组合概念的联系与区别的理解有一定的困难，教学中应当充分利用教材 P.19 的例 2，引导学生认真分析哪个是排列问题，哪个是组合问题，教师还可以多举一些区别排列与组合的例子，帮助学生认识到“顺序”是区分排列与组合的关键．

2．组合数公式的推导过程的教学关键是引导学生研究组合与排列的关系，发现排列可以分为两步完成：“先取 m 个元素，再进行全排列”，全排列数是 $A_m^m=m!$，根据分步乘法计数原理，得到 $A_n^m=C_n^mA_m^m$，因此得到组合数公式．在教学中，应强调上述分两步解决问题的思路，可以利用组合与相应排列的对应图，以加深学生对它们间关系的认识．

3．对公式 $C_n^m=C_n^{n-m}$ 的理解，教学中可以采用“一一对应”的思想来解释，突出了从 n 个元素中取 m 个与从 n 个元素中取 $n-m$ 个的一一对应关系，即“取出的”和“余下的”是一一对应关系，它表明从计算组合数的角度看，两种取法是等价的．教学中，应强调公式 $C_n^m=C_n^{n-m}$ 对简化组合数计算的意义．

4．组合数的计算对学生的计算能力有一定的要求，教学中可以通过一定量的训练提高学生计算组合数的速度和准确率，当 n，m 较大时，可以利用公式 $C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}(0\leqslant m\leqslant n)$借助计算器比较方便地进行计算．

例题解析

本节教材中问题 1 是篮球赛的场次问题，比赛的两个班无次序问题；问题 2 只考虑单程，相当于不考虑次序；问题 3 是从 12 辆客车中选派 3 辆客车运送同学秋游，不用考虑三辆车的次序，都是组合问题，用组合知识可以容易解决．教材设置的三个问题都是学生生活中熟悉的、常见的，对它们的探究能够比较容易帮助学生理解组合的概念．

例 1　把 n 个不同的元素分成有顺序的两组，第一组有 m 个元素，第二组有 $n-m$ 个元

素，证明共有 C_n^m 种分法.

点评 本题是一道证明题，实际上是组合数 C_n^m 的另一种表述方法. 这个问题的解决，可以帮助学生理解公式 $C_n^m=C_n^{n-m}$.

例 2 先回答以下问题是组合问题还是排列问题，然后再计算所问的结果.

(1) 集合{0，1，2，3，4}的含三个元素的子集的个数是多少？

(2) 用没有任何三点共线的五个点可以连成多少条线段？如果连成有向线段，共有多少条？

(3) 某小组有 9 名同学，从中选出正、副班长各一人，有多少种不同的选法？若从中选出 2 名代表参加一个会议，有多少种不同的选法？

解析 本题要求学生先回答以下问题是组合问题还是排列问题，然后再计算所问的结果，这样有助于学生区别排列概念与组合概念，即排列与顺序有关，组合与顺序无关.

(1) 由于集合中的元素是不讲次序的，这是一个组合问题，一个含三个元素的集合就是一个从{0，1，2，3，4}中取出 3 个数的组合，组合的个数是 C_5^3，所以子集的个数是 C_5^3.

(2) 第一问中取两个点连成一条线段，不用考虑这两个点的次序，所以是组合问题，连成的线段共有 C_5^2 条. 而第二问考虑有向线段，这时两个点的先后排列次序对应两个不同的有向线段，所以是排列问题。有向线段共有 $A_5^2=5\times4=20$ 条.

(3) 选正、副班长时要考虑次序，所以是排列问题，正、副班长共有 $A_9^2=9\times8=72$ 种选法. 选代表参加会议是不用考虑次序的，所以是组合问题，不同的选法有 C_9^2 种.

7.3.2 组合数的性质和应用

教材线索

本小节从组合数公式入手，研究组合数的两个性质，引导学生运用组合数公式和组合数性质分析、解决有关组合的实际问题.

教学目标

(一) 知识与技能

1. 进一步巩固组合、组合数的概念及其性质，熟悉组合数的公式.
2. 掌握组合数的两个性质，并能运用组合数的性质进行化简.
3. 进一步理解排列与组合的区别与联系，能够熟练解决一些简单的应用问题.

(二) 过程与方法

培养学生的计算能力和分析解决问题的能力，提高学生合理选用知识的能力.

（三）情感、态度与价值观

学会用联系的观点看问题，学会在解决问题时应抓住主要矛盾，学会用转化的思想解决问题.

教材分析

1. 重点：

组合数的性质和组合应用问题.

2. 难点：

组合应用问题.

3. 本节根据组合数公式直接给出组合数性质 1，当 $m=n-k$ 时，这个性质其实是 $C_n^m=C_n^{n-m}$ 的逆命题，这里突出了从 n 个元素中取 m 个与从 n 个元素中取 $n-m$ 个的一一对应关系，它表明从计算组合数的角度看，两种取法是等价的.

4. 教材运用组合数公式对性质 2 进行了证明，这样可增加对组合式子进行变形的机会. 教材 P. 23 的说明强调两点：一是当根据组合的定义推导性质 2 时，用到了分类计数原理；二是为了便于学生理解、记忆性质 2，可说明公式的意义：C_{n+1}^m 表示从 a_1，a_2，…，a_{n+1} 这 $n+1$ 个不同的元素中任取 m 个元素的组合数，可以看做从 n 个元素里分两类抽取，其中含元素 a_1 时抽取 $m-1$ 个，不含 a_1 时仍抽取 m 个，因此有：

$$C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}.$$

5. 应用组合数公式和组合数性质分析、解决有关组合的实际问题是本节的一个教学难点，教材中安排了 4 道应用例题，对常见的解决组合问题的方法进行了分析、解决.

科学分类法：对于较复杂的问题，由于情况繁多，因此要对各种不同情况进行科学分类，以便有条不紊地进行解答，避免重复或遗漏现象发生.

插空法：解决一些不相邻问题时，可以先让一些元素进行排列，然后再插入其余元素，使问题得以解决.

捆绑法：相邻元素的排列，可以采用“整体到局部”的排法，即将相邻的元素当成“一个”元素进行排列，然后再局部排列.

排除法：从总体中排除不符合条件的方法，这是一种间接解题的方法.

消序法：主要解决“均匀无序分组”的问题，而且组与组之间不存在顺序关系.

其中例 6 的彩票中奖率问题呼应了本章教材开始时提出的“问题探索：运气还是欺骗？(一)”，为这个问题的顺利解决提供了方法的准备.

教学建议

1. 在组合数性质 1 的教学中，应当提醒学生注意 $m=k$ 或 $m=n-k$. 对这个问题的理解可以举一些具体的例子，如：计算 C_6^2 和 C_6^4 的值，可以发现 $C_6^2=C_6^4=C_6^{6-2}$，帮助学生认识到当 $C_n^m=C_n^k$ 时，可以是 $m=k$，也可以是 $m=n-k$，这个性质其实是 $C_n^m=C_n^{n-m}$ 的逆命

题．从计算组合数的角度看，从 n 个元素中取 m 个与从 n 个元素中取 $n-m$ 个是一一对应的，两种取法是等价的．

2．在组合数性质 2 的教学中，教材采用组合数公式进行证明，这种方法比较直接，学生也容易理解，还可以增加对组合式子进行变形的训练机会．对组合数性质 2 的公式的意义应采用分类加法计数原理进行说明：C_{n+1}^{m} 表示从 a_1，a_2，…，a_{n+1} 这 $n+1$ 个不同的元素中取 m 个元素的组合数，可以看做从 n 个元素里分两类抽取，其中含元素 a_1 时抽取 $m-1$ 个，不含 a_1 时仍抽取 m 个，因此有：$C_{n+1}^{m}=C_{n}^{m}+C_{n}^{m-1}$．

3．应用组合数公式和组合数性质分析、解决有关组合的实际问题是本节的一个教学难点．有关组合问题的解决，往往要牵涉到排列的知识，因此在分析问题时首先要弄清一件事是"分类"还是"分步"完成，对于元素之间的关系，还要考虑是"有序的"还是"无序的"，也就是会正确使用分类加法计数原理和分步乘法计数原理、排列定义和组合定义，教材中安排了 4 道应用题，教学中应对常见的解决组合问题的方法进行归纳、总结．

4．例 6 的彩票中奖率问题呼应了本章教材开始时提出的"问题探索：运气还是欺骗？(一)"，为这个问题的顺利解决提供了方法的准备．教学中应引导学生研究"问题探索：运气还是欺骗？(二)"，通过问题的解决，也复习、回顾了概率的知识方法．

例题解析

例 1　解方程 $C_{10}^{x}=C_{10}^{3x-2}$．

点评　本题是组合数公式的计算，利用性质 1 转化为方程的问题解决．

例 2　计算 $C_{6}^{3}+C_{6}^{4}+C_{7}^{5}+C_{8}^{6}$．

点评　本题利用性质 2：$C_{n+1}^{m}=C_{n}^{m}+C_{n}^{m-1}$ 进行计算，比较容易得到答案．

例 3　12 件产品中有 3 件次品，9 件正品，从中抽取 5 件．

(1) 5 件产品中没有次品的取法有多少种？

(2) 5 件产品中有 2 件次品的取法有多少种？

解析　本题的第(1)问就是从 9 件正品中取 5 件的取法，有 $C_{9}^{5}=126$ 种．第(2)问有 2 件次品的取法分两步，第一步先从 3 件次品中取 2 件，有 C_{3}^{2} 种取法；第二步从 9 件正品中取 3 件，有 C_{9}^{3} 种取法．根据分步乘法计数原理，共有 $C_{3}^{2}C_{9}^{3}=252$ 种取法．

例 4　从 4 台纯平彩电和 5 台超平彩电中选购 3 台，要求至少有纯平彩电与超平彩电各 1 台，问有多少种不同的选法？

解析　本题是抽取产品的组合计算问题，完成满足条件的工作有两类方法：第一类是纯平彩电中选一台，超平彩电中选两台；第二类是纯平彩电中选两台，超平彩电中选一台．这两类工作完成一类即可，应使用分类加法计数原理．每一类的选法又分两步，第一步从纯平彩电中选，第二步从超平彩电中选，应使用分步乘法计数原理，选法总数是 $C_{4}^{1}C_{5}^{2}+C_{4}^{2}C_{5}^{1}$．

例 5　6 本不同的书，按下列要求各有多少种不同的分法：

(1) 分给甲、乙、丙三人，每人 2 本；

(2) 分为三份，每份 2 本；

(3) 分为三份，一份 1 本，一份 2 本，一份 3 本；

(4) 分给甲、乙、丙三人，一人 1 本，一人 2 本，一人 3 本.

解析　本题的第(1)问是 6 本不同的书分给不同的三个人，分三步分析，先从 6 本书中选 2 本给甲，有 C_6^2 种选法；再从其余的 4 本中选 2 本给乙，有 C_4^2 种选法；最后从余下的 2 本书中选 2 本给丙，有 C_2^2 种选法. 根据分步计数原理得到一共是 $C_6^2C_4^2C_2^2=90$ 种分法.

第(2)问 6 本不同的书分为三份，每份 2 本，与第(1)问对比，三份之间无序，这是“均匀分组”问题. 总共为$\dfrac{C_6^2C_4^2C_2^2}{A_3^3}=15$ 种分法.

第(3)问这是“不均匀分组”问题，按照第(1)问的方法得到一共有 $C_6^1C_5^2C_3^3=60$ 种方法.

第(4)问在第(3)问的基础上再进行全排列，所以一共有 $C_6^1C_5^2C_3^3\times A_3^3=360$ 种方法.

例 6　某省的福利彩票中，不考虑次序的 7 个数码组成一注，7 个数码中没有重复，每一个数码都选自数码 1，2，…，36. 如果电视直播公开摇奖时只有一个大奖，计算：

(1) 公开摇奖时最多可以摇出多少不同的注；

(2) 购买一注时的中奖率.

解析　本题是有关福利彩票中奖的问题，它与学生的日常生活十分贴近. 摇奖时是从数码 1，2，…，36 中无重复地抽取 7 个数码，不计次序时，所有不同的结果有 $C_{36}^7=8\,347\,680$，第(2)问计算中大奖的概率为$\dfrac{1}{8\,347\,680}\approx 0.000\,0001$. 通过学习可以让学生知道：中大奖的概率非常低，几乎接近于零，所以靠中奖发财的路是走不通的，只有靠自己的勤劳才能致富.

相关链接

(一) 排列组合的起源和发展

排列的历史可以上溯到殷周之际的占卜术，较完整的文字记载则见于《易经》.“易”含变化的意思，书中称：“易有太极，是生两仪，两仪生四象，四象生八卦.”“两仪”可用两种基本符号阳爻—和阴爻—表示，每次取两个，就有 $2^2=4$ 种不同的排列，称为“四象”，即太阳、少阴、少阳、太阴；每次取三个，共有 $2^3=8$ 种不同的排列，称为“八卦”，即乾☰、兑☱、离☲、震☳、巽☴、坎☵、艮☶、坤☷；若每次取六个，则可得 $2^6=64$ 种不同的排列，叫做“六十四卦”. 这是一种特殊的排列问题，即从 n 种事物中每次取 r 件而允许重复的排列数，答案应是 n^r。但是古代没有指数概念，对于很大的 r 来说，求出答数并非易事.

中国传统的“干支历”在商代已普遍使用，干支计数与五行循环理论包含着丰富的排列思想. 把 10 个“天干”与 12 个“地支”有序排列为“甲子，乙丑，…，甲戌，乙亥，…，壬戌，癸亥”，周而复始，成一循环，即是从两个有序集中有序选取元素，依次以奇数对奇数，偶数对偶数的约束条件构成一组，如甲子为 1－1，乙丑为 2－2.

唐代张遂(683—727 年)、宋代沈括(1031—1095 年)都曾计算过棋局都数，即围棋盘上所有可能的不同布局的总数，这相当于从事物(黑子、白子、空位)中每次取出 361 个(围棋盘的格点数)的排列数，与《易经》中的卦象数目是同一类数学问题. 沈括在《梦溪笔谈》中详细地记述了计算棋局都数的理论根据和过程.

印度、阿拉伯在古代也有许多对物体排列组合研究的事例，并且有较深入的认识. 公元前 300 年左右，印度耆那教的文献已提到排列组合问题，他们已经知道了 3 个排列数和 3 个组合数(A_n^1，A_n^2，A_n^3 和 C_n^1，C_n^2，C_n^3). 印度教中的哈利神 4 只手中拿着狼牙棒、铁饼、莲和贝壳，4 样的排列不同，哈利神就有不同的名字，共有 4！种. 但排列组合的一般性规则，在很长一段时间内才逐步形成. 约公元 850 年数学家马哈维拉给出了 n 个物体中每次取 r 个的取法数的一般完整组合公式，即今所谓 n 元集中所能构成的 r 元子集数。1150 年巴什迦罗又给出了 $C_n^r=C_n^{n-r}$，这是构成算术三角形的基本规则. 印度数学家巴什迦罗首次给出了定理：r 个物体中，分别有 k，l，…个物体相同，则 r 个物体的排列数为$\dfrac{r!}{k!\cdot l!\cdots}$.

随着伊斯兰征服了印度的一部分，印度的数学成就开始通过阿拉伯学者向西方渗透，阿拉伯人似乎已获得了简单的组合原则并予以应用. 古代西方对组合学也有相关研究. 古希腊阿基米德“计算太阳神的牛数”一题，就是古代西方的关于组合学组态的奇例. 西方由于研究形数而产生排列组合数，波菲利把三角形数与“从 n 个不同物体中选取 2 个”相结合，从 n 个不同物体中选取 2 个的方法数等于第 $n-1$ 个三角形数，帕普斯考虑了另一种形式：n 条不同的直线既没有两条平行，也没有三条交于一点，且每任意两条直线都有一个交点，那么共有多少个交点？答案即为三角形数$\dfrac{n(n-1)}{2}$. 博伊修斯讨论了波菲利的结论并予以推广，若考虑物体的顺序，则从 n 个不同物体中选取 2 个的方法数为$\dfrac{n(n-1)}{2}$，此即 n 个物体中任取 2 个的排列数. 直到 1321 年，犹太人本·哲生给出了印度已知的 3 个主要规则：$n!$ 为 n 个物体的排列数 $n(n-1)\cdot\cdots\cdot3\cdot2\cdot1$；$n(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-r+1)$为 n 个物体中取 r 个的排列数；$C_n^r=\dfrac{n(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-r+1)}{r!}$为 n 个物体中取 r 个的组合数.

（二）四色问题

四色问题又称四色猜想，是世界近代三大数学难题之一. 四色问题的内容是：“任何一张地图只用四种颜色就能使具有共同边界的国家着上不同的颜色.”用数学语言表

示，即“将平面任意地细分为不相重迭的区域，每一个区域总可以用 1，2，3，4 这四个数字之一来标记，而不会使相邻的两个区域得到相同的数字.”它是英国人弗特里和他的弟弟格斯里在 1852 年提出的，如何从数学上加以严格证明困扰着当时的数学家. 1872 年，英国当时最著名的数学家凯莱正式向伦敦数学学会提出了这个问题，于是四色猜想成了世界数学界关注的问题，世界上许多一流的数学家都纷纷参加了证明四色猜想的大会战.

1878 年到 1880 年两年间，著名的律师兼数学家肯普和泰勒两人分别提交了证明四色猜想的论文，宣布证明了四色猜想，大家都认为四色猜想从此也就解决了. 可是 11 年后，即 1890 年，在牛津大学就读的年仅 29 岁的希伍德却以自己的精确计算指出了肯普在证明上的漏洞. 不久，泰勒的证明也被人们否定了. 人们发现他们实际上证明了一个较弱的命题——五色定理. 就是说对地图着色，用五种颜色就够了. 后来，越来越多的数学家虽然对此绞尽脑汁，但一无所获. 于是，人们开始认识到，这个貌似容易的题目，其实是一个可与费马猜想相媲美的难题.

进入 20 世纪以来，科学家们对四色猜想的证明基本上是按照肯普的想法在进行. 高速数字计算机的发明，促使更多数学家对“四色问题”的研究. 电子计算机问世以后，由于演算速度迅速提高，加之人机对话的出现，大大加快了对四色猜想证明的进程. 美国伊利诺伊大学哈肯和阿佩尔合作编制了一个很好的程序. 在 1976 年 6 月，他们在美国伊利诺伊大学的两台不同的电子计算机上，用了 1 200 个小时，作了 100 亿判断，终于完成了四色定理的证明，轰动了世界.

“四色问题”的被证明不仅解决了一个历时 100 多年的难题，而且成为数学史上一系列新思维的起点. 在“四色问题”的研究过程中，不少新的数学理论随之产生，也发展了很多数学计算技巧. 如将地图的着色问题化为图论问题，则大大丰富了图论的内容. 不仅如此，“四色问题”在有效地设计航空班机日程表，设计计算机的编码程序上都起到了推动作用.

（三）八皇后问题

八皇后问题是一个古老而著名的问题，该问题是 19 世纪著名的数学家高斯 1850 年提出：在 8×8 格的国际象棋棋盘上摆放八个皇后，使其不能互相攻击，即任意两个皇后都不能处于同一行、同一列或同一斜线上，问有多少种摆法.

高斯认为有 76 种方案. 1854 年在柏林的象棋杂志上不同的作者发表了 40 种不同的解，后来有人用图论的方法解出 92 种结果.

对于八皇后问题的实现，利用计算机语言编写程序，在计算机上可以比较容易实现，下面是用 pascal 语言编写的程序，能够演示全部的 92 组解. 如果结合动态的图形演示，则可以使算法的描述更形象、更生动，使教学能产生良好的效果.

程序：

```
var a，b，C：array[－7.. 16] of boolean；
    r：array[1.. 8] of integer；
    i：integer；
procedure print；
var i：integer；begin
  for i：=1 to 8 do write (r [i]：4)；
  writeln；
end：
procedure search (i：integer)；
var j：integer；
begin
  for j：=1 to 8 do
    if (a [j])and (b[i+j]) and (c[i—j]) then
    begin
    r [i]：=j；
    a [j]：false；
    b [H+j]：=false；
    C [i—j]：=false；
    if i<8 then search (i+1) else print；
    a [i]：=true；
    b [i+j]：=true；
    C [i—j]：=true；
  end
end；
begin
  for i：=－7 to 16 do
  begin
    a [i]：=true；
    b [i]：=true；
    C [i—i]：=true；
end；
search (1)；
end.
```

结果：

1	5	8	6	3	7	2	4
1	6	8	3	7	4	2	5
1	7	4	6	8	2	5	3
1	7	5	8	2	4	6	3
2	4	6	8	3	1	7	5
2	5	7	1	3	8	6	4
2	5	7	4	1	8	6	3
2	6	1	7	4	8	3	5
2	6	8	3	1	4	7	5
2	7	3	6	8	5	1	4
2	7	5	8	1	4	6	3
2	8	6	1	3	5	7	4
3	1	7	5	8	2	4	6
3	5	2	8	1	7	4	6
3	5	2	8	6	4	7	1
3	5	7	1	4	2	8	6
3	5	8	4	1	7	2	6
3	6	2	5	8	1	7	4
3	6	2	7	1	4	8	5
3	6	2	7	5	1	8	4
3	6	4	1	8	5	7	2
3	6	4	2	8	5	7	1
3	6	8	1	4	7	5	2
3	6	8	1	5	7	2	4
3	6	8	2	4	1	7	5
3	7	2	8	5	1	4	6
3	7	2	8	6	4	1	5
3	8	4	7	1	6	2	5
4	1	5	8	2	7	3	6
4	1	5	8	6	3	7	2
4	2	5	8	6	1	3	7
4	2	7	3	6	8	1	5
4	2	7	3	6	8	5	1
4	2	7	5	1	8	6	3
4	2	8	5	7	1	3	6

4	2	8	6	1	3	5	7
4	6	1	5	2	8	3	7
4	6	8	2	7	1	3	5
4	6	8	3	1	7	5	2
4	7	1	8	5	2	6	3
4	7	3	8	2	5	1	6
4	7	5	2	6	1	3	8
4	7	5	3	1	6	8	2
4	8	1	3	6	2	7	5
4	8	1	5	7	2	6	3
4	8	5	3	1	7	2	6
5	1	4	6	8	2	7	3
5	1	8	4	2	7	3	6
5	1	8	6	3	7	2	4
5	2	4	6	8	3	1	7
5	2	4	7	3	8	6	1
5	2	6	1	7	4	8	3
5	2	8	1	4	7	3	6
5	3	1	6	8	2	4	7
5	3	1	7	2	8	6	4
5	3	8	4	7	1	6	2
5	7	1	3	8	6	4	2
5	7	1	4	2	8	6	3
5	7	2	4	8	1	3	6
5	7	2	6	3	1	4	8
5	7	2	6	3	1	8	4
5	7	4	1	3	8	6	2
5	8	4	1	3	6	2	7
5	8	4	1	7	2	6	3
6	1	5	2	8	3	7	4
6	2	7	1	3	5	8	4
6	2	7	1	4	8	5	3
6	3	1	7	5	8	2	4
6	3	1	8	4	2	7	5
6	3	1	8	5	2	4	7

6	3	5	7	1	4	2	8
6	3	5	8	1	4	2	7
6	3	7	2	4	8	1	5
6	3	7	2	8	5	1	4
6	3	7	4	1	8	2	5
6	4	1	5	8	2	7	3
6	4	2	8	5	7	1	3
6	4	7	1	3	5	2	8
6	4	7	1	8	2	5	3
6	8	2	4	1	7	5	3
7	1	3	8	6	4	2	5
7	2	4	1	8	5	3	6
7	2	6	3	1	4	8	5
7	3	1	6	8	5	2	4
7	3	8	2	5	1	6	4
7	4	2	5	8	1	3	6
7	4	2	8	6	1	3	5
7	5	3	1	6	8	2	4
8	2	4	1	7	5	3	6
8	2	5	3	1	7	4	6
8	3	1	6	2	5	7	4
8	4	1	3	6	2	7	5

7.4　二项式定理

教材线索

本小节从分析$(a+b)$，$(a+b)^2$，$(a+b)^3$ 的展开式的各项系数特点入手，对照“杨辉三角”，写出$(a+b)^4$，$(a+b)^5$ 的展开式，采用合情推理的方法推出二项式$(a+b)^n$ 的展开式.

教学目标

（一）知识与技能

1. 了解“杨辉三角”及其历史，认识“杨辉三角”中行、列数字的特点及其与组合数性质、二项展开式系数之间的联系.

2. 理解并掌握二项式定理及其证明，从项数、指数、系数等几个特征熟记它的展开式.

3. 能运用二项式展开式中的项数、指数、系数等特点，学会用“赋值法”解决与二项式系数有关的问题.

（二）过程与方法

提高学生的归纳推理能力，树立由特殊到一般的数学思想.

（三）情感、态度与价值观

利用“杨辉三角”的历史对学生进行爱国主义教育，激励学生的民族自豪感和为国富民强而勤奋学习的热情，提高学生应用数学的意识，培养学生学习数学的兴趣.

教材分析

1. 重点：

二项式定理及其证明，二项展开式的项数、指数、系数特点及其应用.

2. 难点：

二项式定理和性质的应用.

3. 二项式定理的推导是本小节的学习重点，教材首先从分析$(a+b)$，$(a+b)^2$，$(a+b)^3$ 的展开式的各项系数特点入手，对照“杨辉三角”，写出$(a+b)^4$，$(a+b)^5$ 的展开式，然后利用组合数表示“杨辉三角”各行的数字，采用合情推理的方法得到二项式$(a+b)^n$ 的展开式定理.

4. 二项式定理所研究的是一种特殊的多项式——二项式的乘方的展开式. 本小节的学

习可对初中学习的多项式的变形起到复习、深化的作用.

5. 二项式定理与概率理论中的三大概率分布之一的二项分布有其内在联系，是为学习概率知识以及进一步学习概率统计的知识而做准备的.

6. 二项式定理的证明采用了计数原理分析二项式的展开过程，采用组合的方法证明定理，虽然与数学归纳法的证明不同，但它也是一个严格的证明，而且比较通俗易懂，学生更容易理解. 数学归纳法的证明将在“相关链接”中进行介绍.

7. $C_n^k a^{n-k} b^k$ 是二项展开式的第 $k+1$ 项，它实际上就是一个有 $n+1$ 项的数列的第 $k+1$ 项，当 k 依次取 0，1，2，…，n 时，得到这个数列的第 1，2，3，…，n，$n+1$ 项. 由于展开式是对 $(a+b)^n$ 这个标准形式而言的，在应用中应根据 $(a+b)$ 的具体特点进行变形，例如：对于 $(a-b)^n$ 第 $k+1$ 项应写成 $C_n^k a^{n-k}(-b)^k=(-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k$.

8. 在得到二项式定理后，应当引导学生对二项展开式进行认真分析，研究二项式定理的以下性质：

(1) 二项展开式一共有 $n+1$ 项.

(2) 第一个字母 a 按降幂排列，第二个字母 b 按升幂排列.

(3) a 的幂加 b 的幂等于 n.

(4) 在二项展开式中，与首末两端“等距离”的两项的二项式系数相等，即 $C_n^m=C_n^{n-m}$.

(5) 二项式系数从两端向中间逐渐增大，且当 n 是偶数时，中间的一项的二项式系数取得最大值；当 n 是奇数时，中间的两项的二项式系数 $C_n^{\frac{n-1}{2}}$，$C_n^{\frac{n+1}{2}}$ 相等，且同时取得最大值.

(6) 如果令 $a=1$，$b=1$，即可得 $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$，这是各二项式系数的和. 这种方法称为“赋值法”，体现了函数思想，是数学解题的重要方法之一.

(7) 如果令 $a=1$，$b=-1$，即可得 $C_n^0-C_n^1+C_n^2+\cdots+(-1)^n C_n^n=0$. 由这个式子我们可以得到如下的式子：$C_n^0+C_n^2+\cdots=C_n^1+C_n^3+\cdots$，即在 $(a+b)^n$ 的展开式中，奇数项的二项式系数的和等于偶数项的二项式系数的和.

教学建议

1. “杨辉三角”是我国古代数学的研究成果之一，它的发现远早于法国数学家帕斯卡的发现. 它和勾股定理、圆周率的计算等其他中国古代数学成就一起显示了我国古代劳动人民的卓越智慧和才能. 应注意抓住这一题材，对学生进行爱国主义教育，激励学生的民族自豪感和为国富民强而勤奋学习的热情.

2. 二项式定理所研究的是一种特殊的多项式——二项式的乘方的展开式. 教学中应注意二项展开式与多项式乘法的联系，对初中学习的多项式的变形进行复习、深化.

3. 教材采用不完全归纳的方法比对“杨辉三角”研究二项展开式系数特征，在写出 $(a+b)^2$，$(a+b)^3$ 的展开式时，就应该采用组合的想法分析它的各项系数特点，引导学生理解将“杨辉三角”中的数字用组合数的形式来表示的实际意义. 比如：$(a+b)^2$ 的各项系数写成 C_2^0，C_2^1，C_2^2，其中 C_2^0 表示 a 取 2 个，而 b 取 0 个，C_2^1 表示 a 取 1 个，而 b 取 1 个，

C_2^2 表示 b 取 2 个，而 a 取 0 个，从而猜想出 $(a+b)^n$ 的展开式系数. 这样可以提高学生观察、归纳的能力.

4. 教材采用组合的方法证明二项式定理，但它也是一个严格的证明，而且比较通俗易懂，学生更容易理解. 教学中应紧扣计数原理来分析二项式的展开过程.

5. $C_n^k a^{n-k} b^k$ 是二项展开式的第 $k+1$ 项，教学中应引导学生认真研究它的项数、指数、系数规律. 对于 $(a-b)^n$ 的第 $k+1$ 项应写成 $C_n^k a^{n-k}(-b)^k=(-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k$.

6. 二项展开式中，系数 $C_n^k(k=0, 1, 2, \cdots, n)$ 叫做二项式系数. 即它们是一组仅与二项式的次数 n 有关的 $n+1$ 个组合数，而与 a，b 无关. 因此它们与展开式中关于某一项的系数是不同的. 教学中，应结合具体例子说明两者的区别.

7. 教学中可以从函数的角度研究二项展开式的性质，这样便于知识的前后联系，融汇贯通，深化对函数的认识. 例如，“赋值法”就体现了函数思想，是数学解题的重要方法之一.

例题解析

例 1 展开 $\left(3\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^4$.

点评 本题中求的是一个代数式的展开式. 这是充分考虑学生刚学习的二项式定理，为了加深学生对该定理展开式的理解和记忆，就安排了这道简单的直接套公式的计算题. 但在套公式之前，要注意引导学生对代数式进行变形.

例 2 计算 $(x+2y)^9$ 的展开式中第 5 项的系数和二项式系数.

点评 本题中求的是某一项的系数和此项的二项式系数. 由于学生刚学习系数和二项式系数这两个概念，所以学生很容易产生误解. 为了尽量避免学生误解，教材特意安排此例，所以教师在教学中一定要认真把握好本题，讲清这两个概念. 同时，教师还可以让学生做一些变式训练，以免产生混淆.

例 3 用二项式定理及性质求解下列问题.

(1) 若 $(1+x)^n$ 的展开式中，x^3 的系数是 x 的系数的 7 倍，求 n 及二项式系数的最大值，其中 $n\in \mathbf{N}_+$.

(2) 已知在 $(ax-1)^5$ 的展开式中，x^3 的系数是 -80，求 a.

点评 本题第(1)问中 $(1+x)^n$ 的展开式中的各项系数恰好为 C_n^r，第(2)问中 $(ax-1)^5$ 的展开式中的各项系数不等于 C_n^r，比如 x^3 的系数是 $C_5^2a^3$，x^2 的系数是 $C_5^3a^2$，x^4 的系数是 $C_5^1a^4$. 第(1)问和第(2)问形成对比，帮助学生澄清二项展开式中二项式系数与各项系数的区别.

例 4 已知 $(1-2x)^7=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_7x^7$，计算 $a_1+a_2+\cdots+a_7$.

点评 求二项展开式各项系数的和，一般采用赋值法. 本题令 $x=1$，就可以求出 $a_1+a_2+\cdots+a_7$.

例 5 在 $\left(1+\dfrac{2}{x}\right)(1-x)^9$ 的展开式中求 x^5 的系数.

点评 本题是求$\left(1+\dfrac{2}{x}\right)(1-x)^9$的展开式中$x^5$的系数，应引导学生将原式化为$(1-x)^9+\dfrac{2}{x}(1-x)^9$. 对$(1-x)^9$，含$x^5$的项为$C_9^5(-x)^5$；对$\dfrac{2}{x}(1-x)^9$，含$x^5$的项为$\dfrac{2}{x}C_9^6(-x)^6$，根据分类加法计数原理含$x^5$的项为$C_9^5(-x)^5+\dfrac{2}{x}C_9^6(-x)^6=42x^5$，$\therefore x^5$的系数是42.

例 6 用二项式定理证明$(n+1)^n-1$可以被n^2整除$(n\in \mathbf{N}_+)$.

点评 本题是利用二项式定理研究整除性问题，利用二项式定理将$(n+1)^n$展开，得到：

$(n+1)^n=C_n^0+C_n^1n+C_n^2n^2+\cdots+C_n^nn^n$，

由于$C_n^0=1$，所以

$$\begin{aligned}(n+1)^n-1&=n^2+C_n^2n^2+\cdots+C_n^nn^n\\&=n^2(1+C_n^2+\cdots+C_n^nn^{n-2}),\end{aligned}$$

$\therefore (n+1)^n-1$可以被n^2整除.

例 7 在二项式$\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^n$$(n\in \mathbf{N}_+)$的展开式中，前三项的系数成等差数列，求展开式中所有的有理项.

点评 本题是典型的特定项问题，涉及二项展开式项的系数和指数，是高考的热点，通常可以通过通项公式解决. 对于其他的二项式系数、系数和及二项式定理的应用相关问题，大家也应予以适当关注.

