编 写 说 明

本书是《普通高中课程标准实验教科书·选修 4－5（不等式选讲）》的教师教学用书．编写时按教材分章、节安排，每章首先阐述了该章的教学目标、教材说明、课时安排建议、教学建议、评价建议，然后按教材分节编写，每节内容包括教材线索、教学目标、教材分析、教学建议、例题解析、相关链接．在每章的最后给出教材中习题的参考解答．

编写此书的目的是为了帮助教师更好地把握教材，包括教材线索、教学目标、教材分析及教学中应予以关注的重点和难点，所提教学建议及例题解析仅供教师在教学过程中参考．在相关链接中所提供的短文或例题是编者精心编写并与该章、节相关的内容，旨在扩大教师的知识视野，使教师用较高的观点把握教材，不要求学生掌握．

希望本书能成为教师使用教材的好帮手，恳请广大教师在使用过程中提出宝贵意见和建议．谢谢！

编 者

目　　录

第 1 章　基本不等式和证明不等式的基本方法

一、教学目标

1. 借助实数可以比较大小的基本事实，帮助学生复习不等式的基本性质，进而掌握比较两个实数大小的基本方法.

2. 通过揭示不等式的本质特征，帮助学生了解证明不等式的一种基本方法——比较法，掌握用比较法证明不等式的思路与步骤，并能运用比较法证明不等式.

3. 帮助学生发现、证明进而掌握基本不等式，能运用基本不等式证明所求不等式，能运用基本不等式解决一些实际应用问题.

4. 帮助学生掌握证明不等式的另四种基本方法——分析法、综合法、反证法和放缩法.

二、教材说明

1. 本章的学习内容是学生在初中阶段掌握了不等式的基本概念，学会了一元一次不等式、一元一次不等式组、二元一次不等式组，以及学习了高中阶段数学必修五个模块的基础上展开的，同时也是学习“不等式选讲”这一专题其余四章内容的基础.

2. 教材在章图部分概述了本章的学习内容. 紧接着，安排了“数学实验：π 的近似值”. 在实验中，教材以《普通高中数学课程标准（实验）》（以下简称《课标》）所倡导的基本理念为引领，让学生在自主探索、动手实践中体验数学发现和创造的历程；同时，有机地整合了数学课程与信息技术，在介绍“Z+Z 超级画板”的同时，鼓励学生运用计算机进行探索与发现.

3. 在本章的第 1 节，教材以实数的大小关系为出发点，借助实数集与数轴上点集的一一对应关系，得出了比较两个实数大小的基本思想与方法，为本章后续的学习奠定了基础.

4. 教材在不等式的证明方法——比较法、分析法、综合法、反证法和放缩法的编排上作了颇具匠心的处理：在本章的第 2 节介绍“比较法”，在第 5 节介绍“分析法与综合法”，在第 6 节介绍“反证法与放缩法”，而在第 3，4 节安排了“基本不等式”以及“基本不等式实际应用举例”. 如此编排，凸显了“比较法”在不等式证明方法中的基础地位，也使基本不等式的发现水到渠成.

三、课时安排建议

本章教学时间约需 **8** 课时，具体分配如下（仅供参考）：

1.1　实数可以比较大小	1 课时

1.2	比较法证不等式	1课时
1.3	基本不等式	1课时
1.4	基本不等式实际应用举例	1课时
1.5	分析法与综合法	2课时
1.6	反证法和放缩法	2课时

四、教学建议

1. 帮助学生打好基础，发展能力

本章的主要内容是证明不等式的基本方法．教学中，应帮助学生切实理解并掌握不等式的五种基本证明方法．同时，还应该帮助学生理解这些基本方法之间的联系．教学中，应当鼓励学生认真完成教材中的练习，甚至可以适当增加一些练习，以使学生通过练习形成对这些方法的良好感觉，在遇到具体不等式证明时能根据不等式的特点恰当选择相应的方法进行证明.

2. 注重数学知识与实际的联系，发展学生的应用意识和能力

本章的另一主要内容是基本不等式及其实际应用．教学中，应当注重基本不等式在不等式证明中的应用，更应注重基本不等式在解决实际问题中的应用．应充分发掘数学知识与实际问题的联系，体现数学知识的价值，在运用数学知识解决实际问题的过程中发展学生的应用意识和能力.

3. 倡导自主探索，鼓励学生主动地学习

学生是学习的主人．本章的学习内容多数需要学生在反复的自主探索中逐步掌握进而逐步深化．因此，教学中，应当致力于改变教学方法，营造有利于学生自主探索的课堂氛围，鼓励学生主动地学习.

五、评价建议

1. 重视对学生数学学习过程的评价

应当关注学生是否勤于思考、善于思考、坚持思考并不断改进思考的方法与过程．在本章安排的“数学实验”和“阅读与思考”栏目中，对学生是否能积极思考、主动回答，是否愿意和能够与同伴交流对数学学习的体会，是否与他人合作探究数学问题等方面都应给予充分的重视.

2. 正确评价学生运用基本方法证明不等式的能力

不等式的证明方法种类繁多，且技巧性极强，应该严格按《课标》的要求评价学生运用基本方法证明不等式的能力，控制问题的难度.

3. 实施促进学生发展的多元化评价

笔试仍是定量评价的基本方式．但是，不能仅以笔试作为评价的唯一方式．应该把笔试与定性评价、过程评价结合起来，形成有利于促进学生全面发展的多元化评价体系.

1.1 实数可以比较大小

教材线索

教材以实数集与数轴上的点集之间的一一对应关系为切入点，借助数轴直观导入了数轴上的两个点之间的左右位置关系与点所表示的实数之间的大小关系的等价关系，进而得出了两个实数大小的等价关系：$a>b \Leftrightarrow a-b>0$，$a=b \Leftrightarrow a-b=0$，$a<b \Leftrightarrow a-b<0$. 由此得出结论：两个实数可以通过比较它们的差与 0 的大小关系来比较大小，并用三个难度递增的例题帮助学生理解、掌握比较两个实数大小的方法，也为 1.2 节“比较法证不等式”作了铺垫.

教学目标

1. 知识与技能

掌握两个实数的大小与它们的差之间的等价关系，掌握基本的代数式恒等变形.

2. 过程与方法

掌握通过比较两个实数之差与 0 的大小关系来比较两个实数大小的方法，在比较两个实数大小的过程中体会并掌握常用的代数式恒等变形方法.

3. 情感、态度与价值观

借助数轴直观理解并掌握两个实数大小的等价关系，体会“以形助数、数形结合”的思想方法.

教材分析

本节内容是本章内容的基础，也是整个专题的基础. 教材编排的基本结构为“先一般后特殊”，亦即：先从一般意义上介绍比较两个实数大小的方法，再用具体的问题介绍方法的应用. 这样的编排结构符合学生的认知规律.

本节的教学重点在于理解两个实数大小的等价关系，掌握比较两个实数大小的方法；教学难点在于比较两个实数的差与 0 的大小关系时对两个实数的差进行变形的“恰当性”.

教学建议

1. 在两个实数大小的等价关系的教学中，应当鼓励学生动手操作，通过多次的实验，

自主归纳出两个实数大小的等价关系. 如此，既有助于培养学生主动学习的习惯，也能使学生真正理解并掌握两个实数大小的等价关系.

2. 在运用两个实数大小的等价关系比较两个实数大小的教学中，应充分引导学生进行“解后反思”，体会归纳出：对两个实数的差进行变形的“恰当性”在于能够确定变形后的差式的符号，以有效地突破本节教学的难点.

例题解析

1. 例 1 是运用两个实数大小的等价关系比较两个实数大小的一个简单例子，只要学生具有初步的代数恒等变形能力，就能顺利完成. 可以让学生独立完成，但应注意引导学生规范地表述解题过程.

2. 例 2 相对于例 1 而言，难度有所加大，体现在需要用配方法对差式进行变形而后确定差式的符号，这对于部分学生而言，在理解与掌握上会有一定的困难. 教学时，应充分鼓励学生围绕对差式进行变形的目的展开合作交流，探究变形的方法与途径，使学生真正体会对两个实数的差进行变形的“恰当性”之所在.

3. 例 3 是运用两个实数大小的等价关系比较两个实数大小的方法应用于解决实际问题的一个例子，这个例题的解决是以数学建模为基础的. 教学时，应充分引导学生分析题意，把问题转化为比较甲、乙两人分别走完这段路程所用的时间 t_1，t_2 的大小加以解决.

相关链接

1. 关于绝对不等式和条件不等式

(1) 绝对不等式

对于给定的集合 A，若对任意 $x\in A$，不等式 $f(x)\leqslant 0(\geqslant 0)$ 恒成立，则称不等式 $f(x)\leqslant 0(\geqslant 0)$ 是集合 A 上的绝对不等式. 如，例 1 的结论不等式 $(a-1)(a+4)<a^2+3a$，例 2 的结论不等式 $x^2+3>3x$ 都是实数集 $\mathbf{R}$ 上的绝对不等式. 再如，不等式 $|x|\geqslant 0$，$x^2+x+1>0$ 都是实数集 $\mathbf{R}$ 上的绝对不等式；不等式 $x(x-1)\leqslant 0$ 是集合 $A=\{x|0\leqslant x\leqslant 1\}$ 上的绝对不等式.

(2) 条件不等式

只对所讨论集合的某个子集成立的不等式，称为条件不等式. 如，例 3 的结论不等式 $\frac{2s}{a+b}<\frac{s(a+b)}{2ab}$ 是集合 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 上的条件不等式，不等式 $x(x-1)\leqslant 0$ 是集合 $\mathbf{R}$ 上的条件不等式.

(3) 绝对不等式和条件不等式的相对性

绝对不等式与条件不等式是相对而言的. 如不等式 $x(x-1)\leqslant 0$ 对于集合 $\mathbf{R}$ 而言是条件不等式，但对于集合 $A=\{x|0\leqslant x\leqslant 1\}$ 而言是绝对不等式；再如基本不等式 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ 对任何正数 a，b 都成立，因此它对于 $\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}_+$ 而言是绝对不等式，对于集合 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 而言是条件

不等式.

2. 关于二次三项式 ax^2+bx+c 的符号判定

判定二次三项式 $ax^2+bx+c(a>0)$ 符号的基本方法有如下两种:

(1) 配方法

由于 $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$,故:

①若 $\frac{4ac-b^2}{4a}>0$,则 $ax^2+bx+c>0$;

②若 $\frac{4ac-b^2}{4a}=0$,则 $ax^2+bx+c\geqslant 0$,等号当且仅当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时成立;

③若 $\frac{4ac-b^2}{4a}<0$,则

$x\in\left(-\infty,\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\cup\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},+\infty\right)$ 时,$ax^2+bx+c>0$;

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 时,$ax^2+bx+c=0$;

$x\in\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$ 时,$ax^2+bx+c<0$.

(2)判别式法

二次三项式 $ax^2+bx+c(a>0)$ 的判别式 $\Delta=b^2-4ac$.

①若 $\Delta<0$,则 $ax^2+bx+c>0$;

②若 $\Delta=0$,则 $ax^2+bx+c\geqslant 0$,等号当且仅当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时成立;

③若 $\Delta>0$,则

$x\in\left(-\infty,\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\cup\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},+\infty\right)$ 时,$ax^2+bx+c>0$;

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 时,$ax^2+bx+c=0$;

$x\in\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$ 时,$ax^2+bx+c<0$.

1.2 比较法证不等式

教材线索

教材以不等式的本质涵义"一个不等式实际上表示的就是不等式两边的大小比较"导入本节的学习内容，这使得上一节的学习所得顺利迁移为本节内容的学习基础.

紧接着，教材明确指出了不等式的基本证明方法之一——比较法，并给出了用比较法证明不等式的一般步骤，然后运用比较法证明了不等式的六个基本性质.

最后，教材安排了两道例题，进一步强化运用比较法证明不等式的思路与方法.

教学目标

1. 知识与技能

理解并掌握比较法的一般步骤.

2. 过程与方法

掌握运用比较法证明一些简单的不等式的方法；理解、掌握不等式基本性质的导出过程，并能运用性质证明一些简单的不等式.

3. 情感、态度与价值观

依托不等式基本性质的导出过程体会数学知识的产生与发展，了解数学研究的基本方法.

教材分析

比较法是证明不等式的最基本也最重要的方法.

教材以两个实数大小的比较方法——比较两数的差与 0 的大小得出两个实数大小这一途径，给出了比较法的一种——作差比较法. 而后在运用作差比较法证明不等式的基本性质时，简单介绍了比较法的另一种——作商比较法. 最后，教材安排了两个例题帮助学生进一步体会掌握比较法在证明不等式时的思路与步骤. 这种颇具匠心的编排，既保证了知识的完整性，又凸现了作差比较法在比较法中的主体地位，知识的发生、发展合情合理.

本节教材的教学重点在于理解并掌握作差比较法，教学难点在于证明过程中对"差式"进行变形的"恰当性".

教学建议

本节的学习内容是比较法及其应用. 由于有了教材 1.1 节的学习基础，比较法的证明思路与应用步骤实际上很容易为学生所理解与接受，因而，教学时应放手让学生自主探究，亲历知识与方法的产生和发现过程.

1. 关于比较法证明思路与应用步骤的教学，建议以习题 1 的第 1 题“已知 $x\neq 0$，试比较 $(x^2+1)^2$ 与 x^4+x^2+1 的大小”的改造题“已知 $x\neq 0$，求证：$(x^2+1)^2>x^4+x^2+1$”为导例，让学生在自主解决问题的过程中体验、归纳，进而理解、掌握比较法的证明思路与应用步骤.

2. 关于不等式的基本性质的教学，应该追求两个目标：一是不等式基本性质的理解与掌握，二是比较法证明思路与应用步骤的理解与掌握. 为此，应该以学生充分的自主探究，合作学习为基础，在学生主动学习的过程中实现上述的两个目标.

3. 教材安排的两个例题，目的在于帮助学生进一步体会掌握比较法在证明不等式时的思路与步骤. 由于两个例题难度不大，因而教学时，仍应放手让学生自主探究，教师需要关注的是如何指导学生规范地表述证明过程.

例题解析

1. 例 1 与教材 1.1 节的例 2 是同一类型的问题，因而学生是很容易完成其证明的，应该让学生自主完成解答. 教师需要关注的问题有二：一是如何指导学生规范地表述证明过程，二是引导学生总结出对“差式”进行变形以利于“定号”的常用方式之一——配方法.

2. 例 2 与教材习题 1 的第 2 题(2)小题是同一类型的问题，因而学生同样是容易完成其证明的，应该让学生自主完成解答. 教师需要关注的问题以例 1 相似，有两个：一是如何指导学生规范地表述证明过程，二是引导学生总结出对“差式”进行变形以利于“定号”的另一常用方式——因式分解法.

相关链接

1. 关于不等式证明

一般地，要否定一个命题的真，举出一个使命题为假命题的特例即可；而要肯定一个命题的真，则需严格论证.

证明一个不等式，就是要肯定一个命题的真，因此需严格论证.

2. 关于比较法

比较法是证明不等式最常用、最基本也最重要的方法，它包括作差比较与作商比较两种基本形式.

一般地，当欲证的不等式两边是多项式、分式或对数式时，常用作差比较法；当欲证的不等式两边是乘积的形式或幂、指数式时，常用作商比较法. 当然，采用作差比较法还

是作商比较法，关键在于分析所证不等式的结构和条件，看变形后，差与 0 进行大小比较和积与 1 进行大小比较何者更加容易.

作差比较法的理论依据是：$a>b\Leftrightarrow a-b>0$；基本步骤是：作差→变形→判断符号→下结论.

作商比较法的理论依据是：若 $a>0$，$b>0$，则 $a>b\Leftrightarrow\frac{a}{b}>1$（或若 $a<0$，$b<0$，则$a>b\Leftrightarrow\frac{a}{b}<1$）；基本步骤是：作商→变形→判断商与 1 的大小→下结论.

相对而言，作差比较法更为常用，运用作差比较法时差式的变形主要有如下基本方向：

（1）将差式变形为常数或变形为常数与几个平方数之和的形式，而后用配方法或实数特征 $a^2\geqslant0$ 判断差式的符号；

（2）利用因式分解将差式变形为几个因式之和的形式，而后逐一判断各个因式的符号，进而判断差式的符号；

（3）将差式变形为二次三项式的形式，而后用配方法或判别式法判断差式的符号.

3. 关于由代数式的范围讨论代数式的范围

由代数式的范围讨论代数式的范围，应考虑不等式性质的可逆性. 应注意到其中的变量是相关变量而非独立变量，必须以整体置换的方式运用代数式的范围. 如习题 2 的第 7 题，如下的解法是错误的.

$\because -1\leqslant f(1)\leqslant2$，$\therefore -1\leqslant a+b\leqslant2$. ①

同理$-2\leqslant4a+2b\leqslant4$，即$-1\leqslant2a+b\leqslant2$. ②

由①×(−1)得$-2\leqslant-a-b\leqslant1$. ③

由③+②得$-3\leqslant a\leqslant3$. ④

由④×(−1)+①得$-4\leqslant b\leqslant5$. ⑤

由于 $f(3)=9a+3b$，故由④×9+⑤×3 得$-39\leqslant f(3)\leqslant42$.

容易判断上述结论是错误的，事实上，当且仅当 $a=-3$ 且 $b=-4$ 时，$f(3)=-39$.

但很显然，$a=-3$ 且 $b=-4$ 并不满足①和②. 造成这样错误的原因就在于将 a，b 这两个相关变量作为独立变量处理. 本题正确的解法为：

设 $f(3)=mf(1)+nf(2)$，

则 $9a+3b=m(a+b)+n(4a+2b)=(m+4n)a+(m+2n)b$，

$\therefore\begin{cases}m+4n=9,\\m+2n=3.\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}m=-3,\\n=3.\end{cases}$

$\because -1\leqslant f(1)\leqslant2$，$\therefore -6\leqslant-3f(1)\leqslant3$.

