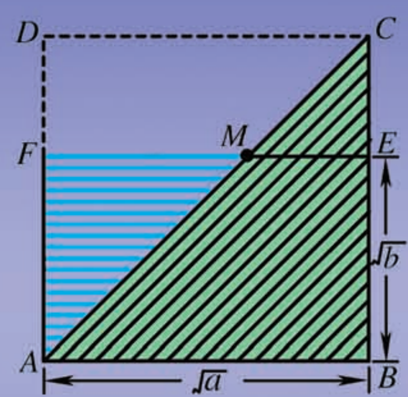


$S_{\triangle ABC}+S_{\triangle AFM}-S_{\text{矩形}ABEF}\geqslant 0$

ISBN 978-7-5355-4604-3

普通高中课程标准实验教科书 数学 选修4-5 不等式选讲 湖南教育出版社

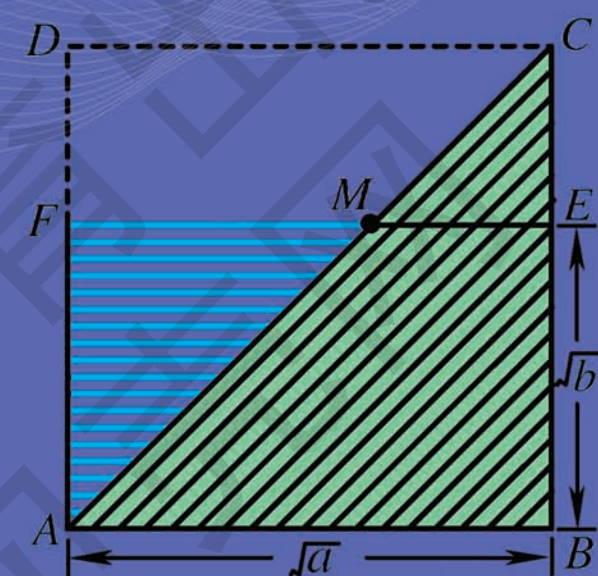
经全国中小学教材审定委员会2005年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

数学

选修4-5

不等式选讲



$S_{\triangle ABC}+S_{\triangle AFM}-S_{\text{矩形}ABEF}\geqslant 0$

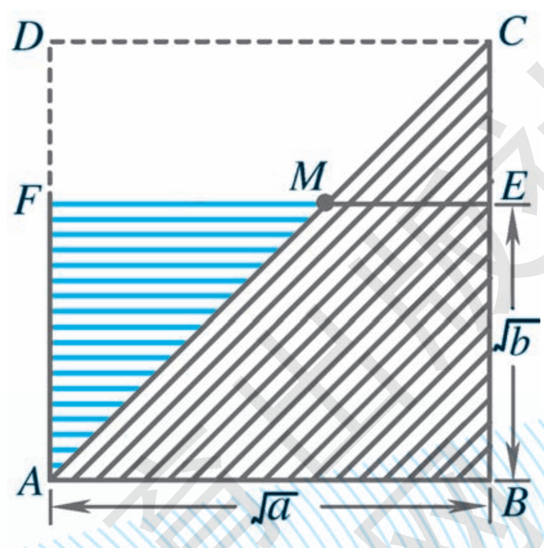
湖南教育出版社

普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 4–5

不等式选讲



$S_{\triangle ABC}+S_{\triangle AFM}-S_{\text{矩形}ABEF}\geqslant 0$

主　　编　张景中　黄楚芳
执行主编　李尚志

本册主编　朱华伟
编　　委　钱展望　郑志明
查建国

普通高中课程标准实验教科书
数　学
选修 4－5
不等式选讲
责任编辑：甘　哲
湖南教育出版社出版（长沙市韶山北路 443 号）
电子邮箱：hnjycbs@sina.com
客服电话：0731－85486979
湖南出版中心重印
重庆市新华书店经销
湖南天闻新华印务有限公司印刷
890×1240　16 开　印张：5　字数：120 000
2005 年 6 月第 1 版　2019 年 7 月第 24 次印刷
ISBN 978－7－5355－4604－3
定　价：4.70 元
批准文号：渝发改价格［2019］946 号·举报电话：12358

探寻现实生活中的不等关系

自来水管的横截面为什么总是圆的，而不是方的？

圆柱体容器的容积一定时，怎样的圆柱体容器用料最省？

表面积一定时，怎样的长方体容积最大？

晚上在灯下做功课时，怎样选择灯的高度，才能使桌子边缘处最亮？

亲爱的同学们，这类问题在现实生活中随处可见，它们都与不等式有关，可以利用不等式来解决.

不等式是数学的重要内容，是研究数量的大小关系的必备知识，是我们进一步学习数学和其他学科的基础和工具.

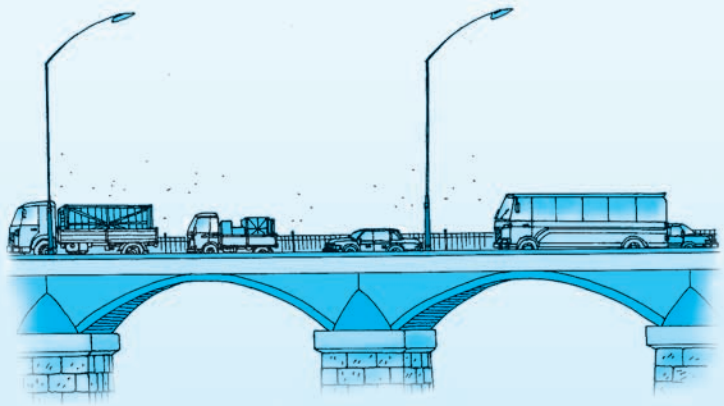
在本专题中，我们将回顾和复习不等式的基本性质和基本不等式，介绍一些重要不等式（绝对值不等式、平均值不等式、柯西不等式、排序不等式、贝努利不等式）和证明不等式的基本方法（比较法、分析法、综合法、反证法、放缩法），以及数学归纳法和它的简单应用.

同学们通过本专题的学习，不仅要掌握不等式涉及的基本知识和基本技能，还要主动地探寻现实生活中存在的不等关系，逐步形成和努力增强数学应用意识，走进数学应用的天地！

目 录

第 1 章

基本不等式和证明不等式的基本方法



比较法、分析法、综合法、反证法、放缩法是证明不等式的基本方法，本章将复习不等式的基本性质和基本不等式，通过一些简单问题学习证明不等式的基本方法.

数学实验

π 的近似值

我国古代著名数学家祖冲之用$\frac{355}{113}$作为 π 的近似值，如果要找比$\frac{355}{113}$更接近 π 的分数，而且想让分母尽可能地小，怎么办呢？

这个问题的数学表达，就是：

“找一对正整数 p，q，使满足

（1）$\frac{q}{p}$比$\frac{355}{113}$更接近 π，也就是

$$\left|\pi-\frac{q}{p}\right|<\left|\frac{355}{113}-\pi\right|;$$

（2）要求 p 尽可能小.”

这就看到，要把问题说清楚，要用不等式来表达.

可以想到，取一个一个分数来试验，找到一个满足上述条件的就可以了.

分母为 p 的正分数很多，要有限制. 若$\frac{q}{p}\leqslant 3$，不用考虑；若$\frac{q}{p}\geqslant 3.2$，也不用考虑. 用不等式估计分子 q 的范围：

由$\frac{q}{p}>3$，得 $q>3p$；

由$\frac{q}{p}<3.2$，得 $q<3.2p$.

这又用到**不等式**（inequality）的基本性质.

对于 p，由 3 开始一个比一个大的来试，用计算机搜索，可以找到一个分数，看看分母有多大.

用手算或计算器算太慢了，使用“Z+Z 超级画板”的程序工作区要方便得多.

把下列程序键入“Z+Z 超级画板”的程序工作区：

$$z=\frac{355}{113};$$

```
pi=3.14159265358979;
d=z-pi;
≫(3014435373)/(1130000000000000) #
a=z;
for(p=3;p<1000;p=p+1)
{
for(q=floor(p*(pi-d));q<floor(p*(pi+d))+1;q=q+1)
        {
        if((q/p-pi)^2<(z-pi)^2)
            {a=q/p;}
        else{a;}
        }
}
```

把光标放在最后的花括弧左边，按住 Ctrl 键单击 Enter，程序开始运行．不久，结果出现：

≫355/113#

这表明，分母不超过 1 000 的所有分数中，最接近 π 的是 $\frac{355}{113}$.

注意程序中有一行

for (p=3; p<1000; p=p+1).

这一行中的 3 改成 1 000，1 000 改成 2 000，再运行，结果仍是 $\frac{355}{113}$.

可见，分母不超过 2 000 的所有分数中，最接近 π 的仍是 $\frac{355}{113}$.

耐心地做下去，你会看到，分母不超过 16 000 的分数中，最接近 π 的仍是 $\frac{355}{113}$.

下面再做，把这一行改成

for (p=16000;p<16700;p=p+1),

你会找到一个分母为 16 604 的分数，算一算就知道它确实比$\frac{355}{113}$更接近 π.

在 16 000～16 604 之间，有没有比$\frac{355}{113}$更接近 π 的分数呢，只要把这一行改成：

```
for(p=16000;p<16604;p=p+1).
```

运行一下就知道了：没有.

我们找到了比$\frac{355}{113}$更接近 π 的分数是$\frac{52\ 163}{16\ 604}$.

实际上，如果多用点不等式知识，工作量可以小得多，能大大简化计算，甚至得到更漂亮的结果.

1.1　实数可以比较大小

我们知道，实数集与数轴上的点集是一一对应的. 在数轴上不同的两点中，右边的点所表示的实数比左边的点表示的实数大. 如图1－1所示，点 A 表示实数 a，点 B 表示实数 b，点 A 在点 B 右边，那么 $a>b$. 从图 1－1 中，我们还可以看到：

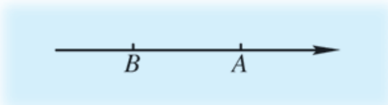


图 1－1

如果 $a>b$，那么 $a-b$ 是正数；反之，$a-b$ 是正数，则 $a>b$.

类似地，如果 $a<b$，那么 $a-b$ 是负数；如果 $a=b$，那么 $a-b=0$. 它们的逆命题也都正确.

这里表明了

$$a>b \Leftrightarrow a-b>0;$$

$$a=b \Leftrightarrow a-b=0;$$

$$a<b \Leftrightarrow a-b<0.$$

由此可见，实数可以比较大小，要比较两个实数的大小，可通过考察它们的差与 0 的大小关系来完成.

例 1　比较 $(a-1)(a+4)$ 与 a^2+3a 的大小.

解　$(a-1)(a+4)-(a^2+3a)$

$=(a^2+3a-4)-(a^2+3a)$

$=-4<0$,

$\therefore$ $(a-1)(a+4)<(a^2+3a)$.

例 2　比较 x^2+3 与 $3x$ 的大小.

解　$(x^2+3)-3x$

$=x^2-3x+3$

$=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$,

$\therefore$ $(x^2+3)>3x$.

例 3 甲、乙两人同时同地出发，沿同一路线走到同一地点，甲有一半时间以速度 a 行走，另一半时间以速度 b 行走；乙有一半路程以速度 a 行走，另一半路程以速度 b 行走. 如果 $a\neq b$，问甲、乙两人谁先到达指定地点.

解 设从出发地点至指定地点的路程是 s，甲、乙走完这段路程所用的时间分别为 t_1，t_2，依题意，有

$$\frac{t_1}{2}a+\frac{t_1}{2}b=s,$$

$$\frac{s}{2a}+\frac{s}{2b}=t_2.$$

从而 $t_1=\dfrac{2s}{a+b}$，$t_2=\dfrac{s(a+b)}{2ab}$. 于是

$$\begin{aligned} t_1-t_2&=\frac{2s}{a+b}-\frac{s(a+b)}{2ab}\\ &=\frac{s[4ab-(a+b)^2]}{2(a+b)ab}\\ &=-\frac{s(a-b)^2}{2ab(a+b)}, \end{aligned}$$

其中 s，a，b 都是正数，且 $a\neq b$，于是 $t_1-t_2<0$，即

$$t_1<t_2.$$

从而知甲比乙先到达指定地点.

习题 1

1. 已知 $x\neq 0$，比较 $(x^2+1)^2$ 与 x^4+x^2+1 的大小.

2. 设 $a\neq b$，比较下列各式的大小：

   (1) $a^2(a+1)+b^2(b+1)$ 与 $a(a^2+b)+b(b^2+a)$；

   (2) a^3+b^3 与 a^2b+ab^2.