相关链接

（一）二项式定理证明

利用数学归纳法证明二项式定理(不必向学生介绍).

(1)当$n=1$时，左边$=(a+b)^1=a+b=C_1^0a+C_1^1b$.

(2)假设当$n=k$时等式成立，即

$$(a+b)^k=C_k^0a^k+C_k^1a^{k-1}b^1+C_k^2a^{k-2}b^2+\cdots+C_k^kb^k,$$

那么

$$\begin{aligned}(a+b)^{k+1}&=(a+b)(a+b)^k\\&=(a+b)(C_k^0a^k+C_k^1a^{k-1}b^1+C_k^2a^{k-2}b^2+\cdots+C_k^kb^k)\\&=a(C_k^0a^k+C_k^1a^{k-1}b^1+C_k^2a^{k-2}b^2+\cdots+C_k^kb^k)+b(C_k^0a^k+C_k^1a^{k-1}b^1+\\&\quad C_k^2a^{k-2}b^2+\cdots+C_k^kb^k)\\&=C_k^0a^{k+1}+(C_k^1+C_k^0)a^kb^1+(C_k^2+C_k^1)a^{k-1}b^2+\cdots+C_k^kb^{k+1}\\&=C_{k+1}^0a^{k+1}+C_{k+1}^1a^kb^1+C_{k+1}^2a^{k-1}b^2+\cdots+C_{k+1}^{k+1}b^{k+1},\end{aligned}$$

所以当$n=k+1$时也成立.

由数学归纳法知，等式对一切 $n\in \mathbf{N}^*$ 都成立.

（二）杨辉与杨辉三角的奥秘

杨辉，杭州钱塘人. 中国南宋末年数学家，数学教育家(图 7-3). 著作甚多，他编著的数学书共五种二十一卷，著有《详解九章算法》十二卷(1261 年)、《日用算法》二卷、《乘除通变本末》三卷、《田亩比类乘除捷法》二卷、《续古摘奇算法》二卷. 其中后三种合称《杨辉算法》，朝鲜、日本等国均有译本出版，流传世界.

图 7-3

“杨辉三角”出现在杨辉编著的《详解九章算法》一书中，此书还说明表内除“1”以外的每一个数都等于它“肩上”两个数的和. 杨辉指出这个方法出于《释锁》算书，且我国北宋数学家贾宪(约公元 11 世纪)已经用过它，这表明我国发现这个表不晚于 11 世纪.

在欧洲，这个表被认为是法国数学家、物理学家帕斯卡首先发现的(1623—1662 年)，他们把这个表叫做帕斯卡三角. 这就是说，杨辉三角的发现要比欧洲早 500 年左右，由此可见我国古代数学的成就是非常值得中华民族自豪的.

杨辉三角有以下有趣的数字排列规律：

1. 如图 7-4，杨辉三角的第 1，3，7，15，…，行，即第 2^k-1(k 是正整数)行的各个数字均为奇数；第 2^k 行除两端的 1 之外都是偶数.

0 行　1
1 行　1　1
2 行　1　2　1
3 行　1　3　3　1
4 行　1　4　6　4　1
5 行　1　5　10　10　5　1
6 行　1　6　15　20　15　6　1
7 行　1　7　21　35　35　21　7　1
…　…
$n-1$ 行　1　C_{n-1}^1　C_{n-1}^2　…　C_{n-1}^{r-1}　C_{n-1}^r　…　C_{n-1}^{n-2}　1
n 行　1　C_n^1　C_n^2　…　C_n^r　…　C_n^{n-1}　1

图 7-4

2. 杨辉三角中若行数 p 是质数(素数)，则第 p 行，除去两端的数字 1 以外，行数 p 整除其余所有的数.

3. 计算杨辉三角中各行数字的和，第 n 行数字的和为 2^n. 前 $n-1$ 行(含第 0 行)所有数的和为 2^n-1，它恰好比第 n 行的和 2^n 小 1.

第 1 行　$1+1=2$，

第 2 行　$1+2+1+4=2^2$，

第 3 行　$1+3+3+1=8=2^3$，

第 4 行　$1+4+6+4+1=16=2^4$，

第 5 行　$1+5+10+10+5+1=32=2^5$，

……

第 n 行　$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^r+\cdots+C_n^{n-1}+C_n^n=2^n$.

4. 如图 7－5，从杨辉三角中一个确定的数的“左(右)肩”出发，向右(左)上方作一条和左斜边平行的射线，在这条射线上的各数的和等于这个数. 一般地，在第 m 条斜线上(从右上到左下)前 n 个数字的和，等于第 $m+1$ 条斜线上的第 n 个数.

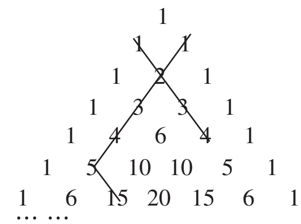


图 7－5

根据这一性质，猜想下列数列的前 n 项和：

$1+1+1+\cdots+1=C_n^1$(第 1 条斜线)，

$1+2+3+\cdots+C_{n-1}^1=C_n^2$(第 2 条斜线)，

$1+3+6+\cdots+C_{n-1}^2=C_n^3$(第 3 条斜线)，

$1+4+10+\cdots+C_{n-1}^3=C_n^4$(第 4 条斜线)，

$C_r^r+C_{r+1}^r+C_{r+2}^r+\cdots+C_{n-1}^r=C_n^{r+1}(n>r)$(第 $r+1$ 条斜线).

5. 中世纪意大利数学家斐波那奇的传世之作《算术之法》中提出了一个饶有趣味的问题：假定一对刚出生的兔子一个月就能长成大兔子，再过一个月就开始生下一对小兔子，并且以后每个月都生一对小兔子. 设所生一对兔子均为一雄一雌，且均无死亡. 问一对刚出生的小兔一年内可以繁殖成多少对兔子？这就是著名的斐波那奇“兔子繁殖问题”.

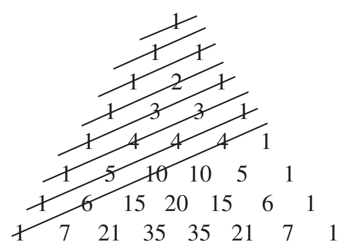


图 7－6

兔子繁殖问题可以从杨辉三角得到答案：右侧从上而下的一列数 1，1，2，3，5，8，13，…，正好是刚生的兔子，第一个月后的兔子，第二个月后的兔子，第三个月后的兔子，…，n 个月后的兔子的对数. “兔子繁殖问题”的答案就是第 12 行右下侧的数(第 13 个)，即 233. 如图 7－6，斜线上各行数字的和为 1，1，2，3，5，8，13，21，34，…. 此数列 $\{a_n\}$ 满足，$a_1=1$，$a_2=1$，且 $a_n=a_{n-2}+a_{n-1}(n\geqslant 3)$.

6. 杨辉三角与弹子游戏

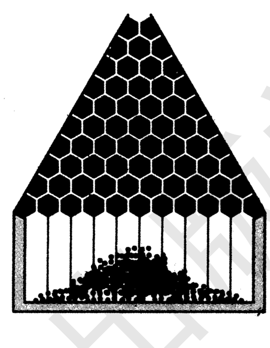


图 7－7

如图 7－7，在一块木板上钉一些正六棱柱形的小木块，在它们中间留一些通道，从上面的漏斗可以直通到下面的长方形框子，前面用一块玻璃挡住. 把小弹子放在漏斗里，它首先会通过中间的一个通道落到第二层(有几个竖直通道就算第几层)的六棱柱上面，然后落到第二层中间的一个六棱柱的左边或右边的两个竖直通道里面去，再然后，它又落到下一层的三个通道之一里边去……依次类推，最终落到最下边的长方形框子里.

假设我们总共在木板上做了 $n+1$ 层通道，在顶上的漏斗里一共放了 $1+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^r+\cdots+C_n^{n-1}+1=2^n$ 颗弹子，让它们自由落下，落到下边 $n+1$ 个长方形框子里，那么落

在第 $n+1$ 层中各个框子中弹子的数目（按照可能情形来计算）正好是杨辉三角的第 n 行.

解释：把小弹子放在漏斗里，它首先会通过中间的一个通道落到第二层六棱柱上面，然后，落到第二层中间一个六棱柱的左边或右边的两个竖直通道里面去，再然后，它又落到下一层的三个竖直通道之一里边去. 这时，如果要弹子落到最左边的通道里，那么它一定是从上一层左边的通道里落下来才行（1 种可能情形）；同样，如果它要落到最右边的通道里，它也非要从上一层右边的通道里落下来才行（1 种可能情形）；而它要落到中间的通道里，那么无论它从上一层的左边或右边落下来都行（2 种可能情形）.

这样一来，弹子落在第三层的三个通道里就分别有 1，2，1 个可能情形，概率分别为 $\frac{1}{4}$，$\frac{2}{4}$，$\frac{1}{4}$，不难看出，落在第四层的四个通道里就分别有 1，3，3，1 个可能情形，概率分别为 $\frac{1}{2^3}$，$\frac{3}{2^3}$，$\frac{3}{2^3}$，$\frac{1}{2^3}$，类推下去，很容易发现，弹子落到第 $n+1$ 层各个框子里的概率分别为 $\frac{1}{2^n}$，$\frac{C_n^1}{2^n}$，$\frac{C_n^2}{2^n}$，…，$\frac{C_n^{n-1}}{2^n}$，$\frac{1}{2^n}$.

因此，如果在漏斗里放 $1+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^r+\cdots+C_n^{n-1}+1=2^n$ 颗弹子让它们自由落下，落到下边 $n+1$ 个长方形框子里，那么落在第 $n+1$ 层中各个框子中弹子的数目（按照可能情形来计算）正好是杨辉三角的第 n 行.

7. 杨辉三角与“纵横路线图”

“纵横路线图”是数学中的一类有趣的问题. 图 7－8(1) 是某城市的部分街道图，纵横各有五条路，如果我们把图(1)顺时针转 45 度，使 A 在正上方，B 在正下方[如图(2)]，然后在交叉点标上相应的杨辉三角数. 有趣的是，B 处所对应的数 70，正好是从 A 处走到 B 处（只能由北到南，由西向东）的不同走法数目，答案为 $C_8^4=70$.

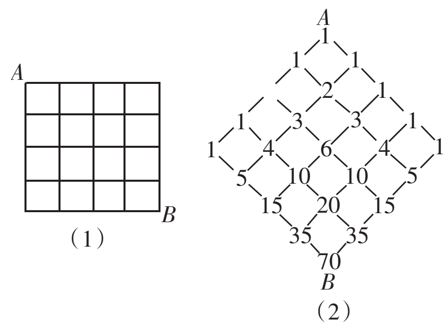


图 7－8

一般地，每个交点上的杨辉三角数，就是从 A 到达该点的方法数. 由此看来，杨辉三角与纵横路线图问题有天然的联系.

8. 杨辉三角与“堆垛术”（三角垛，正方垛……）

如图 7－9，将圆珠堆成三角垛，底层每边为 n 个，向上逐层每边减少 1 个，顶层是 1 个. 容易看出，当 $n=1$，2，3，4，…时，三角垛中的圆珠总数分别为 1，4，10，20，…. 根据前面的结论，这样的一个 n 层的三角垛的圆珠总数是 $1+3+6+\cdots+C_{n+1}^2=C_{n+2}^3=\frac{1}{3!}n(n+1)(n+2)$.

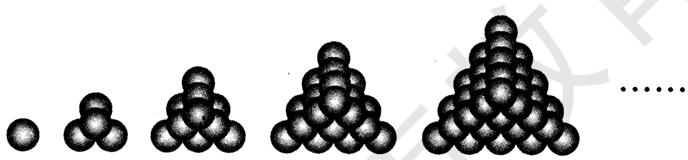


图 7－9

教材习题参考解答

7.1.1 练习

1. 完成从 9 人中选出 1 人完成这项工作这件事，共有两类方法：

   第一类，从 5 个会用第一种方法的人中选取 1 人，有 5 种方法；

   第二类，从 4 个会用第二种方法的人中选取 1 人，有 4 种方法.

   根据分类加法计数原理，共有 $5+4=9$ 种方法.

2. 从这三种书中任选 1 本，有三类方法：

   第一类，从 2 本不同的科技书中任取 1 本，有 2 种方法；

   第二类，从 2 本不同的政治书中任取 1 本，有 2 种方法；

   第三类，从 3 本不同的文艺书中任取 1 本，有 3 种方法.

   根据分类加法计数原理，共有 $2+2+3=7$ 种方法.

习题 1

1. 这栋楼共有 $8+12\times5=68$ 个住户. 随机挑一住户进行抽样调查，共有 68 种挑选结果.

2. (1)北京有线电视可接收的频道有 3 类，中央台 12 个频道、北京台 10 个频道. 其他省市 46 个频道，当这些节目互不相同时，根据分类加法计数原理，共可以接收 $12+10+46=68$ 个不同的节目.

   (2)若 3 个频道节目相同，此时接收的频道有 2 类：

   第一类，从节目不同的 65 个频道中选 1 个频道，有 65 种选看方式；

   第二类，从节目相同的 3 个频道中选 1 个频道，有 1 种选看方式.

   根据分类加法计数原理，共可以接收 $65+1=66$ 个不同的节目.

7.1.2 练习

1. 点(x, y)中的横、纵坐标 x，y 从 1，2，3，4，5 中的任取一个，可以分成两个步骤完成：

   第一步，任取一个数字作为横坐标 x，有 5 种方法；

   第二步，任取一个数字作为纵坐标 y，也有 5 种方法.

   根据分步乘法计数原理，得到不同的点(x, y)有 $5\times5=25$ 个.

2. 如图 7－10，从 A 村经 B 村去 C 村可以分成两个步骤完成：

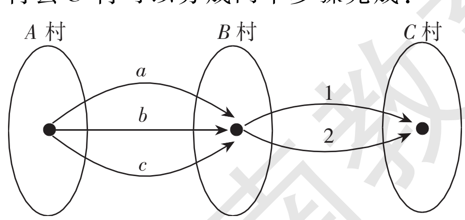


图 7－10

第一步，由 A 村去 B 村，有 3 种方法；

第二步，由 B 村去 C 村，有 2 种方法.

根据分步乘法计数原理，从 A 村经 B 村去 C 村共有 $2\times3=6$ 种不同的方法.

3. 每次记录结果可以是正面或反面中的一个，有 2 种；根据分步计数原理，10 次最多可以得到 $2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2=2^{10}=1\ 024$ 种不同记录结果.

4. 因为是有放回地抽取，所以每次抽取 1 张都有 54 种方法，根据分步计数原理，抽取 3 次依次排列，最多有 $54\times54\times54=54^3$ 种结果.

习题 2

1. 第一步，选出 a_1，a_2，a_3 中的一个，有 3 种选法；

第二步，选出 b_1，b_2，b_3，b_4 中的一个，有 4 种选法；

第三步，选出 c_1，c_2，c_3，c_4，c_5 中的一个，有 5 种选法.

根据分步乘法计数原理，所有的不同选法有 $3\times4\times5=60$ 个. 因为每个选法恰好是展开式中的一项，所以展开式共有 60 项.

2. (1)从三个袋子选取 1 个小球，可分三类：

第一类，从第一个袋子里选取 1 个小球，有 20 种选法；

第二类，从第二个裂子里选取 1 个小球，有 15 种选法；

第三类，从第三个袋子里选取 1 个小球，有 8 种选法.

根据分类加法计数原理，共有 $20+15+8=43$ 种不同选法.

(2)从每袋中任取一个小球，需要分三步完成：

第一步，取红色小球，有 20 种方法；

第二步，取白色小球，有 15 种方法；

第三步，取蓝色小球，有 8 种方法.

根据分步乘法计数原理，共有 $20\times15\times8=2\ 400$ 种不同的选法.

3. (1)从甲地经乙地到丙地，可分两个步骤：

第一步，先从甲地到乙地，有 3 种走法；

第二步，再从乙地到丙地，有 5 种走法.

根据分步乘法计数原理，从甲地经乙地到丙地共有 $3\times5=15$ 种不同的走法.

(2)从甲地到丙地的走法可分为两类：

第一类，直接从甲地到丙地，有 3 种走法；

第二类，从甲地经乙地再到丙地，有 3×5 种走法.

根据分类加法计数原理，共有 $3+3\times5=18$ 种不同的走法.

4. 要计算摸球 m 次得到的球号排列数，可分 m 个步骤：

第一步，第一次摸球有 n 个球号；

第二步，第二次摸球有 n 个球号；

……

第 m 步，第 m 次摸球有 n 个球号.

根据分步乘法计数原理，共有 n^m 种排列.

5. (1)每个数字可以是 0，1，…，9 这 10 个数字中的任一个. 我们可以从左往右依次安排出一个 7 个数字.

   第一步，选取最左面的数字，有 10 种方法；

   第二步，选取第 2 个数字，有 10 种方法；

   ……

   第七步，选取第 7 个数字，有 10 种方法.

   根据分步乘法计数原理，最多可以安排 $10\times10\times10\times10\times10\times10\times10=10^7$ 注.

   (2)中奖的只有 10^7 注中的一注，因此中奖率为 $\frac{1}{10^7}$.

6. 每一次都有 14 种选择，根据分步计数原理，去三次共有 $14\times14\times14=2\ 744$ 种选择方法.

7.2.1　练习

1. 5 个人排成一排的不同排法，对应于从 5 个元素中选出 5 个元素的一个全排列，因此其排法总数有 $A_5^5=5\times4\times3\times2\times1=120$ 种.
2. 如果把三面旗看成三个元素，则从三个元素里每次取出 1 个，2 个或 3 个元素的一个排列对应一种信号.

   于是，用一面旗表示的信号有 A_3^1 种，用两面旗表示的信号有 A_3^2 种，用三面旗表示的信号有 A_3^3 种. 根据分类计数原理，所求的信号种数是

   $$A_3^1+A_3^2+A_3^3=3+3\times2+3\times2\times1=15.$$

习题 3

1. 排列的定义：从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个不同的元素，按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列.
2. $A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-m+1)$.
3. $n!=1\times2\times3\times\cdots\times(n-1)\times n$.
4. (1)(解法一)要计算没有重复数字的五位数的个数，可以分五个步骤：

   第一步，确定万位有 5 种选择；

   第二步，确定千位有 4 种选择；

   第三步，确定百位有 3 种选择；

   第四步，确定十位有 2 种选择；

   第五步，确定个位只有 1 种选择.

   根据分步乘法计数原理，共可以组成 $5\times4\times3\times2\times1=5!=120$ 个没有重复数字的五

位数.

(解法二)本题可用排列的定义理解，可以看成是从 2，3，4，5，6 这五个数字中取出 5 个数字的一个全排列，这样的排列数为 $A_5^5=120$.

(2)每个数位都可以是 2，3，4，5，6 这 5 个数字中的一个，根据分步乘法计数原理，共有 $5\times5\times5\times5\times5=5^5$ 个五位数. 而没有重复数字的五位数有 $A_5^5=120$ 个，所以允许有重复数字的五位数有 $5^5-120=3\ 005$ 个.

(3)由五个非零的数字组成没有重复数字的自然数，可以分为五类：

第一类，组成一位数的自然数有 $A_5^1=5$ 个；

第二类，组成两位数的自然数有 $A_5^2=20$ 个；

第三类，组成三位数的自然数有 $A_5^3=60$ 个；

第四类，组成四位数的自然数有 $A_5^4=120$ 个；

第五类，组成五位数的自然数有 $A_5^5=120$ 个.

根据分类加法计数原理，一共可以组成 $5+20+60+120+120=325$ 个自然数.

(4)(解法一)要计算没有重复数字的三位数的个数，可以分三个步骤：

第一步，确定百位有 5 种选择；

第二步，确定十位有 4 种选择；

第三步，确定个位有 3 种选择.

根据分步乘法计数原理，共可以组成 $5\times4\times3=60$ 个没有重复数字的三位数.

(解法二)本题可用排列的定义理解，可以看成是从 2，3，4，5，6 这五个数字中取出 3 个数字的一个排列，这样的排列数为 $A_5^3=60$ 个.

5. (1)属于排列问题，共有 A_7^3 种选法.

(2)不属于排列问题，只是从 7 个同学中选出 3 个同学，没有涉及 3 个同学的排列问题. 有 C_7^3 种选法.

6. (插空法)可分两个步骤：

第一步，排列除了小品外的其余 4 个节目，共有 A_4^4 种排法；

第二步，在这 4 个节目的间隙(包括头尾)中排入 2 个小品节目，有 A_5^2 种排法.

根据分步乘法计数原理，共有 $A_4^4A_5^2=480$ 种排列顺序.

7.2.2 练习

1. (1)348.

(2)64.

2. 648.

3. (1)将三个男生“捆绑”在一起看成一个元素，四个女生“捆绑”在一起看成一个元素，这时一共有 2 个元素，所以一共有排法种数 $A_3^3A_4^4A_2^2=288$ 种.

(2)先将三个男生排好有 A_3^3 种方法，此时他们留下四个位置(就称为“空”)，再将四个

女生分别插入这四个位置(空)有 A_4^4 种方法，所以一共有 $A_3^3A_4^4=144$ 种方法.

(3)先将四个女生排好有 A_4^4 种方法，此时她们留下五个位置(就称为“空”)，再将三个男生分别插入这五个位置(空)有 A_5^3 种方法，所以一共有 $A_4^4A_5^3=1\,440$ 种方法.

(4)先将甲、乙两名同学“捆绑”在一起看成一个元素与其余的 5 个元素(同学)一起进行全排列有 A_6^6 种方法，再将甲、乙两个同学“松绑”进行排列有 A_2^2 种方法. 所以这样的排法一共有 $A_6^6A_2^2=1\,440$ 种.

习题 4

1. $A_6^1+A_6^2+A_6^3=6+6\times5+6\times5\times4=156$.

2. 根据题意得：$A_x^3=720$，

   $\therefore x(x-1)(x-2)=720$，

   解得：$x=10$.

3. $\because A_n^n+A_{n-1}^{n-1}=xA_{n+1}^{n+1}$，

   $\therefore n!+(n-1)!=x(n+1)!$.

   $\therefore n\cdot(n-1)!+(n-1)!=x\cdot(n+1)\cdot n\cdot(n-1)!$

   解得 $x=\dfrac{n+1}{(n+1)\cdot n}=\dfrac{1}{n}$.

4. (1)组成没有重复数字的五位数，可分五个步骤：

   第一步，确定万位，可在除 0 以外的 5 个数中选择，有 5 种方法；

   第二步，确定千位，可在余下的 5 个数中选择，有 5 种方法；

   第三步，确定百位，可在余下的 4 个数中选择，有 4 种方法；

   第四步，确定十位，可在余下的 3 个数中选择，有 3 种方法；

   第五步，确定个位，可在余下的 2 个数中选择，有 2 种方法.

   根据分步乘法计数原理，共可以组成 $5\times5\times4\times3\times2=600$ 个没有重复数字的五位数.

   (2)组成没有重复数字的五位奇数，可分五个步骤：

   第一步，确定个位，可在 1，3，5 这 3 个数中选择，有 3 种方法；

   第二步，确定万位，可在余下的除 0 之外的 4 个数中选择，有 4 种方法；

   第三步，确定千位，可在余下的 4 个数中选择，有 4 种方法；

   第四步，确定百位，可在余下的 3 个数中选择，有 3 种方法；

   第五步，确定十位，可在余下的 2 个数中选择，有 2 种方法.

   根据分步乘法计数原理，共可以组成 $3\times4\times4\times3\times2=288$ 个没有重复数字的五位奇数.

   (3)组成没有重复数字的五位偶数，可分两类：

   第一类，个位数选 0，其余各位可在余下的 5 个数字中任取 4 个数字进行排列，有 A_5^4 种方法.

第二类，个位数不选 0，可分 5 个步骤：第一步，确定个位，可在 2，4 这 2 个数中选择，有 2 种方法；第二步，确定万位，可在余下的除 0 之外的 4 个数中选择，有 4 种方法；第三步，确定千位，可在余下的 4 个数中选择，有 4 种方法；第四步，确定百位，可在余下的 3 个数中选择，有 3 种方法；第五步，确定十位，可在余下的 2 个数中选择，有 2 种方法．此类有 $2\times4\times4\times3\times2=192$.

根据分类加法计数原理，共可以组成 $A_5^4+192=312$ 个没有重复数字的五位偶数.

5. 此题相当于将 8 个元素进行全排列，共有 A_8^8 种不同结果.

6. (捆绑法)可分为两个步骤：

第一步，把甲、乙两人“捆绑”在一起视为 1 个元素，有 A_2^2 种排法；

第二步，将“捆绑”在一起的 1 个元素与其余的 4 个人进行排列，有 A_5^5 种排法.

根据分步乘法计数原理，一共有 $A_2^2A_5^5=240$ 种排法.

7.3.1 练习

1. $C_9^6+C_8^5=\dfrac{9\times8\times7\times6\times5\times4}{6!}+\dfrac{8\times7\times6\times5\times4}{5!}=84+56=140$.

另解 $C_9^6+C_8^5=C_9^3+C_8^3=\dfrac{9\times8\times7}{3!}+\dfrac{8\times7\times6}{3!}=84+56=140$.

2. 全班 40 个同学互相通话一次，即每两个人之间都通一次电话，而通话的两个人无次序问题，所以共通了 $C_{40}^2=\dfrac{40\times39}{2!}=780$ 次话.

习题 5

1. $C_6^1+C_6^2+C_6^3=6+\dfrac{6\times5}{2\times1}+\dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=41$.
2. 共有 9 支笔，取出 3 支借人，属于无序问题，所以一共有 $C_9^3=84$ 种选法.
3. 共有 18 名女生，选出 9 人参加比赛，属于无序问题，所以一共有 C_{18}^9 种选法.
4. 从 4 个不同元素中取 3 个元素的组合有 $C_4^3=4$ 种，从 4 个不同元素中取 3 个元素的排列 $A_4^3=4\times3\times2=24$ 种，在列举中按照一定规律，做到不重不漏.

组合：*abc*　*abd*　*acd*　*bcd*

排列：*abc*　*acb*　*bac*　*bca*　*cab*　*cba*

abd　*adb*　*bad*　*bda*　*dab*　*dba*

acd　*adc*　*cad*　*cda*　*dac*　*dca*

bcd　*bdc*　*cbd*　*cdb*　*dbc*　*dcb*

5. (1)属于组合问题，故共有 $C_{18}^2=45$ 条.

(2)属于排列问题，故共有 $A_{10}^2=90$ 条.

7.3.2 练习

1. 原式 $=C_8^4+C_8^5+C_9^6=C_9^5+C_9^6=C_{10}^6=C_{10}^4=210$.

2. 从凸六边形的一个顶点出发，有 C_3^1 条对角线. 这样 6 个顶点就有 $6C_3^1$ 条对角线. 由于对应的两个顶点共有一条对角线，产生了重复计算，因此凸六边形的对角线数应为 $\frac{C_6^1 \cdot C_3^1}{2}=9$ 条.

习题 6

1. 所求的不同调法，就是从 10 架中取出 7 架的组合数 $C_{10}^7=C_{10}^3=\frac{10\times9\times8}{3\times2}=120$，所以有 120 种调法.
2. 从 10 架飞机中选调 7 架排成一列，对应的就是从 10 个元素中任取 7 个元素的一个排列，因此不同的排法是 $A_{10}^7=10\times9\times8\times7\times6\times5\times4=604\ 800$，所以共有 604 800 种排法.
3. 要从 5 人中选 3 人擦玻璃，2 人扫地，可以分两步进行：
   第一步，先从 5 人中选 3 人去擦玻璃，有 C_5^3 种选法；
   第二步，再从余下的 2 人中选 2 人去扫地，有 C_2^2 种选法.
   根据分步乘法计数原理得到 $C_5^3 \cdot C_2^2=\frac{5\times4}{2}=10$ 种分派方法.
4. 可分为两个步骤：
   第一步，先选 9 人去第一个兴趣班上课，属于无序问题，有 C_{18}^9 种方法；
   第二步，再选 9 人去第二个兴趣班上课，属于无序问题，有 C_9^9 种方法；
   根据分步乘法计数原理，一共有 $C_{18}^9 \cdot C_9^9$ 种方法.
5. (1) 都不是次品的取法，就是从 8 件合格中取出 4 件的取法，有 $C_8^4=\frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2}=$ 70 种.
   (2) (解法一)可分为两类：
   第一类，抽取的 4 件中有 1 件次品，有 $C_8^3 \cdot C_2^1$ 种取法；
   第二类，抽取的 4 件中有 2 件次品，有 $C_8^2 \cdot C_2^2$ 种取法.
   根据分类加法计数原理，共有 $C_8^3 \cdot C_2^1+C_8^2 \cdot C_2^2=140$ 种不同取法.
   (解法二)至少有一件次品的取法，也就是从 10 件产品中取 4 件的取法数减去 4 件都是合格品的取法数，即 $C_{10}^4-C_8^4=\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2}-70=140$，所以至少有一件次品的取法有 140 种.
6. (1) $C_m^5-C_{m+1}^5+C_m^4=(C_m^5+C_m^4)-C_{m+1}^5=C_{m+1}^5-C_{m+1}^5=0$.
   (2) $C_{97}^{94}+C_{97}^{95}+C_{98}^{96}+C_{99}^{97}=C_{98}^{95}+C_{98}^{96}+C_{99}^{97}=C_{99}^{96}+C_{99}^{97}=C_{100}^{97}=C_{100}^{3}=161\ 700$.
7. 由组合的性质 1 可知：$x+1=2x-3$ 或 $(x+1)+(2x-3)=13$.
   解得 $x=5$ 或 $x=4$.
8. 从凸 n 边形的一个顶点出发，有 C_{n-3}^1 条对角线. 这样 n 个顶点就有 nC_{n-3}^1 条对角线. 由

于对应的两个顶点共有一条对角线，因此凸 n 边形的对角线应为$\frac{nC_{n-3}^{1}}{2}=\frac{n(n-3)}{2}$条.

7.4　练习

1. $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{4}=1+\frac{4}{x}+\frac{6}{x^{2}}+\frac{4}{x^{3}}+\frac{1}{x^{4}}$.

2. 6.

3. 系数最大的项是第 10 项，且为 $C_{13}^{9}2^{9}x^{9}$. 二项式系数最大的项为第 7 项和第 8 项，为 $C_{13}^{6}2^{6}x^{6}$，$C_{13}^{7}2^{7}x^{7}$.

习题 7

1. $(1-x)^{10}$的展开式的第 $k+1$ 项是 $C_{10}^{k}(-x)^{k}=C_{10}^{k}(-1)^{k}x^{k}$，

   因此 x^{5} 的系数即为 $C_{10}^{5}(-1)^{5}=-C_{10}^{5}=-252$.

2. 要求 $x^{2}(1-x)^{10}$的展开式中 x^{5} 的系数，即求$(1-x)^{10}$的展开式中 x^{3} 的系数.

   $\therefore x^{2}(1-x)^{10}$的展开式中，$x^{5}$ 的系数为 $C_{10}^{3}(-1)^{3}=-C_{10}^{3}=-120$.

3. 将$(1+x+x^{2})(1-x)^{10}$展开成$(1-x)^{10}+x(1-x)^{10}+x^{2}(1-x)^{10}$，因此求 x^{5} 的系数，即求各项展开后 x^{5} 的系数和：

   $$C_{10}^{5}(-1)^{5}+C_{10}^{4}(-1)^{4}+C_{10}^{3}(-1)^{3}=-C_{10}^{5}+C_{10}^{4}-C_{10}^{3}=-252+210-120=-162.$$

4. $(3x+1)^{8}$ 的二项开展式为：

   $(3x+1)^{8}=C_{8}^{0}(3x)^{8}+C_{8}^{1}(3x)^{7}+C_{8}^{2}(3x)^{6}+C_{8}^{3}(3x)^{5}+C_{8}^{4}(3x)^{4}+C_{8}^{5}(3x)^{3}+C_{8}^{6}(3x)^{2}+C_{8}^{7}(3x)^{1}+C_{8}^{8}(3x)^{0}$.

   (1) $(3x)^{k}$ 的二项式系数为 C_{8}^{8-k}，x^{k} 的系数是 $C_{k}^{8-k}\cdot 3^{k}$.

   (2) 令 $x=1$，得系数之和为$(3+1)^{8}=4^{8}$.

5. (1) 令 $x=1$，则 $a_{0}+a_{1}+\cdots+a_{7}+a_{8}=(1+3\times1)^{8}=65\ 536$.

   (2) 令 $x=-1$，则 $a_{0}-a_{1}+\cdots-a_{7}+a_{8}=(1-3\times1)^{8}=(-2)^{8}=256$.

   (3) $a_{1}+a_{2}+\cdots+a_{8}=(a_{0}+a_{1}+\cdots+a_{7}+a_{8})-a_{0}=65\ 536-1=65\ 535$.

6. $99^{10}-1$

   $=(100-1)^{10}-1$

   $=C_{10}^{0}100^{10}+C_{10}^{1}100^{9}(-1)^{1}+C_{10}^{2}100^{8}(-1)^{2}+\cdots+C_{10}^{9}100(-1)^{9}+C_{10}^{10}(-1)^{10}-1$

   $=100^{10}-C_{10}^{1}100^{9}+C_{10}^{2}100^{8}-\cdots-C_{10}^{9}100$

   $=1\ 000(10^{17}-C_{10}^{1}10^{15}+C_{10}^{2}10^{13}-\cdots-1)$，

   $\therefore 99^{10}-1$ 可以被 1 000 整除.

7. (1) 当$\begin{cases}n=9,\\m=10\end{cases}$或$\begin{cases}n=10,\\m=9\end{cases}$时，$x^{2}$ 的系数取得最小值 81.

（2）156.