同理，$-6\leqslant3f(2)\leqslant12$.

$\therefore -12\leqslant f(3)\leqslant15$.

1.3　基本不等式

教材线索

教材首先运用比较法证明了不等式$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$（$a$，$b\in\mathbf{R}_+$）①，然后给出了两个正数$a$，$b$的算术平均数与几何平均数的概念，进而借助这两个概念对所证明的不等式作出文字上的解读，并利用不等式①得出了四个不等式，明确把其中的一个不等式$a^2+b^2\geqslant 2ab$②与不等式①合称为“基本不等式”．紧接着，教材利用基本不等式得出了一个“不等式串”．最后，教材安排了一道包括两个小题的例题介绍了基本不等式在不等式证明中的应用．

教学目标

1．知识与技能

理解算术平均数与几何平均数的概念．

2．过程与方法

掌握基本不等式的应用条件、结构特征以及等号成立的条件，能够运用基本不等式证明一些简单的不等式．

3．情感、态度与价值观

在由基本不等式导出若干常用不等式的过程中，体会数学知识发现的过程．

教材分析

基本不等式在不等式证明、求函数的最值和解决实际问题中都有着广泛的应用．教材以比较法为依托，证明了基本不等式$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$（$a$，$b\in\mathbf{R}_+$），这样的编排，既复习了比较法，又导出了一个基本不等式，承上启下，一举两得．

在另一个基本不等式的导出方式上，教材以不等式$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$（$a$，$b\in\mathbf{R}_+$）为基础，引导学生经历从已知条件出发，以不等式的基本性质、基本不等式为依据进行思考、探求以至获取不等式的过程，领悟到了不等式证明的本质．例题的配置，则更进一步地帮助学生熟悉运用基本不等式证明不等式的基本思路和表述方式，为1.4节的学习作好了铺垫．

本节的教学重点是基本不等式的理解与应用，教学难点是基本不等式的应用，关键在

于对基本不等式的结构特征的把握与应用条件的认识.

教学建议

1. 教材以比较法为依托，引导学生证明了基本不等式$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$（$a$，$b\in\mathbf{R}_+$），同时也向学生指出：凡是能够运用基本不等式证明的不等式，一般也可以运用比较法给予证明. 因而，本节内容的教学过程中，应紧扣“比较法”的证明思路与基本步骤，帮助学生实现数学方法的正向迁移.

2. 关于基本不等式的教学，应在引导学生从整体上认识基本不等式的结构特征、准确把握其应用条件的基础上，借助“正误辨析”、“错解剖析”等多种形式，让学生充分展开探究，真正理解基本不等式，为应用基本不等式打下坚实的基础.

3. 关于基本不等式的应用，本节教学中应定位于初步应用，把着眼点放在运用基本不等式证明不等式时的规范表述上，不要增加复杂的证明问题.

例题解析

本节教材只安排了一个例题，教学时，可引导学生从比较法和基本不等式法两种途径对不等式给予证明. 如此建议的目的在于：一方面让学生更进一步熟练掌握不等式证明的比较法，掌握不等式证明的基本不等式法；另一方面，让学生在两种证明方法的比较中体会到运用基本不等式证明不等式的简捷，提高他们运用基本不等式的自觉性.

相关链接

1. 关于基本不等式等号成立的条件

基本不等式$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$（$a$，$b\in\mathbf{R}_+$）和基本不等式$a^2+b^2\geqslant 2ab$都是当且仅当$a=b$时等号成立. 这里有两个问题必须明确.

（1）基本不等式$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$（$a$，$b\in\mathbf{R}_+$）当且仅当$a=b$时等号成立，这里同时要求$a>0$，$b>0$；基本不等式$a^2+b^2\geqslant 2ab$当且仅当$a=b$时等号成立，但只要求$a$，$b\in\mathbf{R}$.

（2）“当且仅当$a=b$时等号成立”包括两个方面的含义：

①当$a=b$时等号成立，其含义为$a=b\Rightarrow\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$，$a=b\Rightarrow a^2+b^2\geqslant 2ab$；

②仅当$a=b$时等号成立，其含义为$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}\Rightarrow a=b$，$a^2+b^2\geqslant 2ab\Rightarrow a=b$；

综合起来，其含义就是

$a=b$是$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$的充要条件；$a=b$是$a^2+b^2\geqslant 2ab$的充要条件.

2. 关于基本不等式的不同表述形式

(1) 整式形式

$a^2+b^2\geqslant 2ab$，$ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ (a，$b\in\mathbf{R}$).

(2) 根式形式

$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ (a，$b\in\mathbf{R}_+$).

(3) 分式形式

$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2$ ($a\in\mathbf{R}$，$b\in\mathbf{R}$，$ab>0$).

拓展：$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\leqslant -2$ ($a\in\mathbf{R}$，$b\in\mathbf{R}$，$ab<0$).

(4) 倒数形式

$a+\frac{1}{a}\geqslant 2$ ($a\in\mathbf{R}_+$)，$a+\frac{1}{a}\leqslant -2$ ($a\in\mathbf{R}_-$).

3. 关于基本不等式$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ (a，$b\in\mathbf{R}_+$) 的两种解释

(1) 数列解释

由于$\frac{a+b}{2}$可以视为两个正数 a，b 的等差中项，$\sqrt{ab}$可以视为两个正数 a，b 的等比中项，故基本不等式$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ (a，$b\in\mathbf{R}_+$) 可以解释为：两个正数的等差中项不小于这两个正数的等比中项.

(2) 几何解释

以 $a+b$ 为直径作圆，在直径 AB 上取点 C，使得 $AC=a$，$CB=b$，过点 C 作垂直于直径 AB 的弦 DD'，则 $DC=\sqrt{ab}$. 由于圆的半径为$\frac{a+b}{2}$，所以$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$. 亦即基本不等式$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ (a，$b\in\mathbf{R}_+$) 可以解释为：半径不小于半弦.

1.4 基本不等式实际应用举例

教材线索

本节教材定位于基本不等式的实际应用举例，因而教材仅安排了两道基本不等式实际应用问题的求解.

教学目标

1. 知识与技能

进一步熟练掌握运用数学知识解决实际应用问题的求解策略.

2. 过程与方法

通过例题的解决，更加熟练掌握运用基本不等式求函数最值从而解决实际问题的思路和步骤.

3. 情感、态度与价值观

在运用数学知识解决实际问题的过程中，体会数学知识的实用价值.

教材分析

本节教材仅安排了两道基本不等式实际应用问题的求解. 虽然两道例题在求解难度上呈加大趋势，但总体难度都不大. 如此削繁就简的编排，突出了本节教材的重点——掌握运用基本不等式求函数最值从而解决实际问题的思路和步骤；例题难度的递增，则有利于突破本节教材的难点——数学建模.

本节的教学重点在于理解并掌握运用基本不等式解决实际问题的思路和步骤，教学难点在于运用基本不等式解决实际问题的数学建模.

教学建议

虽然本节教材仅安排了两道基本不等式实际应用问题的求解，但由于学生解决实际问题的能力普遍有所欠缺，因而教学时，应注意引导学生回顾运用数学知识求解实际问题的一般思路和步骤，回顾利用基本不等式求函数最值的一般思路和步骤，以此分散本节教材的难点，同时，突出本节教材的重点.

例题解析

由于学生解决实际问题的能力普遍有所欠缺，在例题教学中，应该以学生的自主探究为主要形式，留给学生充足的思考时间. 在学生自主探究的过程中，教师应该以合作者的身份主动参与学生的探究，在参与中引导学生体会，进而归纳出利用基本不等式解决实际问题的思路和步骤：

（1）审题、设元. 一般把欲求最值的变量定为函数.

（2）建模. 把实际问题抽象为函数的最值问题.

（3）求解函数的最值问题. 注意发现数学模型中隐含的利用基本不等式的信息，利用基本不等式求出函数最值；但必须注意，在利用基本不等式求函数最值时，使得等号成立的自变量取值若不属于函数的定义域，则不能利用基本不等式求出函数最值，而应改用函数的单调性求函数的最值.

(4) 检验，作答．要注意结合问题的实际意义对所求得的数学问题的解进行检验，在确定所得的解符合题意或依据题意对所求得的数学问题的解进行调整后，写出正确的答案．

相关链接

1．利用基本不等式求函数最值时，关键在于用好如下的两个结论：

(1) 要“和”最小，须“积”定值．亦即：

如果两个正数 x, y 的积 xy 是定值 P，那么当且仅当 $x=y$ 时，和 $x+y$ 有最小值 $2\sqrt{P}$；

(2) 要“积”最大，须“和”定值．亦即：

如果两个正数 x，y 的和 $x+y$ 是定值 S，那么当且仅当 $x=y$ 时，积 xy 有最大值$\frac{S^2}{4}$．

2．利用基本不等式求函数最值时的注意点

(1) 利用基本不等式求函数最值时，一定要注意公式不可或缺的三个条件：正数、定值、等号成立．应该注意，当等号不成立时，基本不等式不能使用，而应改用函数的单调性求最值．如函数 $y=x+\frac{3}{x}$，$x\in(0,\ 1]$，虽然公式的前两个条件：正数、定值都成立，由于等号成立的条件是 $x=\sqrt{3}\notin(0,\ 1]$，等号不成立，故 $2\sqrt{3}$不是函数的最小值．正确的结论应该是：由函数在 $(0,\ 1]$ 上单调递减得其最小值为 4．

(2) 多次利用基本不等式时，一定要注意必须使每个不等式的等号能够同时成立，否则最值取不到．如问题“已知 $x, y\in\mathbf{R}_+$，且 $2x+5y=20$，求$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$的最小值”的如下解法：

$\because x$，$y\in\mathbf{R}_+$，$\therefore 20=2x+5y\geqslant 2\sqrt{10xy}>0$，$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{xy}}>0$．

$\therefore 20\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\geqslant 2\sqrt{10xy}\cdot 2\sqrt{\frac{1}{xy}}=4\sqrt{10}$．

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}$的最小值为 $4\sqrt{10}$．

这一解法显然是错误的．因为，不等式 $20=2x+5y\geqslant 2\sqrt{10xy}$与$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{xy}}$等号成立的条件分别为 $2x=5y$ 和 $x=y$，两者同时成立当且仅当 $x=y=0$，这与已知条件 x，$y\in\mathbf{R}_+$是矛盾的，故$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$取不到最小值 $4\sqrt{10}$．正确的解法是：

$\because 2x+5y=20$，

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{20}(2x+5y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{20}\left(\frac{2x}{y}+\frac{5y}{x}+7\right)\geqslant\frac{7+2\sqrt{10}}{20}$．

等号当且仅当$\frac{5y}{x}=\frac{2x}{y}$，即 $x=\frac{10\sqrt{10}-20}{3}$，$y=\frac{20-4\sqrt{10}}{3}$时成立．

故$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$的最小值为$\frac{7+2\sqrt{10}}{20}$．

1.5 分析法与综合法

教材线索

教材以“数学实验”导出了结论：$\sqrt{n}-\sqrt{n-1}<\sqrt{n-1}-\sqrt{n-2}$ ($n\geqslant 2$)，并指出证明这一结论的思考方式——执“果”索“因”，详细表述了这种思考方式的展开过程，剖析了这种思考方式的本质与一般应用步骤，从而导出了本节教材的第一个学习内容——分析法.接着，教材安排了一个运用分析法证明不等式的例题（例 1 的证法 1），规范了利用分析法证明不等式的表述过程.

在此基础上，教材从与分析法恰好相反的思考角度给出例 1 的另一种证明方法，阐述了这一方法的思考方式——由“因”导“果”，详细表述了这种思考方式的展开过程，剖析了这种思考方式的本质与一般应用步骤，从而导出了本节教材的第二个学习内容——综合法，并用例 1 的证法 2 规范了利用综合法证明不等式的表述过程.

紧接着，教材用例 2 帮助学生理解并巩固了运用分析法与综合法证明不等式的方法.最后，教材安排了例 3，阐述了分析法与综合法在证明不等式中的有机结合——利用分析法探寻证明途径，利用综合法表述证明过程.

教学目标

1. 知识与技能

理解分析法与综合法证明不等式的思考方式，掌握相应的证明步骤，会利用分析法与综合法证明一些简单的不等式.

2. 过程与方法

在运用分析法与综合法证明不等式的过程中，理解分析法与综合法的异同，会综合运用两者证明不等式.

3. 情感、态度与价值观

体会执“果”索“因”和由“因”导“果”这两种思维方式的精妙，体会数学思想方法的价值.

教材分析

教材首先安排了一个简单的“数学实验”，目的有三：一是导出本节教材学习内容的引

例，当 $n\geqslant 2$ 时，$\sqrt{n}-\sqrt{n-1}<\sqrt{n-1}-\sqrt{n-2}$；二是向学生强调，由不完全归纳法导出的结论，其正确性必须通过完全归纳法予以证明；三是向学生指出，对于直接证明不是很便利的不等式，应该变换思考的方式，一种常用的变换方式为"逆向思考". 这一"数学实验"为本节教材学习的展开奠定了基础.

以"数学实验"为依托，教材详细阐述了分析法的本质与一般应用步骤，并用例 1 规范了利用分析法证明不等式的表述过程. 紧接着，教材引导学生变换思考方式，从与分析法恰好相反的思考角度给出例 1 的另一种证明方法，阐述了综合法的本质与一般应用步骤，并用例 2 规范了利用分析法证明不等式的表述过程. 如此编排，顺应了学生的学习思维的展开，知识的生成与发展水到渠成.

由于在实际运用过程中，分析法与综合法是有机地结合在一起的，为此，教材安排了例 3，向学生展示综合利用分析法与综合法证明不等式的基本思路——利用分析法探寻证明途径，利用综合法表述证明过程. 如此，进一步加深了学生对分析法与综合法的理解和掌握，也拓宽了学生证明不等式的思路.

本节的教学重点为分析法与综合法的思考方式、本质与一般应用步骤；教学难点是运用分析法证明不等式过程的规范表述以及综合利用分析法与综合法证明不等式的基本思路.

教学建议

与比较法一样，分析法与综合法也是证明不等式最基本的方法. 因而，教学中，应该充分利用教材所安排的"数学实验"和三个例题，紧扣分析法与综合法的思考方式、本质与一般应用步骤这一重点内容，引导学生充分展开思维，在合作交流中学习、在自主探究中内化，真正理解并掌握分析法与综合法，掌握运用分析法与综合法证明不等式过程的规范表述，并能综合利用分析法与综合法证明不等式.

例题解析

1. 教材安排例 1 的一个目的是帮助学生理解分析法的思考方式，掌握利用分析法证明不等式的一般步骤和规范表述. 因而，教学中，应紧扣分析法执"果"索"因"的思考方式，引导学生不断寻求结论成立的充分条件，并逐一证明充分条件成立，从而完成不等式的证明. 要放手让学生自主探究，在探究中实现自我完善，从而使教学过程成为学生主动学习的过程，使教学重点得以突出，教学难点得以突破.

教材安排例 1 的另一个目的是帮助学生理解综合法的思考方式，掌握利用综合法证明不等式的一般步骤和规范表述. 因而，教学中，同样应紧扣综合法由"因"导"果"的思考方式，引导学生实施一系列的推出或等价变换，从而完成不等式的证明. 要放手让学生自主探究，在探究中实现自我完善，从而使教学过程成为学生主动学习的过程，使教学重点得以突出，教学难点得以突破.

2. 教材安排例 2 的一个目的是帮助学生进一步理解掌握分析法与综合法证明不等式的

一般步骤和规范表述．由于有了例 1 的学习基础，一般程度的学生应该都能够独立完成本例不等式的证明．因而教学中，可以完全把问题交给学生，让学生自主完成证明．教师需要关注的是适时帮助学生调整思维的方向、规范表述的过程．

教材安排例 2 的另一个目的是帮助学生理解并掌握综合利用分析法与综合法证明不等式的思路和方法．教学中，教师应在学生分别利用分析法与综合法证明了不等式后，引导学生剖析两个证明过程的内在联系，比较两个证明过程的繁简，引导学生体会综合利用分析法与综合法证明不等式的优势，进而引导学生归纳综合利用分析法与综合法证明不等式的思路和方法——分析法探寻途径、综合法完成表述．

3．教材安排例 3 的目的是帮助学生更进一步理解掌握综合利用分析法与综合法证明不等式的思路和方法．由于有了例 2 的学习基础，一般程度的学生应该都能够独立完成这一不等式的证明．因而教学中，可以完全把问题交给学生，让学生自主完成证明．教师需要关注的同样是适时帮助学生调整思维的方向、规范表述的过程．

相关链接

分析法与综合法的比较

方法	证明的起始步骤	求证过程	求证目标	证题方向
分析法	欲求证的不等式	寻求结论成立的充分条件，并证明这个充分条件成立	所需条件全部成立	执“果”索“因”
综合法	基本不等式或已经证明过的不等式	实施一系列的推出或等价变换	欲求证的结论	由“因”导“果”

1.6　反证法和放缩法

教材线索

教材一开始就直接阐述了反证法证明不等式的思路，然后用两个例题介绍利用反证法证明不等式的一般步骤，再依托这两个例题的证明过程对利用反证法证明不等式这一方法的实质、适用范围以及证明时的两个注意点进行说明．

此后，教材用同样的方式介绍了本节的另一学习目标——放缩法．

教学目标

1．知识与技能

理解反证法与放缩法证明不等式的思考方式，掌握相应的证明步骤.

2. 过程与方法

会利用反证法和放缩法证明一些简单的不等式.

3. 情感、态度与价值观

理解反证法的思维本质，体会反证思想的价值.

教材分析

本节的学习目标是利用反证法和放缩法证明一些简单的不等式. 因而，教材在编排上采用了削繁就简的方式，直接阐述利用反证法和放缩法证明不等式的思路，直接举例说明利用反证法和放缩法证明不等式的步骤. 这样的编排，符合学生的认知规律，使得本节教材的学习目标更为明确，本节教材的教学重点更为突出，教学难点更加易于突破.