3. 设 $a>b>0$，比较 $\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ 与 $\dfrac{a-b}{a+b}$ 的大小.

4. 若 $c\geqslant 1$，求证：$\dfrac{x^2+c+1}{\sqrt{x^2+c}}\geqslant\dfrac{c+1}{\sqrt{c}}$.

5. 某收购站分两个等级收购小麦，一等小麦每千克为 a 元，二等小麦每千克为 $b(b<a)$元，现有一等小麦 x kg，二等小麦 y kg，若以两种价格的平均数收购，对被收购者是否公平合理?

1.2 比较法证不等式

一个不等式实际上表示的就是不等式两边的大小比较. 从上一节我们知道两实数大小的比较可通过考察两数的差与 0 的大小关系来实现，因此，我们要证明一个不等式也就可以如同进行实数大小比较一样，采用作差、变形、确定符号的方式进行，我们将这种方法称之为**比较法**(comparison method).

以下我们利用比较法证明不等式的基本性质.

性质 1 若 $a>b$，$c\in\mathbf{R}$，则 $a+c>b+c$.

证明 $\because$ $(a+c)-(b+c)=a-b$，

又由 $a>b$，知 $a-b>0$，

$\therefore$ $a+c>b+c$.

性质 2 若 $a>b$，$b>c$，则 $a>c$.

证明 $\because$ $a>b$，$b>c$，

$\therefore$ $a-b>0$，$b-c>0$.

$\therefore$ $a-c=(a-b)+(b-c)>0$.

$\therefore$ $a>c$.

性质 3 若 $a>b$，$c>d$，则 $a+c>b+d$.

（证明请同学们自己完成.）

性质 4 （1）若 $a>b$，$c>0$，则 $ac>bc$；

（2）若 $a>b$，$c<0$，则 $ac<bc$.

证明 （1）$ac-bc=(a-b)c$.

因 $c>0$，故 $ac-bc$ 与 $a-b$ 同号.

$\because$ $a>b$，$\therefore$ $a-b>0$.

$\therefore$ $ac-bc>0$.

根据性质 4，可得：

若 $b>0$，则 $\frac{a}{b}>1 \Leftrightarrow a>b$.

这里为我们提供了比较法证明不等式的另一种方式：作商（注意 $b>0$!）变形，与 1 比较大小.

$\therefore\ ac>bc$.

(2)(证明请同学们自己完成.)

性质 5 若 $a>b>0$，$c>d>0$，则 $ac>bd$.

(证明请同学们自己完成.)

性质 6 若 $a>b>0$，$n\in\mathbf{N}_+$，$n\geqslant 2$，则

(1) $a^n>b^n$； (2) $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.

证明 (1)$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$， ①

因 $a>0$，$b>0$，故①中第二个括号内各项和为正数，a^n-b^n 与 $a-b$ 同号.

$\because\ a>b$， $\therefore\ a-b>0$.

$\therefore\ a^n-b^n>0$，

即 $a^n>b^n$.

(2) 用 $a^{\frac{1}{n}}$，$b^{\frac{1}{n}}$ 代替①中的 a，b，由①知 $\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}$ 与 $a-b$ 同号，

因此 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.

比较法是证明不等式最基本的方法，下面我们利用比较法来证明不等式.

例 1 求证：$x^2+\dfrac{3}{2}>2x$.

证明 $\because$

$$\begin{aligned}&\left(x^2+\frac{3}{2}\right)-2x\\&=x^2-2x+1+\frac{1}{2}\\&=(x-1)^2+\frac{1}{2}\geqslant\frac{1}{2}>0,\end{aligned}$$

$\therefore\ x^2+\dfrac{3}{2}>2x$.

例 2 已知 a，$b\in\mathbf{R}$，求证：

$$a^4+b^4\geqslant a^3b+ab^3.$$

证明

$$\begin{aligned}&(a^4+b^4)-(a^3b+ab^3)\\&=(a^4-a^3b)+(b^4-ab^3)\\&=a^3(a-b)-b^3(a-b)\end{aligned}$$

$$=(a-b)(a^3-b^3)$$
$$=(a-b)^2(a^2+ab+b^2)$$
$$=(a-b)^2\left[\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2\right]\geqslant 0,$$

∴　$a^4+b^4\geqslant a^3b+ab^3$.

习题　2

1. 用“$>$”、“$<$”号填空：

（1）如果 $a>b$，那么 $-a$ ____ $-b$；

（2）如果 $a<b<0$，那么 $\frac{1}{a}$ ____ $\frac{1}{b}$；

（3）如果 $a>b>c>0$，那么 $\frac{c}{a}$ ____ $\frac{c}{b}$；

（4）如果 $0<a<b<1$，$n\in\mathbf{N}_+$，那么 $\frac{1}{a^n}-\frac{1}{b^n}$ ____ 0.

2. 求证：

（1）如果 $a>b$，$e>f$，$c>0$，那么 $f-ac<e-bc$；

（2）如果 $a>b>0$，$c<d<0$，那么 $ac<bd$.

3. 求证：$a^2+3b^2\geqslant 2b(a+b)$.

4. 求证：$\frac{4a}{4+a^2}\leqslant 1$.

5. 已知 a，b，m 都是正数，且 $a<b$，求证：

$$\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}.$$

6. 已知 $a>b>c$，求证：$a^2b+b^2c+c^2a>ab^2+bc^2+ca^2$.

7. 已知 $f(x)=ax^2+bx$，且满足 $-1\leqslant f(1)\leqslant 2$，$-2\leqslant f(2)\leqslant 4$. 求 $f(3)$的范围.

1.3　基本不等式

现在我们用比较法来证明不等式

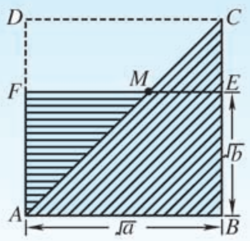


图 1－2

这里是运用比较法结合几何图形给出的另一证法：如图1－2，正方形 $ABCD$ 中，$S_{\triangle ABC}+S_{\triangle AFM}-S_{矩形ABEF}\geqslant 0$，即 $\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\geqslant\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$.

由此得出①.

对实数 x，有 $x^2\geqslant 0$. 这是配方法的基础. 在运用比较法证明不等式的过程中，常为我们提供了赖以确定符号的关键理由.

“几何平均数”这个名词的来源可以从下述简单的几何事实中得到解释. 如图 1－3(a) 中表示长与宽的长度分别为 a，b 的矩形. 图 1－3(b) 表示的则是与矩形具有相同面积的正方形，那么它的边长就是 a，b 的几何平均数.

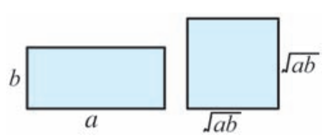


图 1－3

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}\quad(a,b\in\mathbf{R}_+).\qquad ①$$

证明 $\because$ $a>0$，$b>0$，

$\therefore$
$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}$$
$$=\frac{1}{2}(a+b-2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b})$$
$$=\frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0.$$

$\therefore$
$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}\quad(当且仅当\ a=b\ 时取等号).$$

我们将 $\frac{a+b}{2}$ 称为两个正数 a，b 的**算术平均**（arithmetic mean）**数**，$\sqrt{ab}$ 则称之为 a，b 的**几何平均**（geometric mean）**数**.

①式告诉我们，**两个正数的算术平均数不小于几何平均数，当且仅当这两个正数相等时等号成立**.

利用①可以很快地写出一些不等式：

$$\frac{a^2+b^2}{2}\geqslant ab,$$

$$a^2+b^2\geqslant 2ab,\qquad ②$$

$$a^2+b^2=|a|^2+|b|^2\geqslant 2|a||b|,$$

$$a^2+b^2-ab\geqslant ab$$

等等.

同学们还可以作进一步的探索.

不等式①，②我们称之为**基本不等式**（basic inequalities）. 现在，我们可以从①，②这两个不等式出发，利用不等式的基本性质得到一连串的不等式. 例如：

1. 由②得

$$a^2+b^2+2ab\geqslant 2ab+2ab,$$

即
$$(a+b)^2\geqslant 4ab.$$

2. 将
$$a^2+b^2\geqslant 2ab,$$
$$b^2+c^2\geqslant 2bc,$$

$$c^2+a^2\geqslant 2ca$$

相加，再除以 2，即得

$$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca.$$

3. 当 $a>0$，$b>0$ 时，

(1) $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\geqslant 2\sqrt{\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{a}{b}}=2$；

(2) $(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\geqslant 2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{\dfrac{1}{ab}}=4$.

上面这些不等式的证明实际上也可以看作是发现过程. 从某种意义上讲，当我们经历从已知条件出发，以不等式的基本性质、基本不等式为依据进行思考、探求以至获取不等式的过程，其实也就是对不等式给予证明.

例　设 a，b 是正数，求证：

(1) $\dfrac{2ab}{a+b}\leqslant\sqrt{ab}$；

(2) $\dfrac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.

证明　(1)　$\because$　a，b 为正数，

$\therefore$　$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$.

$\therefore$　$\dfrac{1}{a+b}\leqslant\dfrac{1}{2\sqrt{ab}}$.

$\therefore$　$\dfrac{2ab}{a+b}\leqslant\dfrac{2ab}{2\sqrt{ab}}=\sqrt{ab}$.

(2)　$\because$　$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab\leqslant 2(a^2+b^2)$.

$\therefore$　$\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\leqslant\dfrac{a^2+b^2}{2}$.

$\therefore$　$\dfrac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.

根据基本不等式①及例题可知：对于两个正数 a，b，有

$$\frac{2ab}{a+b}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.\qquad ③$$

在图 1－4 中，O 为圆心，

$$MH<MG<MO<MR. \quad ④$$

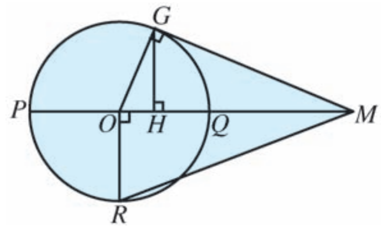


图 1－4

设 $MP=a$，$MQ=b$，$(a>b)$，

则 $MO=\dfrac{a+b}{2}$，　　$MG=\sqrt{ab}$，

$MH=\dfrac{2ab}{a+b}$，　　$MR=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.

④即③不取等号时的情形.

习题 3

1. 已知 a，b，c 为正数，求证：

(1) $(a+b)(b+c)(c+a)\geqslant 8abc$；

(2) $a+b+c\geqslant\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$.

2. 已知 a，b，c 及 x，y，z 都是正数，求证：

$$\frac{b+c}{a}x^2+\frac{c+a}{b}y^2+\frac{a+b}{c}z^2\geqslant 2(xy+yz+zx).$$

3. 求证：$\dfrac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}}\geqslant 2$.

4. 求证：$a^2+b^2+5\geqslant 2(2a+b)$.

5. 已知 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=1$，$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$，求证：

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n\leqslant 1.$$

6. 已知 a，b，$c\in\mathbf{R}_+$，$a+b+c=1$，求证：

$$a^2+b^2+c^2\geqslant\frac{1}{3}.$$

7. 已知 $2a+3b=2$，求 4^a+8^b 的最小值.

8. 求函数 $f(x)=x^2+\frac{4}{x^2+1}$ 的最小值，并求出取得最小值时的 x 值.

9. 已知 $x>0$，且 $x\neq1$，n 为正整数，求证：

$$(1+x^n)(1+x)^n>2^{n+1}x^n.$$

10. 若正数 x，y 满足 $6x+5y=36$，求 xy 的最大值.

11. 求 $y=\frac{6\sqrt{x^2+1}}{x^2+4}$ 的最大值.

12. 已知 a，b，c 为正数，求证：$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geqslant a+b+c$.

1.4　基本不等式实际应用举例

例 1　一家皮鞋零售店，平均每天售出皮鞋 3 双. 已知每双皮鞋的批发价 46 元，运费 1 元，零售价 100 元，一双皮鞋在商店保存一天的费用为 0.28 元，订货一次的组织费用为 200 元，批发的包装为每箱 18 双，以整箱批发. 问这家皮鞋店应采用何种订货策略，可使获利最大?

解　设每次订货 x 双，那么 $\frac{x}{3}$ 天订货一次，一次的订货费用为

$$200+(46+1)x\ (元),$$

平均库存量为 $\frac{x}{2}$ 双，在一个订货周期中，保存费用为

$$\frac{x}{2}\cdot0.28\cdot\frac{x}{3}\ (元),$$

所以，每天的总费用

$$T=\frac{200+(46+1)x+0.28x^2\div6}{\frac{x}{3}}$$

$$=\frac{600}{x}+0.14x+141(元),$$

根据基本不等式可得

$$T\geqslant2\sqrt{\frac{600}{x}\times0.14x}+141$$

$$=159.33\text{（元）}.$$

等号当且仅当$\dfrac{600}{x}=0.14x$，即 $x=65.465$ 时取得.