复习题七

1．一天中乘火车有 3 种走法，汽车有 5 种走法，轮船有 3 种走法，每一种走法都可以从甲地到乙地，根据分类计数原理，共有 $3+5+3=11$ 种不同的走法.

2．(1)(2)都是从 n 个元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个不同元素，不论次序地构成一组，因此属于组合问题.（3）由于 5 人互送贺年卡，对相同的一个人收到的贺年卡可以不同，因此属于排列问题.

3．比赛的场次可以分为两类，第一类是第一组 5 个队之间的单循环赛，需要 C_5^2 场，第二类是第二组 6 个队之间的单循环赛，需要 C_6^2 场，根据分类计数原理，共需要比赛 $C_5^2+C_6^2=25$ 场.

4．（1）从 100 件产品中任取 6 件的取法总数为 C_{100}^6.

（2）抽到全是正品，就是在 95 件正品中任取 6 件，所以取法总数为 C_{95}^6.

（3）抽到 2 件正品，就是先在 95 件正品中任取 2 件，接着在 5 件次品中任取 4 件，所以取法总数为 $C_{95}^2\cdot C_5^4$.

（4）(解法一)抽到至少 1 件次品，即把从 100 件产品中取 6 件的取法数减去抽取的 6 件全是正品的取法数，所以抽到至少 1 件次品的取法总数为 $C_{100}^6-C_{95}^6$.

(解法二)计算抽到至少 1 件次品的取法总数，可以分为五类：第一类为抽到 5 件正品，1 件次品，有 $C_{95}^5\cdot C_5^1$ 种取法；第二类为抽到 4 件正品，2 件次品，有 $C_{95}^4\cdot C_5^2$ 种取法；第三类为抽到 3 件正品，3 件次品，有 $C_{95}^3\cdot C_5^3$ 种取法；第四类为抽到 2 件正品，4 件次品，有 $C_{95}^2\cdot C_5^4$ 种取法；第五类为抽到 1 件正品，5 件次品，有 $C_{95}^1\cdot C_5^5$ 种取法，根据分类加法计数原理，共有$(C_{95}^5\cdot C_5^1+C_{95}^4\cdot C_5^2+C_{95}^3\cdot C_5^3+C_{95}^2\cdot C_5^4+C_{95}^1\cdot C_5^5)$种取法.

(5)抽到 2 件次品，就是先在 5 件次品中任取 2 件，接着在 95 件正品中任取 4 件，所以取法总数为 $C_5^2\cdot C_{95}^4$.

5．分三个步骤：

第一步，从 5 件一等品中取 2 件，有 C_5^2 种取法；

第二步，从 4 件二等品中取 1 件，有 C_4^1 种取法；

第三步，从 3 件三等品中取 1 件，有 C_3^1 种取法.

根据分步乘法计数原理，共有 $C_5^2C_4^1C_3^1=120$ 种取法.

6．要使得取出的两个数的和为偶数，可分为两类：

第一类，取出的两个数都为偶数，有 C_3^2 种取法；

第二类，取出的两个数都为奇数，有 C_3^2 种取法.

根据分类加法计数原理，共有 $C_3^2+C_3^2=6$ 种取法.

7. 由于比赛是在各年级班与班之间进行，所以一共需要的比赛场次可以分为三类：

第一类，高一年级 8 个班进行单循环赛，需比赛 C_8^2 场；

第二类，高二年级 7 个班需比赛 C_7^2 场；

第三类，高三年级 8 个班需比赛 C_8^2 场.

根据分类加法计数原理，三个年级共需比赛 $2C_8^2+C_7^2=77$ 场.

8. 7 名同学站成一排的排法，相当于对 7 名同学进行全排列，所以有 $A_7^7=5\ 040$ 种排法.

9. 展开式中第 $k+1$ 项为 $C_{10}^k x^{10-k}\left(\dfrac{-1}{x}\right)^k=(-1)^k C_{10}^k x^{10-2k}$. $\because 10-2k=4$，$\therefore k=3$. $\therefore x^4$ 的系数为 $(-1)^3C_{10}^3=-\dfrac{10!}{7!\ 3!}=-120$.

10. D.

11. C.

12. (1) $(1-x^2)^{20}$ 的展开式中，第 $4r$ 项的二项式系数为 C_{20}^{4r-1}，第 $r+2$ 项的二项式系数 C_{20}^{r+1}，由 $C_{20}^{4r-1}=C_{20}^{r+1}$ 得 $4r-1=r+1$ 或 $4r-1=20-(r+1)$，

解得：$r=\dfrac{2}{3}$（舍去）或 $r=4$. $\therefore r=4$.

(2) $(1-x^2)^{20}$ 的展开式中第 $r+1$ 项为 $C_{20}^r\cdot 1^{20-r}(-x^2)^r=C_{20}^r\cdot(-x^2)^r$.

由 $r=4$ 得 $4r=16$，$r+2=6$.

$\therefore (1-x^2)^{20}$ 的展开式中第 16 项为 $C_{20}^{15}\cdot(-x^2)^{15}=C_{20}^5\cdot(-x^2)^{15}=-C_{20}^5\cdot x^{30}$，

$(1-x^2)^{20}$ 的展开式中第 6 项为 $C_{20}^5\cdot(-x^2)^5=-C_{20}^5\cdot x^{10}$.

13. （捆绑法）可以分为两个步骤：

第一步，从 5 个不同的小球中任取 2 个“捆绑”在一起看做一个元素，有 C_5^2 种方法；

第二步，从 5 个不同的盒中任取 4 个，将球放入有 A_5^4 种方法.

根据分步乘法计数原理，共有 $C_5^2\cdot A_5^4=1\ 200$ 种方法.

14. (1) 在 38 名同学中任选 8 名有 C_{38}^8 种选法.

(2) 在余下的 36 名同学中选 6 名，有 C_{36}^6 种选法.

(3) 两名班长有且只有一人入选，要分为两个步骤：第一步，在两名班长中选 1 人，有 C_2^1 种选法；第二步在余下的 36 名同学中选 7 名，有 C_{36}^7 种选法. 根据分步乘法计数原理，共有 $C_2^1C_{36}^7$ 种选法.

(4) 两名班长都不入选，即在余下的 36 名同学中选 8 名，有 C_{36}^8 种选法.

(5)（解法一）两位班长至少一人入选，即为(2)(3)问的选法之和，即有 $C_{36}^6+C_2^1\cdot C_{36}^7$ 种选法.

（解法二）先从 38 人中任选 8 人，然后扣除从 36 人中任选 8 人的情况，共有 C_{38}^8-

C_{36}^{8}种选法.

(6)(解法一)两名班长至多一人入选，即为(3)(4)问的选法之和，有 $C_{2}^{1}\cdot C_{36}^{7}+C_{36}^{8}$ 种选法.

(解法二)先从 38 人中任选 8 人，然后扣除从 36 人中任选 6 人的情况，共有 $C_{38}^{8}-C_{36}^{6}$种选法.

15. 圆上 8 个点两两不同，可见任意三点都不共线.

(1) 在 8 个点中任取两点都可画弦，所以有 $C_{8}^{2}=28$ 条弦.

(2) 在 8 个点中任取三点都可形成一个圆内接三角形，所以有 $C_{8}^{3}=56$ 个内接三角形.

16. 由 6 个非零的数字组成没有重复数字的正整数，可以分为六类：

第一类，组成一位数的正整数有 $A_{6}^{1}=6$ 个；

第二类，组成两位数的正整数有 $A_{6}^{2}=30$ 个；

第三类，组成三位数的正整数有 $A_{6}^{3}=120$ 个；

第四类，组成四位数的正整数有 $A_{6}^{4}=360$ 个；

第五类，组成五位数的正整数有 $A_{6}^{5}=720$ 个；

第六类，组成六位数的正整数有 $A_{6}^{6}=720$ 个.

根据分类加法计数原理，一共可以组成 $6+30+120+360+720+720=1\ 956$ 个正整数.

17. (1) 要买其中一本，有三类方法：

第一类，从 10 种语文辅导书中买 1 本，有 10 种方法；

第二类，从 10 种数学辅导书中买 1 本，有 10 种方法；

第三类，从 10 种英语辅导书中买 1 本，有 10 种方法.

根据分类加法计数原理，共有 $10+10+10=30$ 种方法.

(2) 要买两本不同类的书，可分为三个步骤完成：

第一步，从语、数、英三类辅导书中选出两类，有 C_{3}^{2} 种方法；

第二步，从选好的两类书中的一类买 1 本，有 10 种方法；

第三步，从选好的两类书中的另一类买 1 本，有 10 种方法.

根据分步乘法计数原理，共有 $C_{3}^{2}\times10\times10=300$ 种方法.

18. 新工人分配到工厂工作，有三类不同的安排方法，因此根据分类加法计数原理，共有 $4+5+6=15$ 种方法.

19. 完成一件产品要分三个步骤，根据分步乘法计数原理，共有 $3\times4\times5=60$ 种分派方案.

20. 可分为两个步骤完成：

第一步，从 9 名同学中选 4 名站前排，有 A_{9}^{4} 种排法；

第二步，余下 5 名站后排，有 A_{5}^{5} 种排法.

根据分步乘法计数原理，共有 $A_{9}^{4}A_{5}^{5}=362\ 880$ 种排法.

21. 甲站在中间位置，也就是让剩下的 10 名同学进行全排列，所以共有 $A_{10}^{10}=3\ 628\ 800$ 种排法.

22. 甲的独唱不能排在第一个，有两类情况：

第一类，甲未入选，这时可从余下的 8 个节目中任意选取 6 个进行排列，有 A_8^6 种排法；

第二类，甲入选，由于甲不在第一个，可从剩下的五个位置中选 1 个先排甲，然后从剩余的 8 个节目中任选 5 个进行排列，有 $A_5^1 \cdot A_8^5$ 种排法.

根据分类加法计数原理，共有 $A_8^6+A_5^1 \cdot A_8^5=53\ 760$ 种排法.

23. 可分为两个步骤完成：

第一步，从 6 本不同的书中任取 2 本“捆绑”在一起看成一个元素，有 C_6^2 种取法；

第二步，将“捆绑”在一起的一个元素与余下 4 本书进行全排列，有 A_5^5 种方法.

根据分步乘法计数原理，共有 $C_6^2 \cdot A_5^5=1\ 800$ 种方法.

24. $\because (2x+1)^m+(6x+1)^n$ 展开式中含 x 的项为：$C_m^{m-1}(2x)+C_n^{n-1}(6x)=(2C_m^{m-1}+6C_n^{n-1})x$.

$\therefore 2m+6n=24$，即 $m=12-3n$.

又设展开式中含 x^2 的项的系数为 $C_m^2 \cdot 2^2+C_n^2 \cdot 6^2=T$，则 $T=2m^2-2m+18n^2-18n=2(12-3n)^2-2(12-3n)+18n^2-18n=36n^2-156n+264=36\left(n-\dfrac{13}{6}\right)^2+95$. 显然，当 $n=\dfrac{13}{6}$时，T 取最小值，但 n 为整数，而当 $n=2$ 时，$T=96$，当 $n=3$ 时，$T=120$. 因此，当 $n=2$，$m=16$ 时，展开式中 x^2 项的系数最小，且为 96.

25. 由题可知 $C_n^{n-2}+C_n^{n-1}+C_n^n=92$. 则 $n^2+n-182=0$，即 $n=13$，则 $T_{r+1}=C_{13}^r 2^r x^r$，并记 $a_r=C_{13}^r 2^r$，则

$$\begin{cases} a_r \geqslant a_{r+1}, \\ a_r \geqslant a_{r-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_{13}^r 2^r \geqslant C_{13}^{r+1} 2^{r+1}, \\ C_{13}^r 2^r \geqslant C_{13}^{r-1} 2^{r-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r \geqslant \dfrac{25}{3}, \\ r \leqslant \dfrac{28}{3}, \end{cases} \text{则} \begin{cases} a_9>a_{10}>a_{11}>\cdots>a_n, \\ a_0<a_1<a_2<\cdots<a_9, \end{cases}$$

当 $r\in\{0, 1, 2, \cdots, 9\}$，数列单调递增，当 $r\in\{9, 10, 11, \cdots, n\}$，数列单调递减，$r=9$ 时，系数最大，该项为第 10 项：$C_{13}^9 2^9 x^9$.

26. 最多选 2 名女生，可以分成三类：

第一类，选 2 名女生，3 名男生，$C_6^2 C_9^3$ 种选法；

第二类，选 1 名女生，4 名男生，$C_6^1 C_9^4$ 种选法；

第三类，不选女生，只选 5 名男生，C_9^5 种选法.

根据分类加法计数原理，共有 $C_6^2 C_9^3+C_6^1 C_9^4+C_9^5=2\ 142$ 种选法.

27. (1) 第一步，从 5 名男生中选 2 名，有 C_5^2 种选法；

第二步，从余下的 3 名女生中选 2 人，有 C_3^2 种选法.

根据分步乘法计数原理，共有 $C_5^2 \cdot C_3^2 = 30$ 种选法.

(2)(解法一)可分为四类：

第一类，选 2 名男生，3 名女生，有 $C_5^2C_4^3$ 种选法；

第二类，选 3 名男生，2 名女生，有 $C_5^3C_4^2$ 种选法；

第三类，选 4 名男生，1 名女生，有 $C_5^4C_4^1$ 种选法；

第四类，5 名全选男生，有 C_5^5 种选法.

根据分类加法计数原理，共有 $C_5^2C_4^3+C_5^3C_4^2+C_5^4C_4^1+C_5^5=121$ 种选法.

(解法二)从 9 名学生中选 5 名代表有 C_9^5 种选法；选出的 5 名代表仅 1 名男生，有 $C_5^1C_4^4$ 种选法. 因为女生只有 4 名，所以选出的 5 名代表，至少含 1 名男生. 因此男生不少于 2 名的选法有 $C_9^5-C_5^1C_4^4=121$ 种选法.

28. (1) 甲、乙必须相邻，可将甲、乙二人“捆绑”起来，看做一个元素，然后与其他 6 名同学进行全排列，共有 $A_7^7A_2^2=10\ 080$ 种排法.

(2) 甲、乙、丙三人必须相邻，也可将三人“捆绑”看做一个元素，然后与其他 5 名同学进行全排列，共有 $A_6^6A_3^3=4\ 320$ 种排法.

第 8 章　统计与概率

一、教学目标

1. 通过对典型案例(如“坏血病的研究”、“静脉吻合分流术”、“脊髓灰质炎”)的探究，了解随机对照试验的基本思想、方法及初步应用.

2. 通过对典型案例(如“患肺癌与吸烟是否有关?”)的探究，了解独立性检验(只要求 2×2 列联表)的基本思想、方法及初步应用.

3. 通过对典型案例(如“船只数量与被船只撞死海牛数的关系”、“出口贸易额与 GDP 数据的关系”)的探究，了解回归的基本思想、方法及其初步应用.

4. 对具体问题的分析中，理解取有限值的离散型随机变量及其概率分布的概念，认识概率分布对刻画随机现象的重要性.

5. 通过实例(如彩票抽奖)，理解超几何分布及其导出过程，并能进行简单的应用.

6. 在具体情境中，了解条件概率和两个事件相互独立的概念，理解 n 次独立重复试验的模型及二项分布，并能解决一些简单的实际问题.

7. 通过实例，理解取有限值的离散型随机变量均值、方差的概念，能计算简单离散型随机变量的均值、方差，并能解决一些实际问题.

8. 通过实际问题，借助直观(如实际问题的直方图)，认识正态分布曲线的特点及曲线所表示的意义.

二、教材说明

统计与概率是近代数学的分支，它们在科学研究、工农业生产、国民经济乃至政治、教育、社会科学等领域都有广泛的应用. 概率是对随机现象统计规律演绎的研究，而统计是对随机现象统计规律归纳的研究. 虽然两者在方法上有着明显的不同，但它们却是相互渗透、相互联系的.

本章的概率部分是学生在必修课程学习概率的基础上，进一步学习概率的加法公式、条件概率、事件的独立性、随机变量及几个常用分布，学习某些离散型随机变量概率分布及其均值、方差等内容，初步学会利用离散型随机变量思想描述和分析某些随机现象的方法，并能用所学知识解决一些简单的实际问题，进一步体会概率模型的作用及运用概率思考问题的特点，初步形成用随机观念观察、分析问题的意识.

事件的概率着眼于随机现象的局部问题，与此不同，随机变量的概率分布、期望、方

差等则着眼于随机现象的整体和全局问题. 其中，离散型随机变量的概率分布给出了随机变量取所有可能值的概率，期望反映了随机变量取值的平均水平，方差反映了随机变量取值的集中与分散状况，这些都是从整体和全局上来描述随机变量的.

统计是一门具有新特色的独立应用数学学科，它从日常生活到高新技术领域，都有广泛的应用. 虽然它以概率论作为数学基础，但是它与数学的其他分支有本质的不同，处理问题的出发点也不同.

高中学生已经具有较丰富的生活经验和一定的科学知识. 因此，教材中选择学生感兴趣的、与其生活实际密切相关的素材，以现实世界中的常见现象或其他学科的实例，展现概率与统计思想和方法的广泛应用.

在本章，学生将在必修课程已学习统计的基础上，通过对典型案例的讨论，了解和使用一些常用的统计方法，进一步体会运用统计方法解决实际问题的基本思想，认识统计方法在决策中的作用.

教材中提供的一些案例所涉及的概率与统计模型都是学生将来在走向社会时所要面临的常见的概率与统计模型，如随机对照试验、n 次独立重复试验的模型及二项分布、超几何分布、正态分布、独立性检验、线性回归等. 在一定程度上，很好地理解和应用这些统计模型会对学生将来的生活和工作质量起到一定的促进作用. 另外，通过对这些概率与统计模型的学习，学生将学习到一些经典的统计方法与统计思想，体验解决特殊问题的统计过程及统计方法，进而感受到概率与统计思想在解决实际问题中的作用，知道概率与统计方法的有效性、局限性和可改进性，体会统计推断可能犯错误.

统计教学必须通过案例来进行. 教材中通过一些案例的处理，使学生经历较为系统的数据处理过程，并在此过程中学习一些数据处理的方法，并运用所学知识、方法去解决实际问题. 例如，在学习一元线性回归案例时教师可以引导学生体会拟合回归的思想，并根据给出的公式求线性回归方程.

本章主要内容有：随机对照试验案例、概率的加法公式、条件概率、事件的独立性、离散型随机变量及其分布列、几个常用的分布、离散型随机变量的数学期望和方差、正态分布曲线、列联表独立性分析案例、一元线性回归案例.

本章教学重点是：n 次独立重复试验的模型及二项分布，离散型随机变量概率分布及其期望、方差，独立性检验的基本思想和回归分析的基本思想.

教学难点是：用离散型随机变量思想描述和分析某些随机现象，掌握概率模型的作用及运用概率思考问题的方法，掌握建立回归模型的基本步骤；利用随机变量 χ^2 来确认“两个分类变量有关系”这一结论成立的可信程度(类似于反证法).

依据本次课程改革的新理念，在高中数学课程中，典型统计案例作为引入的新的课程内容，教材在内容呈现上采取新的处理方式，每一节总是以某个具体案例为线索，详细阐

述统计方法的基本思想和实施步骤，注重由浅入深的原则，贴近学生的认知规律.

1. 全章围绕着如何对试验中观测的数据进行分析展开. 为保证设计方案的科学性，要坚持随机对照试验，因此特设计“随机对照试验”这一节，让学生了解随机安排对照组的必要性和重要性. 并在此基础上介绍安慰剂对照，说明试验研究的整个设计实施和资料分析的全过程中，防止数据偏倚误差的措施.

2. 把一些较复杂的事件表示为若干个简单事件的和或补，而后通过概率加法公式和对立事件概率公式求出较复杂事件的概率，体现了化繁为简的化归思想，所以说概率的加法公式是继续深入学习的重要基础. 因此，本章在必修课程已学概率加法公式的基础上又加以复习巩固和拓展应用，达到了知识间的前后呼应，增加了知识的复现率.

3. 为了使学生继续加深对概率理论概念的理解，扩大所能计算的概率范围，本章在前面学习了古典概型、几何概型及概率加法公式的基础上，又研究了条件概率、事件的独立性和几个常用的分布，进一步拓宽了概率在实际问题中的应用，同时也使学生前面所学知识在这里得到综合应用.

4. 本章安排“事件的独立性”一节，主要是由于它是假设检验和独立性检验的知识基础，这样编排有助于体现教材之间的联系，有助于控制教学要求，节省教学时间.

5. 随机变量的引入，大大地节省了符号的使用，也使问题的表达更加简单明确，从而使我们能更好地借助数学工具对随机现象加以研究和处理. 本章在概率部分主要研究离散型随机变量的概率分布、期望和方差. 离散型随机变量的概率分布反映了随机变量取各个值的可能性的大小，期望反映了随机变量取值的平均水平，方差反映了随机变量集中与离散的程度. 随机变量的概率分布、期望与方差从不同方面反映了随机变量的状况.

6. 正态分布是描述连续型随机变量的一种最常见、最重要的分布，在现实生活中有着非常广泛的应用，教材通过实例引入测量的方差和标准差及其近似值的确定方法，并进一步引入标准正态密度曲线及其函数式 $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$，从而得到正态分布的概念及标准正态分布曲线的特点，最后研究了它们的简单应用. 知识的实用性是教材所要体现的主要特色，这充分体现了新课程标准对培养学生应用数学意识的重视.

7. 列联表独立性分析所涉及的统计方法对学生来说是比较陌生的，教材在这部分的定位是符合高中学生的认知特点，但也更加强调了具体案例所使用的方法、具体方法所反映的思想.

8. 教材利用线性回归的内容，介绍了相关系数的假设检验，教材还介绍了变量间的相关关系的一种最简单的模型——一元线性回归模型及其研究它们的回归分析的思想与方法，从观测中获得数据，而这些数据都是带有一定随机性的变量，到概率地呈现回归直线，再对数据的线性进行假设检查，这是综合运用前面知识解决一个简单的实际问题，使学生初

步体会统计知识的实用价值，并使学生的应用能力和动手能力得到锻炼.

三、课时安排建议

本章教学时间约需 22 课时，具体分配如下(仅供参考)：

8.1　随机对照试验案例	约 1 课时
8.2　概率	
8.2.1　概率的加法公式	约 1 课时
8.2.2　条件概率	约 1 课时
8.2.3　事件的独立性	约 2 课时
8.2.4　离散型随机变量及其分布	约 2 课时
8.2.5　几个常用的分布	约 2 课时
8.2.6　离散型随机变量的数学期望	约 1 课时
8.2.7　离散型随机变量的方差	约 1 课时
8.3　正态分布曲线	约 2 课时
8.4　列联表独立性分析案例	约 3 课时
8.5　一元线性回归案例	约 3 课时
小结与复习	约 3 课时

四、教学建议

1. 建议在学习本章新课之前先回顾必修课程学习的概率与统计的相关内容，可以通过具体问题让学生复习概率与统计的有关概念与方法. 要强调，统计学最关心的是：(1)如何抽取数据；(2)如何从数据中提取信息；(3)所得结论的可靠性程度. 本章“统计与概率”部分内容虽然在必修课程学习的概率与统计的基础上有所扩展和加深，但总的看来，所介绍的仍属于统计与概率中的一些初步的知识，因此很多问题在道理上是难以说清的，着眼点在于突出一些重要概念的实际意义. 注意防止随意扩大教学范围，要重其所重，轻其所轻，把握教学的深浅度，抓住教学要求.

2. 研究一个随机现象，就是要了解它所有可能出现的结果和每一个结果出现的概率，分布列正是描述了离散型随机变量取值的概率规律，二项分布和超几何分布是两个应用广泛的概率模型，要求通过实例引入这两个概率模型，不追求形式化的描述. 教学中，应引导学生利用所学知识解决一些实际问题.

3. 教学中应强调对基本概念和基本思想的理解和掌握，对随机观念、统计思想等一些核心概念和基本思想要贯穿整章教学的始终，并帮助学生逐步加深理解. 教学中，应鼓励学生积极参与教学活动，包括思维的参与和行为的参与. 既要有教师的讲授和指导，也要

有学生的自主探索与合作交流．教师要创设适当的问题情境，鼓励学生发现统计与概率问题的规律和解决的途径，使他们经历知识形成的过程．

4．由于概率与统计知识具有高度抽象的特点，教学中要注意体现基本概念的来龙去脉，如二项分布和超几何分布的模型分别是由随机模球问题中有放回和不放回的抽样问题．注意引导学生经历从具体实例抽象出数学概念的过程，并在初步应用中逐步理解概念的本质．如条件概率的引入，就是从掷骰子、参加运动会获冠军、扑克牌等一系列具体概率问题中，由特殊到一般，归纳得出条件概率的定义后，再通过一系列实例的应用，让学生逐步理解条件概率的本质．本章中的其他许多概念公式的引入均采用了这种逐步深入的方法．

5．要注意新旧知识之间的联系．本章是建立在学生已学习概率与统计初步的基础上的进一步学习，教学中要注意对已学过知识的复习，通过类比、联想、知识的迁移发散(一题多解等)和应用等方式，使学生体会新旧知识之间的有机联系，感受概率统计知识的连贯性和整体性，进一步理解统计与概率的本质，提高解决问题的能力．例如条件概率问题中，由于确定试验的全集的不同，既可以看做古典概型的问题来解决，也可以用条件概率公式加以计算，而事件独立性的乘法公式是一般乘法公式在事件相互独立情况下的特例等．这些都体现了新旧知识之间的内在联系，在教学中应及时给予揭示．

6．统计与现实生活的联系是非常紧密的，这一领域的内容对学生来说应该是充满趣味性和吸引力的．在教学中，强调典型案例的教学，重点还是感受统计分析的思想，特别注意多选择典型的学生感兴趣的问题作为案例，通过案例让学生体会其中的统计原理．

7．统计案例的教学中，应鼓励学生经历数据处理的过程，培养他们对数据的直观感觉，认识统计方法的特点(如统计推断可能犯错误，估计结果的随机性)，体会统计方法应用的广泛性．应尽量给学生提供一定的实践活动机会，可结合数学建模的活动，选择一个案例，要求学生亲自实践．对于统计案例内容，“只要求学生了解两种统计方法(独立性检验和回归分析)的基本思想及其初步应用”．

8．教学中应鼓励学生使用计算器、计算机等现代技术手段来处理数据，有条件的学校还可运用一些常见的统计软件解决实际问题．建议让学生学会使用计算器中“统计”功能，特别是“数据处理”、“平均值”、“方差与标准差”、“回归计算”等功能进行有关计算．

9．对于随机对照试验，教学中要求学生了解随机对照试验的意义，体会随机安排对照组对试验评价的作用．随机对照试验的最大特点是通过随机抽样及随机分配的方法主动控制及消除某些已知或未知的偏倚因素的干扰，使研究的结果有良好的真实性．在科研工作中，显然不可能将全部希望研究的对象纳入研究，实际上只能从中选择一定的样本，所选择的样本必须具有总体代表性，这就需要采用随机抽样的方法，其意义是使每一个被研究的对象都具有相同的被选择的机会，避免人为的干预．每一个被选择到的样本是分配到试

验组还是分配到对照组，也要有相同的机会，避免研究者主观意愿对分组的干扰．只有采用随机的方法才能较好地避免各种因素对研究结果的影响．

10．事件的独立性教学中要注意从集合论角度讲清基本事件、事件、试验之间的关系．利用事件的独立性的概率乘法公式解决问题要注意其前提条件两个事件所从属的试验是互相独立的，对公式的理论和试验的解释可以在等可能事件的情形下给出一般的证明．

11．独立性检验在科学研究、日常生活中有着广泛的应用，有时可以帮助我们作出正确的决策，我们也要重点关注．对于独立性检验问题，应以 χ^2 的计算与临界值的比较来判断分类变量的相关或无关为主．教学中应用实例分析总结得出独立性检验的意义，并且认真体会独立性检验的基本思路，会用类比的思想方法得出独立性检验的基本步骤，让学生真正理解统计思维和确定思维的差异．

12．通过对典型案例的讨论，了解回归分析的基本思路、方法及其初步应用．回归分析是对其有相关关系的两个变量进行统计分析的一种常用方法．教学中应该通过生活中详实事例理解回归分析的方法，其步骤为先通过散点图直观地了解两个变量的关系，然后通过最小二乘法建立回归模型，最后通过分析随机误差、相关指数等评价模型的好坏．教学要注重了解线性回归模型与函数模型的差异，判断刻画模型拟合效果的方法——相关系数和随机误差分析，理解独立性检验的基本思想及实施步骤．

13．在教学中，应鼓励学生经历数据处理的过程，培养他们对数据的直观感觉，认识统计方法的特点，体会统计方法应用的广泛性，让学生学会研究问题的科学方法，体会统计思维与确定性思维的区别，独立性检验与反证法的区别．

五、评价建议

本章学习评价，既要重视学生知识、技能的掌握和能力的提高，又要重视其情感、态度和价值观的变化；既要重视学生学习水平的甄别，又要重视其学习过程中主观能动性的发挥．应将评价贯穿于学习的全过程中，发挥评价的甄别与选拔功能，突出评价的激励与发展功能．

1．重视对学生数学学习过程的评价．

通过数学学习过程的评价，应努力引导学生正确认识概率模型与统计案例的价值，产生积极的数学学习态度、动机和兴趣．

概率与统计案例学习过程的评价，应关注学生是否积极主动地参与概率与统计案例学习活动，是否愿意和能够与同伴交流数学学习的体会、与他人合作探究问题．

本章评价应特别重视考察学生能否从实际情境中抽象出数学知识以及能否应用数学知识解决问题．重视考察学生能否理解并有条理地表述条件概率、n 次独立重复试验的模型及二项分布、超几何分布、正态分布、独立性检验、线性回归等数学内容．

2. 正确评价学生的数学基础知识和基本技能.

评价要注重对概率与统计思想本质的理解和思想方法的把握，避免片面强调机械记忆、模仿以及复杂解题技巧.

评价对概率思想的理解，可以关注学生能否利用离散型随机变量思想描述和分析某些随机现象；能否运用概率思考问题，形成用随机观念观察、分析问题的意识.

评价对统计分析的理解，可以关注学生能否独立举出一定数量的案例用于说明问题.

评价应关注学生能否建立不同知识之间的联系，把握数学知识的结构体系.

对数学基本技能的评价，应关注学生能否在理解方法的基础上，针对问题特点对所学的统计分析知识进行合理选择和运用.

能否恰当地运用数学语言及自然语言对概率与统计问题进行表达与交流也是评价的重要内容. 如引入随机变量后能否正确使用随机变量的数学符号，简洁地表达有关的随机事件及其概率. 又如准确使用集合符号表达多个随机事件有一个发生和多个随机事件同时发生等.

3. 重视对学生能力的评价.

能力是通过知识的掌握和运用水平体现出来的，因此对能力的评价应贯穿于学生数学知识的建构过程与问题的解决过程中.

在本章学习中，尤其是能否运用概率的加法公式、条件概率公式、事件独立性公式分析和解决一些相关的实际概率问题，能否掌握几个常用的随机变量的概率分布(两点分布、二项分布、超几何分布)的模型，并能用所学概率模型解决一些简单的实际问题，能否通过离散型随机变量的概率分布及其期望、方差的计算体现离散型随机变量的数字特征，分析离散型随机变量的平均水平和与平均水平的偏离程度，全面描述离散型随机变量的统计规律，能否选择有效的方法和手段收集数据，联系相关知识，提出解决问题的思路，建立恰当的数学模型，进而尝试解决问题，能否对统计分析的结果进行质疑、调整和完善，能否将解决问题的方案与结果，用书面或口头等形式比较准确地表达并进行交流，且能根据问题的实际要求进行分析、讨论或应用，是我们教学的主要目标.

8.1 随机对照试验

教材线索

本小节通过对案例“坏血病的研究”的探究，意图让学生了解安排试验的基本原则.

通过对案例“静脉吻合分流术”的探究，解释无对照组、非随机对照试验、随机对照试验对试验结果的影响，说明随机安排对照组的必要性，否则可能得出错误的结论. “脊髓灰质炎”的案例体现安慰剂在试验中的作用. 这三个案例编排遵循学生的认知规律，由简单到复杂有序展开. 本节内容虽在课程标准中没有体现，但是由于它在应用中的广泛性并且在科学研究中的极其重要的地位，因此补充本节作为统计案例的基础课程.

教学目标

（一）知识与技能

了解随机对照试验，了解使用安慰剂的方法，加深对随机对照试验的认识，进一步体会随机对照试验的必要性和重要性.

（二）过程与方法

通过对典型案例(如“坏血病的研究”、“静脉吻合分流术”、“脊髓灰质炎”等)的探究，熟悉随机对照试验的基本思想、方法及初步应用.

（三）情感、态度与价值观

让学生体会到统计知识在研究中的初步运用，激发学生学习数学的乐趣.

教材分析

1. 重点：

让学生理解随机对照试验的基本思想、方法及初步应用，学会在试验中使用安慰剂.

2. 难点：

无对照组、非随机对照试验、随机对照试验、随机对照试验中使用安慰剂的区别，及其对试验结果判断的影响.

3. 注意对随机对照试验的理解. 教材中的随机对照试验是随机同期对照试验，它属于前瞻性研究，是采用随机数表或其他的随机方法，将符合入组要求的研究对象随机分配到试验组或对照组，接受相应的试验措施，在一致的条件下或环境里，同步地进行研究和观察试验效应，并用客观的效应标准对试验结果进行科学的衡量和评价的试验设计.

4. 在科研工作中，显然不可能将全部希望研究的对象纳入研究，实际上只能从中选择一定的样本，所选择的样本必须具有总体代表性，这就需要采用随机抽样方法. 在实际应用中均使试验的研究者或受试者都不知道试验对象分配的所在组接受的是试验措施还是对照措施，其目的是为了有效地避免研究者或受试者的主观偏见.