本节的教学重点是利用反证法与放缩法证明不等式的思路和相应的证明步骤；难点是利用反证法证明不等式时矛盾的得出，利用放缩法证明不等式时放或缩的“适度性”.

教学建议

与比较法、分析法和综合法一样，反证法和放缩法也是证明不等式常用的方法. 因而，教学中，应该充分利用教材所安排的四个例题，紧扣反证法和放缩法的思考方式、本质与一般应用步骤这一重点内容，引导学生充分展开思维，在合作交流中学习体会反证法和放缩法的思考方式，在自主探究中内化对反证法和放缩法的理解，真正理解并掌握反证法和放缩法，掌握运用反证法和放缩法证明不等式过程的规范表述，进而能利用反证法和放缩法证明一些简单不等式.

例题解析

1. 教材安排例 1 的目的是帮助学生理解反证法的思考方式，掌握利用反证法证明不等式的一般步骤和规范表述. 因而，教学中，应紧扣反证法“否定原结论→导出矛盾→肯定原结论”的思考方式，引导学生体会经过逻辑推理导出矛盾的方法，从而完成不等式的证明. 要放手让学生自主探究，在探究中总结经过逻辑推理导出矛盾的方法，从而在使教学过程成为学生主动学习的过程的同时，使教学重点得以突出，教学难点得以突破.

2. 教材安排例 2 的目的是帮助学生进一步理解反证法的思考方式，进一步掌握利用反证法证明不等式的一般步骤和规范表述. 与例 1 不同的是，例 2 的证明过程中，在导出矛盾时需就否定原结论 $a\geqslant 0$ 后的两种可能 $a=0$ 和 $a<0$ 分别导出矛盾. 因而教学中，同样应紧扣反证法“否定原结论→导出矛盾→肯定原结论”的思考方式，引导学生体会经过逻辑推理导出矛盾的方法，从而完成不等式的证明；还应放手让学生自主探究，在探究中总结经过逻辑推理导出矛盾的方法；更应注意引导学生体会“穷举法”这一数学方法的本质，训练学生思维的严谨性.

3. 教材安排例 3 和例 4 的目的都是帮助学生理解放缩法的思考方式，掌握利用放缩法证明不等式的一般步骤和规范表述. 因而，教学中，应紧扣放缩法“大胆地放大或缩小、谨慎地添项或减项”的思考方式，引导学生体会经过“放”或“缩”或“放与缩相结合”的方法，完成不等式的证明. 要放手让学生自主探究，在探究中总结“放”或“缩”或“放与缩相结合”的方法，体会“放”或“缩”或“放与缩相结合”的“适度”，从而真正理解并掌握放缩法.

相关链接

1. 关于反证法的补充说明

(1) 反证法是一种间接法，在直接证明某一命题比较困难时，通常考虑利用反证法进行证明. 反证法不仅在不等式证明中应用广泛，在其他学科的应用同样广泛.

(2) 利用反证法证明不等式时，首先，要注意否定原结论所得的新结论是否只有一种情形. 若不止一种情形，则必须逐一加以否定，原不等式才成立. 其次，在经过逻辑推理导出矛盾时，要注意必须把否定原结论所得的新结论作为一个条件，结合题目的已知条件，应用公理、定义、定理，进行推理论证，所得出的矛盾可能是与已知条件相矛盾，也可能是与已证明的定理或明显成立的事实相矛盾.

2. 关于放缩法的补充说明

利用放缩法证明不等式的关键在于通过将所欲证明的不等式的某些项的值适当“放大”或“缩小”，使不等式中有关项之间的大小关系更加明晰，或者使不等式中的项得到简化而有利于代数变形，从而达到证明的目的. 证明时，必须使得“放大”或“缩小”“适度”. 由于“放大”或“缩小”的方法通常不是唯一的，因而放缩法是一种具有较大灵活性和较强技巧性的方法.

教材习题参考解答

习题 1

1. $\because (x^2+1)^2-(x^4+x^2+1)=x^2$，并且 $x\neq 0$，$\therefore x^2>0$，$\therefore (x^2+1)^2>(x^4+x^2+1)$.

2. (1) $\because [a^2(a+1)+b^2(b+1)]-[a(a^2+b)+b(b^2+a)]=(a-b)^2$，并且 $a\neq b$，
$\therefore (a-b)^2>0$，$\therefore a^2(a+1)+b^2(b+1)>a(a^2+b)+b(b^2+a)$.
(2) $\because (a^3+b^3)-(a^2b+ab^2)=(a-b)^2(a+b)$，并且 $a\neq b$，故：
①$a+b>0$ 时，$(a-b)^2(a+b)>0$，$\therefore a^3+b^3>a^2b+ab^2$；
②$a+b=0$ 时，$(a-b)^2(a+b)=0$，$\therefore a^3+b^3=a^2b+ab^2$；
③$a+b<0$ 时，$(a-b)^2(a+b)<0$，$\therefore a^3+b^3<a^2b+ab^2$.

3. $\because \dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}-\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{2ab(a-b)}{(a^2+b^2)(a+b)}$，并且 $a>b>0$，
$\therefore \dfrac{2ab(a-b)}{(a^2+b^2)(a+b)}>0$，$\therefore \dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}>\dfrac{a-b}{a+b}$.

4. $\because \dfrac{x^2+c+1}{\sqrt{x^2+c}}-\dfrac{c+1}{\sqrt{c}}=\left(\sqrt{x^2+c}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+c}}\right)-\left(\sqrt{c}+\dfrac{1}{\sqrt{c}}\right)=(\sqrt{x^2+c}-\sqrt{c})\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+c}\cdot\sqrt{c}}\right)$，
并且 $c\geqslant 1$，$\therefore \sqrt{x^2+c}\cdot\sqrt{c}>1$，$\therefore 1-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+c}\cdot\sqrt{c}}>0$.
又 $\because \sqrt{x^2+c}-\sqrt{c}>0$，$\therefore (\sqrt{x^2+c}-\sqrt{c})\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+c}\cdot\sqrt{c}}\right)>0$，$\therefore \dfrac{x^2+c+1}{\sqrt{x^2+c}}>\dfrac{c+1}{\sqrt{c}}$.

5. 按等级价格收购 x kg 一等小麦和 y kg 二等小麦，收购站应付款项总额为 $m=ax+by$ 元；按两种价格的平均数收购 x kg 一等小麦和 y kg 二等小麦，收购站应付款项总额为 $n=(x+y)\dfrac{a+b}{2}$ 元.
$\because m-n=\dfrac{(a-b)(x-y)}{2}$，又 $\because b<a$，故：
(1) 当 $x>y$ 时，$m>n$，农民吃亏，不公平合理；
(2) 当 $x=y$ 时，$m=n$，公平合理；
(3) 当 $x<y$ 时，$m<n$，收购站吃亏，不公平合理.
综上，只有当一等小麦与二等小麦的收购数量相等时，按两种价格的平均数收购才是公平合理的.

习题 2

1. (1) $<$.　(2) $>$.　(3) $<$.　(4) $>$.

2. (1) 证法一：$\because (f-ac)-(e-bc)=(f-e)+c(b-a)$，而由 $e>f$ 可得 $f-e<0$，由 $a>b$，

$c>0$ 可得 $c(a-b)<0$，$\therefore (f-e)+c(b-a)<0$，$\therefore f-ac<e-bc$.

证法二：$\because a>b$，$c>0$，$\therefore ac>bc$，$\therefore -ac<-bc$.

又 $\because e>f$，即 $f<e$，$\therefore f-ac<e-bc$.

(2) $\because c<d<0$，$\therefore -c>-d>0$，又 $\because a>b>0$，$\therefore -ac>-bd$，$\therefore ac<bd$.

3. $\because (a^2+3b^2)-2b(a+b)=(a-b)^2\geqslant 0$，$\therefore a^2+3b^2\geqslant 2b(a+b)$.

4. $\because \dfrac{4a}{4+a^2}-1=\dfrac{-(a-2)^2}{4+a^2}$，而 $4+a^2>0$，$(a-2)^2\geqslant 0$，$\therefore \dfrac{-(a-2)^2}{4+a^2}\leqslant 0$，$\therefore \dfrac{4a}{4+a^2}\leqslant 1$.

5. $\because \dfrac{a+m}{b+m}-\dfrac{a}{b}=\dfrac{(b-a)m}{(b+m)b}$，又由 $a<b$ 得 $b-a>0$，由 a，b，m 都是正数得 $\dfrac{m}{(b+m)b}>0$，

$\therefore \dfrac{(b-a)m}{(b+m)b}>0$，$\therefore \dfrac{a+m}{b+m}>\dfrac{a}{b}$.

6. $\because (a^2b+b^2c+c^2a)-(ab^2+bc^2+ca^2)$

$=(a^2b-ca^2)+(c^2a-ab^2)+(b^2c-bc^2)$

$=(b-c)[a^2-a(b+c)+bc]$

$=(b-c)(a-b)(a-c)$，

又 $\because a>b>c$，$\therefore a-b>0$，$b-c>0$，$a-c>0$，

$\therefore (b-c)(a-b)(a-c)>0$，

$\therefore a^2b+b^2c+c^2a>ab^2+bc^2+ca^2$.

7. 设 $f(3)=mf(1)+nf(2)$，则 $9a+3b=m(a+b)+n(4a+2b)=(m+4n)a+(m+2n)b$，

$\therefore \begin{cases} m+4n=9, \\ m+2n=3. \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} m=-3, \\ n=3. \end{cases}$

$\because -1\leqslant f(1)\leqslant 2$，$\therefore -6\leqslant -3f(1)\leqslant 3$. 同理，$-6\leqslant 3f(2)\leqslant 12$. $\therefore -12\leqslant f(3)\leqslant 15$.

习题 3

1. (1) $\because a>0$，$b>0$，$\therefore a+b\geqslant 2\sqrt{ab}>0$，

同理 $b+c\geqslant 2\sqrt{bc}>0$，$c+a\geqslant 2\sqrt{ca}>0$.

以上三个不等式两边分别相乘，便得 $(a+b)(b+c)(c+a)\geqslant 8abc$.

(2) $\because a>0$，$b>0$，$\therefore \dfrac{a+b}{2}\geqslant \sqrt{ab}$.

同理 $\dfrac{b+c}{2}\geqslant \sqrt{bc}$，$\dfrac{c+a}{2}\geqslant \sqrt{ca}$.

以上三个不等式两边分别相加，便得 $a+b+c\geqslant \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$.

2. $\because a>0$，$b>0$，$x>0$，$y>0$，$\therefore \dfrac{b}{a}x^2+\dfrac{a}{b}y^2\geqslant 2xy$.

同理 $\dfrac{c}{a}x^2+\dfrac{a}{c}z^2\geqslant 2zx$，$\dfrac{c}{b}y^2+\dfrac{b}{c}z^2\geqslant 2yz$.

以上三个不等式两边分别相加，便得 $\dfrac{b+c}{a}x^2+\dfrac{c+a}{b}y^2+\dfrac{a+b}{c}z^2\geqslant 2(xy+yz+zx)$.

3. $\dfrac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}}=\sqrt{a^2+1}+\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}\geqslant 2$.

4. 证法一：$a^2+b^2+5=(a^2+4)+(b^2+1)\geqslant 4a+2b=2(2a+b)$.

证法二：$\because$ $(a^2+b^2+5)-2(2a+b)=(a-2)^2+(b-1)^2\geqslant 0$,

$\therefore a^2+b^2+5\geqslant 2(2a+b)$.

5. $\because a_1^2+x_1^2\geqslant 2a_1x_1$，$\therefore a_1x_1\leqslant\dfrac{a_1^2+x_1^2}{2}$.

同理 $a_2x_2\leqslant\dfrac{a_2^2+x_2^2}{2}$，…，$a_nx_n\leqslant\dfrac{a_n^2+x_n^2}{2}$.

以上 n 个不等式两边分别相加，便得

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n\leqslant\frac{a_1^2+x_1^2}{2}+\frac{a_2^2+x_2^2}{2}+\cdots+\frac{a_n^2+x_n^2}{2}$$
$$=\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{2}+\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

6. $\because a$，b，$c\in\mathbf{R}_+$，$\therefore 2ab\leqslant a^2+b^2$，$2bc\leqslant b^2+c^2$，$2ac\leqslant a^2+c^2$.

以上三个不等式两边分别相加，可得 $2ab+2bc+2ac\leqslant 2a^2+2b^2+2c^2$.

又 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac\leqslant a^2+b^2+c^2+2a^2+2b^2+2c^2$
$=3a^2+3b^2+3c^2=3(a^2+b^2+c^2)$.

又$\because a+b+c=1$，$\therefore 1^2\leqslant 3(a^2+b^2+c^2)$，$\therefore a^2+b^2+c^2\geqslant\dfrac{1}{3}$.

7. $\because 2a+3b=2$，$\therefore 4^a+8^b=2^{2a}+2^{3b}\geqslant 2\sqrt{2^{2a}\cdot 2^{3b}}=2\sqrt{2^{2a+3b}}=2\sqrt{2^2}=4$.

即 4^a+8^b 的最小值为 4.

8. $f(x)=x^2+\dfrac{4}{x^2+1}=x^2+1+\dfrac{4}{x^2+1}-1\geqslant 2\times\sqrt{4}-1=3$.

当且仅当$\dfrac{4}{x^2+1}=x^2+1$ 时取等号，即 $x^2+1=2$，$x=\pm 1$ 时取等号.

$\therefore f(x)$的最小值为 3.

9. $\because x>0$，$x\neq 1$，$\therefore 1+x^n>2\sqrt{x^n}>0$，$(1+x)^n>(2\sqrt{x})^n>0$，

两个不等式两边分别相乘，便得$(1+x^n)(1+x)^n>2\sqrt{x^n}\cdot(2\sqrt{x})^n$，

即$(1+x^n)(1+x)^n>2^{n+1}x^n$.

10. $\because x$，y 为正数，$\therefore 6x$，$5y$ 也是正数.

$\therefore 6x+5y\geqslant 2\sqrt{6x\cdot 5y}=2\sqrt{30xy}$，当且仅当 $6x=5y$ 时取等号.

又$\because 6x+5y=36$，$\therefore 2\sqrt{30xy}\leqslant 36$，$\therefore xy\leqslant\dfrac{54}{5}$. $\therefore xy$ 的最大值为$\dfrac{54}{5}$.

11. $y=\dfrac{6\sqrt{x^2+1}}{x^2+4}=\dfrac{6\sqrt{x^2+1}}{x^2+1+3}=\dfrac{6}{\sqrt{x^2+1}+\dfrac{3}{\sqrt{x^2+1}}}\leqslant\dfrac{6}{2\sqrt{3}}=\sqrt{3}$.

当且仅当$\sqrt{x^2+1}=\dfrac{3}{\sqrt{x^2+1}}$时取等号，即 $x=\pm\sqrt{2}$时取等号. $\therefore y$ 的最大值为$\sqrt{3}$.

12. $\because a>0$，$b>0$，$\therefore\dfrac{a^2}{b}+b\geqslant 2a$.

同理$\frac{b^2}{c}+c\geqslant 2b$，$\frac{c^2}{a}+a\geqslant 2c$.

以上三个不等式两边分别相加，便得$\left(\frac{a^2}{b}+b\right)+\left(\frac{b^2}{c}+c\right)+\left(\frac{c^2}{a}+a\right)\geqslant 2a+2b+2c$，

即$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geqslant a+b+c$.

习题 4

1. 长、宽分别为$\frac{L}{2}$，$\frac{L}{4}$时，菜园的面积最大，最大面积等于$\frac{L^2}{8}$.
2. 利用旧墙 12 m，可使建屋造价最低.
3. C 站设在 AB 的中点处时，运油率最大，最大运油率为$\frac{1}{4}$.

习题 5

1. (1) 用分析法证明基本不等式$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ (a，$b\in\mathbf{R}_+$).

$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ ① (欲证)

$\Uparrow$ ($a>0$，$b>0$)

$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\geqslant ab$ (只需证)

$\Uparrow$

$a^2+2ab+b^2\geqslant 4ab$ (只需证)

$\Uparrow$

$(a-b)^2\geqslant 0$ ② (只需证)

②式显然成立，从而①式成立.

(2) 用分析法证明基本不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$.

$a^2+b^2\geqslant 2ab$ ① (欲证)

$\Uparrow$

$(a-b)^2\geqslant 0$ ② (只需证)

②式显然成立，从而①式成立.

(3) 用综合法证明基本不等式$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ (a，$b\in\mathbf{R}_+$).

$(a-b)^2\geqslant 0\Rightarrow a^2+b^2\geqslant 2ab\Rightarrow(a+b)^2\geqslant 4ab\Rightarrow\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\geqslant ab(a>0,\ b>0)\Rightarrow\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$.

(4) 用综合法证明基本不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$.

$(a-b)^2\geqslant 0\Rightarrow a^2-2ab+b^2\geqslant 0\Rightarrow a^2+b^2\geqslant 2ab$.

2. (1) 分析法

$\sqrt{a}-\sqrt{b}<\sqrt{a-b}$ ① (欲证)

$\Uparrow$ $(a>b>0)$

$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2<a-b$ （只需证）

$\Uparrow$

$a-2\sqrt{ab}+b<a-b$ （只需证）

$\Uparrow$ $(a>b>0)$

$-2\sqrt{ab}<0$ ② （只需证）

②式在 $a>b>0$ 时显然成立，从而①式成立.

(2) 综合法

$-2\sqrt{ab}<0\Rightarrow a-2\sqrt{ab}+b<a-b\quad(a>b>0)$

$\Rightarrow(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2<a-b\quad(a>b>0)$

$\Rightarrow\sqrt{a}-\sqrt{b}<\sqrt{a-b}$.