由于批发是整箱的，所以分别计算 3 箱和 4 箱（即 $x=54$ 和 72）的结果.

当 $x=54$ 时，$T=159.671$；

当 $x=72$ 时，$T=159.413$.

所以每次批发 4 箱，每 24 天批发一次，可获利最大.

例 2 机动车过大桥，为了安全，同一股道上的两辆车的间距不得小于 klv^2，其中 v 是车速，l 为平均车身长度，k 为比例系数. 经测定：车速为 60 km/h，安全车距为 $1.44l$.

（1）规定怎样的车速可使同一股道上的车流量最大？（车流量即单位时间内通过的车辆数.）

（2）设过桥的车辆平均车身长度为 5 m，求同一股道上每小时的最大车流量.

解 设安全车距为 d m，车流量为 y 辆/h，则 $d=klv^2$. 由 $v=60$ km/h，$d=1.44l$，得 $k=\dfrac{1}{2\,500}$. 车速为 v，若车速为 $1\,000v$ 时，车流量为$\dfrac{1\,000v}{d+l}$，所以

$$y=\frac{1\,000v}{d+l}=\frac{1\,000v}{klv^2+l}=\frac{1\,000}{l\left(\dfrac{v}{2\,500}+\dfrac{1}{v}\right)}\leqslant\frac{25\,000}{l}, \quad ①$$

当且仅当

$$\frac{v}{2\,500}=\frac{1}{v},$$

即 $v=50$ km/h 时①式等号成立，此时车流量最大.

当 $l=5$ m 时，每小时的最大车流量为 5 000 辆.

习题 4

1. 一段长为 L 的篱笆围成一个边靠墙的矩形菜园，问这个矩形的长、宽各为多少

时，菜园的面积最大？最大面积是多少？

2. 有一座被毁坏的房屋，留有一堵旧墙长 12 m. 现准备在原地重新建屋，平面图形为矩形，面积为 112 m^2，工程条件是：

(1) 修 1 m 旧墙的费用是造 1 m 新墙费用的 25%；

(2) 拆去 1 m 旧墙用来造 1 m 新墙的费用是造 1 m 新墙费用的 50%.

问：应如何利用旧墙才能使建屋造价最低？

3. A 地产汽油，B 地的汽油需从 A 地运入. 汽车从 A 地运汽油往 B 地，往返的油耗正好等于其满载汽油的吨数，故无法将汽油直接运至 B 地. 为解决问题，在途中 C 设一油库中间站，先由往返于 A，C 间的汽车将汽油运至 C 地，再由往返于 C，B 间的汽车将汽油运至 B 地. 问 C 站设在何处时，运油率最大？最大为多少？[运油率=(B 地收到的汽油量)÷(A 地运出的汽油量)]

阅读与思考

算术平均数与几何平均数

设 a 与 b 是两个非负实数，$a>b$，记

$$a_1=\frac{a+b}{2},\quad b_1=\sqrt{ab},$$

则 a_1，b_1 必定也是非负数，且

$$a_1<\frac{a+a}{2}=a,\quad b_1>\sqrt{b\cdot b}=b,$$

根据基本不等式①，可知 $a_1>b_1$，再记

$$a_2=\frac{a_1+b_1}{2},\quad b_2=\sqrt{a_1b_1},$$

引进 a_2，b_2，重复上面步骤，同理，有

$$a>a_1>a_2,\quad b_2>b_1>b$$

及

$$a_2>b_2,$$

继续进行下去，一般地，我们可用递推公式

$$a_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2},\quad b=\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}} \tag{①}$$

定义 a_n，b_n.

进行到第 k 步时，得到数 a_1，a_2，…，a_k 及 b_1，b_2，…，b_k，它们满足

$$a>a_1>a_2>\cdots>a_k>b_k>b_{k-1}>\cdots>b_2>b_1>b.$$

例如，当 $a=4$，$b=1$，把前面几个 a_i 与 b_i 表示在数轴上（如图 1-5），可以看到，在所有的这些数当中，b 最小而 a 最大，并且所有的 b_i 小于所有的 a_i.

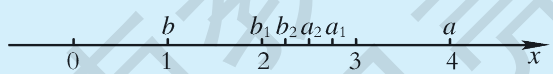


图 1-5

设想我们用递推公式①定义越来越多的 a 与 b，这样定义的每一对 a_i，b_i 都夹在前一对 a_{i-1}，b_{i-1} 之间. 于是，看来有理由认为这些 a_n 随着 n 增大而减小，但始终大于每一个 b_i 而趋近于某个固定的数值 A；类似地，这些 b_n 随 n 增大而增大，但始终小于每一个 a_i，而趋近于某个固定的数值 B. 实际上，A 就是无穷数列 $\{a_n\}$ 的极限，B 则是无穷数列 $\{b_n\}$ 的极限.

此外，还有

$$a_{n+1}-b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}-\sqrt{a_nb_n}<\frac{a_n+b_n}{2}-\sqrt{b_nb_n}$$
$$=\frac{1}{2}(a_n-b_n),$$

这表明，差 (a_n-b_n) 随 n 增大而迅速变小，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 具有相同极限，即 $A=B$，而且 $A(B)$ 只依赖于我们开始时所取的两个数 a，b，也就是说 $A(B)$ 是 a，b 的函数. 大数学家高斯曾指出，这个函数不只是一个满足好奇心的玩艺，而且在数学上具有独特地位，它可以用来建立一个叫作“椭圆函数论”的数学分支.

1.5 分析法与综合法

数学实验

让我们动手计算一些数的平方根，并求出前后相应项平方根的差：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\sqrt{n}$	1	1.41	1.73	2	2.24	2.45	2.65	2.83	3	3.16
$\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$	1	0.41	0.32	0.27	0.24	0.21	0.20	0.18	0.17	0.16

不难看出，随着 n 的增大，$\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$越来越小，换言之

$$\sqrt{n}-\sqrt{n-1}<\sqrt{n-1}-\sqrt{n-2}. \quad ①$$

上式对于 $n\geqslant 2$ 是否总成立还有待于证明，直接证明不是很便利，为此我们改变一下思考的方式：

欲证①，只需证

$$\sqrt{n}+\sqrt{n-2}<2\sqrt{n-1},$$

又只需证

$$(\sqrt{n}+\sqrt{n-2})^2<4(\sqrt{n-1})^2.$$

即证

$$\sqrt{n}\cdot\sqrt{n-2}<n-1. \quad ②$$

为此只需证

$$n(n-2)<(n-1)^2,$$

即

$$n^2-2n<n^2-2n+1. \quad ③$$

③式一定成立，因此不等式①成立.

上述证明是从欲证的不等式出发，执“果”索“因”，层层推求使结论成立的充分条件，直至能够肯定这些充分条件已经具备为止，进而断言原不等式成立，我们把这种方法称之为**分析法**(analysis method).

对同一个不等式的证明，即使都采用分析法，具体的途径却可能不一样. 对于①式我们也可以这样考虑：

欲证①式，只需证

$$\frac{(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}{(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}<\frac{(\sqrt{n-1}-\sqrt{n-2})(\sqrt{n-1}+\sqrt{n-2})}{(\sqrt{n-1}+\sqrt{n-2})},$$

即

$$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}<\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n-2}},$$

为此，只需证

$$\sqrt{n}+\sqrt{n-1}>\sqrt{n-1}+\sqrt{n-2}. \qquad ④$$

④式成立十分明显，因此①式获证.

例 1　已知 a，b 是两个不相等的正数，求证：

$$(a+b)(a^3+b^3)>(a^2+b^2)^2. \qquad ⑤$$

证法 1

$$(a+b)(a^3+b^3)>(a^2+b^2)^2 \qquad \text{（欲证）}$$

$$\Uparrow$$

$$a^4+b^4+a^3b+ab^3>a^4+2a^2b^2+b^4 \qquad \text{（只需证）}$$

$$\Uparrow$$

$$a^3b+ab^3>2a^2b^2 \qquad \text{（只需证）}$$

$$\Uparrow \quad (a>0,\ b>0)$$

$$a^2+b^2>2ab. \qquad \text{（只需证）}⑥$$

⑥是基本不等式在 $a\neq b$ 时的情形，因此⑥式成立，从而⑤式成立.

例 1 证法 1 中所表达的是自上而下的运用分析法的思考过程的图示（以后遇到类似情形不再说明）.

基于上述分析法的证明，我们还可以给出例 1 的如下证明：

证法 2

$$a^2+b^2>2ab \qquad ⑥$$

$$\Rightarrow a^3b+ab^3>2a^2b^2 \qquad (a>0,b>0)$$

$$\Rightarrow a^4+b^4+a^3b+ab^3>a^4+2a^2b^2+b^4$$

$$\Rightarrow (a+b)(a^3+b^3)>(a^2+b^2)^2.$$

上述证明的思考角度可以说与分析法正好相反，它从已知的基本不等式⑥出发，利用不等式的基本性质导出欲证不等式⑤，这种证明方法称为**综合法**(synthesis method). 所谓综合法就是由“因”导“果”，从题设条件出发，利用已知定义、公理、定理等逐步推进，证得所要求证的结论的方法.

例 2 求证：$\sqrt{2}+\sqrt{7}<\sqrt{3}+\sqrt{6}$.

分析 因综合法不太容易想到解决这类问题的途径，所以用分析法探求证明途径.

证法 1 分析法.

$$\begin{aligned}&\sqrt{2}+\sqrt{7}<\sqrt{3}+\sqrt{6}\\ \Leftarrow&(\sqrt{2}+\sqrt{7})^2<(\sqrt{3}+\sqrt{6})^2\\ \Leftarrow&9+2\sqrt{14}<9+2\sqrt{18}\\ \Leftarrow&\sqrt{14}<\sqrt{18}\\ \Leftarrow&14<18.\end{aligned}$$

最后一个不等式成立，故原不等式成立.

基于上述分析法的证明，我们还可以给出例 2 的综合法证明.

证法 2 综合法.

$$\begin{aligned}&14<18\\ \Rightarrow&\sqrt{14}<\sqrt{18}\\ \Rightarrow&9+2\sqrt{14}<9+2\sqrt{18}\\ \Rightarrow&(\sqrt{2}+\sqrt{7})^2<(\sqrt{3}+\sqrt{6})^2.\end{aligned}$$

因为 $\sqrt{2}+\sqrt{7}>0$，$\sqrt{3}+\sqrt{6}>0$，

所以 $\sqrt{2}+\sqrt{7}<\sqrt{3}+\sqrt{6}$.

在上例中，我们很难想到从“$14<18$”入手，用综合法比较困难. 因此先用分析法探索证明的途径，然后用综合法的形式写出证明过程，这是解决数学问题的一种重要思想方法.

有时也将分析法、综合法结合起来，就好像有两个人走迷宫，一个人从迷宫的入口走向出口，另一个人从迷宫出口走向入口，争取在某处相会. 实际上，一个不等式的证明的成功往往是分析与综合两种方法交替运用的结果.

例 3 已知 $0<a<1$，$x^2+y=0$，求证：

$$\log_a(a^x+a^y)\leqslant\log_a2+\frac{1}{8}. \qquad ⑦$$

分析与证明　⑦$\Leftrightarrow \log_a(a^x+a^y)\leqslant \log_a(2\cdot a^{\frac{1}{8}})$

$$\Uparrow \quad (0<a<1)$$

$$a^x+a^y\geqslant 2\cdot a^{\frac{1}{8}}$$

$$\Uparrow$$

$$\frac{a^x+a^y}{2}\geqslant a^{\frac{1}{8}}$$

$$\Uparrow \quad (\text{基本不等式②})$$

$$\sqrt{a^x\cdot a^y}\geqslant a^{\frac{1}{8}}$$

$$\Uparrow$$

$$\frac{x+y}{2}\leqslant \frac{1}{8}$$

$$\Uparrow$$

$$x+y\leqslant \frac{1}{4}. \tag{8}$$

∵　$x^2+y=0$，

∴　$x+y=x-x^2=x(1-x)$.

根据基本不等式，有

$$x(1-x)\leqslant \left[\frac{x+(1-x)}{2}\right]^2=\frac{1}{4}.$$

∴　⑧式成立，从而⑦式也成立.

习题　5

1. 分别用分析法与综合法证明基本不等式.

2. 分别用分析法与综合法证明.