5. 随机对照试验的最大特点是通过随机抽样及随机分配的方法主动控制及消除某些已知或未知的偏倚因素的干扰，使研究的结果有良好的真实性.

6. 随机对照试验的意义是使每一个被研究的对象都具有相同的被选择的机会，避免人为的干预. 每一个被选择到的样本是分配到试验组还是分配到对照组，也要有相同的机会，避免研究者主观意愿对分组的干扰. 受试者在试验过程中的变化是难以预测的，只有采用

随机的方法才能较好地避免这些因素对研究结果的影响.

教学建议

1. 本小节着重向学生介绍随机对照试验的概念、特点、必要性及其重要性，进一步介绍在随机对照试验中使用安慰剂的作用. 与此同时，尽可能多介绍一些随机对照试验在科研中的应用.

2. 可以多举一些案例来让学生判断哪些是随机对照试验，哪些是非随机对照试验，在判断中学会识别、理解.

3. 随机对照试验教学举例中须注意如下问题：

(1) 试验组与对照组必须同步展开研究，并且试验的条件和环境必须一致，否则将会对结果造成影响，导致结论错误.

(2) 试验组与对照组的试验期必须一致，不能一组观察时间长，另一组观察时间短.

(3) 要有明确公认的判断标准.

(4) 要有合理的纳入与排除标准，选择合格的研究对象，排除有其他可能不适合参加试验的研究对象.

(5) 有合适的样本容量，样本容量太少不能达到试验的目的，样本容量太多会造成人力物力等方面的浪费.

(6) 试验目的如果是检验某药对某种疾病是否有效最好使用安慰剂.

例题解析

案例 1 （坏血病的研究）17 世纪初期，长期在海上航行的水手经常患坏血病. 坏血病的症状是牙龈肿大出血，皮肤上出现青灰的斑点. 英国海军部试图考察坏血病的起因. 他们怀疑这是因为水手体内缺少柑橘类水果中的某种成分造成的. 当此想法提出时，刚好有 4 艘军舰要远航. 为了调查水手是否由于缺少柑橘类的水果而导致坏血病，海军部设计了一次试验：随机地安排一艘军舰上的水兵每天喝柑橘汁，另外 3 艘军舰不供应柑橘汁.

试验的结果是：航行还没结束，没有提供柑橘汁的水手多数得了坏血病，而提供柑橘汁的军舰没有发现坏血病. 最后，提供柑橘汁的军舰不得不把携带的柑橘汁分给其他的军舰，以帮助他们顺利返航.

分析 设想如果不设对照组，让 4 艘军舰都提供柑橘汁，就没有士兵患上坏血病，海军部无法作出判断是否是其他的食品或治疗避免了坏血病. 因此，好的试验设计都应当有一个试验组和一个对照组. 这个例子说明设计对照试验在研究问题中的必要性.

案例 2 （静脉吻合分流术）在一些肝硬化病例中，许多病人会用肝出血而导致死亡. 历史上有一种称为“静脉吻合分流术”的外科手术用于治疗肝硬化，其原理是运用外科手术的方法使血流改变方向. 这种手术花费很大，并且有很大的危险性. 值得做这样的手术吗？

为了解决上述问题，一共进行了三批共 51 次手术试验.

第一批进行了 32 次无对照试验. 结果如下：

设计方法	试验次数	显著有效	中等有效	无效
	32	24	7	1
所占比例		75%	21.9%	3.1%

第二批共进行了 15 次试验，这批试验有对照组，但是对照组的病人不是随机选取的. 医生根据病人的临床诊断情况决定是将病人编入试验组做手术，还是编入对照组不做手术. 结果如下：

设计方法	试验次数	显著有效	中等有效	无效
	15	10	3	2
所占比例		66.7%	20%	13.3%

第三批是随机选取对照组. 这批试验共有 4 次手术. 随机选取的方式可以是掷硬币，如果硬币正面朝上就将病人选入试验组做手术，否则放入对照组不做手术. 这次试验的结果如下：

设计方法	试验次数	显著有效	中等有效	无效
	4	0	1	3
所占比例		0%	25%	75%

分析 第一批试验说明有 75%的手术显著有效，21.9%的手术中等有效，看来手术是值得做的. 第二批试验结果是 66.7%的手术显著有效，20%中等有效，13.3%的手术无效. 这次试验结果与无对照组的试验结果差别不大. 第三批试验结果显示“静脉吻合分流术”几乎没有什么价值.

本例通过无对照组、非随机有对照组、随机有对照组试验结果的比较说明在试验研究中“随机化原则”的重要性和必要性，如果不进行随机安排对照组就可能得出错误的结论.

遵循“随机化”原则，即参加试验的所有病人被随机地分配到不同的组，病人将进入哪一组完全是随机产生的，而不是人为地挑选哪些病人进入治疗组，哪些病人进入对照组. 如果参加试验的病人群体足够大，随机分配的结果将会使治疗组和对照组的病人有相似的特点. 否则，如果由研究人员来挑选的话，就可能有意无意地把病情较轻的病人挑选入治疗组，使得治疗组的疗效过于显著.

在做对照试验时，为了尽量避免主观偏差，还需要遵循其他一些原则. 在有可能影响效果的各个方面，治疗组和对照组的病人都应该相同或相似. 而且，治疗组和对照组的病人的年龄、体重、健康状况、接受其他治疗的情况等各个方面也应该尽量相似.

案例 3 1916 年小儿麻痹症(脊髓灰质炎)袭击了美国，以后的 40 年间，受害者成千上万. 20 世纪 50 年代，人们开始研究预防疫苗. 当时萨凯培育的疫苗最有希望. 他的疫苗在实验室中表现良好：安全，产生对脊髓灰质炎病毒的抗体. 但是在大规模使用前必须进行临床试验，通过试验最后确定疫苗是否有效. 只有这样才能达到保护儿童的目的.

当时采用了随机对照的研究方案，对每个儿童用类似投掷一枚硬币的方法决定是否将他编入试验组：正面朝上分在试验组，否则分在对照组．除了试验的设计人员，连医生也不知道哪个儿童分在试验组，哪个儿童分在对照组．

然后给分在试验组的儿童注射疫苗，给分在对照组的儿童注射生理盐水，让他们认为也被注射了疫苗．得到的结果如下：

	试验人数	试验后的发病率
试验组	20 万	$\frac{28}{100\ 000}$
对照组	20 万	$\frac{71}{100\ 000}$

试验结果显示，疫苗将小儿麻痹症的发病率从$\frac{71}{100\ 000}$降低到$\frac{28}{100\ 000}$．由于 71 和 28 的差别超出了随机性本身所能解释的范围，所以宣布疫苗是成功的．进一步分析指出，能以接近 100％的概率保证疫苗是有效的．

我们把对照组中的处理方法称为使用安慰剂，案例 3 中的安慰剂是注射生理盐水．给对照组的儿童使用安慰剂是为了避免儿童的心理作用影响试验的结果．尽管可以认为光靠精神作用不能抵抗小儿麻痹症，但是为了确认试验结果的可靠性，使用安慰剂是必要的．

不让医生知道儿童是来自试验组还是对照组是为了使医生能够作出更公正的诊断，避免在诊断儿童是否患有小儿麻痹症时受到心理因素的影响．

分析　案例 3 中的随机对照试验又称为随机对照双盲试验，双盲之一是指儿童自己不知道自己是在试验组还是在对照组，也就是说不知道自己被注射的是疫苗还是安慰剂，甚至不知道有安慰剂，这就有效地避免了潜在的心理影响．另外一盲是指医生不了解他诊断的病人在对照组还是在试验组，这就避免了医生对疫苗的主观看法带来的可能影响．在可能的场合，随机对照双盲试验可以最大程度地避免心理因素的影响．

如果使用列联表进行统计分析，得到结果是：疫苗无效的概率是零．

如果没有对照组，就无法得到真实可靠的结论．因为如果注射疫苗后发病率仍高，那可能是脊髓灰质炎大规模流行的原因，不利于疫苗的肯定．

因为如果注射疫苗后发病率较低，那可能是脊髓灰质炎没有大规模流行的原因，也不利于疫苗的正确判断．

相关链接

（一）对照实验类型介绍

1．队列对照研究．

队列对照研究可采用前瞻性方式，也可以采用回顾性方式，将被观察的人群按其是否

接触可能的致病因素或措施分为两个群体，随访一定时期后，确定并比较各群体中，新发生病例数或某种效应的差异. 在队列研究中，选用现在为始点则为前瞻性队列研究，选用过去为始点则为回顾性队列研究.

队列对照研究是群体研究中常用的方案. 被观察的人群以是否接触某种致病因素为界限自然分配而形成两个群体，研究者既不能随机安排，也不可能加以控制. 研究对象要有足够的观察时间，在自然病程中要有充分的时间，使危险因素的作用能够表现出来. 全部被观察者都必须进行随访，队列中失访人数增加，将会影响所观察的结果.

凡在群体中研究可能的致病因素或某项处理措施对固定人群的影响，均可使用队列研究. 因此队列研究常用于病因研究、治疗性研究、预防性研究或预后研究.

2. 前与后对照研究.

前与后对照研究属于前瞻性研究，是将前后两个阶段，不同措施或治疗方法的结果进行比较，此方案至少要有两种或两种以上的处理措施，每种措施使用数日到数周，然后与另一种措施的结果进行比较. 两种措施之间，由于不同疾病的症状或药物的作用各不相同，因此可以不间隔或有为期数日的间隔，可根据具体疾病或使用药物的性能而定. 该方案仅适用于慢性复发性疾病的治疗性试验，两个阶段的时间通常相等.

药物依赖者的戒断症状有自愈的特性，因此不适合采用该方案. 药物依赖者合并的其他持续存在、没有自愈特性的疾病则可以考虑采用.

3. 交叉对照试验.

交叉对照试验属于前瞻性研究，是对两组受试者使用两种不同的处理措施，然后互相交换处理措施，最后将结果进行对照比较的设计方法. 每个受试者或先或后都接受试验组或对照组的处理和治疗，至于谁先进入试验组或对照组，可采用随机的方法确定.

（二）随机对照试验阅读材料

在人类历史上有许多类似的正确使用对照试验的成功例子，也有许多没有正确使用统计方法的惨重教训.

例如：随机对照试验成功地否定了治疗冠状动脉病的冠状旁道外科手术(手术昂贵，危险，病人痛苦)，否定了抗凝剂治疗心脏病突发，否定了 5－FU 结肠癌化疗，否定了乙烯雌酚预防流产.

医疗方法结论	随机对照试验有效		历史对照试验	
结论	有效	无效	有效	无效
冠状旁道手术	1	7	16	5
抗凝剂治疗	1	9	5	1
5－FU 结肠癌化疗	0	5	2	0
乙烯雌酚预防流产	0	3	5	0

特别需要指出的是有关乙烯雌酚的试验，随机对照试验完全否定了这种预防流产的药，

而糟糕的设计试验却赞同药的疗效，这是一个医学上的悲剧.

20世纪60年代末在美国，医生每年大约为5万名孕妇发放这种药物．后来揭示，怀孕期间的母亲服用乙烯雌酚，20年后给她们的儿女带来灾难性的副作用，引发她们的儿女得一种罕见的癌症.

人们从太多的悲剧中总结了教训：对一种新药不做随机对照试验是非常危险的.

8.2 概　率

8.2.1 概率的加法公式

教材线索

1．本小节先用集合语言描述事件，进而引入两个事件互斥的概念，并用集合语言说明两个事件互斥的条件.

2．用集合语言说明事件 A 发生的概率，再用集合语言表示事件 A_1，A_2，…，A_m 中至少有一个发生，进而引入概率的加法公式，并加以简单应用.

3．用集合语言描述事件 A 的对立事件 $\overline{A}=\Omega\setminus A$，并加以应用.

教学目标

（一）知识与技能

通过实例，了解两个及两个以上互斥事件的概率加法公式.

（二）过程与方法

通过互斥事件的概率计算，进一步理解随机事件概率的意义，提高分析问题和解决问题的能力.

（三）情感、态度与价值观

结合互斥事件、对立事件的概率计算，培养学生辩证唯物主义观点和用对立统一观点分析问题的方法.

教材分析

1．重点：

（1）两个事件互斥的概念.

(2) 概率的加法公式及其应用.

2. 难点：

(1) 准确判断概率是否具有可加性.

(2) 灵活利用对立事件和加法公式进行简便计算.

3. 互斥事件的概念：两个事件 A 与 B 互斥的含义是在任何一次试验中事件 A 与 B 不会同时发生，用集合语言描述为 $A\cap B=\varnothing$，即事件 A，B 同时发生为不可能事件.

4. 教材通过用 Ω 表示试验的全集，事件对应子集，把事件与集合对应起来，使学生能借用已有的集合知识来理解概率的有关概念，同时体会类比的数学思想方法.

5. 注意区分"$A\cap B$"与"$A\cup B$"的含义，"$A\cap B$"表示两个事件 A，B 同时发生，而"$A\cup B$"表示事件 A 与 B 至少有一个发生.

6. 概率的加法公式及其应用：要注意应用概率加法公式的前提是事件两两互斥. 如果两个事件不互斥，就不能运用概率的加法公式，例如把投掷一枚骰子作为一次试验，事件 A 表示出现奇数(指向上的数是奇数)，事件 B 表示向上的数不超过 3. 那么 A 与 B 就不是互斥的，因为如果出现 1 或 3，都表示 A 与 B 同时发生了.

再看 $A\cup B$ 这一事件. 这个事件包括 4 种结果：出现 1，2，3 和 5. 所以，$P(A\cup B)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$. 而 $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$，$P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$，因此，在这个问题里，$P(A\cup B)\neq P(A)+P(B)$.

7. 当 A，B 为非彼此互斥事件时，事件 A，B 中至少有一个发生的概率也有相应加法公式.

若 A，B 为任意两事件，则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$. (＊)事实上此公式可由文氏图很容易地得到. 这个公式称为任意事件的概率加法公式，它的推论为：若 A，B，C 为任意三个事件，则

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C).$$

这个推论通过两次应用(＊)式即可获证.

一般地，应用数学归纳法可以证明，对任意的 n 个事件，有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_i\cap A_j)\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_i\cap A_j\cap A_k)-\cdots+P(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n).$$

当事件 A_1，A_2，…，A_n 两两互斥时，$P(A_i\cap A_j)=0$，$P(A_i\cap A_j\cap A_k)=0$，…，$P(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)=0(i，j，k=1，2，\cdots，n)$，因此 $P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$.

以上就是互斥事件的概率加法公式.

8. 在讲教材本小节的例 1 时，要突出强调(1)事件 A_{11}，A_{12}，A_{13} 是彼此互斥的，要结合题意分析清楚互斥的原因. (2)所求概率的事件是关于互斥事件 A_{11}，A_{12}，A_{13} 中至少有一个发生的事件，不符合这两点，是不能运用概率的加法公式的，对于教材例 2 中的事件 $A=A_0\cup A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4$ 同样要强调这两点.

9. 如果两个互斥事件在一次试验中必然有一个发生，那么这样的两个互斥事件叫做对立事件. 从集合的角度看，一个事件包含的结果的集合，是其对立事件包含的结果的集合的补集.

我们看到，对立事件是针对两个事件来说的. 一般地说，两个事件对立是这两个事件互斥的充分条件，但不是必要条件.

由对立事件的定义，知 $A\cup\overline{A}$ 是一个必然事件，于是 $P(A)+P(\overline{A})=P(A\cup\overline{A})=1$.

由此得 $P(\overline{A})=1-P(A)$.

这个公式很有用，常可使概率的计算得到简化. 如同教材本节例 2 当直接求某一事件的概率较为复杂时，可先转而去求其对立事件的概率.

教学建议

1. 教学中首先要让学生弄清楚什么是“互斥事件”，了解“互斥事件”与“等可能事件”的差别. “互斥事件”和“等可能事件”是意思不同的两个概念. 在一次试验中，由于某种对称性条件，使得若干个随机事件中每一事件产生的可能性是完全相同的，则称这些事件是等可能事件，在数目上，它可为 2 个或多个；而互斥事件是指不可能同时发生的两个或多个事件. 有些事件是互斥事件而不是等可能事件，有些事件是互斥事件可能也是等可能事件，有些事件是等可能事件而不是互斥事件. 例如：(1)袋中有同样大小的 11 个小球，其中有 6 个红球，3 个绿球，2 个黄球，现从中任取 1 个，“取得红球”，“取得绿球”，“取得黄球”，它们是彼此互斥事件，不是等可能事件. (2)李明从分别标有 1，2，…，6 标号的同样的小球中，任取一球，“取得 1 号球”，“取得 2 号球”，…，“取得 6 号球”，它们是彼此互斥事件，又是等可能事件. (3)连续抛掷一枚硬币三次，“第一次正面朝上”，“第二次正面朝上”，“第三次正面朝上”，它们是等可能事件，不是彼此互斥事件.

2. 提醒学生注意区分互斥事件和对立事件，具体判定方法有如下两种：

(1) 利用基本概念：①互斥事件不可能同时发生；②对立事件首先是互斥事件，且必有一个要发生.

(2) 利用集合观点：设事件 A，B 所含结果组成集合分别是 A，B.

①事件 A，B 互斥$\Leftrightarrow$集合 $A\cap B=\varnothing$；②事件 A，B 对立$\Leftrightarrow A\cap B=\varnothing$且 $A\cup B=\Omega$.

3. 对概率加法公式的应用，应不断强调可加的前提是事件两两互斥，提醒学生在每次应用加法公式时，一定要先判断题中事件是否两两互斥，即是否具有可加性.

4. 由对立事件的定义，可以直接得到 $A\cup\overline{A}=\Omega$，由此又容易得到下面三个等价的对立事件的概率公式：$P(A)+P(\overline{A})=1$，$P(\overline{A})=1-P(A)$，$P(A)=1-P(\overline{A})$.

应提醒学生在解题中当某一事件的概率不易直接求出，但其对立事件的概率较易直接求出时，可运用此公式，采取逆向思维的方法往往是解决问题的捷径.

例题解析

例 1 根据以往的经验，某家庭装修公司每月能够签订 k 份装修合同的概率是 p_k.

已知

$$p_k=C_{20}^k 0.6^k 0.4^{20-k},\ k=0,1,\cdots,20.$$

计算以下概率.

(1) 下月能够签订11份装修合同的概率;

(2) 下月能够签订11～13份装修合同的概率.

分析 本题所提供的概率经验公式的背景是已知每月最多签订20份装修合同，签订每份合同的概率为0.6，签订每份合同的可能性是相互独立的，则签订k份装修合同的事件是独立重复试验. 故有P(签订k份装修合同)$=C_{20}^k 0.6^k 0.4^{20-k}$，$k=0,1,2,\cdots,20$.

公式中P是20次独立重复试验(签合同)中，某事件A(签合同)恰好发生k次的概率，其中20是重复试验(签20份合同)的次数，0.6是一次试验(签k份合同)中，某事件A(签1份合同)发生的概率. $0.4=1-0.6$是一次试验(签k份合同)中某事件A(签1份合同)不发生的概率，而k是在20次独立试验中事件A恰好发生的次数. 用A_k表示下月签订k份装修合同.

(1) $P(A_{11})=C_{20}^{11}0.6^{11}0.4^9=0.1597$.

(2) 由于下月签订11份装修合同的事件发生，则签订12份或13份装修合同的事件就不会发生. 故事件A_{11}，A_{12}，A_{13}是不会同时发生的，即为互斥事件；而下月能够签订11～13份装修合同的事件是关于互斥事件A_{11}，A_{12}，A_{13}中至少有一个发生的事件，即$A_{11}\cup A_{12}\cup A_{13}$，故所求概率可运用概率的加法公式得到：

$$\begin{aligned}P(A_{11}\cup A_{12}\cup A_{13})&=P(A_{11})+P(A_{12})+P(A_{13})\\&=C_{20}^{11}0.6^{11}\times0.4^9+C_{20}^{12}0.6^{12}\times0.4^8+C_{20}^{13}0.6\times0.4^7\\&=0.1597+0.1797+0.1659\approx0.5.\end{aligned}$$

故签订11～13份装修合同的概率约等于0.5.

应用概率的加法公式一定要注意：①概率可加的前提是事件两两互斥. ②将一个事件分解成几个互斥事件，要做到不重不漏.

例2 计算例1中的家庭装修公司下个月至少签订5份装修合同的概率.

分析 用A_k表示下月签订k份装修合同的事件，与例1一样，如果下月签订k份合同事件发生了，则就不可能有签订$(k+1)$份合同的事件发生，故A_k与A_{k+1}是互斥事件但具有可加性.

至少签订5份装修合同的事件，表示签订的合同在5～20份之间，即为$A_5\cup A_6\cup\cdots\cup A_{20}$. 计算得到：

$$\begin{aligned}P(A_5\cup A_6\cup\cdots\cup A_{20})&=P(A_5)+P(A_6)+\cdots+P(A_{20})\\&=C_{20}^5 0.6^5\times0.4^{15}+C_{20}^6 0.6^6\times0.4^{14}+\cdots+C_{20}^{20}0.6^{20}\times0.4^0\\&\approx0.9983.\end{aligned}$$

但上述解法的计算较繁，所以我们可采用逆向思维的方法考虑，“至少签订5份装修合同”的对立事件即至多签订4份装修合同，表示为$A=A_0\cup A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4$，则

$$
\begin{aligned}
P(A)&=P(A_0)+P(A_1)+\cdots+P(A_4)\\
&=p_0+p_1+\cdots+p_4\\
&=C_{20}^{0}0.6^{0}\times 0.4^{20}+C_{20}^{1}0.6^{1}\times 0.4^{19}+\cdots+C_{20}^{4}0.6^{4}\times 0.4^{16}\\
&\approx 0.001\ 7.
\end{aligned}
$$

$\therefore$ $P(\overline{A})=1-P(A)\approx 0.998\ 3.$

即该装修公司下月至少能够签订 5 份装修合同的概率约等于 99.83%.

点评 解本题的关键在于正确找出所求事件包含的互斥事件或对立事件，当所求事件包含的互斥事件较多时，采取逆向思维的思考方法，对立事件的概率公式 $P(\overline{A})=1-P(A)$ 的使用常常为简捷地解决问题起到一种立竿见影的效果.

相关链接

戳穿“摸彩”骗局

“天有不测风云，人有旦夕祸福”. 这话有对的一面，也有不对的一面. 对的是说出了事物发生的偶然性. 不对的是夸大了偶然的成分，忽视了偶然中的必然规律和量的关系，给人笼罩上一种不可知论的阴影.

举例来说，在世界上火车与汽车相撞的事件，时有发生. 然而，却几乎没有人，由于担心火车与汽车相撞，不去乘火车、汽车而宁愿步行. 这是为什么呢？原因是：在现实中，这种相撞的可能性实在是太小了. 在世界上千千万万次的车祸中，能找到的也只是极少数几例. 又如，人遭遇车祸，这种可能性通常要比火车与汽车相撞的可能性大不知多少倍. 然而，在人们亿万次的外出中，遭遇车祸毕竟还是占少数. 这一潜意识包含了一条极重要的原理——小概率原理，即一个概率很小的事件，一般不会在一次试验中发生.

下面给你介绍一个有趣的游戏. 如果你新到一个班级，而这个班级包括你在内有 50 人，那么你完全可以大言不惭地对你班上 49 名新伙伴作一次惊人的宣布：“班级里一定有人生日是相同的!”我想大家一定会惊讶不已！可能连你本人也会感到难以置信吧！因为首先，你对他们的生日一无所知，其次，一年有 365 天，而你班上只有 50 人，难道生日会重合吗？但是，我必须告诉你，这是极可能获得成功的.

这个游戏成功的道理是什么呢？记“50 个人中至少有两个人的生日在同一天”为事件 A，则对立事件 $\overline{A}$ 是指“50 个人的生日全不相同”，由题意得到全班 50 名同学生日都不同的概率为 $P(\overline{A})=\dfrac{365!}{365^{50}(365-50)!}\approx 0.029\ 5$. 而 $P(A)+P(\overline{A})=1$. 于是 $P(A)=1-\dfrac{365!}{365^{50}(365-50)!}\approx 0.970\ 5$.

$\therefore$至少有两个人生日在同一天的概率为 0.970 5，即你成功的把握有 97%，而失败的可能性不足 3%，根据小概率原理，你完全可以断定这是不会在一次游戏中发生的.

目前，在一些小市镇可以看到一种“摸彩”的招徕广告．这实际是一种赌博，赌主利用他人无知和侥幸心理，有恃无恐地把高额的奖金设置在极小概率的事件上．赌客纵然一试再试，仍不免一次次败兴而归，结果大把的钞票，哗哗流进了赌主的腰包．我们应当戳穿这种骗局．

有人见过一个“摆地摊”的赌主，他拿了八个白、八个黑的围棋子，放在一个签袋里．规定说：凡愿摸彩者，每人交一角钱做“手续费”，然后一次从袋中摸出五个棋子，赌主按地面上铺着的一张“摸子中彩表”给“彩”．

这个“摸彩”赌博，规则十分简单，赌金也不大，所以招徕了不少过往行人，一时围得水泄不通．许多青年不惜花一角钱去碰“运气”，结果自然扫兴者居多．

下面我们深入计算一下摸到“彩”的可能性．

（读者如果一时弄不清计算的方法，可以只看结果）现在按摸 1 000 次统计，赌主“手续费”收入共 100 元，他可能需要付出的包括纪念品在内的“彩金”是：

$$[P(\text{五个白})\times 2+P(\text{四个白})\times 0.2+P(\text{三个白})\times 0.05]\times 1\,000$$
$$=[0.012\,8\times 2+0.128\,2\times 0.2+0.358\,9\times 0.05]\times 1\,000$$
$$=69.19(\text{元}).$$

赌主可望净赚 30 元．

我想看了以上的分析，读者们一定不会再怀着好奇和侥幸的心理，用自己的钱，去填塞“摸彩”赌主那永远填不满的腰包吧！

8.2.2　条件概率

教材线索

本小节用班级选举问题创设情境引入新课，通过对掷骰子问题的深入分析，引导学生探究体会条件概率的含义，再通过本节教材中的例 1，例 2 由特殊到一般地利用已有知识（古典概型）转化为新知识（条件概率），从而抽象概括出条件概率的定义，并归纳出条件概率的计算公式，接着又通过练习和例 3 使我们对条件概率的简单应用有了进一步的认识．

教学目标

（一）知识与技能

在具体情境中，了解条件概率的概念，了解条件概率的公式，并能解决一些简单问题．

（二）过程与方法

在知识的教学过程中，培养学生从特殊到一般的探索归纳能力及运算能力和应用新知

识的能力，渗透归纳、转化的数学思想方法.

（三）情感、态度与价值观

创设教学情境，培养学生学习数学的良好思维习惯和兴趣，加深学生对从特殊到一般的思想认知规律的认识，树立学生善于创新的思维品质.

教材分析

1．重点：

（1）条件概率的概念.

（2）在具体情境中，从特殊到一般的归纳条件概率公式的思维过程.

（3）条件概率公式的简单应用.

2．难点：

正确理解条件概率公式，根据实际问题的特点灵活选用条件概率公式或概率定义解决问题.

3．条件概率是指在已知事件 A 发生的前提条件下，事件 B 发生的概率，记作 $P(B|A)$，相应地将 $P(B)$ 称为无条件概率，严格说来，概率都是有条件的，因为试验都是在一组固定条件下进行的，这里说的条件是特指在原有的一种固定的条件中再增加一个附加条件“事件 A 发生”.

4．条件概率 $P(B|A)$ 与无条件概率 $P(B)$ 的区别就在于所取的全集(样本空间)不同. 无条件概率 $P(B)$ 是在原有条件下求得的，而条件概率 $P(B|A)$ 是在原有条件下还另外增加了一个附加条件(已知事件 A 发生)下求得的，因此这种带附加条件概率 $P(B|A)$ 必然不同于无条件概率 $P(B)$. 如问题“掷一枚骰子，已知掷出了奇数，求这个奇数是 3 的概率”. 该问题是条件概率问题，样本空间从原有的样本空间 $\Omega=\{1，2，3，4，5，6\}$，转化为由附加条件形成的样本间 $\Omega_A=\{1，3，5\}$，$\Omega_B=\{3\}$，则 $P(B|A)=\frac{1}{3}$. 从这个例子可以看出：条件概率 $P(B\mid A)$ 立足于样本空间 Ω_A，而无条件概率 $P(B)$ 立足于样本空间 Ω，样本空间的不同是它们的区别所在.

5．条件概率的计算公式，教材是通过具体情境(即教材 P. 53 的例 1，例 2 的具体例子)归纳验证而得到的. 该公式 $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}(P(A)>0)$ 的成立不是偶然的，是普遍规律. 下面就古典概型的情况加以证明：设样本空间 $\Omega=\{a_1，a_2，a_3，\cdots，a_n\}$，其中导致 B，A 和 $A\cap B$ 发生的基本事件数分别为 m，p，$q(q\leqslant m，q\leqslant p)$ 个，如果 A 发生，则导致 B 发生的 q 个基本事件中至少有一个发生，在这个条件下导致 B 发生的基本事件仅有 q 个，所以 $P(B|A)=\frac{q}{p}=\frac{\frac{q}{n}}{\frac{p}{n}}=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$. 但是，这个普遍规律不能在一般情况下用纯数学推导出来. 在概率论中，将这个公式作为条件概率的定义，即“设 A 和 B 为任意两事件，且

$P(A)>0$，则称比值 $\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ 为事件 B 在事件 A 发生的条件下的条件概率，记作 $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$.

6. 条件概率公式 $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}(P(A)>0)$ 揭示了 $P(A)$，$P(A\cap B)$，$P(B|A)$ 三者之间的关系，三者中知道二者即可求得第三者. 求 $P(A)$，$P(A\cap B)$，$P(B|A)$ 时要注意到三者所立足的样本空间是不同的，$P(A)$ 和 $P(A\cap B)$ 立足于原来条件的样本空间 Ω，而 $P(B|A)$ 是立足于由附加条件形成的样本空间 Ω_A；其中在求 $P(A\cap B)$ 时，要注意具体问题具体分析，根据题意，或者由题设已经给出或者隐含在其他条件中，需要对所给条件进行分析才能得到(如教材 P. 53 例 2).

7. 条件概率公式的变形，若 $P(A)>0$，则 $P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$. 实际上是概率的乘法公式，有时根据实际问题的特点，可以直接求出条件概率，这时可利用概率的乘法公式反过来求 $P(A\cap B)$(如教材 P. 54 例 3(2)).

8. 条件概率 $P(B|A)$ 与无条件概率 $P(A)$ 的大小关系是不确定的，一般说来，$P(A)$ 与 $P(B|A)$ 之间并没有什么必然的关系. 事实上，“事件 A 已经发生”这一条件可能使 $P(B|A)$ 比 $P(A)$ 大，也可能使 $P(B|A)$ 比 $P(A)$ 小，还可能 $P(B|A)=P(A)$.

但是如果 A，B 之间存在一些特殊的关系，这时 $P(B|A)$ 与 $P(A)$ 谁大谁小将可以有进一步的结论：① A，B 之间有包含关系，则 $P(B|A)\geqslant P(A)$；② 若 $A\cap B=\varnothing$，则 $P(B|A)\leqslant P(A)$.

教学建议

1. 概念：教材中条件概率的概念的引入是在具体情境中，首先通过班级选举问题让学生直观感受样本空间的变化所引起的概率的变化，然后再通过对掷骰子问题的详细分析，让学生进一步感知条件概率，从而引入概念. 教学中可将问题“掷一枚骰子，已知掷出了奇数，求这个奇数是 3 的概率”变式为“掷一枚骰子，求掷出奇数 3 的概率”，以比较 $P(B|A)$ 与 $P(A)$ 的区别，并引导学生通过丰富的数学与生活实例去发现 $P(B|A)$ 与 $P(A)$ 和 $P(A\cap B)$ 的区别就在于所取的样本空间的不同，从而对条件概率的本质有更深层次的把握和了解.

2. 公式：条件概率公式，教材也是在具体情境中通过对教材 P. 53 例 1，例 2 这两个例子的归纳验证而得到的，本公式不要求学生进行纯数学的推导，得到引入的公式后，可引导学生发现两个注意点：(1) $P(A)$，$P(B|A)$，$P(A\cap B)$ 三者之间知二求三；(2) 通过公式变式可得到概率的乘法公式 $P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$.

3. 应用：在具体解决条件概率问题的教学中，可通过教材的 P. 54 的练习题和例 3 的讲练结合的教学，引导学生归纳总结条件概率问题的类型和解题规律，从而培养学生发现问题、分析问题和解决问题的能力，以及归纳总结能力.

例题解析

教材 P. 53 的例 1，例 2 首先是作为引例使用，目的是通过例 1，例 2 引入条件概率公式，但例 1，例 2 也可作为条件概率公式的应用范例使用.

例 1　某校高中三个年级各派一名男生和一名女生参加市里的中学生运动会，每人参加一个不同的项目，且每人是否获得冠军是等可能的. 已知只有一名女生获得冠军，求高一的女生获得冠军的概率.

分析　(方法一)已知只有一名女生获得冠军后，试验的可能结果只能是高一女生或高二女生或高三女生获得冠军，这是新的全集，用 $A=\{$高一女生，高二女生，高三女生$\}$表示这个新的全集. 用 B 表示高一女生获得冠军，则 $B=\{$高一女生$\}$. 根据概率的定义可得：$P(B|A)=\dfrac{B\text{ 中元素数}}{A\text{ 中元素数}}=\dfrac{1}{3}$.

本题的方法一通过把 A 看为新的全集，把条件概率 $P(B|A)$转化为古典概率问题，从而根据概率的定义 $P(B|A)=\dfrac{B\text{ 中元素数}}{A\text{ 中元素数}}$使问题得到解决.