3. $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant0\quad(a>0,\ b>0)$

$\Rightarrow a-\sqrt{ab}+b\geqslant\sqrt{ab}\quad(a>0,\ b>0)$

$\Rightarrow(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-\sqrt{ab}+b)\geqslant\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})\quad(a>0,\ b>0)$

$\Rightarrow\dfrac{\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}}{\sqrt{ab}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$

$\Rightarrow\sqrt{\dfrac{a^2}{b}}+\sqrt{\dfrac{b^2}{a}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

4. $(ab-1)^2+(a-b)^2\geqslant0$

$\Rightarrow a^2b^2+1+a^2+b^2\geqslant4ab\quad(a>0,\ b>0)$

$\Rightarrow\dfrac{a^2b^2+1+a^2+b^2}{ab}\geqslant4$

$\Rightarrow ab+\dfrac{1}{ab}+\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\geqslant4$.

5. ∵a，b，c 是三角形的三边，∴$a>0$，$b>0$，$c>0$，$a+b-c>0$.

故$\dfrac{a}{a+m}+\dfrac{b}{b+m}>\dfrac{c}{c+m}$ ① （欲证）

$\Uparrow$ $(a>0,\ b>0,\ c>0,\ m>0)$

$a(b+m)(c+m)+b(a+m)(c+m)>c(a+m)(b+m)$ （只需证）

$\Uparrow$

$(a+b-c)m^2+2abm+abc>0$ ② （只需证）

②式在 $a>0$，$b>0$，$c>0$，$m>0$，$a+b-c>0$ 时显然成立，从而①式成立.

6. 题意等价于当 $2\pi r=4a$ 时，$\pi r^2>a^2$. 证明如下：

$\pi r^2>a^2$ ① （欲证）

$\Uparrow\left(a=\dfrac{\pi r}{2}\right)$

$\pi r^2>\dfrac{\pi^2r^2}{4}$ （只需证）

$\Uparrow$ $(r>0,\ \pi>0)$ （只需证）

$1>\frac{\pi}{4}$ ②　　　　　　（只需证）

②式显然成立，从而①式成立.

习题 6

1. 假设$\sqrt[n]{a}\geqslant\sqrt[n]{b}$不成立，则有$\sqrt[n]{b}>\sqrt[n]{a}$ $(a>0, b>0)\Rightarrow(\sqrt[n]{b})^n>(\sqrt[n]{a})^n\Rightarrow b>a$.
   这与已知条件 $a>b$ 矛盾. 故原不等式成立.
2. 假设$\frac{1+y}{x}\geqslant 2$，$\frac{1+x}{y}\geqslant 2$，则有
   $\frac{1+y}{x}\geqslant 2(x>0)\Rightarrow 1+y\geqslant 2x$，①
   $\frac{1+x}{y}\geqslant 2(y>0)\Rightarrow 1+x\geqslant 2y$，②
   由①、②两式相加，得 $x+y\leqslant 2$.
   这与已知条件 $x+y>2$ 相矛盾. 故原不等式成立.
3. 假设 $a\leqslant b$ 不成立，则有 $b<a(a\leqslant b-\varepsilon)\Rightarrow b<b-\varepsilon\Rightarrow\varepsilon<0$.
   这与已知条件 ε 为任意正数矛盾. 故原不等式成立.
4. 假设$(1-a)b>\frac{1}{4}$，$(1-b)c>\frac{1}{4}$，$(1-c)a>\frac{1}{4}$. 由于 $0<a, b, c<1$，则有
   $(1-a)b(1-b)c(1-c)a>\left(\frac{1}{4}\right)^3$.
   另一方面，由于 $0<a, b, c<1$，故由基本不等式可得
   $$(1-a)b(1-b)c(1-c)a=[(1-a)a][(1-b)b][(1-c)c]$$
   $$\leqslant\left[\frac{(1-a)+a}{2}\right]\left[\frac{(1-b)+b}{2}\right]\left[\frac{(1-c)+c}{2}\right]\leqslant\left(\frac{1}{4}\right)^3.$$
   所得两式矛盾，故原不等式成立.
5. $\because n=2, 3, 4, \cdots$,
   $$\therefore\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\times n}$$
   $$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$
   $$=1-\frac{1}{n}.$$
   故原不等式成立.
6. $\because a\geqslant b\geqslant c>0$，$\therefore b^2\leqslant ab$，$c^2\leqslant bc$，$c^2\leqslant ca$.
   $$\therefore a^2+3b^2+5c^2=a^2+b^2+c^2+2b^2+2c^2+2c^2$$
   $$\leqslant a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$$
   $$=(a+b+c)^2\leqslant 1.$$

第 2 章 绝对值不等式

一、教学目标

1. 进一步加深对实数的绝对值概念的理解.

2. 理解并掌握有关绝对值的重要不等式，能利用这个不等式证明一些简单的绝对值不等式.

3. 理解并掌握依据绝对值的定义、几何意义以及不等式的基本性质解含有绝对值的不等式的思路、方法与一般步骤，能熟练准确地求解教材所介绍的几类含有绝对值的不等式.

二、教材说明

1. 本章的学习内容是在学生掌握了不等式的基本性质，掌握了基本不等式，能运用基本不等式证明不等式和解决一些实际应用问题，以及掌握了证明不等式的基本方法：比较法、分析法、综合法、反证法和放缩法的基础上展开的，目的在于帮助学生掌握证明和求解与绝对值有关的不等式.

2. 教材在章图部分叙述了非负数（绝对值）在不等式应用中的广泛性，概述了本章的学习内容，为本章的学习明确了方向.

3. 在本章的第 1 节，教材首先引导学生借助实数的绝对值的意义和不等式的“可加性”导出了有关绝对值的重要不等式：$|a|-|b|\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$. 而后，教材安排了四个例题，分别引导学生利用有关绝对值的重要不等式、基本不等式和分析法证明了不等式. 最后，教材利用绝对值不等式解决了第 1 章“数学实验”中提出的问题. 这样的编排，在突出本节教材的学习目的的同时，也注意了本节教材与前面所学知识的关联.

4. 在本章的第 2 节，教材一开始就明确指出了解含有绝对值的不等式的三个依据，为本节教材的学习指明了方向. 接着，教材安排了三个例题，分别介绍了三种类型的含有绝对值的不等式的解法. 在例题的解法里，教材充分注意到了与三个依据的呼应，使得本节教材的知识一致性、方法连贯性得到了完美的体现.

三、课时安排建议

本章教学时间约需 **2** 课时，具体分配如下（仅供参考）：

2.1	含有绝对值的不等式	1 课时
2.2	解含绝对值的不等式举例	1 课时

四、教学建议

1. 打好基础，发展能力

本章的内容决定了学习过程中必须充分关注基础内容的学习. 因而教学中，必须注重基础知识的理解、基本方法的掌握，帮助学生切实掌握基础知识和基本方法. 在打好基础的前提下，发展学生学习数学、运用数学的能力.

2. 注重联系，提高对数学整体的认识

本章内容与本专题第 1 章以及必修模块 5 “不等式”的内容联系密切，因而教学中，应该注意引导学生把这些内容联系起来，温故而知新，整合新旧知识与新旧方法，构建完善新的知识与方法体系，提高对数学整体的认识.

3. 倡导自主探索，鼓励学生主动地学习

由于有了本专题第 1 章以及必修模块 5 “不等式”的学习基础，本章内容的学习对大部分学生而言并不困难，因而教学中，应大胆放手，鼓励学生主动地学习，让学生自主探究，自主经历知识、方法的产生与发展，在主动学习中掌握知识、完善学习方式与学习习惯.

五、评价建议

1. 重视对学生数学学习过程的评价

由于有了本专题第 1 章以及必修模块 5 中“不等式”的学习基础，本章内容的学习对大部分学生而言并不困难，因而对学生本章内容学习过程的评价尤为重要. 应该切实关注学生是否勤于思考、善于思考、坚持思考并不断改进思考的方法与过程，关注学生是否能积极思考、主动回答，是否愿意和能够与同伴交流对数学学习的体会，是否能够与他人合作探究数学问题.

2. 正确评价学生的数学基础知识和基本技能

本章内容的学习重点在于证明与求解一些简单的绝对值不等式，应该严格按《课标》的要求评价学生对利用有关绝对值的重要不等式、基本不等式和不等式的基本证明方法证明不等式的思路与方法的掌握程度，评价学生对利用绝对值的定义、几何意义以及不等式的基本性质解含有绝对值的不等式的思路与方法的掌握程度，控制问题的难度.

3. 重视对学生能力的评价

证明和求解含有绝对值的不等式与分类讨论、数形结合等数学思想方法联系密切. 因而，本章学习过程中，应该充分重视学生运用分类讨论、数形结合等数学思想方法解决问题的能力的评价，力求基础知识的掌握与能力的提高同步.

4. 实施促进学生发展的多元化评价

笔试仍是定量评价的基本方式. 但是，不能仅以笔试作为评价的唯一方式. 应该把笔试与定性评价、过程评价结合起来，形成有利于促进学生全面发展的多元化评价体系.

2.1 含有绝对值的不等式

教材线索

教材首先引导学生复习实数的绝对值的意义，进而借助不等式的“可加性”导出了本节教材的主要学习内容——有关绝对值的重要不等式：$|a|-|b|\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$. 而后，教材安排了四个例题，分别引导学生利用有关绝对值的重要不等式、基本不等式和分析法证明了不等式. 最后，教材利用绝对值不等式解决了第1章“数学实验”中提出的问题.

教学目标

1. 知识与技能

在进一步理解实数的绝对值概念的基础上，理解并掌握有关绝对值的重要不等式.

2. 过程与方法

掌握利用有关绝对值的重要不等式证明一些简单的绝对值不等式的方法，并在这一过程中进一步熟练掌握分析法在不等式证明中的运用.

3. 情感、态度与价值观

运用不同的思路探究含有绝对值的不等式的求解策略，感受数学思维的多样性.

教材分析

含有绝对值的不等式在不等式的应用中经常涉及. 教材借助实数的绝对值的意义和不等式的“可加性”引导学生导出了有关绝对值的重要不等式：$|a|-|b|\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$. 而后，安排了四个例题，分别引导学生利用有关绝对值的重要不等式、基本不等式和分析法证明了不等式. 最后，教材利用绝对值不等式解决了第1章“数学实验”中提出的问题. 这样的编排，在突出本节教材的学习目的的同时，也注意了本节教材与前面所学知识的关联.

本节的教学重点是理解并掌握有关绝对值的重要不等式，教学难点是利用这个不等式证明一些简单的绝对值不等式时，如何对欲证不等式中的绝对值进行合理的拆分或合并.

教学建议

本节的主要内容是理解并掌握有关绝对值的重要不等式，而导出这一不等式的基础是

对实数的绝对值概念的正确理解和对不等式的“可加性”的正确运用．因而，教学中，应引导学生认真回顾实数的绝对值概念和不等式的“可加性”，务求对这两个知识点理解准确、运用准确．在此基础上，引导学生发现、理解并运用有关绝对值的重要不等式．

例题解析

1．教材安排例1的目的是帮助学生初步体会有关绝对值的重要不等式在证明与绝对值有关的不等式中的应用，掌握利用有关绝对值的重要不等式证明不等式的一般步骤和规范表述．由于题目较为容易，因而教学中，应紧扣有关绝对值的重要不等式的结构特征，引导学生寻求构造适于运用有关绝对值的重要不等式的条件的方法与途径，从而完成不等式的证明．要放手让学生自主探究，在探究中发现并总结构造适于运用有关绝对值的重要不等式的条件的方法与途径，使教学过程成为学生主动学习的过程．

2．教材安排例2的目的是帮助学生进一步体会有关绝对值的重要不等式在证明与绝对值有关的不等式中的应用，更好地掌握利用有关绝对值的重要不等式证明其他不等式的一般步骤和规范表述．由于例2的证明过程中需要用到有关绝对值的重要不等式的推广形式：$|a+b+c|\leqslant|a|+|b|+|c|$，学生不容易理解．教学中，应当以例1的学习为基础，紧扣有关绝对值的重要不等式的结构特征，引导学生寻求构造适于运用有关绝对值的重要不等式的条件的方法与途径．进而以此为基础，引导学生发现通过运用两次不等式$|a+b|\leqslant|a|+|b|$而完成所求不等式的证明．

3．教材安排例3的目的是帮助学生体会不等式$|a+b|\leqslant|a|+|b|$等号成立的条件在解题中的应用以及基本不等式在证明与绝对值有关的不等式中的应用．教学中，应注意引导学生认真分析化去绝对值符号的方法与途径，进而使问题得以解决．在引导学生探究化去绝对值符号的方法与途径时，除了努力帮助学生借助不等式$|a+b|\leqslant|a|+|b|$等号成立的条件达到目的外，建议从不等式的“可乘方性”出发，引导学生得出例3的另一种证明方法：

原不等式$\Leftrightarrow\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2\geqslant4$.

$\because x\neq0$，$\therefore\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2\geqslant0$，即$x^2+\dfrac{1}{x^2}\geqslant2$，$\therefore\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2\geqslant4$.

故原不等式得证．

如此处理，既拓宽了学生化去绝对值符号的方法与途径，也帮助学生回顾复习了不等式的基本性质，以及利用分析法与综合法证明不等式的思路与步骤，一举多得．

4．教材安排例4的目的是帮助学生体会利用平方的方法化去绝对值符号的思维方式，回顾利用分析法证明不等式的思路与步骤，一般程度的学生应该都能够独立完成．因而，教学中，应放手让学生自主探究，独立完成．

相关链接

1．有关绝对值的重要不等式$|a|-|b|\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$等号成立的条件

不等式$|a|-|b|\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$事实上是由两个不等式$|a|-|b|\leqslant|a+b|$和$|a+b|\leqslant|a|+|b|$同时成立组成的．其中

不等式$|a|-|b|\leqslant|a+b|$的等号成立的条件是a，b异号或b为0；

不等式$|a+b|\leqslant|a|+|b|$的等号成立的条件是a，b同号或a，b中有一个为0.

因此，不等式$|a|-|b|\leqslant|a+b|$和$|a+b|\leqslant|a|+|b|$的等号同时成立的条件是b为0.

2．有关绝对值的重要不等式$|a|-|b|\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$的加强

不等式$|a|-|b|\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$可加强为$\big||a|-|b|\big|\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$.

3．不等式$|a+b|\leqslant|a|+|b|$的推广

不等式$|a+b|\leqslant|a|+|b|$可推广至n个实数的情形．亦即如下不等式

$$|x_1+x_2+\cdots+x_n|\leqslant|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|$$

也是成立的．事实上，教材例2的证明过程就用到了$n=3$时的上述不等式.

2.2 解含绝对值的不等式举例

教材线索

本节的学习目标是了解含有绝对值的不等式的解法．因而，教材一开始就明确指出了解含有绝对值的不等式的三个依据，为本节教材的学习指明了方向．接着，教材安排了三个例题，分别介绍了三种类型的含有绝对值的不等式的解法．在例题的解法里，教材充分注意到与三个依据的呼应，使得本节教材的知识一致性、方法连贯性得到了完美的体现.

教学目标

1．知识与技能

理解并掌握解含有绝对值的不等式的三个依据：绝对值的定义、几何意义以及不等式的基本性质.

2．过程与方法

理解并掌握依据绝对值的定义、几何意义以及不等式的基本性质解含有绝对值的不等式的思路、方法与一般步骤，能熟练准确地解教材所介绍的几类含有绝对值的不等式.

3．情感、态度与价值观

运用不同的思路探究含有绝对值的不等式的求解策略，感受数学思维的多样性.

教材分析

不等式的解法在运用数学知识解决问题中有着重要的地位，含有绝对值的不等式的求解更是如此.

本节教材的编排极为简洁. 教材一开始就明确指出了解含有绝对值的不等式的三个依据，为本节教材的学习指明了方向. 接着，教材安排了三个例题，分别介绍了三种类型的含有绝对值的不等式的解法. 在例题的解法里，教材充分注意到与三个依据的呼应，使得本节教材的知识一致性、方法连贯性得到了完美的体现.

本节的教学重点是依据绝对值的定义、几何意义以及不等式的基本性质解含有绝对值的不等式的思路、方法与一般步骤；教学难点是依据绝对值的定义对含有绝对值的不等式进行等价转化.

教学建议

本节的学习内容是含有绝对值的不等式解法举例. 因而，教学中，应紧扣解含有绝对值的不等式的三个依据，引导学生围绕这三个依据分析探究教材所介绍的几类含有绝对值的不等式的解题思路、方法与步骤，不必对教材内容作加深处理. 必须切实关注的是绝对值的定义、几何意义的深化与运用.

例题解析

1. 教材安排例 1 的目的是帮助学生体会依据绝对值的定义对含有绝对值的不等式进行等价转化，进而解含有绝对值的不等式的思路、方法与一般步骤. 教学中，应紧扣绝对值的定义，引导学生依据绝对值的定义对含有绝对值的不等式进行等价转化，从而完成不等式的求解. 要鼓励学生自主探究，在探究中发现并总结依据绝对值的定义对含有绝对值的不等式进行等价转化的方法与途径. 此外，在例 1 的教学中，除了按照教材提供的方法对含有绝对值的不等式进行等价转化外，还应引导学生发现另外两种转化途径：

(1) $1\leqslant|3-2x|<5\Leftrightarrow-5<3-2x\leqslant-1$ 或 $1\leqslant3-2x<5$；

(2) $1\leqslant|3-2x|<5\Leftrightarrow\frac{1}{2}\leqslant\left|x-\frac{3}{2}\right|<\frac{5}{2}$.

进而引导学生借助数轴，依据绝对值的几何意义理解这些转化，帮助学生在解不等式的同时，加深对绝对值的定义和几何意义的理解.