   已知 $a>b>0$，求证：$\sqrt{a}-\sqrt{b}<\sqrt{a-b}$.

3. 已知 $a>0$，$b>0$，求证：

$$\sqrt{\frac{a^2}{b}}+\sqrt{\frac{b^2}{a}}\geqslant \sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

4. 已知 $a>0$，$b>0$，求证：

$$ab+\frac{1}{ab}+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 4.$$

5. 设 a，b，c 是三角形的三边，$m>0$，求证：

$$\frac{a}{a+m}+\frac{b}{b+m}>\frac{c}{c+m}.$$

6. 证明：通过水管放水，当流速相同时，如果水管截面（指横截面，下同）的周长相等，那么截面是圆的水管比截面是正方形的水管流量大.

1.6 反证法和放缩法

运用**反证法**(reduction to absurdtity)证不等式的思路是：

先假设所要证的不等式不成立，也就是说不等式的反面成立，以此为出发点，结合已知条件，进行推理论证，最后推出和已知条件或已知不等式相矛盾的结果，从而断定假设错误，因而确定要证的不等式成立.

例 1 设 $a^3+b^3=2$，求证：$a+b\leqslant 2$.

证明 假设 $a+b\leqslant 2$ 不成立，则有

$$\begin{aligned}&a+b>2\\ \Rightarrow\ &a>2-b\\ \Rightarrow\ &a^3>8-12b+6b^2-b^3\\ \Rightarrow\ &a^3+b^3>6b^2-12b+8=6(b-1)^2+2.\end{aligned}$$

因为 $6(b-1)^2+2\geqslant 2$，所以 $a^3+b^3>2$，这与已知条件 $a^3+b^3=2$ 矛盾. 所以原不等式成立.

例 2 已知 a，b，c 为实数，$a+b+c>0$，$ab+bc+ac>0$，$abc>0$. 求证：$a>0$，$b>0$，$c>0$.

分析 由 $a>0$，$b>0$，$c>0$ 能很容易地推出题设条件 $a+b+c>0$，$ab+bc+ac>0$，$abc>0$. 但这个推理不可逆，从后三式中任何一个都不能直接得出 $a>0$，$b>0$，$c>0$ 的结果，所以不能用分析法证明. 由此联想到，若否定了要证的结论，假设 a，b，c 的正、负，就能方便地讨论 $a+b+c$，$ab+bc+ac$ 和 abc 的正、负，因此可用反证法进行证明.

证明　假设 a，b，c 不同时都为正数，不妨先考虑 $a\leqslant 0$ 的情形，那么有 $a=0$ 和 $a<0$ 两种可能.

（1）当 $a=0$ 时，$abc=0$，与已知 $abc>0$ 相矛盾；

（2）当 $a<0$ 时，

$\because$ $abc>0$，　$\therefore$ $bc<0$.

又$\because$ $a+b+c>0$，

$\therefore$ $b+c>-a>0$.

$\therefore$ $ab+bc+ac=a(b+c)+bc<0$.

这与已知 $ab+bc+ac>0$ 矛盾.

综上所述知 $a>0$ 成立.

同理可证 $b>0$，$c>0$ 成立，原命题得证.

应用反证法证明数学命题，实际上是用证明逆否命题成立来代替证明原命题成立. 有的题目从命题的已知条件出发不易推理或运算，而从结论的反面着手，相反地容易推理、论证，这就可尝试用反证法来证（如例 2）. 用反证法证明不等式须注意一点，就是否定了原命题的不等关系后，所得的数量关系一般不止一种情形（因为“$>$”的反面是“$\leqslant$”，而不单是“$<$”），在证明时切勿遗漏.

放缩法是不等式证明的基本方法，在不等式证明中几乎无处不在. 它的依据是不等式的基本性质：“若 $a>b$，$b>c$，则 $a>c$.” 一般可考虑利用添项、舍项、已知不等式及函数的单调性等将欲证不等式的左边或右边进行放大或缩小.

例 3　求证：$\log_2 3>2\log_3 2$.

证明　$\because$ $\log_2 3=\log_{2^3} 3^3=\log_8 27>\log_9 27$，

而　$2\log_3 2=\log_3 4=\log_9 16<\log_9 27$，

$\therefore$ $\log_2 3>2\log_3 2$.

例 4　设 a_1，a_2，$\cdots$，a_n 是正数，求证：

$$\frac{a_2}{(a_1+a_2)^2}+\frac{a_3}{(a_1+a_2+a_3)^2}+\cdots+\frac{a_n}{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}<\frac{1}{a_1}.$$

放缩法的难点在于要适度，要做到恰到好处并非易事.

证明 左边$<\dfrac{a_2}{a_1(a_1+a_2)}+\dfrac{a_3}{(a_1+a_2)(a_1+a_2+a_3)}+\cdots+\dfrac{a_n}{(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})(a_1+a_2+\cdots+a_n)}$

（分母减小，分式的值放大）

$$=\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_1+a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_1+a_2}-\frac{1}{a_1+a_2+a_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}-\frac{1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\right)$$

$$=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}<\frac{1}{a_1}=\text{右边}.$$

即得证.

贯穿全题的主要思想是放缩，大胆地放大或缩小（必须合情合理），谨慎地添或减是放缩法的基本策略.

习题 6

用反证法证明：

1. $a\geqslant b>0$，n 为正整数，且 $n\geqslant 2$，则 $\sqrt[n]{a}\geqslant\sqrt[n]{b}$.

2. 若 x，y 为正数，且 $x+y>2$，则$\dfrac{1+y}{x}<2$ 和$\dfrac{1+x}{y}<2$ 至少有一个成立.

3. 若对任意正数 ε 总有 $a\leqslant b-\varepsilon$，则 $a\leqslant b$.

4. 若 $0<a$，b，$c<1$，则三个乘积$(1-a)b$，$(1-b)c$，$(1-c)a$ 不能都大于$\dfrac{1}{4}$.

用放缩法证明：

5. $\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}<1-\dfrac{1}{n}$，$n=2$，3，4，….

6. 正数 a，b，c 满足 $a\geqslant b\geqslant c$ 及 $a+b+c\leqslant 1$，求证：

$$a^2+3b^2+5c^2\leqslant 1.$$

第 2 章

绝对值不等式

在不等式的应用中，经常涉及重量、面积、体积等，也涉及某些数学对象（如实数、向量）的大小或者绝对值.它们都是通过非负数来度量的.

本章将回顾绝对值的概念和性质，讨论绝对值不等式及其几何意义.

2.1 含有绝对值的不等式

我们知道

$$|a|=\begin{cases}a, & (a>0),\\ 0, & (a=0),\\ -a, & (a<0).\end{cases}$$

因此，有

$$-|a|\leqslant a\leqslant |a|. \quad ①$$

同样地 $$-|b|\leqslant b\leqslant |b|. \quad ②$$

①，②相加得

$$-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant |a|+|b|,$$

即 $$|a+b|\leqslant |a|+|b|. \quad ③$$

显而易见，a，b 同号或有一个为 0 时，③式等号成立.

由③可得

$$|a|=|(a+b)-b|\leqslant |a+b|+|-b|,$$

即 $$|a|-|b|\leqslant |a+b|. \quad ④$$

(请同学们考虑等号何时成立?)

综合③，④我们得到有关**绝对值**(absolute value)的重要不等式

$$|a|-|b|\leqslant |a+b|\leqslant |a|+|b|.$$

例 1 已知 $|x|<\frac{\varepsilon}{4}$，$|y|<\frac{\varepsilon}{2}$，求证：

$$|2x+y|<\varepsilon.$$

证明 $\because |2x+y|\leqslant |2x|+|y|=2|x|+|y|$，

及 $|x|<\frac{\varepsilon}{4}$，$|y|<\frac{\varepsilon}{2}$，

$\therefore$ $|2x+y|<2\cdot\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$

例 2 已知 $f(x)=x^2-x+c$，$|x-a|<1$，求证：

$$|f(x)-f(a)|<2(|a|+1).$$

$|a|$ 表示数轴上坐标为 a 的点与原点之间的距离，如图 2－1.

图 2－1

$|a-b|$ 表示数轴上坐标为 a 的点与坐标为 b 的点之间的距离，如图 2－2.

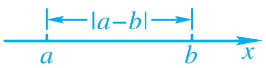


图 2－2

两个重要性质：

(1) $|ab|=|a||b|$；

$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$.

(2) $|a|<|b|\Leftrightarrow a^2<b^2$.

不等式③的几何意义：

我们分 $ab>0$ 和 $ab<0$ 两种情况讨论.

当 $ab>0$ 时，如图 2－3，易得

$|a+b|=|a|+|b|$.

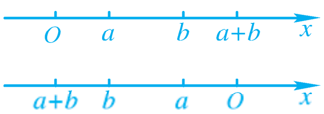


图 2－3

当 $ab<0$ 时，若 $a>0$，$b<0$，如图 2－4，坐标为 a 的点在原点的右边，坐标为 b 的点在原点的左边，易得

$|a+b|<|a|+|b|$.

图 2－4

若 $a<0$，$b>0$，如图 2－5，易得

$|a+b|<|a|+|b|$.

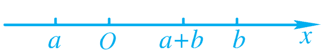


图 2－5

证明　$|f(x)-f(a)|$

$=|(x^2-x+c)-(a^2-a+c)|$

$=|(x-a)(x+a-1)|$

$=|x-a|\cdot|x+a-1|$，

$\because$　$|x-a|<1$，

$\therefore$　$|f(x)-f(a)|<|x+a-1|$.

$\because$　$|x+a-1|=|(x-a)+2a-1|$

$\leqslant|x-a|+|2a|+|-1|$

$\leqslant 1+2|a|+1$

$=2(|a|+1)$，

$\therefore$　$|f(x)-f(a)|<2(|a|+1)$.

例 3　已知 x 为不等于 0 的实数，求证：

$$\left|x+\frac{1}{x}\right|\geqslant 2.$$

证明　$\because$　x 与$\dfrac{1}{x}$同号，

$\therefore$　$\left|x+\dfrac{1}{x}\right|=|x|+\left|\dfrac{1}{x}\right|$.

根据基本不等式，有

$$\left|x+\frac{1}{x}\right|=|x|+\left|\frac{1}{x}\right|\geqslant 2\sqrt{|x|\cdot\frac{1}{|x|}}=2.$$

例 4　已知 $|a|<1$，$|b|<1$，求证：

$$\left|\frac{a+b}{1+ab}\right|<1.$$

证明

$$\left|\frac{a+b}{1+ab}\right|<1$$

$$\Uparrow$$

$$|a+b|<|1+ab|$$

$$\Uparrow$$

$$(a+b)^2<(1+ab)^2$$

$$\Uparrow$$

$$a^2+2ab+b^2<1+2ab+a^2b^2$$

$$\Uparrow$$

$$a^2+b^2<1+a^2b^2$$

$$\Uparrow$$

$$a^2b^2-a^2-b^2+1>0$$

$$\Uparrow$$

$$(a^2-1)(b^2-1)>0.$$

由$|a|<1$，$|b|<1$知$a^2<1$，$b^2<1$，故$(a^2-1)(b^2-1)>0$. 于是，自下至上即可推得$\left|\frac{a+b}{1+ab}\right|<1$成立.

利用绝对值不等式，可以很漂亮地解决第1章数学实验中提出的问题.

根据$\pi=3.141\ 592\ 653\ 589\ 7\cdots$可得$\left|\frac{355}{113}-\pi\right|<0.000\ 000\ 266\ 77$. 如果有个分数$\frac{q}{p}$比$\frac{355}{113}$更接近$\pi$，一定会有

$$\left|\frac{355}{113}-\frac{q}{p}\right|<2\times0.000\ 000\ 266\ 77,$$

也就是

$$\frac{|355p-113q|}{113p}<2\times0.000\ 000\ 266\ 77.$$

因为$\frac{q}{p}$不等于$\frac{355}{113}$，所以$|335p-113q|$不是0. 但它是正整数，应大于或等于1，所以

$$\frac{1}{113p}<2\times0.000\ 000\ 266\ 77.$$

由此推出

$$p>\frac{1}{113\times2\times0.000\ 000\ 266\ 77}>16\ 586.$$

这表明，若分数$\frac{q}{p}$比$\frac{355}{113}$更接近π，其分母p一定大于16 586.

如此简单初等的推理得到这样好的成绩，可谓鸡刀宰牛.

数学问题的解决，常有“出乎意料之外，又在情理之中”的情形.