(方法二)学了条件概率公式后，例 1 可考虑用公式来解题，试验的全集 $\Omega=\{$高一男生，高二男生，高三男生，高一女生，高二女生，高三女生$\}$. 设 $A=\{$只有一名女生获得冠军$\}=\{$高一女生，高二女生，高三女生$\}$，$B=\{$高一女生获得冠军$\}=\{$高一女生$\}$，则 $A\cap B=\{$高一女生$\}$，$P(A)=\dfrac{A\text{ 中元素数}}{\Omega\text{ 中元素数}}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$，$P(A\cap B)=\dfrac{A\cap B\text{ 中元素数}}{\Omega\text{ 中元素数}}=\dfrac{1}{6}$.

$\therefore P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{3}$.

本题的方法二保持原来的全集 Ω 不变，$P(B|A)$对于原来的全集 Ω 来说是条件概率，在原来的全集下，可以求出 $P(A)$和 $P(A\cap B)$，从而根据条件概率公式 $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$使问题得到解决.

例 2　在一副扑克的 52 张(去掉两张王牌后)中任取 1 张，已知抽到花草的条件下，求抽到的是草花 5 的概率.

解　$A=$“抽到草花”，$B=$“抽到草花 5”. 已知 A 发生的条件下 A 成为试验的全集，A 中的元素发生的可能性相同，B 是 A 的子集. 所以

$$P(B|A)=\frac{B\text{ 中元素数}}{A\text{ 中元素数}}=\frac{1}{13}.$$

因为 $P(A)=13/52$，$P(A\cap B)=1/52$. 所以也有

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}.$$

例 3　把一副扑克的 52 张牌(去掉两张王牌后)随机均分给赵、钱、孙、李四家，$A=$

“赵家得到6张草花”，B=“孙家得到3张草花”.

(1) 计算 $P(B|A)$；

(2) 计算 $P(A\cap B)$.

分析 (方法一)本题首先考虑用条件概率公式解题，故可先求 $P(A\cap B)$，再求 $P(B|A)$. 由于 $A\cap B$ 表示赵家得到6张草花，同时孙家得到3张草花. 于是有

$$P(A\cap B)=\frac{C_{13}^{6}C_{39}^{7}C_{7}^{3}C_{32}^{10}}{C_{52}^{13}C_{39}^{13}}\approx 0.012,$$

又由于 A 表示赵家得到6张草花，故有 $P(A)=\frac{C_{13}^{6}C_{39}^{7}}{C_{52}^{13}}$，从而根据条件概率公式得到 $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{C_{7}^{3}C_{32}^{10}}{C_{39}^{13}}\approx 0.278$.

(方法二)条件概率公式有时会带来许多计算的方便，但有时候根据问题的特点也可以直接得到结果. 本题可考虑根据前提条件 A，改变试验的全集，把条件概率问题转化为概率问题求解，具体做法如下：

(1) 四家各有13张牌，已知 A 发生后，A 的13张牌已固定. 余下的39张牌中恰有7张草花，在另三家中的分派是等可能的.

问题已经转变成：39张牌中有7张草花，将这39张牌随机分给钱、孙、李三家，求孙家得到3张草花的概率. 于是 $P(B|A)=\frac{C_{7}^{3}C_{39-7}^{10}}{C_{39}^{13}}\approx 0.278$.

(2) 在52张牌中任选13张牌有 C_{52}^{13} 种不同的等可能的结果. 于是 Ω 中元素数为 C_{52}^{13}，A 中元素数为 $C_{13}^{6}C_{39}^{7}$. 利用条件概率公式得到 $P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{C_{13}^{6}C_{39}^{7}}{C_{52}^{13}}\times 0.278\approx 0.012$.

本题的方法二的第(2)小题的方法体现了条件概率公式的变形公式 $P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$的应用.

综上各例所述我们可得求条件概率的方法有两种：

一是利用条件概率公式，即先分别求 $P(A)$ 和 $P(A\cap B)$，再用公式 $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$来计算(如上述例1中的方法二和例3中的方法一).

二是转化为概率，即(1)把 A 看做试验的全集(样本空间)，从而把 $P(B|A)$转化为新样本空间 A 下的概率，再用公式 $P(B|A)=\frac{B\text{中元素数}}{A\text{中元素数}}$直接得到结果(如上述例1中的方法一). (2)把条件概率问题直接转化为古典概型的问题求解(如上述例3中第(1)题的方法二).

相关链接

(一) 条件概率的性质

设样本空间 Ω 的某些子集组成的集合 F 是事件的全体，则条件概率具有下列性质：

(1) **非负性**：对任意事件 $A\in F$，有 $P(B|A)\geqslant 0$；

(2) **规范性**：$P(\Omega|B)=1$；

(3) **可列可加性**：对任意的 $A_i\in F(i=1,2,\cdots)$，A_1，A_2，A_3，…，A_n，…两两互斥，则有 $P((A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots)|B)=P(A_1|B)+P(A_2|B)+\cdots+P(A_n|B)+\cdots$.

证明 (1) ∵ $A\in F$，$B\in F$，$A\cap B\subseteq B$，∴ $0\leqslant P(A\cap B)\leqslant P(B)$.

∴ $0\leqslant P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}\leqslant 1$.

(2) ∵ $B\subset\Omega$，∴ $\Omega\cap B=B$.

∴ $P(\Omega|B)=\dfrac{P(\Omega\cap B)}{P(B)}=\dfrac{P(B)}{P(B)}=1$.

(3) ∵ A_1，A_2，A_3，…，A_n，…两两互斥，

∴ $A_1\cap B$，$A_2\cap B$，…，$A_n\cap B$，…也两两相斥.

$$\begin{aligned}\therefore\ P((A_1\cup A_2\cdots\cup A_n\cup\cdots)|B)&=\frac{P((A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots)\cap B)}{P(B)}\\&=\frac{P((A_1\cap B)\cup(A_2\cap B)\cup\cdots\cup(A_n\cap B)\cup\cdots)}{P(B)}\\&=\frac{P(A_1\cap B)+P(A_2\cap B)+\cdots+P(A_n\cap B)+\cdots}{P(B)}\\&=P(A_1|B)+P(A_2|B)+\cdots+P(A_n|B)+\cdots.\end{aligned}$$

由于条件概率满足这三个性质，实际上是概率的三个公理，所以由这些公理推得的一切结果对条件概率同样成立，由此一般概率的性质也都适用于条件概率.

（二）概率的乘法公式与卜里耶模型

由条件概率公式容易推得若 $P(A)>0$，则 $P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$，这个结论可以写成下面的定理：

定理 （概率乘法定理）两个事件积的概率等于其中一个事件的概率与另一事件在前一事件发生条件下的条件概率的乘积，即 $P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B)$.

这个结果很容易推广到 n 个事件上去.

推论：若 $P(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{n-1})>0$，那么

$P(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1\cap A_2)\cdot\cdots\cdot P(A_n|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{n-1})$.

证明 由于 $P(A_1)\geqslant P(A_1\cap A_2)\geqslant\cdots\geqslant P(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{n-1})>0$，

故 $P(A_1)P(A_2|A_1)\cdot\cdots\cdot P(A_n|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{n-1})$

$=P(A_1)\cdot\dfrac{P(A_1\cap A_2)}{P(A_1)}\cdot\dfrac{P(A_1\cap A_2\cap A_3)}{P(A_1\cap A_2)}\cdot\cdots\cdot\dfrac{P(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)}{P(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{n-1})}$

$=P(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)$.

接下来我们来看一些概率乘法定理及其推论的应用实例.

例 1 设某光学仪器厂制造的透镜，第一次落下时打破的概率为$\frac{1}{2}$，若第一次落下时未打破，第二次落下时打破的概率为$\frac{7}{10}$，若前两次落下时未打破，第三次落下时打破的概率为$\frac{9}{10}$，试求透镜落下三次而未打破的概率.

解 以 $A_i(i=1, 2, 3)$表示事件"透镜第 i 次落下时打破"，以 B 表示事件"透镜三次落下而未打破". 因为，故 $B=\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3$ 有

$$\begin{aligned}P(B)&=P(\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3)\\&=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)P(\overline{A}_3|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2)\\&=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{7}{10}\right)\left(1-\frac{9}{10}\right)=\frac{3}{200}.\end{aligned}$$

例 2 （卜里耶模型）已知一个罐中盛有 m 个白球，n 个黑球. 现从中任取一只，记下颜色后放回，并同时加入与被取球同色球 a 个. 试求接连取球 3 次，3 次均为黑球的概率.

解 设 $A=\{3$ 次取出的均为黑球$\}$，$B=\{$第 i 次取出的黑球$\}(i=1, 2, 3)$. 由题设有

$P(B_1)=\frac{n}{m+n}$，$P(B_2|B_1)=\frac{n+a}{m+(n+a)}$，$P(B_3|B_1\cap B_2)=\frac{n+2a}{m+(n+2a)}$.

由于 $A=B_1\cap B_2\cap B_3$，所以 $P(A)=\frac{n}{m+n}\cdot\frac{n+a}{m+(n+a)}\cdot\frac{n+2a}{m+(n+2a)}$.

这是由匈牙利数学卜里耶提出来的模型. 可以证明该模型满足：

$$P(B_1)<P(B_2|B_1)<P(B_3|B_1\cap B_2).$$

上述不等式的概率意义是：当黑球越来越多时，黑球被抽到的可能性也就越大. 这就犹如某种传染病流行时，如不及时制止，则波及的范围必将越来越大. 地震也一样，常发生地震的地方再次发生地震的可能性也较大，所以上述模型常被用来作为描述传染病或地震的数学模型.

8.2.3 事件的独立性

教材线索

本小节学习概率中的重要概念——事件的独立性时，先分别研究从属于两个独立试验的两个事件，进而推广至 n 个相互独立的事件. 目的是为了运用所学的独立事件的概率乘法公式解决一些简单的实际问题.

教学目标

（一）知识与技能

在具体情境中，了解两个事件的独立的概率，并能用相互独立事件同时发生的概率计

算公式解决一些简单的实际问题.

（二）过程与方法

掌握相互独立事件同时发生的概率的公式，会处理较为复杂的概率计算，培养学生分类讨论的思想.

（三）情感、态度与价值观

培养学生分析问题、解决问题的能力，会利用学过的数学工具解决问题，体会数学的魅力.

教材分析

1. 重点：

理解事件 A 与 B 独立的概念，并能运用相互独立事件的概率乘法公式解决实际问题.

2. 难点：

能运用相互独立事件的概率乘法公式解决实际问题.

3. 限于要求，教材未出现“事件的积”的名称，而只是结合实例说明事件 A，B 独立的应用. 教材中介绍的事件 A，B 独立是分别从属于两个独立的试验. 对于 n 个试验是独立的应给出解释：一般地，如果有 Ω_1，Ω_2，…，Ω_n 个试验，而每个试验的结果彼此不发生关系，那么这些试验是独立的.

4. 相互独立事件的概率乘法公式，对于等可能性事件的情形可以一般地给予证明.

设甲试验共有 N_1 种等可能的不同结果，其中属于 A 发生的结果有 m_1 种；乙试验共有 N_2 种等可能的不同结果，其中属于 B 发生的结果有 m_2 种. 由于事件 A 与 B 互相独立，这里的种数 N_1，m_1 与 N_2，m_2 之间互相没有影响. 那么，甲、乙两试验的结果搭配在一起，总共有 $N_1 \cdot N_2$ 种不同的搭配. 显然，这些搭配都是具有等可能性的.

现在考察属于事件 $A \cap B$ 的试验结果. 显然，凡属于 A 的任何一种甲试验的结果同属于 B 的任何一种乙试验的结果的搭配，都表示 A 与 B 同时发生，即属于事件 $A \cap B$，这种结果总共有 $m_1 \cdot m_2$ 种，因此得 $P(A \cap B)=\frac{m_1 \cdot m_2}{N_1 \cdot N_2}=\frac{m_1}{N_1} \cdot \frac{m_2}{N_2}$，故 $P(A \cap B)=P(A)P(B)$.

5. 如果事件 A 与 B 相互独立，那么下列各对事件——A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也都相互独立.

这些性质都很重要. 在解决这一小节的例 2、例 4、例 5、例 6 和例 7 时都用到了. 教材在介绍了事件的独立性后，没有明确指出，教学中应让学生领会其意义，并会运用这些结论.

教学建议

1. 根据课标的要求，教学重点不要放在事件间的“互斥”与“相互独立”两个不同概念的识别上，而应让学生认识到事件的独立性在统计分析中的地位和作用.

2. 对于本小节的应用题，运用两种思路进行解决：正向思考与逆向思考. 正向思考

时，可通过“分类”或“分步”，对稍复杂的问题进行分解；逆向思考，用集合的观点看，就是先从问题涉及的集合在全集中的补集入手，这种方法常使一些较复杂的问题得到简化.

3．多个事件的独立性.

对 n 个事件，除考虑两两的独立性以外，还得考虑其整体的相互独立性. 以三个事件 A，B，C 为例.

定义 若

$$\begin{cases}P(AB)=P(A)\cdot P(B),\\P(AC)=P(A)\cdot P(C),\\P(BC)=P(B)\cdot P(C)\end{cases} \quad ①$$

且

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C), \quad ②$$

则称 A，B，C 相互独立. ①式表示 A，B，C 两两独立，所以相互独立包含了两两独立. 但 A，B，C 的两两独立并不能代替三个事件相互独立，因为还有②式. 那么①式是否包含②式呢？回答是否定的.

例题解析

例 1 设投掷一枚骰子和一枚硬币. 计算骰子出现 2 或 4 点，硬币正面朝上的概率.

分析 要强调事件“骰子出现 2 或 4 点”与事件“硬币正面朝上”分别属于两个独立试验，它们之间是没有影响的，这样才能运用相互独立事件的概率乘法公式进行计算. 通过本题使学生理解事件 A 与 B 独立的含义.

例 2 同学甲的数学作业得优的概率是 0.8，同学乙的语文作业得优的概率为 0.7，今天同时留了数学和语文作业，计算甲的数学得优、乙的语文没得优的概率.

分析 本题说明如果事件 A 与 B 相互独立，那么事件 A 与 $\overline{B}$ 也相互独立. 教学中应让学生领会其意义，并会运用这些结论.

例 3 高中每个年级三个班的羽毛球水平相当，各年级举办班级羽毛球比赛时，计算各年级都是三班得冠军的概率.

分析 本题是 n 个事件相互独立的一个应用，要注意审题，区分三个班与三班的不同，向学生分析三个班的羽毛球水平相当说明每个班级获胜的概率均为 $\frac{1}{3}$，而三班均分别在不同的三个年段，它们获得冠军这个事件的概率是相互独立的.

例 4 一服装店出售标价为 180 元的夹克. 售货员对前来问价的顾客以 180 元推销成功的概率是 0.8，如果一小时内先后有两位顾客前来问价，计算服务员对这两位顾客都没有推销成功的概率.

分析 通过本题让学生理解：如果事件 A 与 B 相互独立，那么 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立. 教学中还可以向学生解释利用对立事件概率的性质，先计算服务员对这两位顾客至少有一个推销成功的概率.

例 5 李浩的棋艺不如张岚，李浩每局赢张岚的概率只有 0.45，假设他们下棋时各局的输赢是独立的.

(1) 计算他们的 3 局棋中李浩至少赢 1 局的概率；

(2) 计算他们的 6 局棋中李浩至少赢 1 局的概率.

分析 这是一个涉及事件加法与乘法运算、带有综合性的典型概率计算问题，是“至少一个发生”模式的应用题，这类题一般有正向思考与逆向思考两种思路，教材中列出其中一种，教学中可以介绍另一种思路，并比较它们解法的优劣.

例 6 幸运抽奖活动中，中奖的比例是 1%，计算：

(1) 随机抽取 1 张，没中奖的概率 p；

(2) 有放回地随机抽取 $n=100$ 张，没中奖的概率 p_n；

(3) 有放回地随机抽取 $n=100$ 张，至少中奖 1 次的概率.

分析 (1)“没中奖”事件和“中奖事件”是对立事件，利用两个对立事件的概率的和为 1 计算概率 p. (2)“有放回地随机抽取 $n=100$ 张”相当于做 100 次相互独立的试验，从而 100 次没抽中的 100 个事件间是互相独立的. (3)本小题类似于例 5 都是“至少一个发生”模式的应用题，本题应采取逆向思考使得解题过程简捷.

例 7 在某幸运抽奖活动中，每张奖券的中奖率为千分之一. 计算有放回地随机抽取 n 张奖券不能中奖的概率.

分析 本题解决过程类似例 6(2)，抽取奖券不能中奖这 n 个事件间是互相独立的，通过本题让学生了解抽奖的中奖率，使学生能用科学的眼光看待幸运抽奖问题.

例 8 设某试验成功的概率是 p，$p\in(0, 1)$，现在将该试验独立重复 3 次，证明：恰好有两次成功的概率为 $C_3^2p^2(1-p)$.

分析 本题是独立重复试验的概率问题，由于 3 次独立重复试验中恰好成功的这两次事件可能是 3 次中的任意两次，所以有 C_3^2 种可能情况，每类情况之间是互斥事件，故先分类讨论最后再求和可得结论. 通过本题要让学生认识独立重复试验的模型，为学生今后能用该模型解决一些简单的独立重复试验问题打下基础.

相关链接

条件概率

设有事件 A 与 B，在事件 B 发生的条件下，事件 A 发生的概率，叫做事件 A 在事件 B 发生的条件下的条件概率，记作 $P(A|B)$. 如果 $P(A|B)=P(A)$成立，就说事件 A 对事件 B 是独立的. 同样，如果 $P(B|A)=P(B)$成立，就说事件 B 对事件 A 是独立的.

在概率论中，可以证明：$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B)$.

这就是说，两个事件同时发生的概率，等于其中一个事件发生的概率与另一事件在前

一事件发生的条件下的条件概率的积．根据这个公式，容易证明：如果事件 A 对事件 B 独立，那么事件 B 对事件 A 也独立．事实上，根据上面的公式有，$P(A)P(B|A)=P(B)\cdot P(A|B)$，又已知事件 A 对事件 B 独立，即 $P(A|B)=P(A)$．

于是我们得到 $P(B|A)=P(B)$，即得到事件 B 对事件 A 独立．由此可见，事件的独立是一种相互对等的性质．如果事件 A 对事件 B 独立，那么就可以说事件 A 与 B 相互独立．

当事件 A 与 B 相互独立时，$P(B|A)=P(B)$，因此，$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=P(A)\cdot P(B)$，这就是相互独立事件的概率乘法公式．

8.2.4 离散型随机变量及其分布

教材线索

本小节在对具体问题“明天的最高气温”的分析中不加定义地引入随机变量的概念，并通过两个具体求概率的例子进一步体现了随机变量使问题更加简单明确的作用，进而介绍了离散型随机变量的概率分布及其性质，然后再以古典概型和几何概型的两个实例来进一步介绍随机变量的概率分布的求法以及随机变量在解决概率问题中的作用．

教学目标

（一）知识与技能

理解随机变量的概念，能应用概率的知识求某些简单的离散型随机变量的概率分布，理解离散型随机变量的概率分布的性质，在对具体问题的分析中，认识概率分布对刻画随机现象的重要性．

（二）过程与方法

培养学生分析、归纳问题的能力，以及将实际问题化归为数学问题的能力，渗透化归的数学思想方法．

（三）情感、态度与价值观

引导学生积极思考问题，体验用数学知识解决实际问题的乐趣，经历利用旧知获得新知及思维充分发挥的过程，经历成功与失败，获得成就感，提高学习数学的兴趣．

教材分析

1．重点：

离散型随机变量的概率分布的确定及应用．

2．难点：

正确理解离散型随机变量及其概率分布的意义，并在解决具体概率问题中加以应用.

3. 随机变量是概率论的一个基本概念. 概率论是研究大量随机现象中的数量规律的数学分支. 研究随机变量及其概率分布是它的重要任务，而且概率论所研究的也大都局限于能用随机变量来描述的随机现象. 随机变量是取数值的，因此可以对它进行各种数学运算，研究起来就很方便.

4. 注意区分随机变量与以前所学的函数 $f(x)$ 这两个概念. 函数 $f(x)$ 是研究确定性现象的，它定义在实数轴上，有确定的因果关系. 概率中的随机变量是研究随机现象的，它定义在由全部试验结果所组成的集合上，它的取值是不能预知的，随机变量取某个范围内的值都是随机事件，在试验之前只能知道它可能的取值范围，而不能预知它取何数值. 此外，随机变量的取值作为随机事件具有一定的概率，这一性质揭示了随机变量作为试验结果的函数与普通函数有着本质的差异. 再者，随机变量作为函数，它的自变量不一定是实数，而是试验结果，因而它的定义域是样本空间 Ω，这也是它与普通函数的差别. 但它取值有一定的概率. 我们研究随机变量时，关心的是，随机变量能取哪些值，即都包含哪些试验结果(基本事件)，以及注意研究它的统计规律，也就是事件概率的大小.

5. 离散型随机变量的可能取值是可以一一列举的，所以要了解它的概率分布，只要知道它可能取哪些值以及取这些值的概率就行了. 就像要确定一个函数，关键是确定定义域和对应关系. 类似地，所谓给它一个离散型随机变量 X，关键是确定：(1) x 能取哪些值；(2) x 取指定值的概率是多少，即要给出随机变量的概率分布. 给出了它的概率分布就完整地描述了离散型随机变量的统计规律.

一般求随机变量的概率分布的求法分三步：(1)首先要准确确定随机变量的取值有哪些；(2)求出每种取值下的随机事件的概率值；(3)列表对应.

同时概率分布的性质 $p_1+p_2+\cdots+p_n=1$ 可用来检验所求概率值的正确与否.

教学建议

1. 教材对随机变量的概念只是通过具体例子“明天最高气温”的不确定性，不加定义地直观引入随机变量的概念，体现了引入概念的目的只是为了“节省符号的使用，使问题的表达更加简单明确”，建议教学中针对随机变量的概念不作过多的纠缠，应侧重于让学生能在具体问题中用随机变量进行表述和读懂用随机变量表述的概率问题的题意.

2. 对于同一个随机试验，其结果可以用不同的随机变量表示，但随机变量的取值应该有实际意义，并且应尽量简单，以便于研究，如掷一颗骰子，掷出 5 点，就用“$X=5$”表示，虽然也可用“$X=0$”表示，但会使问题复杂化，故不提倡.

3. 对随机变量的研究，需要了解随机变量将取哪些值以及取这些值或取某一个集合内的值的概率. 对于离散型随机变量，它的概率分布正是指出了随机变量的取值范围以及取这些值的概率. 建议教学中可将教材 P. 61 例 2 作为引例，引出随机变量的概率分布(分布列)的概念，同时以例 2 为引例还可介绍随机变量的概率分布的两个简单性质. 另外教材通

过例 3，介绍了离散型随机变量的概率分布的求法，而例 4 则体现了离散型随机变量的概率分布和性质的应用.

4. 离散型随机变量的概率分布的表示，教材是用表格的形式来表示，这种表示法，优点是能直观得到随机变量 $X_i(i=1,2,\cdots,n)$取各个不同值的概率，但当 n 比较大时，不容易制作表格，也不容易从表中查取所需要的概率值，因此建议根据教学情况，可适当介绍随机变量的概率分布的另外两种表示法——解析式法($P(X=x_i)=p_i$，$i=1,2,\cdots,n$)和图象法.

5. 教学中要注意引导学生从实例中发现并阐述离散型随机变量的概率分布的两个性质，并根据教学情况，教师可引导学生证明随机变量的概率分布的两个性质：

(1) $\because$对任何事件 A 均有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$，$\therefore$取 $A=\{X=x_i\}$，

则有 $P(A)=P(X=x_i)=p_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,n)$.

(2) $\because\{X=x_1\},\{X=x_2\},\cdots,\{X=x_n\}$是两两互斥事件，

又$\because\{X=x_1\}\cup\{X=x_2\}\cup\cdots\cup\{X=x_n\}=\Omega$，

$$\begin{aligned}\therefore P_1+P_2+\cdots+P_n&=P(X=x_1)+P(X=x_2)+\cdots+P(X=x_n)\\&=P(\{X=x_1\}\cup\{X=x_2\}\cup\cdots\cup\{X=x_n\})\\&=P(\Omega)=1.\end{aligned}$$

例题解析

例 1　投掷一枚骰子，用 X 表示掷出的点数，计算：

(1) $P=(X=5)$；　　(2)$P(4\leqslant X\leqslant 5)$.

解　(1)由于掷出骰子之前，只知道骰子的点数可能是 1，2，3，4，5，6，骰子的具体点数是无法确定的，故掷出的点数 X 是随机变量. $\{X=5\}$表示掷出的点数是 5，试验的全集 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$，Ω 中元素具有等可能性，$\{X=5\}\subset\Omega$，Ω 中元素数$=6$，$\{X=5\}$中元素数$=1$，所以 $P(X=5)=\dfrac{\{X=5\}\text{中元素数}}{\Omega\text{ 中元素数}}=\dfrac{1}{6}$.

(2)(解法一)　$4\leqslant X\leqslant 5$ 表示掷出的点数为 4 或 5，故$\{4\leqslant X\leqslant 5\}$中元素数为 2，所以 $P(4\leqslant X\leqslant 5)=\dfrac{\{4\leqslant X\leqslant 5\}\text{中元素数}}{\Omega\text{ 中元素数}}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$.

(解法二)　因为$\{4\leqslant X\leqslant 5\}=\{X=4\}\cup\{X=5\}$，且掷一枚骰子掷出点数 4 与掷出点数 5 是不可能同时出现的，故事件“掷出点数 4”与“掷出点数 5”是互斥事件. 因此可考虑用概率的加法公式，得 $P(4\leqslant X\leqslant 5)=P(\{X=4\}\cup\{X=5\})=P(X=4)+P(X=5)=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{3}$.

本题的叙述中引入了随机变量 X，大大地节省了符号的使用，也使问题的表达更加简单明确.

例 2　投掷两枚硬币，用 X 表示掷出的正面数，X 是随机变量. 计算：

(1)$P(X=0)$；　(2)$P(X=1)$.

解 (1)投掷两板硬币，可能出现的朝上一面的情形为(正，正)，(正，反)，(反，正)，(反，反). 即实验的全集 $\Omega=\{$(正，正)，(正，反)，(反，正)，(反，反)$\}$，Ω 中的元素具有等可能性，$\{X=0\}$表示没有硬币正面朝上. 即$\{X=0\}=\{$(反，反)$\}$，且$\{X=0\}\subset\Omega$，$\{X=0\}$中元素数$=1$，Ω 的元素数$=4$，故可用古典概型概率定义求 $P(X=0)$，则有 $P(X=0)=\dfrac{\{X=0\}\text{中元素数}}{\Omega\text{中元素数}}=\dfrac{1}{4}=0.25$.

(2) ∵$\{X=1\}$表示只有一个硬币正面向上，∴$\{X=1\}=\{$(正，反)，(反，正)$\}$，即$\{X=1\}$的元素数为 2，所以 $P(X=1)=\dfrac{\{X=1\}\text{中元素数}}{\Omega\text{中元素数}}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}=0.5$.

本例可作为引入离散型随机变量的概率分布及其性质的引例. 在本例中随机变量 X 的取值是 0，1，2，则$\{X=0\}$，$\{X=1\}$，$\{X=2\}$是事件，用 $p_1=P(X=0)$，$p_2=P(X=1)$，$p_3=P(X=2)$表示事件$\{X=i\}$的概率. 我们称 $p_1=P(X=0)$，$p_2=P(X=1)$，$p_3=P(X=2)$是随机变量 X 的概率分布. 由上例可以看出这个概率分布有如下性质：1) $p_i\geqslant 0$，$i=1$，2，3；2) $p_1+p_2+p_3=0.25+0.5+0.25=1$.

我们把上述特例推广到一般情形有：如果随机变量 X 的取值是 x_1，x_2，…，x_n，则$\{X=x_i\}$是事件，用 $p_i=P(X=x_i)$表示事件$\{X=x_i\}$的概率，我们称 $p_i=P(X=x_i)$，$i=1$，2，…，n 是离散型随机变量 X 的概率分布.

以下用$\{p_i\}$表示 X 的概率分布. 概率分布$\{p_i\}$有如下性质：

1) $p_i\geqslant 0$，$i=1$，2，…，n；

2) $p_1+p_2+\cdots+p_n=1$.

例 3 全班有 40 个同学，某次数学作业的成绩如下：

分数	0	1	2	3	4	5
人数	0	1	3	12	20	4
所占比例	0	0.025	0.075	0.3	0.5	0.1

从班中任选一个同学，用 X 表示这个同学的作业成绩，求 X 的概率分布.

解 由于 X 表示某个同学的作业成绩，根据题意这个同学是任选的，故在选定之前他的作业成绩是无法确定的，故 X 是随机变量，X 的可能取值分别是 0，1，2，3，4，5. 即 $\Omega=\{$取得 0，1，2，3，4，5 分成绩的同学$\}$，$\{X=0\}=\{$取得 0 分的同学$\}$，由于全班人数为 40，取得 0 分的人数为 0，所以 Ω 元素数为 40，$\{X=0\}$元素数为 0，所以 $P(X=0)=\dfrac{0}{40}=0$.

同理 $P(X=1)=\dfrac{1}{40}=0.025$，$P(X=2)=\dfrac{3}{40}=0.075$，$P(X=3)=\dfrac{12}{40}=0.3$，$P(X=4)=\dfrac{20}{40}=0.5$，$P(X=5)=\dfrac{4}{40}=0.1$.

X 的概率分布是

X	0	1	2	3	4	5
P	0	0.025	0.075	0.3	0.5	0.1

从本例可以看出：(1)随机变量 X 的分布就是该班作业成绩分布.

(2) 求概率分布的问题，首先要清楚我们所研究的随机变量是什么，它有什么特征，这样才能正确解题. 如本例中的随机变量 X 是指从班中任选一个同学的作业成绩.

(3) 一般随机变量 X 概率分布的求法分为三个步骤：①首先要确定随机变量有哪些可能取值(要做到不重不漏)；②求出每种取值下的随机事件的概率；③列出表格来表示 X 的分布.

(4) 本题 $P(X=5)$ 也可利用概率分布的性质 2 来求：$P(X=5)=1-[P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)]=1-(0.025+0.075+0.3+0.5)=0.1$.

(5)概率分布的性质 2 也可用来检验每个概率值计算得正确与否，即看 $p_1+p_2+\cdots+p_n$ 是否为 1.

例 4 设随机变量 X 的分布列为 $P(X=k)=\frac{c}{k(k+1)}$，$k=1, 2, 3, 4$，其中 c 为常数，求 $P\left(\frac{1}{2}<X<\frac{5}{2}\right)$的值.

解 由离散型随机变量的概率分布的性质可知

$$\frac{c}{1\times2}+\frac{c}{2\times3}+\frac{c}{3\times4}+\frac{c}{4\times5}=1,$$

所以$c\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)=1$,

所以 $c=\frac{5}{4}$.

因此，
$$\begin{aligned}P\left(\frac{1}{2}<X<\frac{5}{2}\right)&=P(X=1)+P(X=2)\\&=\frac{\frac{5}{4}}{1\times2}+\frac{\frac{5}{4}}{2\times3}\\&=\frac{5}{6}.\end{aligned}$$

对于离散型随机变量，一定要牢固掌握其两个性质：(1) $p_i\geqslant0(i=1, 2, \cdots, n)$；(2) $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i=1$.

相关链接

随机变量与不可测集合的关系

随机事件(简称为事件)、概率、随机变量是概率论中最基本的三个概念，它们是逐步形成与完善起来的. 其中事件与随机变量这两个概念与不可测集合的关系非常紧密. 如果

不存在不可测集合，事件与随机变量的定义将会非常简洁易懂．由于不可测集合的存在，给这两个概念的定义带来了很大的麻烦，使初学者感到很困难.

如果样本空间 Ω 中的样本点只有可数(可列)多个，则 Ω 中的任一个子集都可测；如果 Ω 中的样本点有无穷不可数多个(如一个区间或一个区域)，则可人为地构造出 Ω 的不可测子集．什么叫做(集合)可测？这涉及较深的测度论知识．通俗地说，所谓集合 A 可测，就是可以求出 A 的测度．什么叫做测度？如果 A 是离散可数集合，则把 A 中的元素个数作为 A 的测度，如果 A 是非离散的区域而且是一维的(二维的、三维的)，就把 A 的长度(面积、体积)作为 A 的测度.

如果不存在样本空间 Ω 中的不可测子集，随机变量就可以简单定义为：如果 $X(\omega)$是 Ω 上的单值实函数，则称 $X(\omega)$为随机变量．而现在随机变量的定义不仅复杂得多，而且使初学者很不容易理解.

定义　设(Ω, F)是一个可测空间，$X(\omega)$为定义于 Ω 上的单值实函数，如果对任意实数 x，均有$\{\omega \mid X(\omega)\leqslant x, \omega\in\Omega\}\in F$，则称 $X(\omega)$为(Ω, F)上的一个随机变量．通常简记 $X(\omega)$为 X，简记$\{\omega \mid X(\omega)\leqslant x, \omega\in\Omega\}$为$\{(X\leqslant x\}$．$\{\omega \mid X(\omega)\leqslant x, \omega\in\Omega\}$表示使得 $X\leqslant x$ 成立的那些样本点 ω 组成的集合．如果这个集合是可测的，即$\{X\leqslant x\}\in F$，我们才称 X 为随机变量.

由定义知随机变量不是简单的变量，而是定义于样本空间 Ω 上的满足条件$\{X\leqslant x\}\in F$ 的单值实函数．不过在实际问题中如果用定义去验证一个量是否为随机变量那将是件很麻烦的事情．通常不用定义去验证一个量是否为随机变量，而是去验证该量取值是否为随机的．如果是，则该量是随机变量；否则，它就不是随机变量．何为随机的？所谓随机的是指该量至少能取两个值，而且事前(试验之前)无法准确预测它取哪个值.