2. 教材安排例 2 的目的是帮助学生进一步体会依据绝对值的定义对含有绝对值的不等式进行等价转化，进而解含有绝对值的不等式的思路、方法与一般步骤. 教学中，同样应紧扣绝对值的定义，引导学生依据绝对值的定义对含有绝对值的不等式进行等价转化，从而完成不等式的求解. 由于所求解的不等式含有两个绝对值，因而教学中，应特别注意引导学生以“分类讨论”的思想方法寻求对所求解的不等式进行等价转化的方法与途径. 要放手让学生自主探究，在探究中发现并总结利用“零点分段讨论法”求解含有两个绝对值

的不等式的途径与规范表述，使本节教材的教学难点得以突破.

3. 教材安排例 3 的目的是帮助学生初步体会利用数形结合的思想方法求解含有绝对值的不等式的途径与规范表述. 教学中，应引导学生分析、探究，进而理解不等式两边的大小关系与两边所对应的函数图象的位置关系之间的等价转换，并据此求解不等式. 此外，在本例的教学中，建议引导学生探究并发现求解该不等式的另一思路：

$$|2x^2-1|>x \Leftrightarrow 2x^2-1<-x \text{ 或 } 2x^2-1>x.$$

相关链接

解含有一个绝对值的不等式的思路总结

含有一个绝对值的不等式的基本形式有如下四种：

①$|f(x)|>g(x)$； ②$|f(x)|\geqslant g(x)$； ③$|f(x)|<g(x)$； ④$|f(x)|\leqslant g(x)$.

求解这类不等式的基本思路是利用绝对值的定义进行等价转化，亦即：

$$|f(x)|>g(x) \Leftrightarrow f(x)<-g(x) \text{ 或 } f(x)>g(x);$$

$$|f(x)|\geqslant g(x) \Leftrightarrow f(x)\leqslant -g(x) \text{ 或 } f(x)\geqslant g(x);$$

$$|f(x)|<g(x) \Leftrightarrow -g(x)<f(x)<g(x);$$

$$|f(x)|\leqslant g(x) \Leftrightarrow -g(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x).$$

根据以上思路，教材例 3 的另一解法为：

解：$|2x^2-1|>x \Leftrightarrow 2x^2-1<-x$ 或 $2x^2-1>x$.

由 $2x^2-1<-x$ 即 $2x^2+x-1<0$ 解得 $-1<x<\frac{1}{2}$；

由 $2x^2-1>x$ 即 $2x^2-x-1>0$ 解得 $x<-\frac{1}{2}$ 或 $x>1$.

综上得原不等式的解集为 $\left\{x \,\middle|\, x<\frac{1}{2} \text{ 或 } x>1\right\}$.

教材习题参考解答

习题 7

1. $|2x+3y-2a-3b|\leqslant|2x-2a|+|3y-3b|=2|x-a|+3|y-b|<2\times\frac{\varepsilon}{4}+3\times\frac{\varepsilon}{6}=\varepsilon.$

2. (1) $|(A+B)-(a+b)|\leqslant|A-a|+|B-b|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$

   (2) $|(A-B)-(a-b)|\leqslant|A-a|+|-(B-b)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$

3. (1) $\left|\frac{x_1+x_2}{2}-a\right|=\frac{1}{2}|(x_1-a)+(x_2-a)|\leqslant\frac{1}{2}(|x_1-a|+|x_2-a|)<\frac{1}{2}(\varepsilon+\varepsilon)=\varepsilon.$

   (2) $\left|\frac{x_1+x_2+x_3}{3}-a\right|\leqslant\frac{1}{3}(|x_1-a|+|x_2-a|+|x_3-a|)<\frac{1}{3}(\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon)=\varepsilon.$

4. (1) $|x-a|+|x-b|\geqslant|(x-a)-(x-b)|=|a-b|.$

   (2) $|x-a|-|x-b|\leqslant|(x-a)-(x-b)|=|a-b|.$

5. $c>0\Rightarrow c|\alpha|^2+\frac{1}{c}|\beta|^2\geqslant2|\alpha\beta|$

$$\begin{aligned}\Rightarrow(1+c)|\alpha|^2+\left(1+\frac{1}{c}\right)|\beta|^2&\geqslant|\alpha|^2+2|\alpha\beta|+|\beta|^2\\&\geqslant|\alpha|^2+2\alpha\beta+|\beta|^2\\&=(\alpha+\beta)^2\\&=|\alpha+\beta|^2.\end{aligned}$$

6. 当$|a|\leqslant|b|$时，不等式成立；

   当$|a|>|b|$时，原不等式$\Leftrightarrow a^2-b^2\geqslant a^2-|ab|$，即$b^2\leqslant|ab|$，这由$|a|>|b|$可得.

   综上，原不等式成立.

习题 8

1. (1) **R**. 提示：原不等式$\Leftrightarrow 2x+1\geqslant x$或$2x+1\leqslant-x$.

   (2) $\{x|1<x<4\}$. 提示：原不等式$\Leftrightarrow\begin{cases}8-5x<3x,\\8-5x>-3x.\end{cases}$

   (3) **R**. 提示：原不等式$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}x<-\frac{1}{2},\\(3-x)-(-2x-1)<4,\end{cases}\text{或}\begin{cases}-\frac{1}{2}\leqslant x<3,\\(3-x)-(2x+1)<4,\end{cases}\text{或}\begin{cases}x\geqslant3,\\(x-3)-(2x+1)<4.\end{cases}$$

2. 当 $a<\frac{7}{2}$ 时，解集为 $\mathbf{R}$；

当 $a=\frac{7}{2}$ 时，解集为 $\left\{x\left|x\neq-\frac{1}{2}\right.\right\}$；

当 $\frac{7}{2}<a<7$ 时，解集为 $\left\{x\left|x<\frac{2-a}{3}\right.\text{或 } x>a-4\right\}$；

当 $a\geqslant 7$ 时，解集为 $\left\{x\left|x<\frac{2-a}{3}\right.\text{或 } x>\frac{2+a}{3}\right\}$.

提示：$|x-3|+|2x+1|=\begin{cases}-3x+2,\ x\leqslant-\frac{1}{2},\\ x+4,\ -\frac{1}{2}<x<3,\\ 3x-2,\ x\geqslant 3.\end{cases}$

3. $a<1$. 提示：$|x-4|+|x-3|\geqslant|(x-4)-(x-3)|=1$.

4. 一中调出 5 台，三中调出 1 台，五中调出 4 台，可使得调动的总次数最少.

第 3 章　数学归纳法与不等式证明

一、教学目标

1. 理解数学归纳法的概念、原理，理解数学归纳法的核心.

2. 了解适合于运用数学归纳法证明的命题类型，掌握数学归纳法的一般应用步骤，理解“奠基”和“假设与递推”这两个步骤各自的作用以及它们之间的不可或缺关系，掌握运用数学归纳法证明的规范表述，能运用数学归纳法证明一些与正整数有关的等式和不等式.

二、教材说明

本章教材的主要内容是运用数学归纳法证明一些与正整数有关的等式和不等式. 对于某些涉及正整数 n（n 可以取无限多个值）的等式和不等式，数学归纳法是一种非常有用的研究工具.

本章教材分为两节.

1. 本章第 1 节的重点是介绍数学归纳法以及运用数学归纳法证明一些与正整数有关的等式. 教材从学生熟知的基本不等式出发，以变量替换的思想引导学生由特殊到一般的探索发现了一个更具一般性的结论$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^n}}{2^n}\geqslant\sqrt[2^n]{a_1a_2\cdots a_{2^n}}$. 然后指出，如此得出的结论的正确性有待于严格证明，进而指出证明这个结论的工作可运用数学归纳法来完成，顺利导出了本节的主要学习内容——数学归纳法. 接着，教材借助多米诺骨牌游戏形象地揭示了数学归纳法的核心——归纳递推. 然后介绍了数学归纳法的适用范围、应用步骤，最后安排了运用数学归纳法证明等式的两个例题. 教材内容编排环环相扣，知识展开水到渠成.

2. 本章第 2 节的重点是运用数学归纳法证明一些与正整数有关的不等式. 教材在内容编排上处理得极为简洁——开门见山地导入，直截了当地举例，使得教材蕴涵的学习目的得以更加明确地体现，也更加有利于学生的学习.

三、课时安排建议

本章教学时间约需 **2** 课时，具体分配如下（仅供参考）：

3.1	数学归纳法	1 课时
3.2	数学归纳法证不等式	1 课时

四、教学建议

1. 帮助学生打好基础，发展能力

数学归纳法是一种重要的数学证明方法，其核心是归纳递推. 多米诺骨牌游戏是递推思想的一个模型，教学中应注意运用这一模型来直观地类比抽象数学归纳法.

数学归纳法应用于证明时的基本步骤是：(1) 奠基；(2) 假设与递推. 两个步骤缺一不可. 教学中应该注意结合模型与例题分别说明这两个步骤各自的作用，帮助学生真正理解这两个步骤缺一不可的理由.

数学归纳法一般被使用于证明某些涉及正整数的命题，但并非所有涉及正整数的命题都可以用数学归纳法来证明. 教学中应该结合例题使学生了解数学归纳法的适用范围. 可能的情况下，应引导学生探究进而发现：从 $n=k$ 到 $n=k+1$ 时，如果问题存在可利用的递推关系，则可以用数学归纳法证明；否则，使用数学归纳法就有困难，甚至无法完成命题的证明.

除此之外，应充分利用例题教学，帮助学生解决好如下两个问题：

(1) 在利用数学归纳法证明时，第(1)步“奠基”从 n 等于什么值开始是不能一概而论的. 一般地，如果要证明的命题是对所有的正整数都成立，则要从 $n=1$ 证起（奠基）；如果要证明的命题是对不小于 n_0 的所有正整数成立的，则要从 $n=n_0$ 证起（奠基）.

(2) 在利用数学归纳法证明时，第(2)步“假设与递推”并非只需利用问题中所存在的递推关系即可得出 $n=k+1$ 时命题成立，有时，还要结合运用比较法、分析法、综合法等其他证明不等式的方法.

2. 注重联系，提高对数学整体的认识

对于某些涉及正整数 n（n 可以取无限多个值）的等式和不等式，数学归纳法是一种非常有用的研究工具. 但在运用数学归纳法证明时，其第(2)步“假设与递推”并非都是只需利用问题中所存在的递推关系即可得出 $n=k+1$ 时命题成立，有时还要综合运用比较法、分析法、综合法等其他证明不等式的方法. 因而应当充分利用例 2 的教学，鼓励学生自主探究，让学生在自主学习的过程中体会在第(2)步“假设与递推”中，如何综合运用分析法等其他证明不等式的方法完成递推. 使学生在完成不等式证明的同时，把不等式的证明方法有机地联系起来，形成对不等式证明的更深入更全面的认识.

五、评价建议

1. 重视对学生数学学习过程的评价

数学归纳法的核心是归纳递推，因而其学习过程充满着探究与发现. 这就要求在本章内容的学习中，必须切实关注学生是否勤于思考、善于思考、坚持思考并不断改进思考的过程与方法，关注学生是否能积极思考、主动回答，是否愿意和能够与同伴交流对数学学习的体会，是否能够与他人合作探究数学问题.

2. 正确评价学生的数学基础知识和基本技能

对于某些涉及正整数 n（n 可以取无限多个值）的等式和不等式，数学归纳法是一种非常有用的研究工具，但其运用步骤却是程式化的. 因而，在本章内容的学习过程中，不应过分拘泥于对学生运用数学归纳法证明命题时的难度要求，而应该着眼于对学生掌握数学归纳法的基本知识以及正确运用数学归纳法证明命题的评价，引导学生把学习的重点放在对数学归纳法的原理的理解、对数学归纳法适用范围的了解、对数学归纳法应用步骤的掌握、对“奠基”和“假设与递推”这两个步骤各自的作用及它们之间的不可或缺关系的理解，以及如何进行“奠基”和完成“假设与递推”的掌握上.

3. 实施促进学生发展的多元化评价

笔试仍是定量评价的基本方式. 但是，不能仅以笔试作为评价的唯一方式. 应该把笔试与定性评价、过程评价结合起来，形成有利于促进学生全面发展的多元化评价体系.

3.1 数学归纳法

教材线索

教材从学生熟知的基本不等式出发，以变量替换的思想引导学生探索，进而发现一个更具一般性的结论 $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^n}}{2^n}\geqslant\sqrt[2^n]{a_1a_2\cdots a_{2^n}}$.

接着，教材指出了上述探索过程是一个由特殊到一般的过程，所得结论的正确性有待于严格证明，进而指出证明这个结论的工作可运用数学归纳法来完成，顺利导出了本节教材的主要学习内容——数学归纳法.

在导出本节教材的主要学习内容之后，教材形象地借助多米诺骨牌游戏揭示了数学归纳法的核心——归纳递推，进而指出了数学归纳法的适用范围以及利用数学归纳法证明与正整数有关的命题时采用的两个基本步骤.

最后，教材安排了两个例题，帮助学生理解掌握运用数学归纳法证明命题的一般步骤、证明过程的规范表述，强调了两个基本步骤各自的作用以及它们之间缺一不可的关系.

教学目标

1. 知识与技能

理解数学归纳法的概念、原理，理解数学归纳法的核心.

2. 过程与方法

了解适合于运用数学归纳法证明的命题类型，掌握数学归纳法的一般应用步骤，掌握运用数学归纳法证明的规范表述，能运用数学归纳法证明与正整数有关的等式.

3. 情感、态度与价值观

运用数学归纳法的核心解决一些实际问题，体会“归纳递推”的价值.

教材分析

数学归纳法是一种重要的数学证明方法. 在运用数学归纳法证明时，递推思想起着主导作用.

教材借助多米诺骨牌游戏形象地揭示了数学归纳法的核心——归纳递推，从而顺利地导出了本节教材的主要学习内容. 然后介绍了数学归纳法的适用范围、应用步骤，安排了运用数学归纳法证明等式的两个例题. 教材内容编排环环相扣，知识展开水到渠成.

本节的教学重点为：

(1) 了解数学归纳法的适用范围，理解其原理，掌握其一般应用步骤；

(2) 能够熟练运用数学归纳法证明一些与正整数有关的等式.

本节的教学难点为：

(1) 认识数学归纳法的证明思路；

(2) 运用数学归纳法证明时，找出正确的递推关系以完成“假设与递推”步骤.

教学建议

数学归纳法是一种重要的数学证明方法，其核心是归纳递推. 多米诺骨牌游戏是递推思想的一个模型，教材借助了多米诺骨牌游戏这个模型来直观地类比抽象数学归纳法，教学中应注意运用这一模型的作用.

数学归纳法应用于证明时的基本步骤是：(1) 奠基；(2) 假设与递推. 两个步骤缺一不可. 教学中应该注意结合模型与例题分别说明这两个步骤各自的作用，帮助学生真正理解其缺一不可的理由.

数学归纳法一般被使用于证明某些与正整数有关的命题，但并非所有与正整数有关的命题都可以用数学归纳法证明. 教学中应该结合例题使学生了解数学归纳法的适用范围. 可能的情况下，应引导学生探究进而发现：从 $n=k$ 到 $n=k+1$ 时，如果问题存在可利用的递推关系，则可以用数学归纳法证明；否则，使用数学归纳法就有困难，甚至无法完成命题的证明.

例题解析

1. 教材安排例 1 的一个目的是帮助学生熟悉运用数学归纳法证明等式的思路、掌握其运用步骤以及证明过程的规范表述. 由于例题难度不大，多数学生应该都能独立完成，因而教学中，应以学生的自主探究作为主要形式，让学生在自主学习的过程中体会数学归纳

法的证题思路、掌握其运用步骤. 教师应该关注的一个主要方面是适时帮助学生规范表述其证明过程.

教材安排例 1 的另一个目的是帮助学生理解、掌握“奠基”和“假设与递推”这两个步骤各自的作用以及它们之间的不可或缺关系. 教学中，应注意借助“解后反思”引导学生认真分析证明过程，明确“奠基”和“假设与递推”、这两个步骤各自的作用以及需要分别完成它们的理由；明确“奠基”和“假设与递推”这两个步骤的不可或缺关系，进而明确：没有用到“归纳假设”的证明不是数学归纳法！

2. 教材安排例 2 的目的是帮助学生进一步熟练掌握运用数学归纳法证明等式的思路、运用步骤以及证明过程的规范表述. 由于例题难度不大，再加上有了例 1 的学习基础，绝大多数学生应该都能独立完成，因而教学中，应以学生的自主探究作为主要形式，让学生在自主学习的过程中体会数学归纳法的证题思路，掌握其运用步骤，理解“奠基”和“假设与递推”的不可或缺. 教师应该关注的是适时帮助学生规范表述其证明过程，以及提醒学生注意从 $n=k$ 到 $n=k+1$ 时务必用上“当 $n=k$ 时等式成立”这一归纳假设.

相关链接

皮亚诺公理与数学归纳法的理论根据

意大利数学家皮亚诺总结了正整数的有关性质，提出了关于正整数的五条公理，后人称之为“皮亚诺公理”.

皮亚诺公理的内容如下：

任何一个满足下列条件的非空集合叫作正整数集合，记作 $\mathbf{N}_+$.

(1) $1\in\mathbf{N}_+$；

(2) 若 $k\in\mathbf{N}_+$，则有且仅有一个正整数称为 k 的后继数，记作 $k+1$，$k+1\in\mathbf{N}_+$. 这就是说，如果 $k=h$，那么 $k+1=h+1$；

(3) 若 $k\in\mathbf{N}_+$，则 $k+1\neq 1$. 这就是说，任何一个正整数的后继数都不是 1；

(4) 若 $k\in\mathbf{N}_+$，$h\in\mathbf{N}_+$，且 $k+1=h+1$，则 $k=h$. 这就是说，对于每一个正整数，只能是某一个正整数的后继数或者根本不是后继数；

(5) 设 M 是正整数的一个子集，且它具有下列性质：

①$1\in M$；

②若 $k\in M$，则 $k+1\in M$.

那么 M 是全体正整数的集合，即 $M=\mathbf{N}_+$.

这五条公理对正整数集合的基本属性进行了刻画和约定，由它们可以推出正整数的各种性质.