习题 7

1. 设$\varepsilon>0$，$|x-a|<\frac{\varepsilon}{4}$，$|y-a|<\frac{\varepsilon}{6}$，求证：

$$|2x+3y-2a-3b|<\varepsilon.$$

2. 已知 $|A-a|<\frac{\varepsilon}{2}$，$|B-b|<\frac{\varepsilon}{2}$，求证：

(1) $|(A+B)-(a+b)|<\varepsilon$；

(2) $|(A-B)-(a-b)|<\varepsilon$.

3. 已知 $|x_1-a|<\varepsilon$，$|x_2-a|<\varepsilon$，$|x_3-a|<\varepsilon$，求证：

(1) $\left|\frac{x_1+x_2}{2}-a\right|<\varepsilon$；

(2) $\left|\frac{x_1+x_2+x_3}{3}-a\right|<\varepsilon$.

4. 求证：

(1) $|x-a|+|x-b|\geqslant|a-b|$；

(2) $|x-a|-|x-b|\leqslant|a-b|$.

5. 若 α，β 为实数，$c>0$，求证：

$$|\alpha+\beta|^2\leqslant(1+c)|\alpha|^2+\left(1+\frac{1}{c}\right)|\beta|^2.$$

6. 求证：$\left|\frac{a^2-b^2}{a}\right|\geqslant|a|-|b|$.

2.2　解含绝对值的不等式举例

解含绝对值的不等式主要依据绝对值的定义、几何意义及不等式的基本性质．

例 1　解不等式

$$1\leqslant|3-2x|<5.$$

解　原不等式可化为

$$1\leqslant|2x-3|<5,$$

即
$$\begin{cases}|2x-3|\geqslant1, & ①\\ |2x-3|<5. & ②\end{cases}$$

由①得　$2x-3\geqslant1$，

或　$2x-3\leqslant-1$，

解得　$x\geqslant2$ 或 $x\leqslant1$.

由②得 $$-5<2x-3<5,$$

解得 $$-1<x<4.$$

综上所述，原不等式的解集为$(-1, 1]\cup[2, 4)$.

我们可将原不等式变为

$$\frac{1}{2}\leqslant\left|x-\frac{3}{2}\right|<\frac{5}{2}.$$

如图 2 - 6，根据绝对值在数轴上的表示可知不等式的解集为$(-1, 1]\cup[2, 4)$.

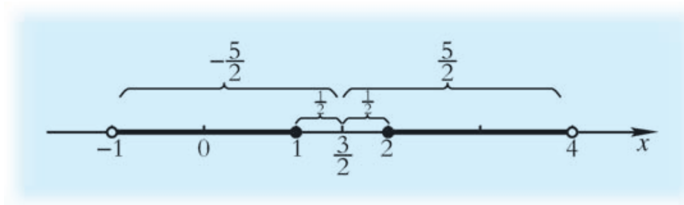


图 2 - 6

例 2 解不等式

$$|2x+1|+|2x-3|\geqslant 4.$$

分析 $2x+1$，$2x-3$ 的零点分别为$-\frac{1}{2}$，$\frac{3}{2}$，它们在区间$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$，$\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$，$\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$内的符号如图 2 - 7 所示，于是可根据绝对值的定义分段讨论.

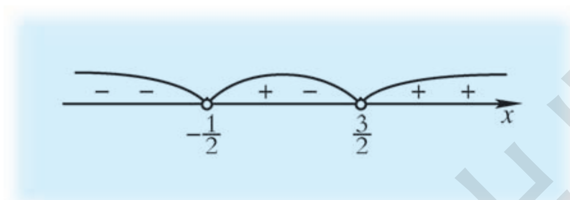


图 2 - 7

解 （1）当$x\leqslant-\frac{1}{2}$时，原不等式可变为

$$-(2x+1)-(2x-3)\geqslant 4.$$

解得 $$x\leqslant-\frac{1}{2}.$$

（2）当$-\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$时，原不等式可变为

$$(2x+1)-(2x-3)\geqslant 4,$$

即 $$0\cdot x\geqslant 0.$$

此不等式恒成立. 故此时$-\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$.

(3) 当 $x\geqslant\frac{3}{2}$时，原不等式可变为

$$(2x+1)+(2x-3)\geqslant 4,$$

解得 $$x\geqslant\frac{3}{2}.$$

综上所述，原不等式的解集为 **R**.

可能有同学对最后获取的结果一点也不感到意外，这是因为他们从另外一个角度看到

$$\begin{aligned}&|2x+1|+|2x-3|\\=&2\left(\left|x+\frac{1}{2}\right|+\left|\frac{3}{2}-x\right|\right)\\\geqslant&2\left|\left(x+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3}{2}-x\right)\right|\\=&4.\end{aligned}$$

这是一个恒成立的不等式，与 x 的取值无关！

例 3　解不等式

$$|2x^2-1|>x.$$

解　设 $y_1=|2x^2-1|$，$y_2=x$，分别作出两个函数的图象(如图 2 - 8).

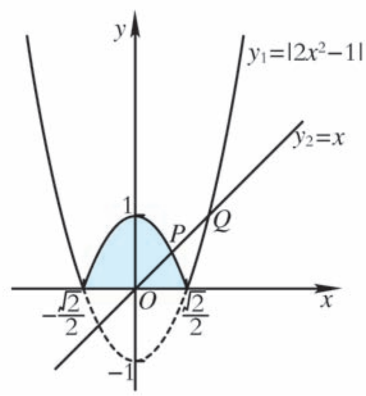


图 2 - 8

y_1 与 x 轴交点为$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$,$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$.

在区间$\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$内，$y_1=1-2x^2$ 与 $y_2=x$的图象的交点的横坐标为 $x=\frac{1}{2}$；

在区间$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$内，$y_1=2x^2-1$ 与 $y_2=x$ 的图象的交点的横坐标为 $x=1$. 由图 2 - 5 可知不等式的解集为$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup(1,+\infty)$.

习题 8

1. 解下列不等式：

(1) $|2x+1|\geqslant x$；

(2) $|8-5x|<3x$；

(3) $|x-3|-|2x+1|<4$.

2. 解关于 x 的不等式 $|x-3|+|2x+1|>a$.

3. 若不等式 $|x-4|+|x-3|>a$ 的解集为 $\mathbf{R}$，求实数 a 的取值范围.

4. 某环形公路旁有一中、二中、三中、四中、五中按顺序排列的五所中学，各校分别有电脑 15，7，11，3，14 台. 现在要使各校电脑的台数相等，问各校应分别调出几台电脑给邻校，才能使调动的总次数最少？

阅读与思考

距离的性质

1. 欧氏距离

大家所熟悉的平面上两点 $P(x_1, y_1)$ 与 $Q(x_2, y_2)$ 之间的距离称为**欧氏距离**，记作 $d_2(PQ)$，由公式

$$d_2(PQ)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \quad ①$$

给出.

下面列举距离函数的性质.

(1) 两点间的距离只依赖于这两个点的相对位置，即只依赖于它们坐标的差 x_2-x_1 及 y_2-y_1. 这个性质称为平移不变性(即当这两个点沿同一方向移动同样的距离时，它们之间的距离不变).

(2) 从点 P 到点 Q 的距离等于从点 Q 到点 P 的距离. 这可以通过在①中验证

$$d_2(PQ)=d_2(QP)$$

看出来. 性质(2) 通常称为距离函数的对称性.

(3) 距离函数①满足三角形不等式

$$d_2(PR)\leqslant d_2(PQ)+d_2(QR). \quad ②$$

这里 R 为三角形上另一点，若记 $R(x_3, y_3)$，则

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}+\sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2}\geqslant\sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2} \quad ③$$

不等式③通常称为平面三角不等式.

(4) 任意两点 P 与 Q 间的距离是非负的. 即

$$d_2(PQ)\geqslant 0;$$

当且仅当 P 与 Q 两点重合时，等号成立，这个性质常常称为距离函数的正性；这一点由定义①立即可得.

(5) 如果 P 点坐标为 (x, y)，Q 点坐标为 (ax, ay)，其中 a 为一

非负常数，那么

$$d_2(OQ)=ad_2(OP);$$

这里 O 表示原点(0，0)，这个性质称为距离函数的齐次性，它成立是因为

$$\begin{aligned}d_2(OQ)&=\sqrt{(ax)^2+(ay)^2}=\sqrt{a^2(x^2+y^2)}\\&=a\sqrt{x^2+y^2}=ad_2(OP).\end{aligned}$$

欧氏距离还有另一个性质：

(6) 若 xOy 平面绕原点旋转某个角度，则两点间的欧氏距离保持不变. 这个性质称为旋转不变性 .

2. 城市街区距离

还可以定义许多其他有用而且有趣的“非欧”距离 . 为了能称之为“距离”，P，Q 的一个函数必须具有我们刚刚对熟知的距离①所验证过的性质(1) 到性质(5). 唯有欧氏距离 d_2 具有全部的 6 条性质 .

作为一个例子，可以考虑用城里两地 $P(x_1,\ y_1)$ 与 $Q(x_2,\ y_2)$ 之间道路的实际长度来虚构一个“城市街区距离”. 假定所有的街道或者是严格南北向的，或者是严格东西向的，而且没有空地可以穿行，如图 2－9.

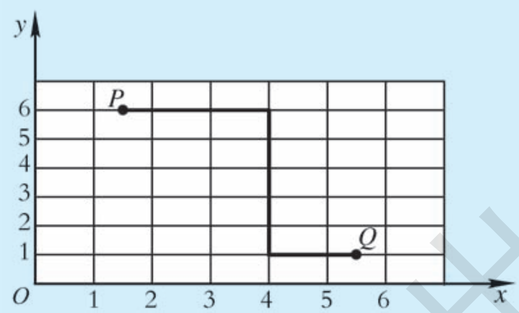


图 2－9　城市街区距离

从 P 到 Q 的任何道路无一例外地只能由水平段落及竖直段落组成，这样我们所要通过的距离 $d_1(PQ)$ 就由从 P 到 Q 的这条道路的所有水平距离与竖直距离之和组成. 因此，我们定义城市街区距离为

$$d_1(PQ)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|. \qquad ④$$

严格说来，这式子有时不能表示城市街区距离，图 2－10 就是一例. 那里的 P，Q 两地位于相同的两条南北向(或东西向)街道之间. 这时，

行人在其行程中被迫要往回走，于是实际经过的距离比④式右边的值要大些. 但是，如果街区非常小，也就是说街道之间靠得很近，那么④就相当精确了. 更确切地说，如果仅限于沿着东、南、西、北这四个主要方向行走而不必走回头路，那么新的距离函数④就是从 P 到 Q 所要经过的最小距离. 因此，城市街区距离毕竟为我们提供了定义新的“非欧”距离的实际背景.

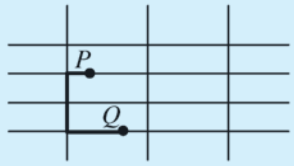


图 2－10　城市街区距离

下面我们来看看由④所定义的 d_1 是否具有距离所要求的(1)～(5)条性质.

因为表达式④中只包含坐标的差，所以新的距离当然是平移不变的，因而具有性质(1).

因为 $d_1(PQ)=d_1(QP)$，所以 d_1 是对称的，这样也就具有性质(2).

为了建立三角形不等式

$$d_1(PR)\leqslant d_1(PQ)+d_1(QR),$$

设 P，Q，R 的坐标分别为 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，(x_3, y_3)，则

$$\begin{aligned} d_1(PR) &= |x_1-x_3|+|y_1-y_3| \\ &= |x_1-x_2+x_2-x_3|+|y_1-y_2+y_2-y_3|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_1(PR) &\leqslant |x_1-x_2|+|y_1-y_2|+|x_2-x_3|+|y_2-y_3| \\ &= d_1(PQ)+d_1(QR). \end{aligned}$$

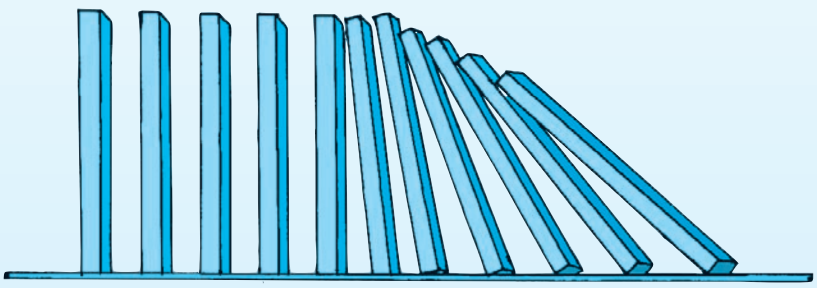
因而具有性质(3).