8.2.5　几个常用的分布

教材线索

本小节教材先介绍了概率论中最重要的几种分布之一——两点分布，接着又通过计算 4 次独立重复试验中成功 3 次的概率，引入第二种分布——二项分布，然后再以投资获利、洽谈装修协议中的概率问题来说明二项分布在实际问题中的应用．最后教材通过产品中的次品数的概率问题引入第三种分布——超几何分布，并用鱼塘捞鱼、摸球抽奖的实际概率问题介绍了超几何分布的简单应用.

教学目标

（一）知识与技能

了解两点分布，并在具体情境中理解 n 次独立重复试验及二项分布，并能解决一些简单的实际问题，通过实例理解超几何分布及其导出过程，并能进行简单的应用.

（二）过程与方法

根据由特殊到一般的思维方式，归纳二项分布的概念及其概率计算公式，通过实例，体会超几何分布是应用广泛的重要分布类，体会数学模型化思想，渗透数学应用意识和创新意识，能对现实世界中蕴涵的一些数学模型做出判断.

（三）情感、态度与价值观

通过实例引入新的概念以激发学生的学习兴趣，再通过新知识在实际问题中的应用使学生尝到理论联系实际的乐趣，体验身边的数学，认识到数学作为工具学科的重要性.

教材分析

1．重点：

二项分布、超几何分布的概念及其简单应用.

2．难点：

正确理解 n 次独立重复试验的模型及二项分布，并能解决一些有关的实际问题.

3．两点分布也叫 0—1 分布或伯努利分布，它的概率分布列表表示为

X	0	1
P	q	p

两点分布是一种常见的分布，凡是只取两种状态（成功或失败）的随机试验均可用两点分布来表示，显然伯努利试验可用两点分布来描述．如抛掷一枚硬币一次，用 X 表示正面朝上的次数，则 X 服从两点分布，即

X	0	1
P	0.5	0.5

若以 Y 表示掷硬币一次出现反面的次数，易知 Y 也服从两点分布，且

X	0	1
P	0.5	0.5

X 与 Y 之间的关系是 $X=1-Y$（当试验结果为正面朝上时 $X=1$，$Y=0$；反之 $X=0$，$Y=1$）．由此可见，同一个随机现象（如掷一枚硬币一次）可以用多个不同的随机变量来描述（如这里的 X 与 Y）．不同的随机变量却可有完全相同的概率分布.

4．二项分布是一种常见的离散型随机变量的概率分布，在实际应用和理论分析中都有重要的地位．由于试验常常是可以独立重复的，所以研究独立重复试验及相关的二项分布

显然也是非常重要的. 教材中引入的二项分布，只是对 n 次独立重复试验从概率分布的角度作了进一步的阐述，在二项分布的表示法 $X\sim B(n, p)$中，n 是独立重复试验的次数，p 是每次试验中某事件发生的概率.

二项分布列表表示为：

X	0	1	…	k	…	n
P	$C_n^0p^0q^n$	$C_n^1p^1q^{n-1}$	…	$C_n^kp^kq^{n-k}$	…	$C_n^np^nq^0$

列表表示可以更直观地反映其随机变量概率分布的状态和规律，从上述表格我们注意到二项分布的几个特点：

(1) 随机变量 X 的可能取值为 0，1，2，…，n

(2) $P(X=k)=C_n^kp^kq^{n-k}$ 符合二项展开式的通项公式，可用 $B(k; n, p)=C_n^kp^kq^{n-k}$ 表示.

(3) 由于二项分布也是概率分布，故符合概率分布的性质，即

$$C_n^0p^0q^n+C_n^1p^1q^{n-1}+\cdots+C_n^np^nq^0=(p+q)^n=(p+1-p)^n=1.$$

5. 超几何分布是描述无放回抽样的重要分布，是产品检验中常用的分布之一，超几何分布与二项分布的直观背景都是摸球问题. 但超几何分布是无放回的摸球问题，即“一袋中共有 N 个除颜色外完全相同的小球，其中有 M 个黑球，现不放回的从袋中摸球，求在 n 次摸球中恰好摸到 $k(k=0, 1, 2, \cdots, \min(M, n))$ 个黑球的概率”. 而二项分布则是有放回的摸球问题，即“一袋中共有 N 个除颜色外完全相同的小球，其中有 M 个黑球，现有放回地从袋中摸球，求在 n 次摸球中恰好摸到 $k(k=0, 1, \cdots, n)$个黑球的概率”(具体内容参见后面的相关链接“二项分布、超几何分布的背景”). 虽然二项分布与超几何分布二者并不相同，但当抽样对象总数 N 很大，而抽样的次数 n 相对很小时，它们的差别就很小，就是说在一定条件下，超几何分布可用二项分布来逼近. 设在超几何分布中，n 是一个取定的正整数，而$\dfrac{M}{N}=p$，$0<p<1$，则 $\lim\limits_{N\to\infty}\dfrac{C_M^kC_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}=C_n^kp^k(1-p)^{n-k}$，$k=0, 1, \cdots, n$. 也即对固定的 $n\geqslant1$，当 N 充分大时，有 $\dfrac{C_M^kC_{N-M}^{n-k}}{C_M^n}\approx C_n^k\left(\dfrac{M}{N}\right)^k\left(1-\dfrac{M}{N}\right)^{n-k}$，$k=0, 1, 2, \cdots, \min(M, n)$.

在实际问题中，一般当 $n\leqslant0.1N$ 时可用此近似公式，由于有专门的二项分布表可查，可大大节省计算的时间. 以上内容，限于教学时间，也为了适当把握中学数学教学要求，教材没有介绍，但教师可以适当加以了解，并根据具体学情决定是否给予简单介绍.

教学建议

1. 教学中注意通过二点分布，4 次独立重复试验的实例(教材例 1)，根据由特殊到一般的思维方式，分析归纳 n 次独立重复试验的模型，进而得出二项分布的概念，导出服从二次分布的随机变量的概率计算公式，而后再通过实例(教材例 2，例 3)来加深理解并渗透应用意识. 对于超几何分布，教材是用引入概念，再通过实例(教材例 4，例 5)来体会超几

何分布的应用广泛和数学模型化思想.

2. 本节介绍了三种常见的分布，即两点分布、二项分布和超几何分布. 这三种分布大量地存在于数学与生活的实例中，建议在教学中不断创设具体情境. 通过丰富的生活实例，引导我们透过实际生活例子的表面现象抽取出其数学的本质. 如观察硬币出现正面还是反面的问题，初看起来，这个现象与数学无关，但是可以用下面的方法使它与数值联系起来，当出现正面时用“1”表示，而出现反面时用“0”表示. 一般地，对任何试验，只考虑成功与否时，用“1”表示成功，用“0”表示失败，从而将不是数值的试验结果转化为数量“0”与“1”来描述，这就是两点分布，所以说两点分布隐含在许多实例中，如教材 P. 64 例 1 中以及许多的二项分布问题之中.

3. 在引入二项分布和超几何分布的概念后，建议在教学中尽量通过实例，让学生自己自然地导出这两种分布，从而理解这两种分布的导出过程. 同时通过它们概率分布的表格形式来体现随机变量的取值范围和每一个值对应的概率的特点，让学生从形式上充分把握这两种分布；再通过对它们的直观背景(即“有放回摸球”和“不放回摸球”问题)，让学生从本质上理解这两种分布；最后通过丰富的实例，教材中的例 2、例 3(二项分布的应用)及例 4、例 5(超几何分布的应用)，让学生从应用上掌握这两种分布. 在实例教学中尽量让学生通过对比分析，能准确判断某个实际问题是否服从某一种常见分布，并正确利用这些常见分布来解决问题.

例题解析

例 1 某试验成功的概率是 p，将该试验独立重复 4 次，用 X 表示 4 次试验中的成功次数，计算 $P(X=3)$.

解 $\{X=3\}$表示 4 次试验中成功 3 次，每次试验的成功与否服从两点分布. 因此由每次试验成功的概率为 p，得到不成功的概率为 $1-p$，每次试验都是相互独立的，所以这是一个独立重复试验中事件恰好发生 3 次的概型，可用独立重复试验的概率公式来计算$P(X=3)$.

用 A 表示试验成功，$\overline{A}$ 表示试验失败，则 $P(A)=p$，$P(\overline{A})=1-p$.

∵ $\{X=3\}=\{\overline{A}\cap A\cap A\cap A，A\cap\overline{A}\cap A\cap A，A\cap A\cap\overline{A}\cap A，A\cap A\cap A\cap\overline{A}\}$.

又∵ 4 次试验中事件“第一次不成功，后三次均成功”与“第二次不成功，其余三次均成功”是不可能同时发生的，即它们是互斥的.

∴ 事件 $\overline{A}\cap A\cap A\cap A$，$A\cap\overline{A}\cap A\cap A$，$A\cap A\cap\overline{A}\cap A$，$A\cap A\cap A\cap\overline{A}$ 是两两互斥的，且分别设为事件 B_1，B_2，B_3，B_4，则 $P(B_j)=P(\overline{A})P(A)P(A)P(A)=(1-p)\cdot p^3$，$j=1$，2，3，4.

∴ $P(X=3)=P(B_1)+P(B_2)+P(B_3)+P(B_4)=4p^3(1-p)=C_4^3p^3(1-p)$.

本题在教学中可作为引入二项分布概念的引例，由本题的结论通过类比归纳可得出：

$P(X=k)=C_4^kp^k(1-p)^{4-k}$，$k=0$，1，2，3，4；再将 4 推广为 n，即 n 次独立重复试

验的情况，则有 $P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$，从而得到二项分布的概率公式.

例 2 甲每次投资获利的概率是 $p=0.8$，对他进行的 6 次相互独立的投资，计算：

(1) 有 5 次获利的概率；

(2) 有 6 次获利的概率；

(3) 至少 5 次获利的概率.

解 用 X 表示甲在 6 次投资中获利的次数，由于 6 次投资是相互独立的，故可看做 6 次独立重复试验中，事件恰好发生 k 次的概型，X 服从二项分布，即 $X\sim B(6,0.8)$，则 $P(X=5)=C_6^5 0.8^5(1-0.8)\approx0.39$，$P(X=6)=C_6^6 0.8^6\approx0.26$，所以(1)甲 5 次获利的概率约等于 0.39，(2)甲 6 次获利的概率约等于 0.26.

对于(3)用$\{X\geqslant5\}$表示甲至少 5 次获利.

(解法一)$\because \{X\geqslant5\}=\{X=5\}\cup\{X=6\}$，又由于事件$\{X=5\}$和$\{X=6\}$互斥，则

$P\{X\geqslant5\}=P\{X=5\}+P\{X=6)\approx0.39+0.26=0.65$.

$\therefore$ 甲至少 5 次获利的概率为 0.65.

(解法二) $P\{X\geqslant5\}=1-P(X<5)=1-P(X=1)-P(X=2)-P(X=3)-P(X=4)\approx0.65$.

本题是二项分布的应用问题，可根据二项分布的概率公式进行计算；第(3)题包括两种情况，注意对$\{X\geqslant5\}$进行分析，将事件进行分解时要做到不重不漏，其中解法二是用对立事件解题，但这种解法在本题中并没有优势.

例 3 某家庭装修公司和客户洽谈装修协议时，洽谈成功的概率是 0.4. 设一天内有 9 个客户前来洽谈装修协议. 用 X 表示这天洽谈成功的客户数，求 $P(X=5)$.

解 与各个客户洽谈是否成功之间是没有影响的，所以这天洽谈成功的事件是相互独立的，由于一天内有 9 个客户，故可看做 9 次独立重复试验中，事件恰好发生 k 次的概率，$X\sim B(9,0.4)$.

于是，$P(X=5)=C_9^5 0.4^5(1-0.4)^{9-5}\approx0.167$. 即洽谈成功 5 个客户的概率约等于 0.167.

利用二项分布求概率问题，首先要判断事件的相互独立性，再看随机变量的可能取值是否为 0，1，2，…，n，该试验是否为独立重复试验，从而确定其是否服从二项分布，才能用二项分布概率公式进行计算.

例 4 鱼塘中只有 80 条鲤鱼和 20 条草鱼，每条鱼被打捞的可能性相同，捞鱼者一网打捞上来 4 条鱼，计算：

(1) 其中有 1 条鲤鱼的概率；

(2) 其中有 2 条鲤鱼的概率；

(3) 其中有 3 条鲤鱼的概率；

(4) 4 条都是鲤鱼的概率.

解 由于鱼塘中的每条鱼被打捞的可能性相同，打捞上来的鱼是不会放回鱼塘中的，故是一个不放回地抽样问题，更具体地说，本题相当于从 80 个白球和 20 个黑球中，不放

回地摸 4 次球恰好摸到 $k(k=0,1,2,3,4)$个白球的概型，用 X 表示被打捞的 4 条鱼中的鲤鱼数，则 X 服从超几何分布.

(1) $P(X=1)=\dfrac{C_{80}^{1}C_{20}^{3}}{C_{100}^{4}}\approx 0.0233$.

(2) $P(X=2)=\dfrac{C_{80}^{2}C_{20}^{2}}{C_{100}^{4}}\approx 0.1531$.

(3) $P(X=3)=\dfrac{C_{80}^{3}C_{20}^{1}}{C_{100}^{4}}\approx 0.4191$.

(4) $P(X=4)=\dfrac{C_{80}^{4}C_{20}^{0}}{C_{100}^{4}}\approx 0.4033$.

本题结论表明打捞到多条鲤鱼的概率要大一些，原因是鲤鱼的数目要多于草鱼的数目.

本题是超几何分布在实际问题中的简单应用，解题时首先要正确判断该问题是否服从超几何分布，判断的关键是看是否为不放回的抽样问题.

例 5 在某班的春节联欢活动中，组织了一次幸运抽奖活动. 袋中装有 18 个除颜色外质地相同的小球，其中 8 个是红球，10 个是白球. 抽奖者从中一次抽出 3 个小球，抽到 3 个红球得一等奖，2 个红球得二等奖，1 个红球得三等奖，0 个红球不得奖. 分别计算得到一等奖、二等奖和三等奖的概率.

解 由于 18 个小球除颜色外质地相同，故从 18 个小球中抽取 3 个时，有 C_{18}^{3}种不同的等可能结果，这是元素的总数. 又由于抽奖者从中一次抽出 3 个球，这是一个不放回的抽样，用 X 表示抽到的红球数，则 X 服从超几何分布，并且

$P(\text{得一等奖})=P(X=3)=\dfrac{C_{8}^{3}}{C_{18}^{3}}=\dfrac{56}{816}\approx 0.0686$.

$P(\text{得二等奖})=P(X=2)=\dfrac{C_{8}^{2}C_{10}^{1}}{C_{18}^{3}}=\dfrac{280}{816}\approx 0.3431$.

$P(\text{得三等奖})=P(X=1)=\dfrac{C_{8}^{1}C_{10}^{2}}{C_{18}^{3}}=\dfrac{360}{816}\approx 0.4412$.

从中看出，得三等奖的概率最大.

摸球抽奖问题是一个典型的超几何分布问题，而“有放回抽样”和“不放回抽样”又是二项分布和超几何分布的本质区别所在.

相关链接

二项分布、超几何分布的背景

二项分布与超几何分布是两个常见的离散型分布，也是非常重要的两个分布. 产生这两个分布的直观背景就是如下的摸球问题.

例 一袋中有 N 个白球和 M 个黑球.

(1) 如果有放回地从袋中摸球，求在 n 次摸球中恰好摸到 $k(k=0, 1, \cdots, n)$ 个黑球的概率.

(2) 如果摸球是不放回的，求在 $n(n\leqslant M+N, n\in\mathbf{N}^*)$ 次摸球中恰好摸到 $k(k=0, 1, 2, \cdots, \min(M, n))$ 个黑球的概率.

解 (1)由于袋中有 $N+M$ 个球且设 A 表示摸球是有放回的，故每次摸球都有 $N+M$ 种可能(这里设想球是编了号的，即可辨的). 对于 A 只需考虑前 n 次摸球. n 次有放回摸球，共有 $(N+M)^n$ 种可能，即样本空间中这时有 $(N+M)^n$ 个样本点. 由于 A 表示 n 次摸球中恰好摸到 k 个黑球，这有 C_n^k 种不同情况，对于每种情况(如前 k 次均摸到黑球，后 $n-k$ 次均摸到白球)都有 M^kN^{n-k} 种可能，又因 C_n^k 种情况(事件)是两两互斥的，故 A 中有 $C_n^kM^kN^{n-k}$ 个样本点，再由古典概率定义得 $P(A)=\dfrac{C_n^kM^kN^{n-k}}{(N+M)^n}=C_n^kp^k(1-p)^{n-k}$，$k=0, 1, 2, \cdots, n$，其中 $p=\dfrac{M}{N+M}$，由于 $C_n^kp^k$ 是 $(1-p)^{n-k}$ 是二项展开式 $(p+1-p)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^kp^k(1-p)^{n-k}$ 的一般项，所以称 $C_n^kp^k(1-p)^{n-k}$ 为二项概率.

(2)设 B 表示在不放回摸球时，摸出的 n 个球中恰有 k 个黑球，由有限不放回抽样且 B 与顺序无关，故 $P(B)=\dfrac{C_M^kC_N^{n-k}}{C_{N+M}^n}$，$k=0, 1, 2, \cdots, \min(n, M)$，称此概率为超几何概率.

上述两个概率中的 k(在摸球之前)实际是随机变量(一般用 X 表示).

由离散型随机变量的定义知：

(1) 如果随机变量 X 取值 k 的概率为 $C_n^kp^kq^{n-k}$，且 $k=0, 1, \cdots, n$，$q=1-p$，即 $P\{X=k\}=C_n^kp^kq^{n-k}$，且 $k=0, 1, \cdots, n$，$p=1-q$，则称 X 服从二项分布，记为 $X\sim B(n, p)$.

(2) 如果随机变量 X 取值 k 的概率为 $\dfrac{C_M^kC_N^{n-k}}{C_{N+M}^n}$，且 $k=0, 1, 2, \cdots, \min(n, M)$，即 $P(X=k)=\dfrac{C_M^kC_N^{n-k}}{C_{N+M}^n}$，$k=0, 1, 2, \cdots, \min(n, M)$，则称 X 服从超几何分布.

上述分布中的 $q=1-p$，$0<p<1$，由此知上述两个离散型分布来自上述的摸球问题.

当二项分布中的 $n=1$，即 $X\sim B(1, p)$时，称 X 服从 0—1 分布，因为这时 X 只取 0 与 1 两个值.

8.2.6 离散型随机变量的数学期望

教材线索

本小节从一个具体的例子及平均数入手，引入离散型随机变量的期望概念，介绍了服

从两点分布、二项分布、超几何分布的随机变量的期望公式．教材以一些简单的例子来说明期望概念和公式的应用．

教学目标

（一）知识与技能

通过实例，理解取有限值的离散型随机变量的均值的概念，能计算简单离散型随机变量的期望，并能解决一些实际问题．

（二）过程与方法

通过实际例题培养学生分析问题和解决问题的能力，培养学生运用数学知识解决实际问题的能力．

（三）情感、态度与价值观

通过本节的教学，使学生理解数学的内在本质，使学生了解数学在实际中的应用，激发学生学习数学的兴趣，提高学习数学的积极性．

教材分析

1 重点：

离散型随机变量的期望的概念、公式及其应用．

2．难点：

（1）根据离散型随机变量的概率分布求出期望．

（2）灵活利用公式求期望．

3．教材从平均值的角度引入离散型随机变量的数学期望的概念，引导学生通过实际问题理解这个概念，对引例的分析中应注意频率与概率的区别与联系．同时由实例来区别离散型随机变量的期望与相应数值的算术平均数：期望表示离散型随机变量在随机试验中取值的平均值，它是概率意义下的平均值，不同于相应数值的算术平均数．

由于篇幅的限制，教材只举例说明算术平均数与期望不能等同，但未能说明原因，此时，教师可以适当地加以解释．在给出随机变量数学期望的一般定义后，可以给出这个期望的直观意义，即“它反映了离散型随机变量取值的平均水平”．这里的平均水平指的是：反复对随机变量进行独立观测，所得到的各个观测值的算术平均值随着观测次数的增加而越接近于这个随机变量的均值．

4．离散型随机变量的数学期望的概念．

当随机变量 X 有概率分布 $P(X=x_j)=p_j$，$j=1$，2，…，n，就称 $E(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n$ 为 X 的数学期望或均值．

5．离散型随机变量的期望是随机变量的重要特征数，是对离散型随机变量的一种简明的描写．对于离散型随机变量，确定了它的概率分布，就掌握了离散型随机变量取值的统计规律．但是，概率分布往往不能明显而集中地表现随机变量的某些特征．随机变量的数

学期望表示随机变量一切可能值的平均值，所以随机变量的数学期望又常称为随机变量的平均数、均值. 由于离散型随机变量的数学期望的计算是从它的概率分布出发，因而数学期望就是离散型随机变量的概率平均值.

6. 区别随机变量的期望与相应数值的算术平均数：期望表示随机变量在随机试验中取值的平均值，它是概率意义下的平均值，不同于相应数值的算术平均数.

例如，设离散型随机变量 X 的概率分布为 $P(X=18)=\frac{1}{2}$，$P(X=24)=\frac{1}{3}$，$P(X=36)=\frac{1}{6}$，所以 $E(X)=18\times\frac{1}{2}+24\times\frac{1}{3}+36\times\frac{1}{6}=23$，而随机变量 X 可能取值的算术平均数为 $\frac{18+24+36}{3}=26$，因此它们是不能等同的.

7. 随机变量的期望在市场预测、经济统计、风险与决策等领域有着广泛的应用，对今后学习数学及相关学科有着深远的影响. 在实际应用中，我们可以用它来解决一些问题或作出科学的决策. 而随机变量的数学期望又是随机变量的最重要的特征数之一，它表示随机变量一切可能值的平均数，因此，研究随机变量的数学期望，有着明显的意义. 通过本节的教学，要使学生了解随机变量的数学期望的意义，会根据随机变量的概率分布求出数学期望的同时，要引导学生会把数学期望用到实际问题中去.

8. 随机变量的数学期望 $E(X)$ 是一个实数，可正可负，由随机变量 X 概率分布唯一确定，即作为随机变量 X 是可变的，可取不同值，而 $E(X)$ 是不变的，它描述 X 取值的平均状态.

教学建议

1. 教学中首先要让学生在引例中归纳出离散型随机变量的数学期望的概念，培养学生归纳总结的习惯. 强调如果 X 是从某个总体中随机抽取的个体，那么 X 的数学期望 $E(X)$ 就是总体均值 μ.

2. 在教学中注重鼓励学生对一些数学结论作出大胆猜想，并给出证明，培养学生敢于独立思考、勇于创新的科学精神. 教材中首先根据数学期望的定义证明了服从两点分布的随机变量的数学期望，得到若 X_1 服从两点分布，则 $E(X_1)=p$. 然后引导学生利用两点分布与二项分布之间的联系，对二项分布的数学期望作出猜想：若 X_2 服从二项分布，则 $E(X_2)=np$，并利用二项分布的概率分布加以证明.

3. 在本节教材中还介绍了服从两点分布、二项分布、超几何分布的随机变量的期望的计算公式.

1. $E(aX+b)=aE(X)+b$；

2. 若 $X\sim B(1, p)$，则 $E(X)=p$；

3. 若 $X\sim B(n, p)$，则 $E(X)=np$；

4. 若 $X\sim H(N, M, n)$，则 $E(X)=n\frac{M}{N}$；

教材给出了服从两点分布、二项分布的随机变量的期望的计算公式的推导过程，在教学中注意它们之间的区别和联系.

4. 教师可以适当介绍更一般的随机变量期望的线性性质：随机变量的线性组合的数学期望等于随机变量期望的线性组合，即若两个随机变量 X，Y 的均值都为有限数，则 $E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$，a，$b\in\mathbf{R}$，这不要求学生掌握.

5. 本节教材中的例 1 和例 2 着重帮助学生对期望概念的理解，指出了随机事件发生的概率 p 与一次随机试验中随机事件发生的次数的期望之间的关系，在解答中请学生归纳求离散型随机变量 X 的期望的基本步骤，教师再进行必要的总结，总结如下：

(1) 理解 X 的意义，写出 X 可能取的全部值；

(2) 求 X 取各个值的概率，写出随机变量 X 的概率分布；

(3) 根据 X 的概率分布，由数学期望的定义求出 $E(X)$.

6. 本节教材中例 3 是利用二项分布的数学期望公式解决实际问题的一个例子，而例 4 是利用超几何分布的数学期望公式解决实际问题的一个例子，应该注意加强学生对二项分布和超几何分布概念的理解，在分析中要注重引导学生分析二项分布和超几何分布的模型，能直接用公式计算，尽量不走弯路.

例题解析

例 1 甲击中目标的概率是 $\frac{1}{2}$，如果击中，赢 10 分，否则输 11 分. 用 X 表示他的得分，计算 X 的概率分布和数学期望.

解 射击的结果只有两种，即击中目标和未击中目标，由已知击中目标的概率为 $\frac{1}{2}$ 得到，未击中目标的概率为 $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$. 而击中目标的充要条件是 $\{X=10\}$，其对立事件——未击中目标的充要条件是 $\{X=11\}$，由 $P(X=10)=\frac{1}{2}=0.5$ 可得 $P(X=-11)=1-P(X=10)=0.5$，所以 X 的概率分布列为

X	10	-11
P	0.5	0.5

所以 $E(X)=10\times0.5+(-11)\times0.5=-0.5$.

点评 本题主要体现出对立事件的概率分布和数学期望概念的应用. 求 X 的数学期望，一般是先写出 X 的概率分布，然后根据数学期望的定义求出期望.

例 2 在只需回答“是”与“不是”的知识竞赛中，每个选手回答两个不同的问题，都回答失败，输 1 分，否则赢 0.3 分. 用 X 表示甲的得分，如果甲随机猜测“是”与“不是”，计算 X 的概率分布和数学期望.

解 每个选手回答两个不同问题有 4 种结果，即“两个问题都回答正确”、“第一个问

题回答正确，第二个问题回答失败"、“第二个问题回答正确，第一个问题回答失败"、“两个问题都回答失败”. $\{X=-1\}$的充要条件是两次猜错，所以 $P(X=-1)=\frac{1}{4}=0.25$，$\{x=0.3\}$是$\{X=-1\}$的对立事件，所以 $P(X=0.3)=1-P(X=-1)=0.75$.

X 的概率分布列为

X	-1	0.3
P	0.25	0.75

由数学期望的概念得：$E(X)=-1\times0.25+0.3\times0.75=-0.025$.

点评　本题与例 1 一样，也是考察对立事件的概率分布和数学期望概念，以及运用统计知识和随机变量的有关知识解决实际问题的能力，属于应用数学范畴，主要在经济以及其他具体社会领域中得到广泛应用.

以上两个例子都可以写出 X 可能取的全部值，然后计算 X 取各个值的概率，写出随机变量 X 的概率分布，最后，由数学期望的定义求出 $E(X)$. 这一类例子在实际中也很常用，如：

变式　一个均匀小正方体的六个面中，三个面上标以数 0，两个面上标以数 1，一个面上标以数 2，将这个小正方体抛掷 2 次，求向上的数的积 X 的数学期望.

解　将这个小正方体抛掷 2 次，向上的数的积可能为 $X=0$，1，2，4，则

$P(X=0)=\dfrac{C_3^1C_3^1+C_3^1C_3^1+C_3^1C_3^1}{C_6^1C_6^1}=\dfrac{3}{4}$，$P(X=1)=\dfrac{C_2^1C_2^1}{C_6^1C_6^1}=\dfrac{1}{9}$，

$P(X=2)=\dfrac{C_2^1C_1^1+C_1^1C_2^1}{C_6^1C_6^1}=\dfrac{1}{9}$，$P(X=4)=\dfrac{C_1^1C_1^1}{C_6^1C_6^1}=\dfrac{1}{36}$，

所以 X 的概率分布列为

X	0	1	2	4
P	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{36}$

$\therefore\quad E(X)=\frac{3}{4}\times0+\frac{1}{9}\times1+\frac{1}{9}\times2+\frac{1}{36}\times4=\frac{4}{9}$.

例 3　甲、乙比赛时，甲每局赢的概率是 $p=0.51$，乙每局赢的概率是 $q=0.49$. 甲、乙一共进行了 10 次比赛. 当各局比赛的结果是相互独立的时，计算甲平均赢多少局，乙平均赢多少局？

解　甲、乙进行了 10 局比赛，对甲或乙而言，都可看做是进行 10 次的独立重复试验，所以 10 局中甲赢的次数 $X\sim B(10,0.51)$，同理，10 局中乙赢的次数 $Y\sim B(10,0.49)$，由定理可得

$$E(X)=10\times0.51=5.1，E(Y)=10\times0.49=4.9，$$

所以甲平均赢 5.1 局，乙平均赢 4.9 局.

点评　本题的重点是二项分布的定义及其数学期望的定义. 教学中，可先对例题的背

景加以分析，解释为什么可以用二项分布的期望来求平均数. 在本例的问题背景中，甲每局比赛，相当于进行一次随机试验，该试验只有两个可能的结果，即“赢”或“输"，进行10局比赛，相当于做10次独立重复试验，这样甲赢的局数 X 服从二项分布 $B(10,0.51)$. 可类似地计算乙的成绩的平均值.

例4 袋中有3个红球，7个白球. 从中无放回地任取5个，取得几个红球就得几分. 问平均得几分?

解 用 X 表示得分数，则 X 也是得到的红球数，则 $X\sim H(10,3,5)$，于是 $E(X)=n\times\dfrac{M}{N}=5\times\dfrac{3}{10}=1.5$，所以平均得到1.5分.

点评 本题主要体现了超几何分布的定义及其数学期望公式的应用. 通常情况下，进行等可能的、无放回抽取试验中，其结果一般服从超几何分布，可以直接代入公式求数学期望.

相关链接

期望值的由来

数学之所以有生命力，就在于有趣. 数学之所以有趣，就在于它对思维的启迪. 以下就是一则期望值起源的故事.

期望值的概念缘起于赌金的分配，流传是这样的:

有甲、乙两名实力相当的棋王，各出赌金32法郎相约赌赛，规定先赢5局者为胜，胜者可获得全部赌金(64法郎)，但每局必定要分出高下，不能成和局. 赌了半天，甲赢了4局，乙赢了3局，不料这时突然发生一件重大事故，迫令这次赌赛中途停止，且以后也难有机会继续比赛. 于是公正人决定将赌金64法郎平分还给甲、乙二名棋士，但二人为所分得的赌金之多寡争执不下，那么，这个钱应该怎么分? 是不是把钱分成7份，赢了4局的就拿4份，赢了3局的就拿3份呢? 或者，因为最早说的是满5局，而谁也没达到，所以就一人分一半呢? 一位喜欢数学的赌徒米尔于是就拿这个问题向当时法国的一个名叫巴斯卡尔的大数学家请教. 这就是有名的“赌金分配问题”.

巴斯卡尔的解法:

(1) 他认为二人所分赌金的多寡，应与他们获胜机会的大小成比例，这样分配才算公平.

(2) 赢了4局的拿这个钱的 $\dfrac{3}{4}$，赢了3局的拿这个钱的 $\dfrac{1}{4}$. 为什么呢? 假定他俩再赌一局，或者甲赢，或者乙赢. 若是甲赢满了5局，钱应该全归他; 甲如果输了，即甲、乙各赢4局，这个钱应该对半分. 现在，甲赢、输的可能性都是 $\dfrac{1}{2}$，所以，他拿的钱应该是

$\frac{1}{2}\times1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$，当然，乙就应该得$\frac{1}{4}$.

(3) 因此甲应分赌金 48 法郎，乙应分赌金 16 法郎. 甲、乙应分得的赌金，就是“期望值”.

通过这次讨论，开始形成了概率论当中一个重要的概念——数学期望. 在上述问题中，数学期望是一个平均值，就是对将来不确定的钱今天应该怎么算，这就要用甲赢、输的概率去乘上他可能得到的钱，再把它们加起来. 概率论从此就发展起来，今天已经成为应用非常广泛的一门学科.

8.2.7 离散型随机变量的方差

教材线索

本小节从上节课的一个引例入手，结合总体方差的定义，引入刻画离散型随机变量稳定性的方差概念，介绍了服从两点分布、二项分布、超几何分布的随机变量的方差公式. 然后，结合一些简单的例子说明方差概念和公式的应用.

教学目标

(一) 知识与技能

通过实例，理解取有限值的离散型随机变量的方差，能计算简单离散型随机变量的方差，并能解决一些实际问题.

(二) 过程与方法

通过离散型随机变量的方差的计算，进一步理解方差这一重要的数字特征，提高分析问题和解决问题的能力.

(三) 情感、态度与价值观

通过本节的教学，使学生理解方差的内在本质，使学生了解数学在实际中的应用，激发学生学习数学的兴趣，提高学习数学的积极性.

教材分析

1. 重点：

离散型随机变量的方差、标准差的概念，公式及应用.

2. 难点：

(1) 根据离散型随机变量的概率分布求出方差、标准差，解决实际问题.

（2）灵活利用公式求方差.

3．离散型随机变量的方差、标准差的概念.

当离散型随变量 X 有概率分布 $p_j=P(X=x_j)(j=0, 1, \cdots, n)$ 和数学期望 $\mu=E(X)$，就称 $D(X)=(x_1-\mu)^2p_1+(x_2-\mu)^2p_2+\cdots+(x_n-\mu)^2p_n$ 为 X 的方差，称 $\sqrt{D(X)}$ 为 X 的标准差．通常还用 σ^2 表示方差 $D(X)$，用 σ 表示标准 $\sqrt{D(X)}$．教材采用与初中代数中介绍的一组数据的方差定义类比的方法直接定义随机变量 X 的方差.