皮亚诺公理中的第五条也叫归纳公理.

设 P 是一个有关正整数的命题，把使 P 成立的所有正整数组成的集合记为 M. 这样，要证明命题 P 对于所有正整数都成立，只需证明 $M=\mathbf{N}_+$.

为此，根据归纳公理，首先证明 $1\in M$；其次证明若 $k\in M$，则 $k+1\in M$. 这样便证明了 $M=\mathbf{N}_+$，从而证明了命题 P 对于所有正整数都成立.

对照数学归纳法的证明步骤，不难发现，数学归纳法中的第一步“奠基”事实上就是在证明“$1\in M$”；而第二步“假设与递推”事实上就是在证明若“$k\in M$，则 $k+1\in M$”. 亦即数学归纳法的两个步骤实际上都是在验证归纳公理的两个性质. 因此，归纳公理是数学归纳法的理论根据.

3.2 数学归纳法证不等式

教材线索

教材以“数学归纳法也是证明不等式的重要方法”为开篇语，直接指明了本节的学习目标——用数学归纳法证明不等式.

接着，教材安排了两个例题. 由浅入深地引导学生就如何通过“奠基”和“假设与递推”证明与正整数有关的不等式.

最后，教材引导学生运用数学归纳法证明了教材 3.1 节中提出的不等式 $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^n}}{2^n}\geqslant\sqrt[2^n]{a_1a_2\cdots a_{2^n}}$，为本章的学习画上了圆满的句号.

教学目标

1. 知识与技能

进一步了解数学归纳法的适用范围，进一步理解其原理和证明思路，掌握其一般应用步骤.

2. 过程与方法

能够熟练运用数学归纳法证明一些与正整数有关的不等式.

3. 情感、态度与价值观

在运用数学归纳法证明不等式的过程中感受数学方法的严谨，体会数学方法的精妙.

教材分析

本节的学习目标十分明确，即：运用数学归纳法证明一些与正整数有关的不等式. 因

而，教材在内容编排上表现得极为简洁——开门见山的导入语，直截了当的应用举例. 如此削繁就简的编排，使得教材蕴涵的学习目的得以更加明确地体现，也更加符合学生学习的需要.

本节的教学重点为：

(1) 进一步熟练掌握数学归纳法的一般应用步骤；

(2) 能够熟练运用数学归纳法证明一些与正整数有关的不等式.

本节的教学难点为：

(1) 运用数学归纳法证明时，找出正确的递推关系以完成“假设与递推”步骤；

(2) 运用数学归纳法证明时，根据题意，准确地确定正整数 n 的第一个取值，从而准确地为后续的“假设与递推”“奠基”.

教学建议

数学归纳法是一种重要的数学证明方法，数学归纳法应用于证明时的基本步骤有两步：(1) 奠基；(2) 假设与递推. 两步缺一不可. 教学中应充分利用例题教学，帮助学生切实理解这一点.

除此之外，应充分利用例题教学，帮助学生解决好如下两个问题：

1. 在利用数学归纳法证明时，第(1)步“奠基”应从 n 等于什么值开始是不能一概而论的. 一般地，如果要证明的命题是对所有正整数成立的，则要从 $n=1$ 证起（奠基）；如果要证明的命题是对不小于 n_0 的所有正整数成立的，则要从 $n=n_0$ 证起（奠基）.

2. 在利用数学归纳法证明时，第(2)步“假设与递推”并非只需利用问题中所存在的递推关系即可得出 $n=k+1$ 时命题成立，有时，可能还要综合运用比较法、分析法、综合法等其他证明不等式的方法.

例题解析

1. 教材安排例 1 的另一个目的是帮助学生熟悉运用数学归纳法证明不等式的思路、掌握其运用步骤以及证明过程的规范表述. 由于例题难度不大，多数学生应该能够独立完成，因而教学中，应以学生的自主探究作为主要形式，让学生在自主学习的过程中体会数学归纳法的证题思路、掌握其运用步骤. 教师应该关注的一个主要方面是适时帮助学生规范表述其证明过程.

教材安排例 1 的另一个目的是帮助学生理解在利用数学归纳法证明时，第(1)步“奠基”应从 n 等于什么值开始. 教学中，应注意借助“解后反思”引导学生认真分析例题的证明过程，并结合本章 3.1 节的学习所得，归纳得出：如果要证明的命题是对所有正整数成立的，则要从 $n=1$ 证起（奠基）；如果要证明的命题是对不小于 n_0 的所有正整数成立的，则要从 $n=n_0$ 证起（奠基）.

2. 教材安排例 2 的目的是帮助学生进一步熟练掌握运用数学归纳法证明不等式的思

路、运用步骤以及证明过程的规范表述. 由于第(2)步“假设与递推”并非只需利用问题中所存在的递推关系即可得出 $n=k+1$ 时命题成立，还要综合运用分析法等其他证明不等式的方法. 因而例题的难度加大，多数学生在理解上可能会存在一定的障碍. 因而教学中，应鼓励学生自主探究，让学生在自主学习的过程中体会在第(2)步“假设与递推”中，如何综合运用分析法等其他证明不等式的方法完成递推. 教师应该关注的是适时帮助学生调整其证明思路.

相关链接

第二数学归纳法

1. 第二数学归纳法的运用步骤

由于证明不同命题的需要，数学归纳法有着其他的变化形式. 在这些变化形式中，第二数学归纳法的运用较为常见.

第二数学归纳法是一种改造过的数学归纳法. 运用它证明命题 P 对于所有正整数都成立的基本步骤如下：

(1) 奠基

证明当 $n=1$（或 $n=n_0$，$n_0\in\mathbf{N}_+$）时，命题 P 成立；

(2) 假设与推理

假设对正整数 $n\leqslant k$（k 是正整数，$k\geqslant 1$；或 k 是正整数，$k\geqslant n_0$）命题 P 成立，证明对 $n=k+1$ 时命题 P 成立.

由 (1)、(2) 知，命题 P 对于所有正整数都成立.

2. 第二数学归纳法的基础

第二数学归纳法的合理性可用最小数原理“任何一个非空正整数集合中都有一个最小的数”予以解释.

由于利用普通的数学归纳法可以证明最小数原理，因而普通数学归纳法是第二数学归纳法的基础.

3. 两种数学归纳法的比较

比较两种数学归纳法，可以发现，二者最大的区别在于第(2)步“假设与推理”：普通数学归纳法是对 $n=k$ 作出假设，第二数学归纳法则是对 $n\leqslant k$（k 是正整数，$k\geqslant 1$）作出假设. 显然，第二数学归纳法的假设条件更强，这就是有些命题用普通数学归纳法证明有一定难度，但运用第二数学归纳法却较为容易得出证明的原因所在.

教材习题参考解答

习题 9

1. (1) 当 $n=1$ 时，左边 $=1$，右边 $=\frac{1\times(1+1)}{2}=1$，等式成立.

(2) 假设 $n=k$ 时等式成立，就是 $1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$.

那么，$1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$

$$=\frac{(k+1)(k+2)}{2}=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}.$$

这表明 $n=k+1$ 时等式也成立.

根据 (1)，(2) 知对于一切正整数 n，等式成立.

2. (1) 当 $n=1$ 时，左边 $=\frac{1}{2}$，右边 $=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$，等式成立.

(2) 假设 $n=k$ 时等式成立，就是 $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$.

那么，$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$

$$=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{k+1}{(k+1)+1}.$$

这表明 $n=k+1$ 时等式也成立.

根据 (1)，(2) 知对于一切正整数 n，等式成立.

3. (1) 当 $n=1$ 时，左边 $=1$，右边 $=(-1)^{1-1}\frac{1\times(1+1)}{2}=1$，等式成立.

(2) 假设 $n=k$ 时等式成立，就是 $1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^{k-1}k^2=(-1)^{k-1}\frac{k(k+1)}{2}$.

那么，$1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^{k-1}k^2+(-1)^k(k+1)^2$

$$=(-1)^k\left[-\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)^2\right]$$

$$=(-1)^k\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}.$$

这表明 $n=k+1$ 时等式也成立.

根据 (1), (2) 知对于一切正整数 n, 等式成立.

习题 10

1. (1) 当 $n=1$ 时, 左边 $=|x_1|$, 右边 $=|x_1|$, 不等式成立.

(2) 假设 $n=k$ 时不等式成立, 就是 $|x_1+x_2+\cdots+x_k|\leqslant|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_k|$.

那么, $|x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}|\leqslant|x_1+x_2+\cdots+x_k|+|x_{k+1}|$

$$\leqslant|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_k|+|x_{k+1}|.$$

这表明 $n=k+1$ 时不等式也成立.

根据 (1), (2) 知对于一切正整数 n, 不等式成立.

2. (1) 当 $n=1$ 时, 左边 $=|\sin x|$, 右边 $=|\sin x|$, 不等式成立.

(2) 假设 $n=k$ 时不等式成立, 就是 $|\sin kx|\leqslant k|\sin x|$.

那么,
$$\begin{aligned}|\sin(k+1)x|&=|\sin kx\cdot\cos x+\cos kx\cdot\sin x|\\&\leqslant|\sin kx\cdot\cos x|+|\cos kx\cdot\sin x|\\&\leqslant|\sin kx|+|\sin x|\\&\leqslant k|\sin x|+|\sin x|\\&=(k+1)|\sin x|.\end{aligned}$$

这表明 $n=k+1$ 时不等式也成立.

根据 (1), (2) 知对于一切正整数 n, 不等式成立.

3. (1) 当 $n=2$ 时, 左边 $=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$, 右边 $=\sqrt{2}$, 不等式成立.

(2) 假设 $n=k(k\geqslant2)$ 时不等式成立, 就是 $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}>\sqrt{k}$.

那么, $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}$.

而 $\left(\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)-\sqrt{k+1}=\frac{\sqrt{k(k+1)}+1-(k+1)}{\sqrt{k+1}}=\frac{\sqrt{k}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}{\sqrt{k+1}}>0$,

故 $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}$.

这表明 $n=k+1$ 时不等式也成立.

根据 (1), (2) 知对于一切正整数 $n>1$, 不等式成立.

4. (1) 当 $n=2$ 时, 左边 $=\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2+2}=\frac{7}{12}$, 右边 $=\frac{1}{2}$, 不等式成立.

(2) 假设 $n=k$ $(k\geqslant2)$ 时不等式成立, 就是 $\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}>\frac{1}{2}$.

那么, $\frac{1}{k+1+1}+\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2(k+1)}$

$$=\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}\right)+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2(k+1)}-\frac{1}{k+1}$$

$$>\frac{1}{2}+\frac{1}{2(k+1)(2k+1)}$$

$$>\frac{1}{2}.$$

这表明 $n=k+1$ 时不等式也成立.

根据 (1), (2) 知对于一切正整数 $n>1$, 不等式成立.

5. (1) 当 $n=2$ 时, 左边$=\frac{a^2+b^2}{2}$, 右边$=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, 由基本不等式易知不等式成立.

(2) 假设 $n=k$ ($k\geqslant 2$) 时不等式成立, 就是$\frac{a^k+b^k}{2}>\left(\frac{a+b}{2}\right)^k$, 即$\left(\frac{a+b}{2}\right)^k<\frac{a^k+b^k}{2}$.

那么, $\left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1}=\left(\frac{a+b}{2}\right)^k\cdot\frac{a+b}{2}<\frac{a^k+b^k}{2}\cdot\frac{a+b}{2}=\frac{a^{k+1}+b^{k+1}+a^kb+ab^k}{4}$.

而 $\frac{a^{k+1}+b^{k+1}+a^kb+ab^k}{4}-\frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2}$

$$=-\frac{a^{k+1}+b^{k+1}-a^kb-ab^k}{4}$$

$$=-\frac{(a^k-b^k)(a-b)}{4}$$

$$<0.$$

这表明 $n=k+1$ 时不等式也成立.

根据 (1), (2) 知对于一切正整数 $n>1$, 不等式成立.

第 4 章　平均值不等式

一、教学目标

1. 理解三个正数的平均值不等式的导出思路与证明方法.

2. 掌握三个正数的平均值不等式的结构特征与成立条件，能够运用三个正数的平均值不等式证明一些简单的不等式.

3. 进一步熟练掌握运用数学知识解决实际应用问题的一般求解策略，熟练掌握对所构建的数学模型进行适当的变形，从而利用三个正数的平均值不等式解决问题的方法.

二、教材说明

三个正数的平均值不等式在不等式证明、求函数的最值和解决实际问题中都有着广泛的应用.

本章教材分为两节.

1. 第 1 节的重点是三个正数的平均值不等式及其在不等式证明中的应用. 教材以学生的自主探索、大胆猜想为依托，导出并证明了三个正数的平均值不等式$\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$，并指出了其等号成立的条件. 这样的编排，既复习了旧知识，又导出了本节的主要学习内容，承上启下，一举两得.

在导出了三个正数的平均值不等式，帮助学生掌握了三个正数的平均值不等式的结构特征、等号成立的条件以及应用三个正数的平均值不等式的条件之后，教材由浅入深地安排了三个例题，帮助学生熟悉运用三个正数的平均值不等式证明不等式的基本思路和表述方式，为 4.2 节的学习作好了铺垫.

2. 第 2 节的重点是运用三个正数的平均值不等式解决一些实际问题. 教材在内容编排上处理得极为简洁——直截了当的应用举例，使得教材蕴涵的学习目的得以更加明确地体现，也更加符合学生学习的需要.

教材在最后部分，安排了“阅读与思考”和“数学建模”两个栏目，拓展了学生的视野，加深了学生对所学知识的理解.

三、课时安排建议

本章教学时间约需 **2** 课时，具体分配如下（仅供参考）：

4.1	三个正数的平均值不等式	1 课时
4.2	三个正数平均值不等式的实际应用举例	1 课时

四、教学建议

1. 帮助学生打好基础，发展能力

本章学习内容的重点是三个正数的平均值不等式及其应用. 准确把握三个正数的平均值不等式的结构特征、应用条件以及如何创设运用三个正数的平均值不等式的条件是基础. 教学中，务必紧扣这一基础，帮助学生切实理解并掌握这些基础知识，否则，发展学生的能力只能是一句空话.

2. 注重联系，提高对数学整体的认识

本章的学习内容与 1.3 节以及 1.4 节的学习内容联系密切. 教学中，应注意引导学生温故而知新，使新旧知识、新旧方法有机地联系起来，形成一个整体.

3. 注重数学知识与实际的联系，发展学生的应用意识和能力

三个正数的平均值不等式在求函数的最值型的实际问题中应用广泛. 教学中，应充分利用两个例题与“数学建模”栏目，引导学生发现数学知识与实际问题的联系，探究运用数学知识解决实际问题的途径与方法，在解决问题的同时，发现数学知识的价值，发展学生的应用意识和能力.

4. 倡导自主探索，鼓励学生主动地学习

由于有了 1.3 节“基本不等式”以及 1.4 节“基本不等式实际应用举例”的学习基础，本节内容的学习，对多数学生而言应该不会有太大的困难. 因而教学中，要大胆放手，鼓励学生自主探究，让学生在探究中经历知识、方法的产生与发展过程，主动构建相应的知识与方法体系.

五、评价建议

1. 重视对学生数学学习过程的评价

在本章内容的学习中，必须重视对学生数学学习过程的评价. 要关注在本章内容的学习过程中，学生是否勤于思考、善于思考、坚持思考并不断改进思考的方法与过程. 此外，在本章的“数学建模”和“阅读与思考”栏目的学习中，对学生是否能积极思考、主动回答，是否能够愿意和能够与同伴交流对数学学习的体会，是否能够与他人合作探究数学问题等方面都应该给予充分的重视.

2. 正确评价学生的数学基础知识和基本技能

学习本章的主要目的是运用三个正数的平均值不等式证明不等式、求函数的最值和解决相关的实际问题，这三个方面的应用在难度控制上都很容易被拔高. 教学中，应该注意将它们定位于《课标》的要求上，严格按《课标》的要求控制问题的难度. 这样，对学生的数学基础知识和基本技能的评价才可能是恰当和正确的.

3. 实施促进学生发展的多元化评价

笔试仍是定量评价的基本方式. 但是，不能仅以笔试作为评价的唯一方式，应该把笔

试与定性评价、过程评价结合起来，形成有利于促进学生全面发展的多元化评价体系.

4.1 三个正数的平均值不等式

教材线索

教材从学生熟知的基本不等式以及 3.1 节经过探索得出的不等式$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^n}}{2^n}\geqslant\sqrt[2^n]{a_1a_2\cdots a_{2^n}}$为出发点，引导学生思考进而猜想对于任意的三个正数 a，b，c，结论$\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$应该也成立. 而后引导学生借助数学实验验证所作出的猜想，再对所猜想的结论进行严格的数学证明，从而得出本节的主要学习内容——三个正数的平均值不等式，并用文字的形式对三个正数的平均值不等式作出了解读.

接着，教材安排了三个例题，介绍了三个正数的平均值不等式在证明不等式中的应用.

教学目标

1. 知识与技能

理解三个正数的平均值不等式的导出思路与证明方法.

2. 过程与方法

掌握三个正数的平均值不等式的条件与形式，能够运用三个正数的平均值不等式证明一些简单的不等式.

3. 情感、态度与价值观

亲历知识的发现过程，体验“猜想—验证”的学习方式.

教材分析

三个正数的平均值不等式在不等式证明、求函数的最值和解决实际问题中都有着广泛的应用.

教材以学生的自主探索、大胆猜想为依托，导出并证明了三个正数的平均值不等式$\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$，指出了其等号成立的条件. 这样编排既复习了旧知识，又导出了本节教材的主要学习内容，承上启下，一举两得.

在导出了三个正数的平均值不等式，帮助学生掌握了三个正数的平均值不等式的结构

特征、等号成立的条件以及应用三个正数的平均值不等式的条件之后，教材由浅入深地安排了三个例题，帮助学生熟悉运用三个正数的平均值不等式证明不等式的基本思路和表述方式，为 4.2 节的学习作好了铺垫.