城市街区距离当然也满足性质(4)，因为任何实数的绝对值总是非负的. 除非 P 与 Q 重合，否则它总是正的.

性质(5)很容易验证，事实上，对于 $a\geqslant 0$，有

$$|ax|+|ay|=a(|x|+|y|).$$

第 3 章 数学归纳法与不等式证明



数学归纳法是证明关于正整数的有关命题的重要方法. 本章学习数学归纳法和它的简单应用.

3.1　数学归纳法

对于基本不等式

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab},$$

如果令

$$a=\frac{a_1+a_2}{2},\quad b=\frac{a_3+a_4}{2},$$

其中 $a_j(j=1,2,3,4)$ 都是非负实数，那么我们便得到

$$\frac{\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}}{2}\geqslant\sqrt{\frac{a_1+a_2}{2}\cdot\frac{a_3+a_4}{2}},$$

即

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\geqslant\sqrt{\frac{a_1+a_2}{2}\cdot\frac{a_3+a_4}{2}}. \qquad ①$$

再运用基本不等式，得

$$\frac{a_1+a_2}{2}\geqslant\sqrt{a_1a_2},$$

$$\frac{a_3+a_4}{2}\geqslant\sqrt{a_3a_4}.$$

代入①，便进一步得到不等式

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\geqslant\sqrt{\sqrt{a_1a_2}\cdot\sqrt{a_3a_4}}=\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4},$$

等号当且仅当 $a_1=a_2=a_3=a_4$ 时成立.

这又是一个有趣的结果!

一个自然的想法是：对于任意的 8 个非负实数 $b_j(j=1,2,\cdots,8)$，下面不等式

$$\frac{b_1+b_2+\cdots+b_8}{8}\geqslant\sqrt[8]{b_1b_2\cdots b_8}$$

是否也成立？不妨动手试一试.

如果我们继续下去，显然可以对 2 的所有方幂：2^1，2^2，2^3，2^4，…建立起相应的不等式

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^n}}{2^n}\geqslant\sqrt[2^n]{a_1a_2\cdots a_{2^n}},\qquad ②$$

这里 $a_j(j=1,2,\cdots,2^n)$都是非负实数.

不过，这是一个由特殊到一般的过程，不等式②还有待于严格证明，这项工作可运用**数学归纳法**(mathematical induction)来完成.

何谓数学归纳法？

大概每个人都遇到过“多米诺现象”：推倒头一块骨牌，它会推倒第二块，再推倒第三块，…，直到所有骨牌全都倒下. 我们把骨牌想象为一系列无穷多个编了号的命题：P_1，P_2，P_3，…，假定我们能够证明：

(1)(奠基)最初的一个命题正确；

(2)(过渡)由每一个命题的正确性都可以推出它的下一个命题的正确性.

那么我们便证明了这一列所有命题的正确性. 事实上，我们已会“推倒头一块骨牌”，即证明最初的一个命题成立(所谓“奠基”). 而“过渡”则意味着“每一块骨牌在倒下时都将推倒下一块骨牌”. 这样一来，我们并不需要特别强调应推倒哪一块骨牌，事实上，只要头一块一旦倒下，那么行列中的任何一块骨牌都或迟或早必然要倒下.

上述事例启发我们：在证明一个与正整数有关的命题时，可采用下面两个步骤：

(1) 证明 $n=1$ 时命题成立；

(2) 证明：如果 $n=k$ 时命题成立，那么 $n=k+1$ 时命题也成立.

我们有(1)、(2)作依据，根据(1)知 $n=1$ 时命题成立，再根据(2)知 $n=1+1=2$ 时命题成立，又由 $n=2$ 时命题成立，依据(2)知 $n=2+1=3$ 时命题成立. 这样延续下去，就可以知道对任何正整数 n 命题都成立.

这种证明方法就叫作数学归纳法.

例 1 已知 n 为正整数，求证：

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2.$$

证明 (1) 当 $n=1$ 时，左边 $=1$，右边 $=1$，等式成立；

(2) 假设当 $n=k$ 时，等式成立，即

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2.$$

那么 $1+3+5+\cdots+(2k-1)+[2(k+1)-1]$

$=k^2+[2(k+1)-1]$

$=k^2+2k+1$

$=(k+1)^2.$

这表明 $n=k+1$ 时等式也成立.

根据(1)和(2)，可知等式对任何正整数 n 都成立.

在上面的证明中，“证明 $n=1$ 时等式成立”这一步称为归纳奠基；“由 $n=k$ 时等式成立，推出 $n=k+1$ 时等式也成立”，这一步称为归纳递推. 而“假设 $n=k$ 时等式成立”成为归纳假设，数学归纳法的实施中上述二步缺一不可，而没有用到归纳假设的证明也就不会是数学归纳法.

例 2 已知 n 为正整数，求证：

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

证明 (1) 当 $n=1$ 时，左边 $=1^3=1$，右边 $=\left[\frac{1(1+1)}{2}\right]^2=1$，等式成立；

(2) 假设 $n=k$ 时等式成立，即

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2,$$

那么 $1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3$

$=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2+(k+1)^3$

$=(k+1)^2\left[\frac{k^2}{4}+(k+1)\right]$

$=(k+1)^2\ \frac{(k+2)^2}{4}$

$=\left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2.$

这表明 $n=k+1$ 时等式成立.

根据(1)和(2) 可知等式对任何正整数 n 都成立.

习题 9

1. 已知 n 为正整数，求证：

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

2. 已知 n 为正整数，求证：

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}.$$

3. 已知 n 为正整数，求证：

$$1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}.$$

3.2 数学归纳法证不等式

数学归纳法也是不等式证明的重要方法.

例 1 已知 n 为不小于 3 的正整数，求证：$2^n>2n+1$.

分析 依题意，所要证明的结论只要求对于不小于 3 的正整数 n 成立，因此，我们可将奠基步中的“$n=1$”改为“$n=3$”.

$n=3$ 时不等式成立是十分明显的.

关键在于递推步，根据归纳假设，有

$$2^k>2k+1. \quad ①$$

而欲证不等式为

$$2^{k+1}>2(k+1)+1,$$

即证

$$2\cdot 2^k>(2k+1)+2. \quad ②$$

比较①,②，只需证

$$2^k\geqslant 2.$$

这显然成立.

证明 （1）$n=3$ 时，左边$=2^3=8$，右边$=2\times 3+1=7$，不等

式成立.

(2) 假设 $n=k$ 时不等式成立，就是

$$2^k>2k+1.$$

那么　　$2^{k+1}=2^k+2^k>(2k+1)+2=2(k+1)+1.$

这表明 $n=k+1$ 时不等式也成立.

根据(1),(2) 知对于一切不小于 3 的正整数 n 不等式成立.

例 2　已知 n 为正整数，求证:

$$\sqrt{1\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 3}+\cdots+\sqrt{n(n+1)}<\frac{(n+1)^2}{2}.$$

分析　$n=1$ 时，左边$=\sqrt{2}$，右边$=2$，不等式成立.

记左边和式为 S_n，根据归纳假设，有

$$S_k<\frac{(k+1)^2}{2}.$$

而　　$S_k=\sqrt{1\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 3}+\cdots+\sqrt{k(k+1)}$,

$$S_{k+1}=\sqrt{1\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 3}+\cdots+\sqrt{k(k+1)}+\sqrt{(k+1)(k+2)}.$$

有　　$S_{k+1}=S_k+\sqrt{(k+1)(k+2)}.$

因此　　$S_{k+1}<\dfrac{(k+1)^2}{2}+\sqrt{(k+1)(k+2)}.$

欲证　　$S_{k+1}<\dfrac{[(k+1)+1]^2}{2}=\dfrac{(k+2)^2}{2}$,

只需证　　$\dfrac{(k+1)^2}{2}+\sqrt{(k+1)(k+2)}<\dfrac{(k+2)^2}{2}$,

即证　　$\sqrt{(k+1)(k+2)}<\dfrac{(k+2)^2}{2}-\dfrac{(k+1)^2}{2}$,

也就是证　　$\sqrt{(k+1)(k+2)}<\dfrac{2k+3}{2}.$

最后一个不等式可由基本不等式得到.

证明　(1) $n=1$ 时，左边$=\sqrt{2}$，右边$=\dfrac{(1+1)^2}{2}=2$，不等式成立.

(2) 假设 $n=k$ 时不等式成立，就是

$$\sqrt{1\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 3}+\cdots+\sqrt{k(k+1)}<\frac{(k+1)^2}{2}.$$

又由基本不等式可得

$$\sqrt{(k+1)(k+2)}<\frac{(k+1)+(k+2)}{2}=\frac{2k+3}{2}.$$

所以

$$\sqrt{1\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 3}+\cdots+\sqrt{k(k+1)}+\sqrt{(k+1)(k+2)}<$$
$$\frac{(k+1)^2}{2}+\frac{2k+3}{2}=\frac{k^2+4k+4}{2}=\frac{(k+2)^2}{2}.$$

这表明当 $n=k+1$ 时不等式也成立.

根据(1)，(2)，可知对任何正整数 n 不等式成立.

从例 1、例 2 中可以看出，运用数学归纳法证明不等式的两个步骤实际上是分别证明两个不等式. 尤其是第二步，一方面需要我们充分利用归纳假设提供的“便利”，另一方面还需要结合运用比较法、综合法、分析法等其他不等式的证明方法.

现在让我们运用数学归纳法证明 3.1 节中提出的不等式②，我们将不等式②的幂指数 n 作为归纳对象.

证明 (1) 当 $n=1$ 时，不等式②即为基本不等式，显然成立.

(2) 假设 $n=k$ 时不等式成立，则

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^k}}{2^k}\geqslant\sqrt[2^k]{a_1a_2\cdots a_{2^k}},$$

$$\frac{a_{2^k+1}+a_{2^k+2}+\cdots+a_{2^{k+1}}}{2^k}\geqslant\sqrt[2^k]{a_{2^k+1}a_{2^k+2}\cdots a_{2^{k+1}}}.$$

于是

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^k}+a_{2^k+1}+a_{2^k+2}+\cdots+a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}$$

$$=\frac{\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^k}}{2^k}+\dfrac{a_{2^k+1}+a_{2^k+2}+\cdots+a_{2^{k+1}}}{2^k}}{2}$$

$$\geqslant\frac{\sqrt[2^k]{a_1a_2\cdots a_{2^k}}+\sqrt[2^k]{a_{2^k+1}a_{2^k+2}\cdots a_{2^{k+1}}}}{2}$$

$$\geqslant\sqrt[2^{k+1}]{a_1a_2\cdots a_{2^k}a_{2^k+1}a_{2^k+2}\cdots a_{2^{k+1}}}.$$

即 $n=k+1$ 时不等式成立.

根据(1)，(2)知不等式对任何正整数 n 成立.

从上面证明过程中可以看出当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_{2^{k+1}}$ 时等

号成立.

习题　10

1. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为实数，证明：

$$|x_1+x_2+\cdots+x_n| \leqslant |x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|.$$

2. 证明：对于任意正整数 n 有

$$|\sin nx| \leqslant n|\sin x|.$$

3. 试证：对任意正整数 $n>1$，有

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}.$$

4. 试证：对任意正整数 $n>1$，有

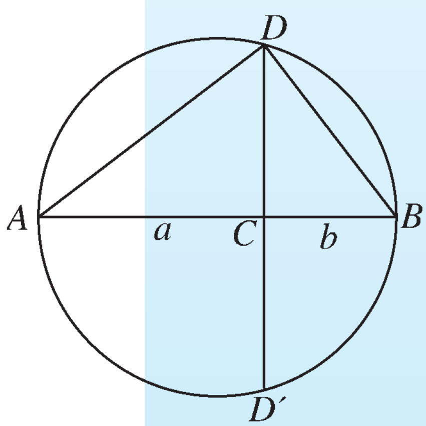
$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2}.$$

5. 已知 a，$b>0$，$a \neq b$，n 为不小于 2 的正整数，求证：

$$\frac{a^n+b^n}{2}>\left(\frac{a+b}{2}\right)^n.$$

第 4 章

平均值不等式



平均值不等式是应用广泛的不等式.

在日常生活中，我们经常遇到如何使材料最省、面积最大、容积最大等问题，可以借助平均值不等式来处理.