4．随机变量的方差与数学期望一样，都是随机变量的重要特征数，是对随机变量的一种简明的描写．概率分布往往不能明显地表现随机变量取值的集中位置、稳定与波动状况、集中与离散程度等特征．而随机变量 X 的方差描述了随机变量 X 向它的数学期望集中的程度，方差越小，X 越向它的数学期望集中．它能够反映随机变量 X 取值的某些特征．数学期望、方差等都是数，它们没有随机性，它们是用来刻画随机现象的，在现实生活中有着广泛的应用.

5．在本节教学中，对离散型随机变量的方差及标准差的计算，除了要求学生能根据定义求出随机变量的方差和标准差外，还应掌握服从两点分布、二项分布、超几何分布的随机变量的方差的计算公式：

（1）$D(aX+b)=a^2D(X)$；

（2）若 $X\sim B(1, p)$，则 $D(X)=p(1-p)$；

（3）若 $X\sim B(n, p)$，则 $D(X)=np(1-p)$；

（4）若 $X\sim H(N, M, n)$，则 $D(X)=\dfrac{nM}{N}\left(1-\dfrac{M}{N}\right)\dfrac{N-n}{N-1}$.

教材给出了服从两点分布的随机变量的方差计算公式的推导过程，而其余两个分布的随机变量的方差计算公式的推导过程为：

若 $X\sim B(n, p)$，则 $D(X)=np(1-p)$.

$$\begin{aligned}D(X)&=\sum_{i=0}^{n}[i-E(X)]^2\mathrm{C}_n^ip^i(1-p)^{n-i}\\&=\sum_{i=0}^{n}[i^2-2npi+(np)^2]\mathrm{C}_n^ip^i(1-p)^{n-i}\\&=\sum_{i=0}^{n}i^2\mathrm{C}_n^ip^i(1-p)^{n-i}-2np\sum_{i=0}^{n}i\mathrm{C}_n^ip^i(1-p)^{n-i}+(np)^2\sum_{i=0}^{n}\mathrm{C}_n^ip^i(1-p)^{n-i}\\&=\sum_{i=0}^{n}i^2\mathrm{C}_n^ip^i(1-p)^{n-i}-2(np)^2+(np)^2\\&=\sum_{i=0}^{n}i^2\mathrm{C}_n^ip^i(1-p)^{n-i}-(np)^2,\end{aligned}$$

又 $$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}i^2\mathrm{C}_n^ip^i(1-p)^{n-i}&=\sum_{i=0}^{n}[i(i-1)+i]\mathrm{C}_n^ip^i(1-p)^{n-i}\\&=\sum_{i=0}^{n}i(i-1)\mathrm{C}_n^ip^i(1-p)^{n-i}+\sum_{i=0}^{n}i\mathrm{C}_n^ip^i(1-p)^{n-i}\end{aligned}$$

$$=n(n-1)p^2\sum_{i=2}^{n}\frac{(n-2)!}{(i-2)![n-2-(i-2)]!}p^{i-2}(1-p)^{n-2-(i-2)}+np$$

$$=n(n-1)p^2\sum_{i=0}^{n-2}C_{n-2}^{i}p^{i}(1-p)^{n-2-i}+np$$

$$=n(n-1)p^2+np,$$

因此 $D(X)=n(n-1)p^2+np-(np)^2=np-np^2=np(1-p).$

上述的证明，不要求学生掌握，只要求学生承认其正确性并会应用就行了.

教学建议

1．随机变量的方差与样本的方差的联系与区别．教材通过类比样本方差的定义给出随机变量方差的定义，那么它们的联系与区别是什么？可以类似于随机变量的数学期望与样本的平均值的联系与区别的讨论，介绍随机变量方差与样本方差之间的联系与区别.

2．教学中首先要让学生在引例中导出总体方差，培养学生总结归纳能力．利用类比的方法归纳出离散型随机变量的方差与标准差的概念．强调如果 X 是从某个总体中随机抽取的个体，那么 X 的方差 $D(X)$ 就是总体方差 σ^2.

3．本节中的例 1 着重考察根据方差与标准差的定义求出离散型随机变量的方差与标准差，帮助学生加深对方差与标准差概念的理解．在解答中请学生归纳出求离散型随机变量 X 的方差和标准差的基本步骤，教师再进行必要的总结，总结如下：

(1) 理解 X 的意义，写出 X 可能取的全部值；

(2) 求 X 取各个值的概率，写出离散型随机变量 X 的概率分布；

(3) 根据 X 的概率分布，由数学期望的定义求出 $E(X)$；

(4) 根据方差、标准差的定义求出 $D(X)$ 和 σ.

4．本节教材中的例 2 是利用二项分布的方差公式解决实际问题的一个例子，而例 3 是利用超几何分布的方差公式解决实际问题的一个例子．在分析中要注重引导学生分析二项分布或超几何分布的模型，利用公式简化解题过程．强调如果服从二项分布或超几何分布等特殊分布，直接应用公式，可以简化解题的过程，减少计算量．在分析这两道例题时，要加强对二项分布和超几何分布模型的讲解，巩固学生对二项分布和超几何分布概念的理解，要求学生熟练掌握几种特殊分布的方差公式．例 4 是期望与方差的综合运用，也是告诉大家一种解决某类实际问题的方法和思路.

例题解析

例 1 根据以往经验，一辆从北京开往天津的长途汽车在无雨天赢利 230 元，小雨天赢利 163 元，中雨天赢利 90 元，根据天气预报，明天无雨的概率是 0.2，有小雨的概率是 0.3，有中雨的概率是 0.5．问明天发一辆长途车期望赢利多少元？方差和标准差各是多少？

解 用 X 表示明天发一辆车的赢利．$\{X=230\}$发生的充要条件是明天无雨，$\{X=163\}$发生的充要条件是明天有小雨，$\{X=90\}$发生的充要条件是明天有中雨，则 $P(X=230)=$

0.2，$P(X=163)=0.3$，$P(X=90)=0.5$. X 的概率分布列为：

X	230	163	90
P	0.2	0.3	0.5

所以 $E(X)=230\times0.2+163\times0.3+90\times0.5=139.9$(元)，

方差 $D(X)=(230-139.9)^2\times0.2+(163-139.9)^2\times0.3+(90-139.9)^2\times0.5\approx3\ 028.7$，

标准差 $\sigma=\sqrt{3\ 028.7}\approx55$(元).

点评 本题主要体现出离散型随机变量的期望、方差、标准差的概念及其实际应用. 要求随机变量 X 的方差和标准差，就必须先确定 X 的可能取值，再求取各个值的概率，写出随机变量 X 的概率分布，用数学期望的定义求出 $E(X)$，最后根据方差、标准差的定义求出 $D(X)$和 σ.

变式 某人有 5 把钥匙，其中只有一把能打开某一扇门，今任取一把试开，不能打开者除去，求打开此门所需试开次数的数学期望和方差.

解 设 X 为打开此门所需的试开次数，则 X 的可能取值为 1，2，3，4，5.

$X=k$ 表示前 $k-1$ 次没打开此门，第 k 次打开了此门.

$P(X=1)=\frac{1}{C_5^1}=\frac{1}{5}$，$P(X=2)=\frac{C_4^1}{C_5^1}\cdot\frac{1}{C_4^1}=\frac{1}{5}$，$P(X=3)=\frac{C_4^1}{C_5^1}\cdot\frac{C_3^1}{C_4^1}\cdot\frac{1}{C_3^1}=\frac{1}{5}$，

$P(X=4)=\frac{C_4^1}{C_5^1}\cdot\frac{C_3^1}{C_4^1}\cdot\frac{C_2^1}{C_3^1}\cdot\frac{1}{C_2^1}=\frac{1}{5}$，$P(X=5)=\frac{C_4^1}{C_5^1}\cdot\frac{C_3^1}{C_4^1}\cdot\frac{C_2^1}{C_3^1}\cdot\frac{1}{C_2^1}\cdot1=\frac{1}{5}$.

X 的概率分布为：

X	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

所以

$$E(X)=1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{1}{5}+3\times\frac{1}{5}+4\times\frac{1}{5}+5\times\frac{1}{5}=3,$$

$$D(X)=(1-3)^2\times\frac{1}{5}+(2-3)^2\times\frac{1}{5}+(3-3)^2\times\frac{1}{5}+(4-3)^2\times\frac{1}{5}+(5-3)^2\times\frac{1}{5}=2.$$

例 2 某厂一批产品的合格率是 98%，检验单位从中有放回地随机抽取 10 件，计算：

(1)抽出的 10 件产品中平均有多少件正品；

(2)抽出的 10 件产品中正品数的方差和标准差.

解 有放回地随机抽取 10 件产品，就相当于进行 10 次独立重复试验，用 X 表示抽得的正品数，于是 $X\sim B(10,0.98)$. 由二项分布的期望、方差公式和标准差的定义得到：

(1) $E(X)=10\times0.98=9.8$，所以平均有 9.8 件正品；

(2) $D(X)=10\times0.98\times0.02=0.196$，$\sigma=\sqrt{D(X)}\approx0.44$.

点评 通过本题体现出二项分布的定义、数学期望的意义，以及二项分布的期望、方差公式和标准差概念的应用. 通常情况下，在 n 次独立重复试验中事件发生的次数符合二

项分布，直接代入公式即可求得方差和标准差，判断随机变量 X 服从二项分布是本题的关键.

例 3　100 箱苹果中有 5 箱不合格，现在从中随机抽取 5 箱检查，计算：

(1) 抽出的 5 箱中平均有多少箱合格；(2)计算抽出的 5 箱中合格箱数的方差和标准差.

解　用 X 表示抽到的 5 箱中的合格箱数，则 $X \sim H(100, 95, 5)$. 根据超几何分布的期望和方差公式得：

(1) $E(X)=5\times\frac{95}{100}=4.75$，平均有 4.75 箱合格；

(2) $D(X)=5\times\frac{95}{100}\times\left(1-\frac{95}{100}\right)\times\frac{100-5}{100-1}\approx 0.288$，$\sigma=\sqrt{D(X)}\approx 0.48$.

点评　通过本题体现出超几何分布的定义、数学期望的意义，以及超几何分布的期望、方差公式和标准差概念的应用. 本题的关键是判断合格箱数 X 服从超几何分布，因此，要对超几何分布的定义非常熟悉.

例 4　甲、乙两名射手在同一条件下射击，所得环数 X_1，X_2 的分布列分别是

X_1	6	7	8	9	10
P_1	0.16	0.14	0.42	0.1	0.18

X_2	6	7	8	9	10
P_2	0.19	0.24	0.12	0.28	0.17

请根据环数的期望和方差比较这两名射手的射击水平.

解　$E(X_1)=6\times 0.16+7\times 0.14+8\times 0.42+9\times 0.1+10\times 0.18=8$，

$D(X_1)=(6-8)^2\times 0.16+(7-8)^2\times 0.14+(8-8)^2\times 0.42+(9-8)^2\times 0.1+(10-8)^2\times 0.18=1.6$；

$E(X_2)=6\times 0.19+7\times 0.24+8\times 0.12+9\times 0.28+10\times 0.17=8$，

$D(X_2)=(6-8)^2\times 0.19+(7-8)^2\times 0.24+(8-8)^2\times 0.12+(9-8)^2\times 0.28+(10-8)^2\times 0.17=1.96$.

$\because$　$E(X_1)=E(X_2)$，$D(X_1)<D(X_2)$，

$\therefore$　射手甲与射手乙的平均射击水平没有差异，但射手甲的射击水平稳定性较好，射手乙的射击水平稳定性较差.

点评　随机变量的方差和标准差都反映了随机变量取值偏离均值的平均程度. 方差或标准差越小，则随机变量偏离均值的平均程度越小. 因此，在实际问题中，如果碰到类似问题，应从方差角度进行比较.

相关链接

战争中的统计学

英国《卫报》有一篇关于二战中德国人坦克数目估计的文章，标题是“统计公式怎样帮

盟国赢得了二战”. 不过这篇文章中列举的数字是来自于其中特别成功的例子：Mark V 型坦克，因为它的序列号与其生产的数目密切相关. 战后得到的数字证实，统计学家估计的数目与实际的数目相差无几，而情报人员估计的都是实际数目的五到六倍.

主要内容为：1943 年，盟国的统计学家们试图从俘获的德国坦克的序列号上面推出德国人每个月生产的坦克的数目.

简化一下，实际上是一个这样的问题：德国人坦克的数目是 1，2，3，…，N，其中 N 是我们想要知道的德国人的坦克的总数. 假设盟国俘获了 5 辆坦克，序列号分别是 20，31，43，78 和 92，其中最大的号码是 92，我们用 M 来表示，而样本数 5 我们用 S 来表示. 现在统计学家的任务就是用 S，M 去估计 N 的数目.

其实这是一个很多统计的教材里面讲估计函数都会提到的一个试验，就是用已知样本的数据，通过这个函数去估计未知的样本数据. 二战时候统计学家的任务是要找出一个最佳的估计函数去估计德国人生产的坦克的数目，评价的标准是：

1. 无偏差：偏差是预测值与实际值之间的差距. 估计出来的数目就应该是德国人生产的坦克的数目. 我们希望没有偏差.

2. 最小方差：方差是一组数据中所有数与这组数据平均值之差的平方的平均值，方差越大，这组数据的波动程度就越大. 我们希望这个估计函数得到一组结果的方差尽量小.

这个估计有个名字，叫做最小方差无偏估计. 数学家们也没有什么好办法，所以他们只能做实验，从想出来的一堆函数中挑一个好的出来，然后再作图，发现实际的数目都是在那个最大的序列号 M 上作一点修正就可以了，于是就可以得出最后的公式，比较准确的预测出德国人生产的坦克的数目. 在预测其他型号，比如德国人有意在序列号上玩花样的型号的时候，这个公式当然就没有那么准确了.

当然，事情肯定不会像《卫报》说的那么神奇，虽然战后证实数字很准确，但这也具有一定的偶然性.

另外一个比较有意思的是，有人试图用随机事件生成器预测世界的未来，却遭到很多人非议. 也许这个世界真是随机的，但是也许太多的随机事件就会导致一个注定的结果或者模式.

8.3 正态分布曲线

教材线索

本节从测量周长的例子入手，通过频率分布折线图得到正态分布密度曲线，借助正态

分布密度曲线来介绍正态分布的意义，引入服从正态分布的正态随机变量和分布函数的概念. 同时还介绍了正态分布曲线的主要特征，并借助于标准正态分布解决一些简单的正态分布的计算问题.

教学目标

（一）知识与技能

通过实际问题，借助实际问题的直方图认识正态分布曲线的特点及曲线所表示的意义，了解正态分布的主要性质，并能借助标准正态分布进行一些简单的正态分布的计算.

（二）过程与方法

在解决实际问题的过程中，体会数形结合思想的作用，培养学生运用正态分布有关知识解决实际问题的能力.

（三）情感、态度与价值观

通过本节的教学，使学生理解数学的内在本质，使学生了解正态分布在实际中的应用，激发学生学习数学的兴趣，提高学习数学的积极性.

教材分析

1. 重点：

正态分布曲线的定义及其曲线特点，利用标准正态分布表求得标准正态总体在某一区间内取值的概率.

2. 难点：

正态分布的概念及其实际应用.

3. 教材案例中直径为 1 cm 的圆的周长的测量值 X 是一个随机变量，通过分析可知随机变量 X 的取值概率结构可以通过函数 $p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}(-\infty<x<+\infty)$ 来描述，对任意 $x_1<x_2$，$P(x_1<X\leqslant x_2)\approx\int_{x_1}^{x_2}p(x)\mathrm{d}x$. 由定积分几何意义可知，由正态曲线，过点 $(x_1,0)$ 和点 $(x_2,0)$ 的两条 x 轴的垂线，及 x 轴所围成的曲边梯形的面积就是 $P(x_1<X\leqslant x_2)$ 的近似值.

4. 从正态分布曲线的图象，教材总结出 6 个特点(或性质)：

(1) 曲线位于 x 轴上方，与 x 轴不相交；

(2) 曲线是单峰的，它关于直线 $x=\mu$ 对称；

(3) $p(x)$ 在 $x=\mu$ 处达到最大值 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$；

(4) 当 σ 一定时，曲线随着 μ 的变化而沿 x 轴平移；

(5) 当 μ 一定时，σ 越大，正态曲线越平；σ 越小，正态曲线越尖陡；

(6) 曲线与 x 轴之间所夹的面积等于 1.

通过图象，还可以得到：当 $x<0$ 时，曲线上升(增函数)；当 $x>0$ 时，曲线下降(减函数)，并且曲线以 x 轴为渐近线，当曲线向左、右两边无限延伸时，它向 X 轴无限靠近.

5. 正态总体几乎总值取于区间$(\mu-3\sigma,\ \mu+3\sigma)$之内，而在此区间以外取值的概率只有0.003，通常认为这种情况在一次试验中几乎不可能发生. 在实际应用中，通常认为服从正态分布 $N(\mu,\ \sigma^2)$的随机变量 X 只取$(\mu-3\sigma,\ \mu+3\sigma)$之间的值，并简称之为 3σ 原则. 对正态分布的这些性质只要直接给出，不必作理性分析.

6. 标准正态分布是正态分布研究的重点，标准正态分布的概率又可以通过查表求得，因而标准正态分布表地使用是本节课的重点之一. 表中每一项都有三个相关的量：x，y，p. x 是正态曲线横轴的取值，y 是曲线的高度，p 是阴影部分的面积，即 $\Phi(a)=P(x<a)$.

因为标准正态曲线关于 y 轴对称. 当 $x_0>0$ 时，$\Phi(x_0)=P(x<x_0)$；而当 $x_0<0$ 时，根据标准正态曲线的性质可得 $\Phi(x_0)=1-\Phi(-x_0)$，并且可以求得在任一区间$(x_1,\ x_2)$内取值的概率 $P(x_1<x<x_2)=\Phi(x_2)-\Phi(x_1)$.

7. 对于 $X\sim N(\mu,\ \sigma^2)(\mu\neq 0,\ \sigma\neq 1)$的问题一般可化为标准正态分布来解决，对 $X\sim N(\mu,\ \sigma^2)$，那么 $Y\sim N(0,\ 1)$，其中 $Y=\dfrac{x-\mu}{\sigma}$，事实上，$F(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$ 作变量替换可得$\dfrac{x-\mu}{\sigma}=u$，则有 $F(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$.

8. 正态分布是一个重要的总体分布，总体可以看做一个随机变量的一切可能取值. 决定一个正态分布的是两个重要的参数：平均数(数学期望)μ 和标准差 σ. 标准正态分布集中体现了所有正态分布的特点，所有的正态分布都可以通过变量替换化归为标准正态分布，这正是“标准”一词的体现.

9. 正态分布之所以成为概率统计中最基本、最重要的一种分布，有以下两个方面. 一方面，正态分布是自然界最常见的一种分布，要让学生知道中心极限定理的直观意义. 即若一个量 x 是许多微小量的总和. 当每一个微小的量和 x 相比都可以忽略不计时，则 x 近似服从正态分布. 自然界中存在着大量的这种现象，例如测量的误差，炮弹落点的分布，人的身高、体重等，农作物的收获量，工厂产品的尺寸：直径、长度、宽度、高度等，在实际遇到的许多随机现象都服从或近似服从正态分布. 一般说来，若影响某一数量指标的随机因素很多，而每个因素所起的作用都不太大，则这些指标都服从正态分布. 另一方面，正态分布具有良好的性质，许多分布可以用正态分布来近似描述，另外一些分布又可以通过正态分布来导出. 因此在理论研究中正态分布十分重要.

教学建议

1. 教师在介绍标准正态分布曲线时，可以适当地介绍高斯的背景：高斯在1809年发表了名著《绕日天体运动理论》，在这部著作的末尾，他写了一节有关数据组合的问题，实际上涉及的就是随机误差分布的问题，后来他又发现了正态分布(详见教材 P.77 的“数学文化”). 通过介绍故事，提高学生的学习兴趣，同时也鼓励学生勇于探索，勇攀科学高峰.

2. 介绍标准正态分布曲线时，要结合标准正态分布曲线的图象，引导学生总结出标准正态分布曲线的特点(或性质)，如教材中介绍的四个特点：(1)曲线关于 y 轴对称(对称性)；(2)$y=\Phi(a)$表示曲线阴影部分的面积，则由对称性得到 $\Phi(a)+\Phi(-a)=1$. 还可以通过图象，研究标准正态分布曲线的单调性：当 $x<0$ 时，曲线上升(增函数)；当 $x>0$ 时，曲线下降(减函数). 同时还可以引导学生得到：曲线以 x 轴为渐近线，当曲线向左、右两边无限延伸时，它向 x 轴无限靠近. 曲线与 x 轴围成的面积主要集中在中间部分，因此，越远离 y 轴的两侧的面积越小，其概率值也越小. 通过数学，培养学生主动观察、勇于发现、合作交流、善于归纳总结的良好品质.

3. 为了让学生更进一步了解正态分布的相关知识，讲课时教师还可以应用几何画板，演示正态曲线的图形，结合前面均值与标准差对图形的影响，引导学生观察总结正态曲线的性质.

4. 对于正态分布密度曲线，在教学中可以利用指数函数性质来帮助学生了解其性质，并通过数学课件来直观地了解正态分布曲线随着 μ 和 σ 的改变而变化的规律，还可结合 μ 和 σ 的含义($E(X)=\mu$，$\sqrt{D(X)}=\sigma$)来理解这种变化的内涵.

例题解析

例 1 若随机变量 $X\sim N(0, 1)$，查标准正态分布表，求：

(1) $P(X\leqslant 1.52)$； (2) $P(X>1.52)$；

(3) $P(0.57<X\leqslant 2.3)$； (4) $P(X\leqslant -1.49)$.

解 (1) $P(X\leqslant 1.52)=\Phi(1.52)=0.935\ 74$.

(2) $P(X>1.52)=1-P(X\leqslant 1.52)=1-0.935\ 74=0.064\ 26$.

(3) $P(0.57<X\leqslant 2.3)=P(X\leqslant 2.3)-P(X\leqslant 0.57)=\Phi(2.3)-\Phi(0.57)=0.273\ 58$.

(4) $P(X\leqslant -1.49)=P(X\geqslant 1.49)=1-P(X\leqslant 1.49)=1-\Phi(1.49)=1-0.931\ 89=0.068\ 11$.

点评 由于标准正态分布 $N(0, 1)$的重要性，已经专门制作了“标准正态分布表”用来查得分布函数值. 标准正态分布函数具有重要性质 $\Phi(x)=1-\Phi(-x)$，$x\in(-\infty, +\infty)$，利用这个性质可以求得任意的 x 的分布函数值. 对于这个性质可以在解决例 1 时，由学生根据正态曲线的对称性自行探究.

只要求掌握用查表法求标准正态分布的有关概率. 该表是针对 $X\geqslant 0$ 设计的，若 $X<0$，则须转换再查. 查表前，可画个草图，可帮助查表.

例 2 当 X 服从正态分布，且数学期望 4 和标准差为 2 时，计算 $P(6<X\leqslant 8)$.

点评 本例是把一般正态分布的概率的有关计算问题转化为标准正态分布来处理的典型例子，首先利用公式 $P(X<x)=F(x)$和 $F(x)=\Phi\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$把 $X\sim N(\mu, \sigma^2)$的概率问题转化为 $X\sim N(0, 1)$的标准正态分布的概率问题，并通过查标准正态分布表求得 $\Phi\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$的

值，从而解决了一般正态分布的概率计算问题．本题说明了把一般正态分布的问题转化成标准正态分布处理的方法，体现了转化与化归的数学思想方法的应用．

相关链接

正态分布的发现者——卡尔·费里德里希·高斯

高斯(1777年4月30日—1855年2月23日)，生于不伦瑞克，卒于格丁根，德国著名数学家、物理学家、天文学家、大地测量学家．高斯被认为是最重要的数学家，并有数学王子的美誉．

1792年，15岁高斯进入Braunschweig学院．在那里，高斯开始研究高等数学，并独立发现了二项式定理的一般形式、数论上的“二次互反律”、质数分布定理及算术几何平均．

1795年高斯进入格丁根大学．1796年，19岁的高斯得到了一个数学史上极重要的结果，就是《正十七边形尺规作图之理论与方法》．

一、生平

高斯是一对普通夫妇的儿子．他的母亲是一个贫穷石匠的女儿，虽然十分聪明，但却没有接受过教育，近似于文盲．她在成为高斯父亲的第二个妻子之前，从事女佣工作．他的父亲曾做过园丁、工头、商人的助手和一个小保险公司的评估师．高斯3岁时便能够纠正他父亲的借债账目的事情，已经成为一个逸事流传至今．他曾说，他在麦仙翁堆上学会计算，能够在头脑中进行复杂的计算，是上帝赐予他一生的天赋．

高斯用很短的时间计算出了小学老师布置的任务：对自然数从1到100的求和．他所使用的方法是：对50对构造成和101的数列求和(1＋100，2＋99，3＋98，…)，同时得到结果5050．这一年，高斯9岁．

当高斯12岁时，已经开始怀疑元素几何学中的基础证明．当他16岁时，预测在欧氏几何之外必然会产生一门完全不同的几何学．他导出了二项式定理的一般形式，将其成功的运用在无穷级数上，并发展了数学分析的理论．

高斯的老师Bruettner与他的助手Martin Bartels很早就认识到了高斯在数学上异乎寻常的天赋，同时Herzog Carl Wilhelm Ferdinand von Braunschweig也对这个天才儿童留下了深刻印象．于是他们从高斯14岁起便资助其学习与生活．这也使高斯能够在公元1792—1795年在Carolinum学院(今天Braunschweig学院的前身)学习．18岁时，高斯转入格丁根大学学习．在他19岁时，第一个成功地用尺规构造出了规则的正十七边形．

高斯于公元1805年10月5日与来自Braunschweig的Johanna Elisabeth Rosina Osthoff小姐(1780—1809)结婚．在公元1806年8月21日迎来了他生命中的第一个孩子Joseph．此后，他又有两个孩子．1807年高斯成为格丁根大学的教授和当地天文台的台长．

虽然高斯作为一个数学家而闻名于世，但这并不意味着他热爱教书. 尽管如此，越来越多的他的学生成为有影响的数学家，如后来闻名于世的 Richard Dedekind 和黎曼.

高斯信教且保守. 他的父亲死于 1808 年 4 月 14 日，晚些时候的 1809 年 10 月 11 日，他的第一个妻子 Johanna 也离开人世. 次年 8 月 4 日高斯迎娶第二个妻子 Friederica Wilhelmine(1788—1831). 他们又有三个孩子. 1831 年 9 月 12 日她的第二个妻子也死去，1837 年高斯开始学习俄语. 1839 年 4 月 18 日，他的母亲在格丁根逝世，享年 95 岁. 高斯于 1855 年 2 月 23 日凌晨 1 点在格丁根去世.

二、贡献

18 岁的高斯发现了质数分布定理和最小二乘法. 通过对足够多的测量数据的处理后，可以得到一个新的、概率性质的测量结果. 在这些基础之上，高斯随后专注于曲面与曲线的计算，并成功得到高斯钟形曲线(正态分布曲线). 其函数被命名为标准正态分布(或高斯分布)，并在概率计算中大量使用.

在高斯 19 岁时，仅用尺规便构造出了正十七边形，并为流传了 2 000 年的欧氏几何提供了自古希腊时代以来的第一次重要补充.

高斯计算的谷神星轨迹总结了复数的应用，并且严格证明了每一个 n 阶的代数方程必有 n 个实数或者复数解. 在他的第一本著名的著作《数论》中，作出了二次互反律的证明，成为数论继续发展的重要基础. 在这部著作的第一章，导出了三角形全等定理的概念.

高斯在他的建立在最小二乘法基础上的测量平差理论的帮助下，计算出天体的运行轨迹，并用这种方法，发现了谷神星的运行轨迹. 谷神星于 1801 年被意大利天文学家皮亚齐发现，但他因病耽误了观测，失去了这颗小行星的轨迹. 皮亚齐以希腊神话中“丰收女神”来命名它，即谷神星，并将以前观测的位置发表出来，希望全球的天文学家一起寻找. 高斯通过以前的三次观测数据，计算出了谷神星的运行轨迹. 奥地利天文学家 Heinrich Olbers在高斯计算出的轨道上成功发现了这颗小行星. 从此高斯名扬天下. 高斯将这种方法著述在著作《天体运动论》中.

高斯设计的汉诺威大地测量的三角网为了获知任意一年中复活节的日期，高斯推导了复活节日期的计算公式.

在 1818 年至 1826 年之间高斯主导了汉诺威公国的大地测量工作. 通过他发明的以最小二乘法为基础的测量平差的方法和求解线性方程组的方法，显著的提高了测量的精度. 出于对实际应用的兴趣，他发明了日光反射仪，可以将光束反射至大约 450 千米外的地方. 高斯后来不止一次地为原先的设计作出改进，试制成功被广泛应用于大地测量的镜式六分仪.

高斯亲自参加野外测量工作. 他白天观测，夜晚计算. 五六年间，经他亲自计算过的大地测量数据，超过 100 万次. 当高斯领导的三角测量外场观测已走上正轨后，高斯就把主要精力转移到处理观测成果的计算上来，并写出了近 20 篇对现代大地测量学具有重大意义的论文. 在这些论文中，推导了由椭圆面向圆球面投影时的公式，并作出了详细证明，

这套理论在今天仍有应用价值. 汉诺威公国的大地测量工作直到 1848 年才结束，这项大地测量史上的巨大工程，如果没有高斯在理论上的仔细推敲，在观测上力图合理精确，在数据处理上尽量周密细致的出色表现，就不能完成. 在当时条件下布设这样大规模的大地控制网，精确地确定 2 578 个三角点的大地坐标，可以说是一项了不起的成就.

日光反射仪由于要解决如何用椭圆在球面上的正形投影理论解决大地测量问题，高斯亦在这段时间从事曲面和投影的理论，这成了微分几何的重要基础. 他独自提出不能证明欧氏几何的平行公设具有“物理的”必然性，至少不能用人类理智，也不能给予人类理智以这种证明. 但他的非欧几何的理论并没有发表，也许是因为对处于同时代的人不能理解该理论的担忧，后来相对论证明了宇宙空间实际上是非欧几何的空间，高斯的思想被近 100 年后的物理学接受了. 当时高斯试图在汉诺威公国的大地测量中通过测量 Harz 的 Brocken——Thuringer Wald 的 Inselsberg——格丁根的 Hohen Hagen 三个山头所构成的三角形的内角和，以验证非欧几何的正确性，但未成功. 高斯的朋友鲍耶的儿子雅诺斯在 1823 年证明了非欧几何的存在，高斯对他勇于探索的精神表示了赞扬. 1840 年，罗巴切夫斯基又用德文写了《平行线理论的几何研究》一文. 这篇论文发表后，引起了高斯的注意，他非常重视这一论证，积极建议格丁根大学聘请罗巴切夫斯基为通信院士. 为了能直接阅读他的著作，从这一年开始，63 岁的高斯开始学习俄语，并最终掌握了这门外语. 最终高斯成为微分几何的始祖(高斯、雅诺斯、罗巴切夫斯基)中最重要的一人.

19 世纪 30 年代，高斯发明了磁强计，辞去了天文台的工作，而转向物理研究. 他与韦伯(1804—1891)在电磁学的领域共同工作. 他比韦伯年长 27 岁，以亦师亦友的身份进行合作. 1833 年，通过受电磁影响的罗盘指针，他向韦伯发送了电报. 这不仅仅是韦伯的实验室与天文台之间的第一个电话电报系统，也是世界首创，尽管线路才 8 千米长. 1840 年他和韦伯画出了世界第一张地球磁场图，而且定出了地球磁南极和磁北极的位置，并于次年得到美国科学家的证实.

高斯研究数个领域，但只将他思想中成熟的理论发表. 他经常提醒他的同事，该同事的结论已经被自己很早的证明，只是因为基础理论的不完备性而没有发表. 批评者说他这样是因为极爱出风头. 实际上高斯只是一部疯狂的打字机，将他的结果都记录起来. 在他死后，有 20 部这样的笔记被发现，才证明高斯的宣称是事实. 一般认为，即使这 20 部笔记，也不是高斯全部的笔记. 下萨克森州和格丁根大学图书馆已经将高斯的全部著作数字化并置于互联网上.

8.4　列联表独立性分析案例

教材线索

教材由实际问题出发说明分析这些问题需要考察两种因素的关系，提出列联表的独立性分析就是分析两种因素是否相互独立的方法，并通过对“患肺癌与吸烟是否有关?”这一案例分析来学习列联表的独立性分析方法.

教学目标

（一）知识与技能

通过对典型案例(如“患肺癌与吸烟是否有关?”等)的探究，了解独立性检验(只要求 2×2 列联表)的基本思想、方法及初步应用.

（二）过程与方法

让学生经历数据处理的过程，会用所学知识对具体案例进行检验，提高探索解决问题的能力.

（三）情感、态度与价值观

通过独立性检验的基本思想的学习，让学生真正对统计思维和确定思维差异有一定的理解，体会到统计在现实生活的广泛应用，从实例中发现问题，提高学习兴趣，激发学习积极性和主动性，不断自我完善，养成不断探求知识完善自我的良好态度.

教材分析

1. 重点：

理解独立性检验的基本思想及基本步骤.

2. 难点：

利用随机变量 χ^2 来确认“两个分类变量有关系”这一结论成立的可信程度.

3. 独立性检验思想方法的学习重在使用. 这部分内容是已学统计内容的深化，反映了对已学知识的螺旋式上升的认识过程，也充分体现了这种思想的应用价值. 在应用中不断提高对这种思想方法的认识.

4. 分类变量：取不同的值，表示个体所属的不同类型，这类变量称为分类变量. 如性别、国籍、宗教信仰等.