本节的教学重点是三个正数的平均值不等式的理解与应用，教学难点是如何变换欲证不等式的形式以适合应用三个正数的平均值不等式.

教学建议

由于有了 1.3 节基本不等式的学习基础，本节的学习内容对多数学生而言应该不会有太大的困难. 因而教学中，必须注意如下问题：

1. 要大胆放手，鼓励学生自主探究，让学生在探究中经历知识、方法的产生与发展过程，主动建构相应的知识与方法体系.

2. 不要因为多数学生可以比较容易地掌握本节的学习内容就随意增加一些难度较大的习题，而应该严格按《课标》的要求控制习题的难度.

此外，教学中，应特别关注引导学生探索进而掌握通过简单的添项或拆项的转化手段使得问题可以运用三个正数的平均值不等式予以解决的常用方法，帮助学生丰富运用三个正数的平均值不等式的途径与方法.

例题解析

1. 教材安排例 1 的一个目的是帮助学生熟悉运用三个正数的平均值不等式证明不等式的思路，掌握其运用步骤以及证明过程的规范表述. 由于例题难度不大，多数学生应该能够独立完成. 因而教学中，应以学生的自主探究作为主要形式，让学生在自主学习的过程中体会运用三个正数的平均值不等式证明不等式的证题思路，掌握其运用步骤. 教师应该关注的一个主要问题是适时帮助学生规范表述其证明过程.

教材安排例 1 的另一个目的是帮助学生理解多次运用三个正数的平均值不等式证明不等式时必须注意保证每一个等号成立的条件不互相矛盾. 教学中，应提醒学生在完成证明过程后注意验证各个等号同时成立的条件.

2. 教材安排例 2 的目的在于帮助学生进一步熟悉运用三个正数的平均值不等式证明不等式的思路，掌握其运用步骤以及证明过程的规范表述. 由于例题难度不大，加上有了例 1 的学习基础，多数学生应该能够独立完成. 因而教学中，应放手让学生自主探究，自主解决问题.

3. 教材安排例 3 的主要目的在于帮助学生掌握通过简单变形，使得问题能够借助三个正数的平均值不等式予以证明的思路与方法. 由于证明过程中，需要借助分类讨论、不等式的基本性质以及三个正数的平均值不等式，知识与方法的综合程度较高，学生理解上可能会有一定的困难. 因而教学中，要紧扣三个正数的平均值不等式的结构特征以及应用条件，引导学生分析并寻求证明途径，可以采取合作交流、个别指导等多种形式帮助学生切

实理解解题思路，真正掌握例题的证明方法.

相关链接

一般的平均值不等式

1. 平均值不等式的一般形式

一般的平均值不等式可表述为：n 个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数，即

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\,(a_i>0,i=1,2,\cdots,n),$$

等号当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时成立.

2. 一般的平均值不等式的证明

历史上，许多著名的数学家都曾对一般的平均值不等式进行研究，得出了许多证明方法，下面介绍的是这诸多证法中比较简单的一种证法.

设 $A=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$，$G=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$.

如果 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$都相等，则显然 $A=G$.

如果 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$不全相等，不妨设 a_1 是 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$中最小的数，a_2 是 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$中最大的数.

分别用 A 与 a_1+a_2-A 代换 a_1 和 a_2，连同 $a_3,a_4,\cdots,a_n$ 组成 n 个数. 这样的代换使得最小数变大，最大数变小，但 n 个数的和不变，从而算术平均数不变.

因为 $a_1<A<a_2$，所以 $A(a_1+a_2-A)-a_1a_2=(A-a_1)(a_2-A)>0$.

即 $A(a_1+a_2-A)>a_1a_2$，

所以 $\sqrt[n]{A(a_1+a_2-A)a_3a_4\cdots a_n}>\sqrt[n]{a_1a_2a_3a_4\cdots a_n}$.

即代换后的几何平均数变大.

以上这种代换，使得 n 个数中的最小数变换到 A，最多进行 $n-1$ 次这样的代换，就可以使 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$中的所有数都变换成 A，这时，几何平均数达到最大值 $\sqrt[n]{AA\cdots A}=A$.

由此可知，如果 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$不全相等，就有

$$G=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}<A=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

综上得

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\,(a_i>0,i=1,2,\cdots,n),$$

等号当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时成立.

3. 一般的平均值不等式的进一步拓展

设 $H=\dfrac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$，称为 n 个正数的调和平均数.

利用一般的平均值不等式，容易得到 $H \leqslant G$.

于是有 $H \leqslant G \leqslant A$.

这个不等式通常也被称为关于 n 个正数的基本不等式.

4.2 三个正数的平均值不等式的实际应用举例

教材线索

本节的学习内容为利用三个正数的平均值不等式解决实际问题. 教材直接给出了两个例题，引导学生分析、探究问题的实质，构建相应的数学模型，并结合对三个正数的平均值不等式结构特征的把握，对所构建的数学模型进行适当的变形，从而利用三个正数的平均值不等式完成了问题的解答.

教学目标

1. 知识与技能

进一步熟练掌握实际应用问题的一般求解策略.

2. 过程与方法

进一步熟练掌握对所构建的数学模型进行适当的变形，从而利用三个正数的平均值不等式完成了问题的解答.

3. 情感、态度与价值观

运用数学知识解决实际问题，体会数学知识与方法的价值.

教材分析

由于本节的学习内容较为单一，因而教材相应地采用了极为简洁的编排方式，不加任何铺垫就直接给出了两个实际问题，引导学生探究进而运用三个正数的平均值不等式完成了问题的解答. 如此的内容编排，虽简单，但极具实效.

本节的教学重点是数学建模以及利用三个正数的平均值不等式求函数的最值；教学难点是为利用三个正数的平均值不等式而应对所构建的数学模型进行的适当变形以及结合问题的实际意义检验答案的合理性.

教学建议

由于有了 1.4 节和 4.1 节的学习基础，本节的学习内容对于多数学生而言并不困难.

再加上本节的学习内容实际上是例题解答，因而教学中，应充分利用例题的分析与解决，帮助学生在进一步熟练掌握利用三个正数的平均值不等式求函数的最值的同时，进一步熟练掌握实际应用问题的一般求解策略.

例题解析

1. 教材安排例 1 的一个目的是帮助学生进一步熟练掌握实际应用问题的一般求解策略. 例题难度不大，多数学生应该能够独立完成. 因而教学中，应以学生的自主探究作为主要形式，让学生在自主学习的过程中体会数学建模的思路及其一般步骤. 教师应该关注的一个主要方面是适时帮助学生探究发现问题中各个数量之间的关系以及如何利用这些关系构建数学模型.

教材安排例 1 的另一个目的是帮助学生进一步熟练掌握利用三个正数的平均值不等式求函数的最值时对所构建的数学模型进行的适当变形. 教学中，应注意引导学生结合对三个正数的平均值不等式结构特征的把握，探究变形的方法与途径. 同时提醒学生在完成数学模型求解后注意结合三个正数的平均值不等式等号成立的条件以及问题的实际意义验证等号是否成立.

2. 教材安排例 2 的目的与例 1 是相同的. 由于例题难度不大，加上有了例 1 的学习基础，多数学生应该能够独立完成. 因而教学中，应放手让学生自主探究，自主解决问题.

相关链接

1. 利用三个正数的平均值不等式求函数最值时，关键在于用好如下的两个结论：

(1) 要“和”最小，须“积”定值. 亦即：

如果三个正数 x，y，z 的积 xyz 是定值 P，那么当且仅当 $x=y=z$ 时，和 $x+y+z$ 有最小值 $3\sqrt[3]{P}$；

(2) 要“积”最大，须“和”定值. 亦即：

如果三个正数 x，y，z 的和 $x+y+z$ 是定值 S，那么当且仅当 $x=y=z$ 时，积 xyz 有最大值$\frac{S^3}{27}$.

2. 利用三个正数的平均值不等式求函数最值时的注意点

(1) 利用三个正数的平均值不等式求函数最值时，一定要注意公式不可或缺的三个条件：正数、定值、等号成立.

(2) 多次利用三个正数的平均值不等式时，一定要注意必须使每个不等式的等号能够同时成立，否则最值无法达到.

教材习题参考解答

习题 11

1. $a>0$，$b>0$，$c>0\Rightarrow\frac{a}{b}>0$，$\frac{b}{c}>0$，$\frac{c}{a}>0\Rightarrow\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geqslant3\sqrt[3]{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}}=3$.

2. $a>0$，$b>0$，$c>0\Rightarrow\left.\begin{cases}\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geqslant3\sqrt[3]{\frac{1}{a^2b^2c^2}}>0\\(a+b+c)^2\geqslant(3\sqrt[3]{abc})^2=9\sqrt[3]{a^2b^2c^2}>0\end{cases}\right\}$

$\Rightarrow\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)(a+b+c)^2\geqslant3\sqrt[3]{\frac{1}{a^2b^2c^2}}\cdot9\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=27$.

3. $xy>0\Rightarrow xy+x^2=\frac{xy}{2}+\frac{xy}{2}+x^2\geqslant3\sqrt[3]{\frac{xy}{2}\cdot\frac{xy}{2}\cdot x^2}=3\sqrt[3]{\frac{(x^2y)^2}{4}}=3(x^2y=2)$.

4. $0<x<\frac{1}{2}\Rightarrow x^2(1-2x)=x\cdot x\cdot(1-2x)\leqslant\left[\frac{x+x+(1-2x)}{3}\right]^3=\frac{1}{27}$.

习题 12

1. 设容积为 V，铁皮箱的长、宽、高依次为 a，b，c，则总用料为 $2(ab+bc+ca)$.

$\because 2(ab+bc+ca)=2V\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geqslant2V\cdot3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}=6\sqrt[3]{V^2}$，等号当且仅当 $a=b=c$ 时成立.

$\therefore$ 当铁皮箱的长、宽、高都相等时，用料最省.

2. 设木梁的宽、高依次为 a，b，圆柱形木材横截面的直径为 L，则 $a^2+b^2=L^2$.

依题意，木梁的强度为 kab^2（$k>0$ 为比例系数）.

$\because (ab^2)^2=\frac{1}{2}(2a^2)\cdot b^2\cdot b^2\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{2a^2+b^2+b^2}{3}\right)^3=\frac{4L^6}{27}$，$\therefore ab^2\leqslant\frac{2\sqrt{3}L^3}{9}$.

等号当且仅当 $b=\sqrt{2}a$ 时成立.

故应使木梁的高等于宽的 $\sqrt{2}$ 倍，这样的木梁强度最大.

3. 依题意，有：$E=\frac{k}{R^2}\cdot\sin\theta\cos^2\theta$.

$\because\theta\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$，$\therefore\sin\theta>0$，$\cos\theta>0$.

从而由 $(\sin\theta\cos^2\theta)^2=\frac{1}{2}(2\sin^2\theta)\cdot\cos^2\theta\cdot\cos^2\theta\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{2\sin^2\theta+\cos^2\theta+\cos^2\theta}{3}\right)^3=\frac{4}{27}$ 可

得，当且仅当 $2\sin^2\theta=\cos^2\theta$，即 $\tan\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时成立. 此时，$h=\frac{\sqrt{2}}{2}R$.

故应该使灯的高度等于圆桌半径的 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 倍，才能使桌子边缘处最亮.

第 5 章　三个重要不等式

一、教学目标

1. 理解二维形式和 n 维形式的柯西不等式的证明思路与方法；掌握二维形式和 n 维形式的柯西不等式的结构特征，明确其等号成立的条件，能利用柯西不等式证明多个数量具有平方和形式的不等式.

2. 理解排序不等式的证明思路与方法；掌握排序不等式的结构特征，掌握根据运用排序不等式的需要确定两组数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 $b_1,b_2,\cdots,b_n$，从而使问题能够利用排序不等式得到解决的方法，能利用排序不等式证明需要考虑具有明确大小顺序且数目相同的两列数的对应项乘积之和的大小关系的不等式.

3. 了解贝努利不等式的导出过程，理解其证明方法，掌握其结构特征，能运用贝努利不等式证明一些简单的不等式.

二、教材说明

柯西不等式、排序不等式和贝努利不等式都是在数学中有着重要地位的不等式. 本章讨论了这三个不等式的导出方式、证明方法和简单应用.

本章分为三节.

1. 第 1 节的重点是柯西不等式的导出方式、证明方法和简单应用. 教材以学生熟悉的平面向量夹角公式和平面向量的坐标运算为依托，导出了二维形式的柯西不等式，并指明了等号成立的条件，使学生对柯西不等式有了初步的了解与认识. 同时，教材以旁白的形式给出了利用长方形面积的不同分割而证明二维柯西不等式的方法. 既丰富了柯西不等式的证明方法，又让学生体验到了“以形助数”的精妙. 如此设计，匠心独运！

在此基础上，教材变换思考方式，利用二次函数的性质对二维形式的柯西不等式进行了证明，并通过对证明方法的推广，把二维形式的柯西不等式推广到一般的 n 维形式，同时指明了等号成立的条件. 这种编排方式，旨在帮助学生顺利地把对二维形式的柯西不等式的了解与认识迁移为对 n 维形式的柯西不等式的了解与认识，事半而功倍.

在学生基本掌握了柯西不等式的结构特征、等号成立条件的基础上，教材用三个例题介绍了利用柯西不等式证明不等式的思路与方法，说明了当不等式中多个数量具有平方和形式时，柯西不等式是解决问题的重要工具，展示了柯西不等式的应用价值.

2. 第 2 节的重点是排序不等式的导出方式、证明方法和简单应用. 教材以“探究—猜想—证明—应用”的模式展示了本节的学习过程，目的在于帮助学生体会掌握研究数学问题时使

用的基本方法和通常的研究过程，更在于引导学生通过自身的数学活动，初步认识排序不等式的数学意义、证明方法和简单应用.

3. 第 3 节的重点是贝努利不等式的导出方式、证明方法和简单应用. 由于《课标》对贝努利不等式的要求很低——会用数学归纳法证明贝努利不等式，因而本节教材基本上是按介绍性质的定位进行编排的.

三、课时安排建议

本章教学时间约需 **4** 课时，具体分配如下(仅供参考)：

5.1	柯西不等式	2 课时
5.2	排序不等式	1 课时
5.3	贝努利不等式	1 课时

四、教学建议

1. 对于柯西不等式，教学中，应引导学生从观察二维形式的柯西不等式的结构特征入手，发现其 $AC\geqslant B^2$ 的结构形式，从而联想构造二次函数 $y=Ax^2+Bx+C$. 如此，不仅让学生清楚了证明方法的产生条件，也明确了这种方法的合理性，更为后续 n 维形式的柯西不等式的学习作好了铺垫.

在例题的教学中，应帮助学生从解题过程中归纳得出：

(1)当不等式中多个数量具有平方和形式时，柯西不等式是解决问题的重要工具；

(2)运用柯西不等式的关键在于能根据需要确定两组数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 $b_1,b_2,\cdots,b_n$.

2. 对于排序不等式，教学中，应紧扣“探究—猜想—证明—应用”这一主线，引导学生大胆猜想，对所作出的猜想进行尝试性检验，感知猜想的正确性，进而作出严格的证明. 教师应引导学生探究发现排序不等式的证明策略：固定 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，对另一列数采用逐步调整并不断比较的措施，使之逐步递归为 $b_1,b_2,\cdots,b_n$，从而得出“反序和”$\leqslant$“乱序和”$\leqslant$“同序和”.

在例题教学中，应引导学生紧扣排序不等式的结构特征，探究根据运用排序不等式的需要确定两组数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 的方法与途径，从而借助排序不等式使问题得到解决.

3. 对于贝努利不等式由于《课标》对其要求很低，因而教学中只要着眼于引导学生从二项式定理出发，导出进而用数学归纳法证明贝努利不等式，不要在贝努利不等式的应用上花费过多的时间.

五、评价建议

1. 重视对学生数学学习过程的评价

本章的一个主要学习内容是探究三个重要不等式的导出方式. 教材在这三个重要不等式的导出方式的编排方式上，基本上是采用了“探究—猜想—证明”这样的一种模式. 因而在本

章内容的学习中，必须充分重视对学生数学学习过程的评价，要关注在本章内容的学习过程中，学生是否勤于思考、善于思考、坚持思考并不断改进思考的方法与过程. 此外，在本章的“数学建模”栏目的学习中，对学生是否能积极思考、主动回答，是否愿意和能够与同伴交流对数学学习的体会，是否能够与他人合作探究数学问题等方面都应该给予充分的重视.

2. 正确评价学生的数学基础知识和基本技能

本章的另一个主要学习内容是探究三个重要不等式的证明思路与方法，以及这三个重要不等式的简单应用. 由于《课标》对这三个重要不等式都只要求能够简单地应用，因而教学中，应该按《课标》的要求严格控制问题的难度，尤其是在贝努利不等式的教学中，更应该充分地认识到这一点. 这样，才能恰当和正确地评价学生的数学基础知识和基本技能.

3. 实施促进学生发展的多元化评价

虽然笔试仍是定量评价的基本方式，但是，在本章的学习评价中，应该弱化笔试这一评价方式，而应更加注重定性评价与过程评价，增加定性评价与过程评价在评价体系中的权重，形成有利于促进学生全面发展的多元化评价体系.

5.1 柯西不等式

教材线索

教材从学生熟悉的平面向量夹角公式出发，借助平面向量的坐标运算，导出了二维形式的柯西不等式，指明了等号成立的条件. 随后，教材在旁白处给出了证明二维柯西不等式的面积分割证法，进一步加深了学生对二维柯西不等式的整体认识.

接着，教材引导学生利用二次函数的性质对二维形式的柯西不等式进行了证明，进而通过对证明方法的推广，把二维形式的柯西不等式推广到一般的 n 维形式，并指明了等号成立的条件.