4.1 三个正数的平均值不等式

在 1.3 节中我们已经知道，如果 a，b 为正数，那么

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab},$$

当且仅当 $a=b$ 时等号成立．在第 3 章中我们又知道了，对于任意 2^n 有

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^n}}{2^n} \geqslant \sqrt[2^n]{a_1a_2\cdots a_{2^n}}.$$

当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_{2^n}$ 时等号成立．又一次的成功鼓舞着我们作进一步的思考，对于任意三个正数 a，b，c，是否也有

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc} \qquad ①$$

成立呢？请同学们随意选取三个正数组成一组做实验．

无论是怎样的三个正数，计算的结果均表明不等式①是成立的，当且仅当三数相等时才取等号．

接下来，我们证明不等式①．

为了避免根号，用 a^3，b^3，c^3 代替 a，b，c，于是①式变为

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3} \geqslant abc, \qquad ②$$

②式等价于 $$a^3+b^3+c^3 \geqslant 3abc. \qquad ③$$

而
$$\begin{aligned}a^3+b^3+c^3-3abc &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\\ &= \frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]\\ &\geqslant 0,\end{aligned}$$

且 a，b，c 为正数，因此，有

$$a^3+b^3+c^3-3abc \geqslant 0,$$

③式获证，不等式①，②成立．从上述推导过程中还不难看出当且仅当 $a=b=c$ 时等号成立．

对于三个正数 a，b，c，我们把 $\frac{a+b+c}{3}$ 称作它们的算术平均数，

把$\sqrt[3]{abc}$称作它们的几何平均数，不等式①表明三个正数的算术平均数不小于几何平均数，当且仅当三正数相等时两种平均数相等，我们简称不等式①为三个正数的平均值不等式.

例 1 已知 a，b，c 为正数，求证：

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqslant 9.$$

证明 因 a，b，c 为正数，根据三个正数的平均值不等式，可知

$$a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc},$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}.$$

上述两不等式的右边都大于 0，两式相乘得

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqslant 3\sqrt[3]{abc}\cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}=9.$$

当且仅当 $a=b=c$ 时，等号成立.

例 2 已知 a_1，a_2，…，a_n 都是正数，且 $a_1a_2\cdots a_n=1$，求证：

$$(2+a_1)(2+a_2)\cdots(2+a_n)\geqslant 3^n.$$

证明 因 a_1 是正数，根据三个正数的平均值不等式，有

$$2+a_1=1+1+a_1\geqslant 3\sqrt[3]{a_1}>0.$$

同理 $2+a_j\geqslant 3\sqrt[3]{a_j}>0\ (j=2,3,\cdots,n)$.

将上述各不等式的两边分别相乘即得

$$(2+a_1)(2+a_2)\cdots(2+a_n)\geqslant(3\sqrt[3]{a_1})(3\sqrt[3]{a_2})\cdots(3\sqrt[3]{a_n})=3^n\cdot\sqrt[3]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

$\because$ $a_1a_2\cdots a_n=1$，

$\therefore$ $(2+a_1)(2+a_2)\cdots(2+a_n)\geqslant 3^n$.

当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=1$ 时，等号成立.

例 3 求证：$x\sqrt{1-3x}\leqslant\dfrac{2\sqrt{3}}{27}$.

证明 首先考虑到不等式有意义，需 $1-3x\geqslant 0$，即 $x\leqslant\dfrac{1}{3}$.

若 $x\leqslant 0$ 及 $x=\dfrac{1}{3}$，不等式左边不大于 0，显然不等式成立.

若 $0<x<\dfrac{1}{3}$，则根据三个正数的平均值不等式，有

$$\begin{aligned}(x\sqrt{1-3x})^2&=x^2(1-3x)\\&=\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{2}x\cdot\frac{3}{2}x\cdot(1-3x)\\&\leqslant\frac{4}{9}\left[\frac{\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}x+(1-3x)}{3}\right]^3\\&=\frac{4}{243},\end{aligned}$$

$$\therefore\qquad x\sqrt{1-3x}\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{27}.$$

当且仅当 $x=\frac{2}{9}$ 时，等号成立.

习题　11

1. 已知 a，b，c 为正数，求证：$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geqslant 3$.

2. 已知 a，b，c 为正数，求证：$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)(a+b+c)^2\geqslant 27$.

3. 若实数 x，y 满足 $xy>0$，$x^2y=2$，求证：$xy+x^2\geqslant 3$.

4. 若 $0<x<\frac{1}{2}$，求证：$x^2(1-2x)\leqslant\frac{1}{27}$.

4.2　三个正数平均值不等式的实际应用举例

例 1　无论是工业设备还是家庭生活用具，圆柱形的容器不少见. 你是否留心了多数圆柱形容器不是细细长长的，也不是扁扁的，而是高和底面直径大致相等，你是否想过这是为什么？当然，高和底面直径大致相等的圆柱形看上去比较匀称，这是一条理由. 但更主要的原因似乎不在这里. 我们知道，容器的容积往往是一定的，但表面积却随着形状而改变，这就意味着同样容积的圆柱形容器有的用料较省而有的则费料，如果仅从成本角度考虑，自然应制造用

料最省的那种．究竟怎样的圆柱形容器用料最省呢？

解　如图 4－1，设容器的高为 h，底面半径为 r，表面积为 S，容积为 V，这时 V 为定值．于是有

$$V=\pi r^2 h \quad ①$$

及

$$S=2\pi r^2+2\pi rh. \quad ②$$

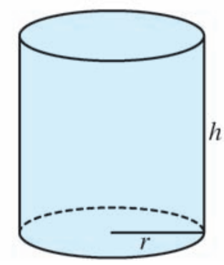


图 4－1

根据三个数的平均值不等式，由②得

$$\begin{aligned} S &=2\pi r^2+\pi rh+\pi rh \\ &\geqslant 3\sqrt[3]{(2\pi r^2)\cdot(\pi rh)\cdot(\pi rh)} \\ &=3\sqrt[3]{2\pi(\pi r^2 h)^2}. \end{aligned} \quad ③$$

将①代入③得

$$S\geqslant 3\sqrt[3]{2\pi V^2}, \quad ④$$

当且仅当

$$2r^2=rh=rh,$$

即

$$h=2r.$$

也就是高和底面直径相等时③，④等号成立，此时，圆柱的表面积

$$S=3\sqrt[3]{2\pi V^2}$$

最小，容器用料最省，同时可算得 $r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$，$h=\sqrt[3]{\dfrac{4V}{\pi}}$.

例 2　如图 4－2，有一张边长为 a cm 的正方形硬纸板．我们可以将它的四角分别剪去一个相同的小正方形，再将四周沿虚线折起构成一个没有盖的纸盒，如图 4－3．自然，我们希望知道剪去多大的小正方形使得纸盒的容积最大．

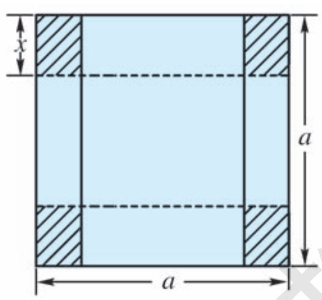


图 4－2

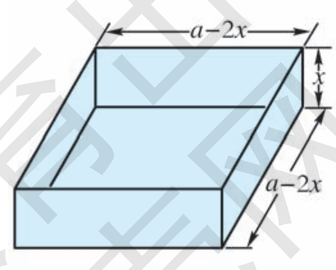


图 4－3

解　设剪去的小正方形边长为 x cm，那么所得盒子的容积是

$$V=x(a-2x)(a-2x). \quad ⑤$$

为了消去变量 x，稍作变形

$$V=\frac{1}{4}\cdot 4x(a-2x)(a-2x).$$

这时 $4x$，$a-2x$，$a-2x$ 三个数的和为常数，于是根据三个数的平均值不等式，有

$$V\leqslant\frac{1}{4}\left(\frac{4x+(a-2x)+(a-2x)}{3}\right)^3$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{2a}{3}\right)^3.$$

为使 V 有最大值，须上述不等式的等号成立．因此，有

$$4x=a-2x=a-2x. \qquad ⑥$$

这就要求 $x=\frac{a}{6}$．即可剪去四角上边长为 $\frac{a}{6}$ 的小正方形再做成的无盖纸盒容积最大．

上面两个例子，代表了一种解决实际问题的数学模型．要注意的是，用这种方法解决问题时，一定要检验等号是否成立，并确定等号成立的条件．

习题　12

1. 某工厂需制造一批容积一定的长方体铁皮箱，问怎样才能用料最省？
2. 木梁的强度与梁宽成正比，与梁高的平方成正比，从圆柱形的木材截取横截面是矩形的木梁，问如何去截能使木梁的强度最大？
3. 如图 4－4，在一张半径是 R 的圆桌的正中央上空挂一盏电灯．大家知道，灯挂得太高了，桌子边缘处的亮度就小；挂得太低，桌子的边缘处仍然是不亮的．从物理学知道，桌子边缘一点处的照度 E 和 θ 的正弦成正比，而和这一点到光源的距离的平方成反比．

即　　$E=k\frac{\sin\theta}{r^2}$.

这里 k 是一个和灯光强度有关的常数．那么究竟应该怎样选择灯的高度，才能使桌子边缘处最亮？

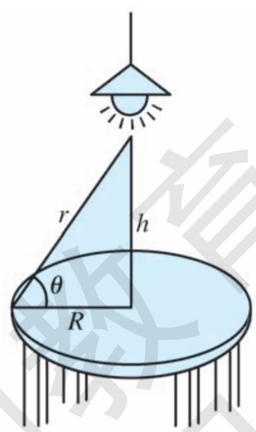


图 4－4

阅读与思考

n 个正数的平均值不等式

我们知道对两个正数 a，b，有

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab},$$

当且仅当 $a=b$ 时等号成立．在上一节我们又知道了：对于三个正数 a，b，c 有

$$\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc},$$

当且仅当 $a=b=c$ 时等号成立．实际上，我们已运用数学归纳法证明了：对于 2^n 个正数 a_1，a_2，…，a_{2^n}，有

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^n}}{2^n}\geqslant\sqrt[2^n]{a_1a_2\cdots a_{2^n}}.$$

如果说，前面的成功已给了我们极大的鼓舞，那么现在我们渴望乘胜追击：对于任意 n 个正数 a_1，a_2，…，a_n，是否又有不等式

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \quad ①$$

成立？这是一个非常优美的不等式，获取它的证明无疑是大家十分乐意接受的挑战！

为方便起见，记

$$A_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

$$G_n=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n},$$

于是①即

$$A_n\geqslant G_n. \quad ②$$

这是个与正整数 n 有关的命题，运用数学归纳法证明如下：

证明　（1）$n=2$ 时，不等式即基本不等式显然成立．

（2）假设 $n=k$ 时不等式成立，那么，因

$$A_{k+1}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}}{k+1},$$

$$a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}=(k+1)A_{k+1},$$

而
$$(k+1)A_{k+1}+(k-1)A_{k+1}=2kA_{k+1},$$

所以
$$A_{k+1}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}+(k-1)A_{k+1}}{2k}$$

$$=\frac{\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}+\dfrac{a_{k+1}+(k-1)A_{k+1}}{k}}{2}. \qquad ③$$

根据归纳假设及基本不等式，由③得

$$A_{k+1}\geqslant\frac{\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}+\sqrt[k]{a_{k+1}A_{k+1}^{k-1}}}{2}$$

$$\geqslant\sqrt{\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}\cdot\sqrt[k]{a_{k+1}A_{k+1}^{k-1}}},$$

所以
$$A_{k+1}^{2k}\geqslant a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}A_{k+1}^{k-1}.$$

化简得
$$A_{k+1}^{k+1}\geqslant a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}.$$

进而有
$$A_{k+1}\geqslant\sqrt[k+1]{a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}}.$$

根据（1），（2），不等式对任意正整数 n（$n\geqslant2$）成立.

从上面的证明过程中，可以看出当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时等号成立.

数学建模

洗衣服的数学

我们爱清洁，衣服脏了要洗.

我们要节约用水，希望用一定量的水把衣服尽量洗干净.

这就提出了数学问题. 本来嘛，当你用数学家的眼光看周围事物的时候，处处都能提出数学问题.

但是，数学家不喜欢含含糊糊的问题，先要把问题理清楚，把现实世界的问题化为纯数学的问题，这叫作建立数学模型.

现在衣物已打好了肥皂，揉搓得很充分了，再拧一拧，当然不可能把水完全拧干，设衣服上还残留含有污物的水 1 kg. 用 20 kg 清水来漂洗，怎样才能漂得更干净?

如果把衣服一下放到 20 kg 清水里，那么连同衣服上那 1 kg 水，一共 21 kg 水. 污物均匀分布在这 21 kg 水里，拧干后，衣服上还有 1 kg，所以污物残存量是原来的$\frac{1}{21}$.