5. 利用独立性检验来考察两个分类变量 X 与 Y 是否有关的具体做法是：

(1) 提出假设 H_0：X 与 Y 无关；

(2) 根据 2×2 列联表与公式(1)计算 χ^2 的值；

(3) 查对临界值，作出判断.

临界值表

$P(\chi^2\geqslant x_0)$	0.50	0.40	0.25	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
x_0	0.455	0.708	1.323	2.072	0.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

例如：(1) 如果 $\chi^2>10.828$，就有99.9%的把握认为“X 与 Y 有关”；

(2) 如果 $\chi^2>6.635$，就有99%的把握认为“X 与 Y 有关”；

(3) 如果 $\chi^2>3.841$，就有95%的把握认为“X 与 Y 有关”；

如果 $\chi^2\leqslant3.841$，就认为没有充分的证据显示“X 与 Y 有关”.

6. 利用随机变量来确定在多大程度上可认为“两个分类变量有关系”的方法称为两个分类变量的独立性检验. 独立性检验的基本思想类似于反证法. 要确认“两个分类变量有关系”这一结论成立的可信度，就要首先假设结论不成立，即假设“两个分类变量没有关系”成立，在该假设下构造的随机变量 χ^2 应该很小. 如果由观测数据计算得到的 χ^2 的观测值很大，则在一定程度上说明假设不合理.

7. 实际解决问题时，只凭列联表的数据下结论不够确切，原因是列联表中的数据是样本数据，它只是总体的代表，具有随机性. 用列联表检验的方法确认所得结论，能够确切判断在多大程度上适用于总体.

8. 运用独立性检验的基本思想、方法解决实际问题得出的结论往往是有条件的，不能不顾条件扩大范围使用. 如数据来自于医院的住院病人，因此题目中的结论能够很好地适用于住院的病人群体，而这个结论推广到其他群体则可能会出现错误，除非有其他的证据表明可以进行这种推广.

教学建议

1. 教学中应用实例分析总结得出独立性检验的意义，并且认真体会独立性检验的基本思路类似于反证法，会用类比的思想方法得出独立性检验的基本步骤. 重点是了解独立性检验的思想方法，对其理论基础不作要求，避免学生靠单纯记忆和机械套用公式进行计算. 另外，通过这种思想方法学习，让学生真正对统计思维和确定思维之间的差异有一定的理解.

2. 提供学生感兴趣的典型实例，激发学生的学习兴趣.

教学中，教师首先要选择实际的、学生感兴趣的、能反映统计方法的典型案例，组织学生就如何解决案例中的问题展开讨论，以激发学生的学习兴趣，标准中已经提供了一些典型案例，教师还可以自己收集一些实例.

3. 鼓励学生探索解决问题的方法，经历数据处理的过程.

在选择完适当的统计案例并进行讨论后，教师应鼓励学生尝试探索解决问题的方法，

以使他们经历数据处理的过程，培养他们对数据的直观感觉，认识统计方法的特点(如统计推断可能犯错误，估计结果的随机性)，体会统计方法应用的广泛性. 教师还应尽量给学生提供一定的实践活动机会，选择某些案例，要求学生亲自实践.

4. 虽然这部分所涉及的统计方法对学生来说是比较陌生的，但教师不宜直接介绍方法，让学生模仿应用，而要让学生自己设计解决问题的方案，并通过交流和引导使学生认识到所学方法的基本思想. 因为统计学习的一个主要目标是培养学生处理数据的能力，而这一能力需要建立在学生亲自处理数据、解决问题的基础上.

5. 在 2×2 列联表独立性检验的教学中，教师应指导学生关心如何选用一个量，用它的大小来说明独立性是否成立，从直观上关注其方法的合理性，至于最后选取的量及其大小的界定超出了高中的范围，可以只要求学生查表比较结果，使之能够操作即可.

例题解析

例 用两种检验方法对某食品做沙门氏菌实验，结果如下. 试比较两种方法和阴性结果是否有关系.

	阳性	阴性	合计
荧光抗体法	160	5	165
常规培养法	26	48	74
合计	186	53	239

解 提出假设 H_0：两种方法与阴性没有关系.

由题意可知，$a=160$，$b=5$，$c=26$，$d=48$，$a+b=165$，$c+d=74$，$a+c=186$，$b+d=53$，$n=a+b+c+d=239$，将它们分别代入公式得

$$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}\approx 113.185.$$

查表 8.4 可知，当 H_0 成立时，$P(\chi^2\geqslant 10.828)\approx 0.001$，即当 H_0 成立时，$\chi^2\geqslant 10.828$ 的概率约为 0.001(或 0.1%)，而这里的 $\chi^2\approx 113.185$ 远大于 10.828.

因此，我们有 99.9%的把握认为它们之间有关系.

点评 本题属于典型的直接运用独立性检验的步骤进行解题的范例. 但我们要注意到这样一个问题：如果 2×2 列联表中的 $\frac{a}{c}$ 的值和 $\frac{b}{d}$ 的值相等或较接近，则两分类变量无关，若两比值相差较大，则可初步估计两分类变量有关联，但究竟是否有关联，还需要进一步运用例中方法通过计算来判断.

相关链接

χ^2 统计量的意义

为了便于理解，现结合一实例说明 χ^2(读作卡方)统计量的意义. 根据遗传学理论，动

物的性别比例是 1∶1. 统计某羊场一年所产的 876 只羔羊中，有公羔羊 428 只，母羔羊 448 只. 按 1∶1 的性别比例计算，公、母羔羊均应为 438 只. 以 A 表示实际观察次数，T 表示理论次数，可将上述情况列成表如下：

羔羊性别实际观察次数与理论次数

性别	实际观察次数(A)	理论次数(T)	$A-T$	$(A-T)^2/T$
公	428 (A_1)	438 (T_1)	-10	0.228 3
母	448 (A_2)	438 (T_2)	10	0.228 3
合计	876	876	0	0.456 6

从上表可以看出，实际观察次数与理论次数存在一定的差异，这里公、母各相差 10 只. 这个差异是属于抽样误差(把对该羊场一年所生羔羊的性别统计当做是一次抽样调查)、还是羔羊性别比例发生了实质性的变化？要回答这个问题，首先需要确定一个统计量用以表示实际观察次数与理论次数偏离的程度；然后判断这一偏离程度是否属于抽样误差，即进行显著性检验. 为了度量实际观察次数与理论次数偏离的程度，最简单的办法是求出实际观察次数与理论次数的差数. 从表看出：$A_1-T_1=-10$，$A_1-T_2=10$，由于这两个差数之和为 0，显然不能用这两个差数之和来表示实际观察次数与理论次数的偏离程度. 为了避免正、负抵消，可将两个差数 A_1-T_1，A_2-T_2 平方后再相加，即计算 $\sum(A-T)^2$，其值越大，实际观察次数与理论次数相差亦越大，反之则越小. 但利用 $\sum(A-T)^2$ 表示实际观察次数与理论次数的偏离程度尚有不足. 例如某一组实际观察次数为 505，理论次数为 500，相差 5；而另一组实际观察次数为 26，理论次数为 21，相差亦为 5. 显然这两组实际观察次数与理论次数的偏离程度是不同的. 因为前者是相对于理论次数 500 相差 5，后者是相对于理论次数 21 相差 5. 为了弥补这一不足，可先将各差数平方除以相应的理论次数后再相加，并记之为 χ^2，即

$$\chi^2=\sum\frac{(A-T)^2}{T}.$$

也就是说 χ^2 是度量实际观察次数与理论次数偏离程度的一个统计量，χ^2 越小，表明实际观察次数与理论次数越接近；$\chi^2=0$，表示两者完全吻合；χ^2 越大，表示两者相差越大.

对于上表中的数据，可计算得

$$\chi^2=\sum\frac{(A-T)^2}{T}=\frac{(-10)^2}{438}+\frac{10^2}{438}=0.456\ 6.$$

这表明实际观察次数与理论次数是比较接近的.

8.5 一元线性回归案例

教材线索

教材通过对典型案例“船只数量与被撞死的海牛数的关系”的探究，揭示了统计中用相关系数 r 来衡量两个变量之间线性关系的强弱，在前面已经学习建立回归直线的基础上，介绍一元线性回归模型，进而通过案例“出口贸易额与 GDP 数据的关系”巩固所学的知识.

教学目标

（一）知识与技能

了解样本、样本容量、线性回归的概念，理解变量之间的相关系数的概念、相关系数、一元线性回归直线等概念.

（二）过程与方法

熟练利用公式求相关系数，掌握求一元线性回归直线方程 $\hat{y}=bx+a$ 的方法，加深理解线性回归模型的意义. 判断变量间是否线性相关，了解非线性相关转化为线性相关的方法.

（三）情感、态度与价值观

培养学生分析问题、解决问题的能力，收集数据和处理数据的能力.

教材分析

1. 重点：

让学生了解线性回归的基本思想和方法.

2. 难点：

掌握建立回归模型的基本步骤.

3. 变量之间存在着两类关系：一类关系是函数关系，这是确定性关系；另一类关系是相关关系，这是非确定性关系. 这里仅介绍两个变量中，一个变量为可控制变量，另一类变量为随机变量的情形. 例如在水稻产量与施肥量的关系中，施肥量是可控制变量，而水稻产量是随机变量.

在现实生活中，相关关系是大量存在的. 从某种意义上看，函数关系是一种理想的关系模型，而相关关系是一种更为一般的情况. 因此研究相关关系，不仅可使我们处理更为广泛的数学应用问题，还可使我们对函数关系的认识上升到一个新的高度.

4. 我们研究的是回归分析中最简单、也是最基本的一种类型：一元线性回归分析. 这类似于代数方程理论中的一元一次方程.

首先，在具有相关关系的变量中，如果因变量仅与一个自变量有关，相应的统计分析称为一元回归分析；如果因变量与多个自变量有关，相应的统计分析称为多元回归分析. 其次，因变量与自变量的关系，有线性的和非线性的两种，因此相应的统计分析分别称为线性回归分析和非线性回归分析. 可见，本小节中研究的一元线性回归分析，是回归分析中最简单的一种情形，它不仅有着广泛的直接应用，而且是进一步学习回归分析的基础.

5. 对两个变量的线性相关性进行检验，教材中采用的是相关系数检验法. 相关系数取值在[-1，1]之间，该值刻画出两个变量之间关系的有无、强弱和方向. $|r|$ 越接近于1，表明相关程度越好；$|r|$ 越接近于0，表明相关程度越差. 相关性检验是一种假设检验. 这种检验的统计假设是两个变量不具有线性相关关系. 由于假设检验并非本小节讨论的重点，这项内容在处理上力求简化.

教学建议

1. 建议在本章学习新课之前先回顾已学过的相关内容，可以通过具体问题让学生复习统计的有关概念与方法. 要强调，统计学最关心的是：(1) 如何抽取数据；(2) 如何从数据中提取信息；(3) 所得结论的可靠性程度.

2. 通过对典型案例的讨论，了解回归分析的基本思路、方法及其初步应用. 回归分析是对其有相关关系的两个变量进行统计分析的一种常用方法. 教学中应通过生活中的详实事例理解回归分析的方法，其步骤为通过散点图直观地了解两个变量的关系，然后，通过最小二乘法建立回归模型，最后通过分析随机误差、相关指数等，评价模型的好坏. 重点是了解回归分析的思想方法，对其理论基础不作要求，避免学生单纯记忆和机械套用公式进行计算.

3. 通常在具体问题里先进行相关性检验. 通过检验确认两个变量具有线性相关关系后，再求其线性回归方程. 否则，所求的线性回归方程是无意义的. 鼓励学生使用计算器、计算机等现代技术手段来处理数据，有条件的学校还可运用一些常见的统计软件解决实际问题.

4. “回归分析”这一节的选材相当完整，从收集两个变量的数据开始，先画散点图，进而直观判断它们是否线性相关，然后在相关前提下尝试用线性回归模型来拟合，最后还通过回归直线得到预测值. 教学时应让学生结合教材案例体会这一完整的过程.

5. 在教学中，首先要让学生理解这里讨论的相关关系和过去学的函数关系的区别，这很重要. 在估计问题中，应要求学生自己探索回归直线的求法(事实上，通过教师启发学生可以给出许多方法). 在统计中，重要的是寻找好的方法，而不是套用公式计算. 从历史上看，拉普拉斯、欧拉等许多大数学家都曾为寻找这一回归直线而努力，他们的做法并不成功. 后来，由勒让德、高斯提出了最小二乘法后才取得成功. 套用公式计算回归系数，对

学生来说并不困难．但这里应该让学生体会到，数学中介绍的方法是前人经过长期探索才得到的，体会在统计中寻找方法的重要性．

作为教师应该清楚，之所以用最小二乘法，是因为这样得到的估计量，在许多标准下是好的，而这些标准我们在中学无法讲授．另外，根据实际问题的需要，完全可以用别的方法，例如，把误差的平方改为误差的绝对值，或把误差改为求点到直线的距离等等．人们现在正是这样做的，不应该让学生错误地以为最小二乘法是绝对的、永远是最优的．

应该让学生关注方程的意义和合理性．可以通过例子，提示回归系数计算的“不合理性”．比如，如果在圆上取一组点，仍可套用公式，用这组点的坐标得到一个回归直线方程，这样的直线显然是没意义的．

教学中要引导学生通过实例，从感性到理性逐层深入地探求对线性相关程度进行检验的统计量(相关系数)，从而建立线性回归分析的基本算法步骤．对为什么相关系数 r 可以估计相关的程度，只要求从直观上加以感受，不必介绍理论依据．

例题解析

例 1　下面是我国 1990—2000 年出口贸易额 x(百亿美元)和我国 GDP(国内生产总值)y(百亿元人民币)的数据．

年份	1990	1991	1992	1993	1994	1995
x	6.21	7.19	8.49	9.17	12.1	14.88
y	185.48	216.18	266.38	346.34	497.59	584.78
年份	1996	1997	1998	1999	2000	
x	15.11	18.29	18.37	19.49	24.92	
y	678.85	744.63	783.45	820.68	894.42	

建立 y 与 x 之间的回归方程．

具体解答见教材 P.93，此处略．

点评　通过画散点图、计算相关系数、建立回归直线、利用回归直线作出预测的过程，让学生进一步巩固所学的知识，也体现线性回归模型的广泛的用途．

例 2　某地区对本地企业的人均资本 x (万元)与人均产出 y (万元)进行了一次抽样调查，下表是这次抽查中所得到的各企业的数据：

人均资本 x(万元)	3	4	5.5	6.5	7	8	9	10.5	11.5	14
人均产出 y(万元)	4.12	4.67	8.68	11.01	13.04	14.43	17.50	25.46	26.66	45.20

(1) 若 y 与 x 之间具有近似关系 $y \approx ax^b$(a，b 为常数)，试根据表中数据估计 a 和 b 的值；

(2) 估计当企业人均资本为 16 万元时的人均产出(精确到 0.01)．

具体解答见教材 P.95，此处略．

点评 由于在实际问题中，有时两个变量之间的关系并不是线性关系，如本例，这需要我们根据专业知识或散点图，选择适当的曲线方程，然后通过适当的变量代换，把非线性方程化为线性回归方程，从而确定未知参数．教材列举出了一些常用的曲线方程，并给出相应的化为线性回归方程的换元公式，希望学有余力的学生能掌握．

相关链接

用 excel 作回归曲线和求回归方程的操作步骤

作回归曲线的步骤：

1．将数据输入 excel 表格中，行表示或列表示均可．

2．选定数据区域，然后单击工具栏中的“图表导向”，弹出对话框，选择“xy 散点图”，再选择子图表中的第一个散点图．

3．按“下一步”，大概的图就完成了，它会让你选择所产生的数据是“行”或“列”，根据你的要求选择，再点击下一步，可以将行或列的标题内容填入．接着点击“下一步”之后点“完成”．图表就完成了．

4．选择图表上的任意一个点(选中一个点之后，其余的点都变为黄色了)，单击右键，选择“添加趋势线”．在“添加趋势线”对话框中的“类型”选“线性”，在“选项”中把“显示公式”和“显示 R 平方值”点上，如果你不想设置截距，就不用点击“设置截距”．然后确定．

求回归方程的步骤：

1．将数据输入 excel 表格中；

2．选择“插入”、“函数”、“统计”；

3．“slope”，点箭头，选择 x，y，可以算出斜率；

4．“intercept”可以算出截距．

教材习题参考解答

8.1　练习

D，B.

习题 1

(1) 不能.

(2) 采取随机对照的试验方案，参加试验的高血压患者 200 个，对每个高血压患者用投掷一枚硬币的方法决定是否将他编入试验组：正面朝上分在试验组，否则分在对照组. 除了试验的设计人员，连医生也不知道哪个高血压患者分在试验组，哪个高血压患者分在对照组. 然后给分在试验组的高血压患者使用磁疗手表；给分在对照组的高血压患者使用外观完全相同的普通手表，让他们认为也使用了磁疗手表.

(3) 设计中用投掷一枚硬币的方法说明试验组和对照组是随机选取的.

(4) 在设计中使用了“安慰剂”，“安慰剂”是外观完全相同的普通手表.

(5) 不能让医生知道.

8.2.1　练习

(1) 0.02.

(2) 0.07.

(3) $1-(0.01+0.02)=0.97$.

(4) 0.01.

习题 2

1. (1) 0.48.

   (2) $1-(0.01+0.06+0.16)=0.77$.

   (3) 0.74.

   (4) 0.5

2. (1) $\dfrac{C_4^3}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{30}$.

   (2) $\dfrac{C_6^3}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{6}$.

   (3) $\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{30}=\dfrac{1}{5}$.

8.2.2 练习

(1) $\because P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{C_3^1C_3^1}{C_6^1C_6^1}=\frac{3}{4}$, $P(A\cap B)=\frac{C_3^1C_3^1}{C_6^1C_6^1}=\frac{1}{4}$, $\therefore P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1}{3}$.

(2) $\because P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{36}$, $\therefore P(B|A)=\frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}}=\frac{1}{6}$.

(3) $\because P(A\cap B)=\frac{1}{36}$, $P(A)=\frac{5}{36}$, $\therefore P(B|A)=\frac{\frac{1}{36}}{\frac{5}{36}}=\frac{1}{5}$.

习题 3

(1) $P(B|A)=\frac{C_4^1C_{35}^{12}}{C_{39}^{13}}\approx 0.411$.

(2) $P(A|B)=\frac{C_3^0C_{36}^{13}}{C_{39}^{13}}\approx 0.284$.

(3) $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B|A)\approx\frac{C_4^0C_{48}^{13}}{C_{52}^{13}}\times 0.411=0.125$.

(4) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{C_4^0C_{48}^{13}}{C_{52}^{13}}+\frac{C_4^1C_{48}^{12}}{C_{52}^{13}}-0.125\approx 0.618$.

8.2.3 练习

(1) 0.04.

(2) 0.32.

(3) 0.64.

习题 4

1. (1) $\frac{1}{81}$.

   (2) $\frac{1}{81}$.

   (3) $\frac{2}{81}$.

   (4) $\frac{1}{9}$.

2. (1) $\frac{144}{133\ 225}$.

(2) $\frac{288}{133\ 225}$.

3. (1) 0.36.

(2) 0.144.

(3) 0.144.

4. 抽取 1 000 张奖券不能中奖的概率是 $0.999\ 9^{1\ 000}$，能中奖的概率是 $1-0.999\ 9^{1\ 000}$.

5. 用 A_i 表示 i 次试验成功，B 表示 4 次试验中恰有 2 次成功，则 $B=A_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4+A_1\overline{A}_2A_3\overline{A}_4+A_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4+\overline{A}_1A_1A_3\overline{A}_4+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3A_4+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3A_4$.

因为 $A_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4$，$A_1\overline{A}_2A_3\overline{A}_4$，…，$\overline{A}_1\overline{A}_2A_3A_4$ 两两互斥，

$$\begin{aligned}\therefore P(B)&=P(A_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4)+P(A_1\overline{A}_2A_3\overline{A}_4)+\cdots+P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3A_4)\\&=6p^2(1-p)^2\\&=\mathrm{C}_4^2p^2(1-p)^2.\end{aligned}$$

8.2.4 练习

1. $P(X=k)=\frac{1}{6}$.

2. C.

习题 5

1. $P(X=3)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$，$P(X=10)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$.

2. (1) $a=\frac{1}{15}$.

(2) $P\left(\frac{1}{10}<X<\frac{7}{10}\right)=P\left(X=\frac{1}{5}\right)+P\left(X=\frac{2}{5}\right)+P\left(X=\frac{3}{5}\right)=\frac{1}{15}+\frac{2}{15}+\frac{3}{15}=\frac{2}{5}$.

3. $P(X\leqslant 6)=P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)=\frac{\mathrm{C}_4^4}{\mathrm{C}_7^4}+0+\frac{\mathrm{C}_4^3\mathrm{C}_3^1}{\mathrm{C}_7^4}=\frac{1}{35}+\frac{12}{35}=\frac{13}{35}$.

4.

X	0	1	2	3	4
P	$(1-p)^4$	$\mathrm{C}_4^1p(1-p)^3$	$\mathrm{C}_4^2p^2(1-p)^2$	$\mathrm{C}_4^3p^3(1-p)$	p^4

8.2.5 练习

1. (1) 0.6.

(2) $0.4\times 0.6=0.24$.

(3) $0.4^5=\left(\frac{2}{5}\right)^5=\frac{32}{3\ 125}$.

2. $P(X\geqslant 3)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=\frac{C_{10}^{3}C_{20}^{2}}{C_{30}^{5}}+\frac{C_{10}^{4}C_{20}^{1}}{C_{30}^{5}}+\frac{C_{10}^{5}}{C_{30}^{5}}=\frac{1\ 514}{7\ 917}$.

习题 6

1. P(产品被接收)$=P(X=10)=C_{10}^{10}\times 0.9^{10}\approx 0.349$.

2. (1) $P(X=2)=C_{5}^{2}\times 0.2^{2}\times 0.8^{3}=0.204\ 8$.

(2) $P(X=5)=C_{5}^{5}\times 0.2^{5}=0.000\ 32$.

(3) $P(X\geqslant 1)=1-P(X=0)=1-C_{5}^{0}\times 0.8^{5}=0.672\ 32$.

3. P(一班候选人中恰有 3 名女生)$=\frac{C_{20}^{3}C_{23}^{2}}{C_{43}^{5}}$

4. $\frac{C_{9}^{3}C_{34}^{6}}{C_{43}^{9}}$.

8.2.6 练习

1. $E(Z)=6\times\frac{1}{6}=1$.

2. 甲、乙的成绩的均值分别是 90 和 25.

习题 7

1. np.

2. $E(X)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}=3.5$.

8.2.7 练习

1. $E(X)=3.5$， $D(X)=\frac{35}{12}$, $\sqrt{D(X)}=\frac{\sqrt{105}}{6}$.

2. $E(Z)=10\times 0.8=8$, $D(Z)=10\times 0.8\times(1-0.8)=1.6$.

习题 8

1. $E(X)=1.32$，$E(2X+5)=7.64$, $D(X)=7.993\ 6$，$D(2X+5)=7.974\ 4$.

2. 平均收益为 697 万元，标准差约为 462.84 万元.

3. 平均赢利为 -0.4 元，标准差约为$\frac{\sqrt{2(10^{5}-2)}}{10^{5}}$元.

4. (1) $E(X)=10\times 0.4+(-0.05)\times 0.6=3.97$.

(2) $\sigma^{2}=(10-3.97)^{2}\times 0.4+(-0.05-3.97)^{2}\times 0.6\approx 24.24$.

(3) $\sigma\approx 4.92$.

5. 由计算可得 $E(X_1)=E(X_2)$，$D(X_1)<D(X_2)$，所以两家单位的工资均值相等，但甲单位不同职位的工资相对集中，乙单位不同职位的工资相对分散. 这样，如果你希望不同职位的工资差距小一些，就选择甲单位；如果你希望不同职位的工资差距大一些，就选择乙单位.

8.3　练习

1. (1) 0.471 3.

(2) 0.466 4.

2. 1.818 6.

习题 9

1. (1) 0.997 0.

(2) 0.691 5.

(3) 0.975 3.

2. (1) 因为 $\sigma=1$，由定理得 $P(|X-\mu|\leqslant 1.96)=P\left(\frac{|X-\mu|}{\sigma}\leqslant 1.96\right)=0.95$.

(2) 因为 $\sigma=1.5$，由定理得 $P(|X-\mu|\leqslant 2.94)=P\left(\frac{|X-\mu|}{\sigma}\leqslant 1.96\right)=0.95$.

3. 0.379 0.

4. 0.158 7.

8.4　练习

21.52%.

习题 10

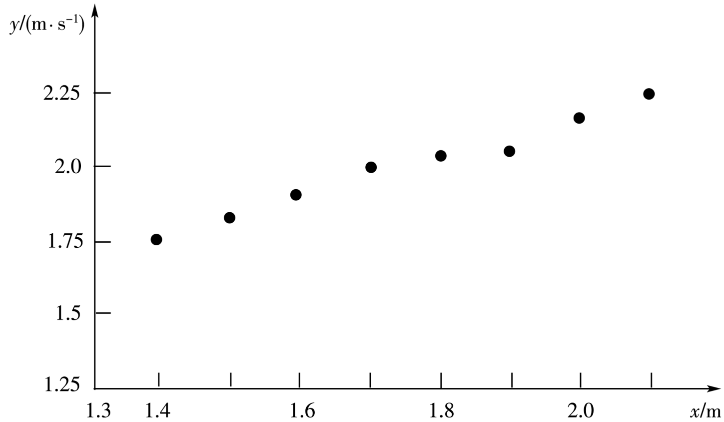
$\chi^2=\frac{100\times(15\times 46-35\times 4)^2}{50\times 50\times 19\times 81}=7.86>6.635$，于是我们有 99% 的把握认为这种新药有效.

8.5　练习

由于 $r=0.798$，因为表明身高与体重有很强的线性相关关系，且 $\hat{y}=0.849x-85.712$；对于身高 172 cm 的女生来说，预报其体重为 60.316 kg.

习题 11

1.（1）



（2）y 对 x 的回归直线方程为

$$\hat{y}=\hat{a}+bx=0.694+0.733x.$$

（3）由(2)中求出的回归直线方程，把 $x=1.95$ 代入，易得

$$\hat{y}=0.694+0.733\times1.95\approx2.12\ (\text{m/s}).$$

计算结果表明，当水深为 1.95 m 时可以预测渠中水的流速约为 2.12 m/s.

复习题八

1.（1）不能作出新药比常用药更有效的结论.

（2）采用随机对照试验.

（3）对参加试验的 20 位患者用投掷一枚硬币的方法决定是否将他编入试验组：正面朝上分在试验组，否则分在对照组.

（4）本例中可以使用安慰剂. 给分在试验组的患者使用新的安眠药；给分在对照组的患者使用外观完全相同的非助眠的普通药品，让他们认为也使用了新的安眠药.

2. A.

3.（1）$P(X=3)=\mathrm{C}_6^3\left(1-\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{625}{11\ 664}$.

（2）$P(x\geqslant3)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)$

$$=\mathrm{C}_6^3\left(1-\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right)^3+\mathrm{C}_6^4\left(1-\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^4+\mathrm{C}_6^5\left(1-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^5+\mathrm{C}_6^6\left(\frac{1}{6}\right)^6$$

$$=\frac{1\ 453}{23\ 328}.$$

（3）$P(X<3)=1-P(X\geqslant3)=1-\frac{1\ 453}{23\ 328}=\frac{21\ 875}{23\ 328}$.

（4）$P(2\leqslant X\leqslant5)=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=\mathrm{C}_6^2\left(1-\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{1}{6}\right)^2+$ $\mathrm{C}_6^3\left(1-\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right)^3+\mathrm{C}_6^4\left(1-\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^4+\mathrm{C}_6^5\left(1-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^5=\frac{1\ 535}{5\ 832}$.

（5）因为 $X\sim B\left(6,\frac{1}{6}\right)$，所以 $E(X)=\frac{1}{6}\times6=1$.

(6) $D(X)=6\times\frac{1}{6}\times\left(1-\frac{1}{6}\right)=\frac{5}{6}$.

4.(1) $E(X)=3.62$. (2) $D(X)=2.235\ 6$.

5. 每天平均花 1.314 元钱打电话，方差约为 2.235 6.

6.(1) 0.

(2) $\frac{C_{96}^{9}}{C_{100}^{9}}$.

(3) $\frac{C_{96}^{6}C_{4}^{3}}{C_{100}^{9}}$.

(4) $\frac{96}{100}\times 9=8.64$.

(5) $\frac{4}{100}\times 9=0.36$.

7.(1) $\frac{C_{13}^{5}}{C_{52}^{5}}$.

(2) $\frac{C_{13}^{2}C_{13}^{3}}{C_{52}^{5}}$.

(3) $\frac{C_{13}^{2}C_{13}^{2}C_{13}^{1}}{C_{52}^{5}}$.

(4) $\frac{C_{13}^{2}C_{39}^{3}}{C_{52}^{5}}$

8.(1) $\frac{C_{4}^{2}C_{48}^{6}}{C_{52}^{8}}$.

(2) $\frac{C_{4}^{3}C_{48}^{5}}{C_{52}^{8}}$.

(3) $\frac{C_{4}^{2}C_{4}^{3}C_{44}^{3}}{C_{52}^{8}}$.

(4) $\frac{6\times 4}{C_{52}^{8}}=\frac{24}{C_{52}^{8}}$.

9.(1) 0.986 1.

(2) 0.941 3.

10. 根据列表中的数据，得到：

$$\chi^2=\frac{326\times(19\times 149-17\times 141)}{160\times 166\times 36\times 290}\approx 0.000\ 51<3.841,$$

所以判死刑和被告的肤色无关.

11.(1) $r=0.986$.

(2) $y=9.723\ 2x-1.852\ 7$.

(3) 7 年时 66.61 万元，11 年时 105.1 万元.

12. $p=\frac{5}{36}\times\frac{1}{4}=\frac{5}{144}$.

13.(1) $p_1=\frac{1}{12^{20}}$.

(2) $p_2=C_{20}^{5}\left(\frac{1}{12}\right)^5\left(\frac{11}{12}\right)^{15}$.

(3) 因为 $X\sim B\left(20,\ \frac{1}{12}\right)$，所以 $E(X)=20\times\frac{1}{12}=\frac{5}{3}$.

14. 设样本空间 $\Omega=P\ \{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n\}$，其中导致 B，A 和 $A\cap B$ 发生的基本事件分别为 m，p，q 个（$q\leqslant m$，$q\leqslant p$），如果 A 发生，则导致 B 发生的 p 个基本事件中至少有一个发生，在这个条件下导致 B 发生的基本事件仅有 q 个，所以 $P(B|A)=\frac{q}{p}$，$P(A\cap B)=\frac{q}{n}$，$P(A)=\frac{p}{n}$，则 $P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$.

15. $P(A\cap\bar{B})=P(A)-P(A\cap B)=P(A)-P(A)P(B)=P(A)[1-P(B)]=P(A)P(\bar{B})$.

16. (1) $p_1=C_6^0 0.3^6=7.29\times10^{-4}$.

(2) $p_2=C_6^3 0.3^3\times0.7^3\approx0.19$.

(3) 因为 $X\sim B(6,0.7)$，所以 $E(X)=6\times0.7=4.2$.

(4) $D(X)=6\times0.7\times0.3=1.26$，$\sqrt{D(X)}\approx1.12$.

17. 因为 $X\sim B(9,0.9)$，所以 $E(X)=9\times0.9=8.1$.

18. 因为 $X\sim B(10,0.6)$，所以 $E(X)=10\times0.6=6$，$D(X)=10\times0.6\times0.4=2.4$.

19. X 为 1，-0.25. $P(X=1)=\frac{1}{4}$，$P(X=-0.25)=\frac{3}{4}$，$E(X)=1\times\frac{1}{4}-0.25\times\frac{3}{4}=\frac{1}{16}$.

20. 捞一条鱼上来是鲤鱼的概率 $p=\frac{800}{1\ 000}=\frac{4}{5}$，45 条鱼中的鲤鱼条数为 X，$X\sim B\left(45,\ \frac{4}{5}\right)$，$E(X)=45\times\frac{4}{5}=36$，$D(X)=45\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}=7.2$.

21. 收益 X 为 4 950，-50，$P(X=4\ 950)=0.6$，$P(X=-50)=0.4$.

平均收益 $E(X)=4\ 950\times0.6-50\times0.4=2\ 950$(万元).

方差 $D(X)=(4\ 950-2\ 950)^2\times0.6+(-50-2\ 950)^2\times0.4=6\ 000\ 000$.

标准差 $\sqrt{D(X)}\approx2\ 449.489\ 7$(万元).

22. (1) 0.216.

(2) 0.288.

23. $x\approx0.224\ 5$. 我们不能推断在样本所代表的总体中左利手与性别有关.

24. $a\approx1.721\ 7$，$b\approx0.145\ 6$.

25. 设需要 n 门高炮，依题意得：$1-(1-0.8)^n=0.99$，解得 $n\approx2.86$，因此需要 3 门高炮.

26. (1) 0.8.

(2) $0.2\times0.2\times0.8=0.032$.

(3) 设需要试跳 n 次，依题意得，$1-(1-0.8)^n\geqslant0.99$，解得 $n>2$，因此至少需要试跳 3 次.

27. (1) 由表中数据得：$\sum_{i=1}^{4}x_iy_i=52.5$，$\bar{x}=3.5$，$\bar{y}=3.5$，$\sum_{i=1}^{4}x_i^2=54$，

$\therefore b=\frac{52.5-4\times3.5^2}{54-4\times3.5^2}=0.7$.

故 $a=3.5-0.7\times3.5=1.05$，

$\therefore$所求线性回归方程为：$y=0.7x+1.05$.

(2) 将 $x=10$ 代入回归直线方程，得 $y=0.7\times10+1.05=8.05$（小时）.

$\therefore$试预测加工 10 个零件需要 8.05 个小时.