在此基础上，教材安排了三个例题，由浅入深地引导学生利用柯西不等式证明了多个数量具有平方和形式的不等式.

最后，教材以例题的形式给出并证明了柯西不等式的向量形式.

教学目标

1. 知识与技能

理解二维形式和 n 维形式的柯西不等式的证明思路与方法，掌握其结构特征，明确其

等号成立的条件.

2. 过程与方法

能利用柯西不等式证明多个数量具有平方和形式的不等式.

3. 情感、态度与价值观

在柯西不等式的“升维”过程中，体会并掌握发现知识的一种思维方式.

教材分析

当不等式中多个数量具有平方和形式时，柯西不等式是解决问题的重要工具.

教材以学生熟悉的平面向量夹角公式和平面向量的坐标运算以及面积分割法为依托，导出了二维形式的柯西不等式，并指明了等号成立的条件，使学生对柯西不等式有了初步的了解与认识.

在此基础上，教材变换思考方式，利用二次函数的性质对二维形式的柯西不等式进行了证明，并通过对证明方法的推广，把二维形式的柯西不等式推广到一般的 n 维形式，同时指明了等号成立的条件. 这种编排方式，旨在帮助学生顺利地把对二维形式的柯西不等式的了解与认识迁移为对 n 维形式的柯西不等式的了解与认识，事半而功倍.

在学生基本掌握了柯西不等式的结构特征、等号成立条件的基础上，教材用三个例题介绍了利用柯西不等式证明不等式的思路与方法，说明了当不等式中多个数量具有平方和形式时，柯西不等式是解决问题的重要工具，展示了柯西不等式的应用价值.

本节的教学重点是柯西不等式的理解与应用，教学难点是如何变换不等式的形式以使问题适合于应用柯西不等式以及如何根据应用柯西不等式的需要确定两组数 a_1，a_2，…，a_n 和 b_1，b_2，…，b_n.

教学建议

由二维形式的柯西不等式到 n 维形式的柯西不等式，是从特殊到一般的过程. 因而教学中，应充分借助二次函数的性质证明二维形式的柯西不等式的证明思路，通过对证明方法的推广，把二维形式的柯西不等式推广到一般的 n 维形式，使学生易于接受.

在借助二次函数的性质证明二维形式的柯西不等式的教学中，应引导学生从观察柯西不等式的结构特征入手，发现其 $AC\geqslant B^2$ 的结构形式，从而联想构造二次函数 $y=Ax^2+Bx+C$. 如此，不仅让学生清楚了证明方法的产生条件，也明确了这种方法的合理性，更为后续的推广作好了铺垫.

此外，在 n 维形式的柯西不等式的教学中，一定要引导学生认真分析不等式的结构，切实把握其结构特征，为运用柯西不等式打好基础.

例题的教学中，应帮助学生从解题过程中归纳得出：

1. 当不等式中多个数量具有平方和形式时，柯西不等式是解决问题的重要工具；

2. 运用柯西不等式的关键在于能根据需要确定两组数 a_1，a_2，…，a_n 和 b_1，b_2，

…，b_n.

例题解析

1. 教材安排例 1 的目的是帮助学生熟悉运用柯西不等式证明不等式的思路，掌握其运用步骤. 由于例题难度不大，多数学生应该能够独立完成. 因而教学中，应以学生的自主探究作为主要形式，让学生在自主学习的过程中体会总结根据运用柯西不等式的需要确定两组数 a_1，a_2，…，a_n 和 b_1，b_2，…，b_n 的方法与途径，体会运用柯西不等式证明不等式的证题思路，掌握其运用步骤.

2. 教材安排例 2 的目的与例 1 一样，在于帮助学生熟悉运用柯西不等式证明不等式的思路，掌握其运用步骤. 由于例题难度不大，加上有了例 1 的学习基础，多数学生应该能够独立完成. 因而教学中，应放手让学生自主探究，自主解决问题.

3. 教材安排例 3 的主要目的在于帮助学生进一步掌握根据运用柯西不等式的需要确定两组数 a_1，a_2，…，a_n 和 b_1，b_2，…，b_n，使得问题能够借助柯西不等式予以证明的思路与方法. 教学中，要紧扣柯西不等式的结构特征，引导学生分析、寻求根据需要确定两组数 a_1，a_2，…，a_n 和 b_1，b_2，…，b_n 的途径与方法，可以采取合作交流、个别指导等多种形式帮助学生切实理解解题思路，真正掌握例题的证明方法.

4. 教材安排例 4 的目的在于导出并证明柯西不等式的向量形式. 由于例题难度不大，加上有了本节教材开始部分的介绍，多数学生能够独立完成. 教学中，可以完全放手让学生自主探究，自主解决问题.

相关链接

1. 二维形式的柯西不等式的其他推广形式

(1) 若 $a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$，$c\geqslant 0$，$d\geqslant 0$，则 $(a+b)(c+d)\geqslant(\sqrt{ab}+\sqrt{cd})^2$，等号当且仅当 $ad=bc$ 时成立.

(2) 若 a，b，c，$d\in\mathbf{R}$，则 $\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}\geqslant|ab+cd|$，等号当且仅当 $ad=bc$ 时成立.

(3) 若 a，b，c，$d\in\mathbf{R}$，则 $\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}\geqslant|ab|+|cd|$，等号当且仅当 $|ad|=|bc|$ 时成立.

2. 柯西不等式与三角不等式

利用一般形式的柯西不等式，可以极为容易得出

$$\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}+\sqrt{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2}\geqslant\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}.$$

上述不等式称为三角不等式，它是一个在数学中有着重要地位的不等式.

5.2 排序不等式

教材线索

教材以学生熟悉的购买物品问题为背景，引导学生利用猜想、验证的方法解决问题. 进而以此为基础，把数学模型从实际问题中抽象出来，猜想出两个三元数组的反序和、乱序和与同序和之间的数量关系，再对所猜想的结论进行严格的数学证明，从而得出了本节教材的主要学习内容——排序不等式，并用学生排队的事例对排序不等式作了形象的说明.

随后，教材安排了三个例题，介绍了排序不等式在证明不等式以及解决实际问题中的应用，并用一道探究题对例 3 进行了拓展.

教学目标

1. 知识与技能

理解排序不等式的证明思路与方法.

2. 过程与方法

掌握排序不等式的结构特征，掌握根据运用排序不等式的需要确定两组数 a_1，a_2，…，a_n 和 b_1，b_2，…，b_n 的方法，从而使问题变成能够利用排序不等式来解决的方法与途径，能利用排序不等式证明需要考虑具有明确大小顺序且数目相同的两列数的对应项乘积之和的大小关系的不等式.

3. 情感、态度与价值观

从排序不等式的导出与证明过程之中体验“大胆猜想、尝试检验、严格证明”的数学思想方法.

教材分析

本节的学习内容是排序不等式及其应用. 教材以“探究—猜想—证明—应用”的模式展示了本节教材的学习过程，目的在于帮助学生体会掌握研究数学问题时使用的基本方法和通常的研究过程，更在于引导学生通过自身的数学活动，初步认识排序不等式的数学意义、证明方法和简单应用.

本节的教学重点是排序不等式的理解与应用，教学难点是如何根据运用排序不等式的需要确定两组数 a_1，a_2，…，a_n 和 b_1，b_2，…，b_n，以使问题适合于应用排序不等式.

教学建议

排序不等式是一个经典的不等式，其结构规律简明、易于记忆．对于具有明确大小顺序且数目相同的两列数，当需要考虑它们对应项乘积之和的大小关系时，排序不等式是一个极其有用的工具.

在排序不等式的导出与证明的教学中，应紧扣“探究—猜想—证明—应用”这一主线，引导学生大胆猜想，对所作出的猜想进行尝试性检验，感知猜想的正确性，进而作出严格的证明．教师应引导学生探究发现排序不等式的证明策略：固定 a_1，a_2，…，a_n，对另一列数采用逐步调整并不断比较的措施，使之逐步递归为 b_1，b_2，…，b_n，从而得出反序和≤乱序和≤同序和.

在例题教学中，应引导学生紧扣排序不等式的结构特征，根据运用排序不等式的需要确定两组数 a_1，a_2，…，a_n 和 b_1，b_2，…，b_n，从而借助排序不等式使问题得到解决.

例题解析

1．教材安排例 1 的目的是帮助学生熟悉运用排序不等式证明不等式的思路，掌握其运用步骤．由于例题难度较大，因而教学中，引导学生紧扣排序不等式的结构特征，探究根据运用排序不等式的需要确定两组数 a_1，a_2，…，a_n 和 b_1，b_2，…，b_n 的方法与途径，应给学生充分的自主探究时间，让学生在自主学习的过程中体会根据运用排序不等式的需要确定两组数 a_1，a_2，…，a_n 和 b_1，b_2，…，b_n 的方法与途径，体会运用排序不等式证明不等式的证题思路，掌握其运用步骤.

2．教材安排例 2 的目的与例 1 一样，在于帮助学生熟悉运用排序不等式证明不等式的思路，掌握其运用步骤．例题难度较大，并且根据需要确定两组数 a_1，a_2，…，a_n 和 b_1，b_2，…，b_n 的技巧性较强，因而教学中，要紧扣排序不等式的结构特征，引导学生分析、寻求根据运用排序不等式的需要确定两组数 a_1，a_2，…，a_n 和 b_1，b_2，…，b_n 的方法与途径，可以采取合作交流、个别指导等多种形式帮助学生切实理解解题思路，真正掌握例题的证明方法.

3．教材安排例 3 的主要目的在于帮助学生掌握运用排序不等式解决实际问题的思路与步骤．教学中，应引导学生认真分析题意，把问题数学化，建立相应的数学模型，进而根据需要确定两组数 a_1，a_2，…，a_n 和 b_1，b_2，…，b_n，使得问题能够借助排序不等式予以证明的思路与方法.

相关链接

车比雪夫不等式

车比雪夫不等式是可以运用排序不等式证明的一个重要不等式，其形式为：

(1) 若 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n$，$b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n$，则

$$\frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{n}\geqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\cdot\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n},$$

等号当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 或 $b_1=b_2=\cdots=b_n$ 时成立.

(2) 若 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n$，$b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$，则

$$\frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\cdot\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n},$$

等号当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 或 $b_1=b_2=\cdots=b_n$ 时成立.

(1)的证明参见习题 14 第 6 题，(2)的证明与(1)类似.

5.3 贝努利不等式

教材线索

教材从学生熟知的二项式定理出发，得出了一个显见的结论

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx(x>0,n\in\mathbf{N}_+).$$

进而指出，上述不等式可加强为

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx(x>-1,n\in\mathbf{N}_+).$$

并用数学归纳法予以了证明. 然后指出，$(1+x)^n\geqslant 1+nx(x>-1,n\in\mathbf{N}_+)$即为贝努利不等式. 最后，教材用一个例题介绍了贝努利不等式在不等式证明中的应用.

教学目标

1. 知识与技能

了解贝努利不等式的导出过程，理解其证明方法，掌握其结构特征.

2. 过程与方法

能运用贝努利不等式证明一些简单的不等式.

3. 情感、态度与价值观

了解贝努利不等式，了解贝努利，感受数学的博大精深，激发数学的学习兴趣.

教材分析

由于《课标》对贝努利不等式的要求很低——会用数学归纳法证明贝努利不等式. 因而本节教材基本上是按介绍性质的定位进行编排的.

教学建议

贝努利不等式是一个在数学中有着重要地位的不等式．但由于《课标》对贝努利不等式的要求很低，因而教学中只要着眼于引导学生从二项式定理出发，导出进而运用数学归纳法证明贝努利不等式，不要在贝努利不等式的应用上花费过多的时间．

例题解析

教材安排例题的目的是帮助学生了解运用贝努利不等式证明不等式的思路，初步掌握其运用步骤．例题难度较大，并且技巧性较强，因而教学中，可以以教师的讲解为主要形式，帮助学生理解解题思路，初步掌握运用贝努利不等式证明不等式的思路与方法．

教材习题参考解答

习题 13

1. $(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)^2\leqslant(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)=1$
$\Rightarrow a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n\leqslant 1$.

2. $(x^2+y^2+z^2)(1^2+1^2+1^2)\geqslant(x+y+z)^2=1\Rightarrow x^2+y^2+z^2\geqslant\dfrac{1}{3}$.

3. $(a\cos\alpha+b\sin\alpha)^2\leqslant(a^2+b^2)(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=1\Rightarrow|a\cos\alpha+b\sin\alpha|\leqslant 1$.

4. $x_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,n)$
$$\begin{aligned}\Rightarrow(x_1+x_2+\cdots+x_n)(x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3)&\geqslant(x_1^{\frac{1}{2}}x_1^{\frac{3}{2}}+x_2^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{3}{2}}+\cdots+x_n^{\frac{1}{2}}x_n^{\frac{3}{2}})^2\\&=(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^2\end{aligned}$$
$\Rightarrow\sqrt{(x_1+x_2+\cdots+x_n)(x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3)}\geqslant x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$.

5. (1) $a_i>0$ ($i=1$, 2, $\cdots$, n)
$\Rightarrow(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(1^2+1^2+\cdots+1^2)\geqslant(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2$
$\Rightarrow\dfrac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}\geqslant\left(\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^2$
$\Rightarrow\sqrt{\dfrac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}\geqslant\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$.

(2) $a_i>0$ ($i=1$, 2, $\cdots$, n)
$$\begin{aligned}\Rightarrow(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)&\geqslant\left(\sqrt{a_1}\cdot\sqrt{\frac{1}{a_1}}+\sqrt{a_2}\cdot\sqrt{\frac{1}{a_2}}+\cdots+\sqrt{a_n}\cdot\sqrt{\frac{1}{a_n}}\right)^2\\&=n^2\end{aligned}$$
$\Rightarrow\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}$.

综合 (1)、(2) 即得$\sqrt{\dfrac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}\geqslant\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}$.

6. $\because\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}b+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}c+\dfrac{1}{\sqrt{6}}\cdot\sqrt{6}d\right)^2\leqslant\left[\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)^2\right][2b^2+3c^2+6d^2]$,
$\therefore(3-a)^2\leqslant 1\times(5-a^2)$.
$\therefore a^2-3a+2\leqslant 0$.
$\therefore 1\leqslant a\leqslant 2$.

习题 14

1. 不妨假设 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$，由“乱序和”不大于“同序和”得

$a_1c_1+a_2c_2+\cdots+a_nc_n\leqslant a_1a_1+a_2a_2+\cdots+a_na_n=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$.

2. 不妨假设 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$，则$\frac{1}{a_n}\leqslant\cdots\leqslant\frac{1}{a_2}\leqslant\frac{1}{a_1}$. 由“乱序和”不小于“反序和”得

$$\frac{a_1}{c_1}+\frac{a_2}{c_2}+\cdots+\frac{a_n}{c_n}\geqslant a_1\cdot\frac{1}{a_1}+a_2\cdot\frac{1}{a_2}+\cdots+a_n\cdot\frac{1}{a_n}=n.$$

3. 不妨假设 $x_1^\beta\leqslant x_2^\beta\leqslant\cdots\leqslant x_{n-1}^\beta\leqslant x_n^\beta$，则$\frac{1}{x_n^\alpha}\leqslant\frac{1}{x_{n-1}^\alpha}\leqslant\cdots\leqslant\frac{1}{x_2^\alpha}\leqslant\frac{1}{x_1^\alpha}$. 由“乱序和”不小于“反序和”得

$$\frac{x_1^\beta}{x_2^\alpha}+\frac{x_2^\beta}{x_3^\alpha}+\cdots+\frac{x_{n-1}^\beta}{x_n^\alpha}+\frac{x_n^\beta}{x_1^\alpha}\geqslant x_1^\beta\cdot\frac{1}{x_1^\alpha}+x_2^\beta\cdot\frac{1}{x_2^\alpha}+\cdots+x_n^\beta\cdot\frac{1}{x_n^\alpha}$$
$$=x_1^{\beta-\alpha}+x_2^{\beta-\alpha}+\cdots+x_n^{\beta-\alpha}.$$

4. 不妨假设 a_1，a_2，a_3 从小到大的排列顺序为 $b_1\leqslant b_2\leqslant b_3$. 由“乱序和”不小于“反序和”得

$$a_1+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{3^2}\geqslant b_1\cdot\frac{1}{1^2}+b_2\cdot\frac{1}{2^2}+b_3\cdot\frac{1}{3^2}$$
$$\geqslant 1\times\frac{1}{1^2}+2\times\frac{1}{2^2}+3\times\frac{1}{3^2}\ (\because a_1,\ a_2,\ a_3\text{ 互不相等，}\therefore b_1\geqslant 1,\ b_2\geqslant 2,\ b_3\geqslant 3)$$
$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}.$$

5. 不妨假设 a_1，a_2，…，a_n 从小到大的排列顺序为 $b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$. 由“乱序和”不小于“反序和”得

$$a_1+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^2}\geqslant b_1\cdot\frac{1}{1^2}+b_2\cdot\frac{1}{2^2}+\cdots+b_n\cdot\frac{1}{n^2}$$
$$(\because a_1,a_2,\cdots,a_n\text{ 互不相等，}\therefore b_1\geqslant 1,b_2\geqslant 2,\cdots,b_n\geqslant n)$$
$$\geqslant 1\times\frac{1}{1^2}+2\times\frac{1}{2^2}+\cdots+n\times\frac{1}{n^2}$$
$$=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

6. 由“乱序和”不大于“同序和”得

$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\geqslant a_1b_2+a_2b_3+\cdots+a_{n-1}b_n+a_nb_1$,

$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\geqslant a_1b_3+a_2b_4+\cdots+a_{n-1}b_1+a_nb_2$,

……

$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\geqslant a_1b_n+a_2b_1+\cdots+a_{n-1}b_{n-2}+a_nb_{n-1}$,

$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$.

以上 n 个式子相加，得

$n(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)\geqslant(a_1+a_2+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_n)$,

亦即$\frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{n}\geqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\cdot\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}$.