通常你不会这么办. 你会把 20 kg 水分两次用，比如第一次用 5 kg，使污物减少到$\frac{1}{6}$，再用 15 kg，污物又减少到$\frac{1}{6}$的$\frac{1}{16}$，即$\frac{1}{6\times16}=\frac{1}{96}$，分两次洗，效果好多了.

同样分两次洗，也可以每次用 10 kg，每次都使污物减少到原有量的$\frac{1}{11}$，两次可以达到$\frac{1}{121}$的效果!

要是不怕麻烦，分四次洗呢? 每次 5 kg 水. 第一次使污物减少到原有的$\frac{1}{6}$，四次之后，污物减少到原有的$\frac{1}{6^4}=\frac{1}{1\ 296}$，效果更佳!

但是，这样是不是达到最佳效果了呢?

进一步问，如果衣服上残存水量是 1.5 kg 或 2 kg，洗衣用水量是 37 kg，那么又该怎么洗呢?

你会想到用字母代替数了，这样能使问题一般化．设衣服充分拧干之后残存水量 w kg，其中，含污物 m_0 g，漂洗用的清水 A kg.

我们把 A kg 水分成 n 次使用，每次用量是 a_1，a_2，…，a_n(kg)，经过 n 次漂洗后，衣服上还有多少污物呢?

第一次，把带有 m_0 g 污物和 w kg 水的衣服放到 a_1 kg 水中，充分搓洗，使 m_0 g 污物溶解或均匀悬浮于（$w+a_1$）kg 水中.

把污水倒掉，衣服拧干的时候，衣服上还残留多少污物呢? 由于 m_0 g 污物均匀分布于（$w+a_1$）kg 水中，所以衣服上残留的污物量 m_1 与残留的水量 w 成正比：

$$\frac{m_1}{m_0}=\frac{w}{w+a_1}, \tag{①}$$

故

$$m_1=m_0\cdot\frac{w}{w+a_1}=\frac{m_0}{\left(1+\frac{a_1}{w}\right)}. \tag{②}$$

类似分析可知，漂洗两次以后衣服上污物量 m_2 为

$$m_2=\frac{m_1}{1+\frac{a_2}{w}}=\frac{m_0}{\left(1+\frac{a_1}{w}\right)\left(1+\frac{a_2}{w}\right)}. \tag{③}$$

而 n 次洗涤之后衣服上残存污物量 m_n 为

$$m_n=\frac{m_0}{\left(1+\frac{a_1}{w}\right)\left(1+\frac{a_2}{w}\right)\cdots\left(1+\frac{a_n}{w}\right)}. \tag{④}$$

有了这个公式，也就是建立了数学模型．下一步的问题是：

(1) 是不是把水分得越匀，洗得越干净?

(2) 是不是洗的次数越多越干净?

先考虑第一个问题．对固定的洗涤次数 n 如何选取 a_1，a_2，…，a_n，才能使 m_n 最小? 也就是使④的右端的分母最大?

这个分母是 n 个数之积．这个 n 个数之和是

$$\left(1+\frac{a_1}{w}\right)+\left(1+\frac{a_2}{w}\right)+\cdots+\left(1+\frac{a_n}{w}\right)=n+\frac{A}{w}. \tag{⑤}$$

于是问题化为：当 n 个数之和为一定值 $S=n+\frac{A}{w}$ 时，n 个数的乘积何时最大？

利用平均值不等式：

$$\sqrt[n]{c_1c_2\cdots c_n}\leqslant\frac{1}{n}\ (c_1+c_2+\cdots+c_n), \tag{6}$$

得到
$$\left(1+\frac{a_1}{w}\right)\left(1+\frac{a_2}{w}\right)\cdots\left(1+\frac{a_n}{w}\right)\leqslant\left(1+\frac{A}{nw}\right)^n. \tag{7}$$

这就告诉我们，每次用水量相等的时候，洗得最干净，而残存污物的量是

$$\frac{m_0}{\left(1+\frac{A}{nw}\right)^n}. \tag{8}$$

这就肯定地回答了刚才的问题（1）.

是不是分成 $n+1$ 次要比 n 次洗得更干净呢？确实是的．又可以用平均值不等式来证明．对 $n+1$ 个正数 c_1，c_2，…，c_{n+1} 用平均值不等式，这里取

$$c_1=c_2=\cdots=c_n=1+\frac{A}{nw},\qquad C_{n+1}=1. \tag{9}$$

把它们代入⑥便得

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{A}{nw}\right)^n\times1&\leqslant\left\{\frac{n\left(1+\frac{A}{nw}\right)+1}{n+1}\right\}^{n+1}\\&=\left(1+\frac{A}{(n+1)w}\right)^{n+1}.\end{aligned} \tag{10}$$

这表明，把水分成 $n+1$ 次洗，要比分成 n 次洗好一些.

那么，如果洗上很多很多次，那么是不是能用一定量的水把衣服洗得要多干净就有多干净呢？

不会的．仍然可以用平均值不等式证明．考虑 $n+k$ 个正数 c_1，c_2，…，c_n，c_{n+1}，…，c_{n+k}，这里 k 是一个比 $\frac{A}{w}$ 大的正数．再令 $b=1-\frac{A}{kw}$，取

$$c_1=c_2=\cdots=c_n=1+\frac{A}{nw},\quad c_{n+1}=\cdots=c_{n+k}=b.$$

于是，把它们代入平均值不等式⑥以后得到

$$\left(1+\frac{A}{nk}\right)^{n}\cdot b^{n}\leqslant\left\{\frac{n\left(1+\frac{A}{nw}\right)+kb}{n+k}\right\}^{n+k}=1, \tag{11}$$

也就是

$$\left(1+\frac{A}{nk}\right)^{n}\leqslant\frac{1}{b^{n}}=\left(\frac{k}{k-\frac{A}{w}}\right)^{k}. \tag{12}$$

因为取 k 是任一个大于$\frac{A}{w}$的整数时，不等式⑫都对，所以不妨取个 k 使⑫变得清楚一些，具体地，用 A^{*} 表示不小于$\frac{2A}{w}$的最小整数．取 $k=A^{*}$，则因 $k\geqslant\frac{2A}{w}$，可知$\frac{k}{k-\frac{A}{w}}\leqslant 2$，于是由⑫便得

$$\left(1+\frac{A}{nw}\right)^{n}\leqslant 2^{A^{*}}. \tag{13}$$

例如，当$\frac{A}{w}=1$时，$A^{*}=2$，⑬的右边是 4；当$\frac{A}{w}=3.5$时，$A^{*}=7$，⑬右边是 128；当$\frac{A}{w}=1.7$时，$A^{*}=4$，⑬的右边是 16.

总之，$\frac{A}{w}$越大，洗得越干净，这是我们意料之中的事．但有个限度．按⑬可知，用 20 kg 水洗，又设衣服拧干后仍有 1 kg 水，则不论怎么洗，污物不会比原有的$\frac{1}{2^{40}}$更少！

从上面分析的过程看出，用数学方法研究实际问题，常常是这样做：

1. 选择有实际意义的问题；
2. 建立数学模型，把实际问题化成数学问题；
3. 找寻适当的数学工具来解决问题——这里用的工具是“平均值不等式”；
4. 把数学上的答案拿到实际中去运用、检验.

其实，数学模型和实际情形常常有不一致之处．比如，我们假设在每天漂洗的时候，污物能均匀分布在水里，这就很难办到．另

外，我们只考虑到节约用水，还没有考虑到节约宝贵的时间．多洗几次固然省水，可又多用了时间，怎么办？算出来，n 越大越好，但洗的次数太多，衣服又会洗破．所以，实际上分三四次漂洗也就足够了．如果把时间耗费、衣服磨损再考虑进去，那就是一个新的更复杂的数学模型了．

第 5 章
三个重要不等式

柯西不等式、排序不等式、贝努利不等式都是很重要的不等式，在许多领域中都能看到它们的影子. 本章将讨论这三个重要不等式的背景、证明和简单应用.

5.1 柯西不等式

任取四个实数 a_1，a_2，b_1，b_2，以它们为坐标可以构造两向量 $\vec{\alpha}=(a_1, a_2)$，$\vec{\beta}=(b_1, b_2)$，其中 a_1，a_2，b_1，b_2 为非零实数，如图 5－1 所示. $\vec{\alpha}$，$\vec{\beta}$ 的夹角 θ 满足

$$\cos\theta=\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|},$$

即 $$\cos\theta=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}.$$

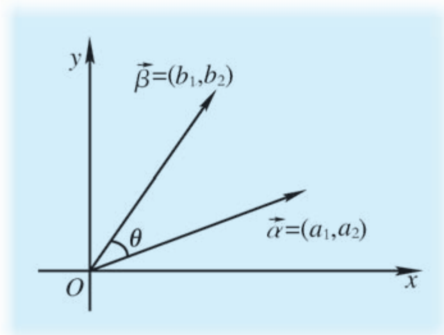


图 5－1

由 $\cos^2\theta\leqslant 1$ 可以得出不等式

$$\cos^2\theta=\frac{(a_1b_1+a_2b_2)^2}{(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)}\leqslant 1,$$

即 $$(a_1b_1+a_2b_2)^2\leqslant(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2).\qquad ①$$

其中等号成立的条件是 $\cos^2\theta=1$，即 $\theta=0$ 或 π. 也就是说 $\vec{\alpha}$ 与 $\vec{\beta}$ 平行，坐标 (a_1, a_2) 与 (b_1, b_2) 成比例，其中一个是另一个的实数倍，即 $a_i=\lambda b_i(i=1, 2)$ 时等号成立.

函数的性质往往是我们证明不等式的重要依据. 以下我们利用二次函数性质证明①式.

我们知道二次函数

$$f(x)=(a_1^2+a_2^2)x^2+2(a_1b_1+a_2b_2)x+(b_1^2+b_2^2)\qquad ②$$

的判别式

$$\begin{aligned}\Delta&=4(a_1b_1+a_2b_2)^2-4(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)\\&=4[(a_1b_1+a_2b_2)^2-(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)].\end{aligned}$$

欲证①式，即证明 $\Delta\leqslant 0$，这对二次函数 $f(x)$ 来说，也就是

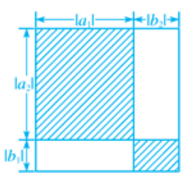
$$f(x)\geqslant 0$$

恒成立. 事实确实如此！这是因为对任意实数 x，有

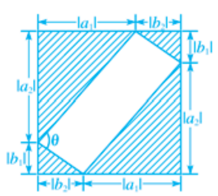
证明柯西不等式：

$(a_1b_1+a_2b_2)^2\leqslant(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)$.

证明 1　我们将同一长方形进行不同的分割（与勾股定理证明有类似之处），如图 5－2.



(a)



(b)

图 5－2

$S_{图(a)阴影}=|a_1||a_2|+|b_1||b_2|$，

$$f(x)=(a_1^2x^2+2a_1b_1x+b_1^2)+(a_2^2x^2+2a_2b_2x+b_2^2)$$
$$=(a_1x+b_1)^2+(a_2x+b_2)^2\geqslant 0.$$

当且仅当 $b_i=\lambda a_i$（$i=1,2$）时等号成立.

上述方法不仅新颖，而且显而易见可将不等式①推广到一般情形：

设有非零实数组 a_1，a_2，…，a_n 及 b_1，b_2，…，b_n，则

$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2\leqslant(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2), \quad ③$$

当且仅当 $b_i=\lambda a_i$（$i=1,2,\cdots,n$）时等号成立.

证明* 设二次函数

$$f(x)=(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)x^2+2(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)x+(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2),$$

因
$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2>0,$$

且对任意实数 x

$$f(x)=(a_1x+b_1)^2+(a_2x+b_2)^2+\cdots+(a_nx+b_n)^2\geqslant 0, \quad ④$$

故其判别式

$$4(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2-4(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\leqslant 0.$$

化简即得③式.

从④可看出，当且仅当

$$x=-\frac{b_1}{a_1}=-\frac{b_2}{a_2}=\cdots=-\frac{b_n}{a_n},$$

也就是 $b_i=\lambda a_i$（$i=1,2,\cdots,n$）时等号成立.

不等式①，③称为**柯西不等式**(Cauchy inequality)，它有着广泛的应用.

例 1 用柯西不等式证明：

$$ab+bc+cd+da\leqslant a^2+b^2+c^2+d^2.$$

证明 取两组数

$$a,\ b,\ c,\ d;$$
$$b,\ c,\ d,\ a.$$

则由柯西不等式有

* 此证明不作教学要求，我们用仿宋体字排出.

$S_{图(b)阴影}$

$=\frac{1}{2}|a_1||a_2|+\frac{1}{2}|b_1||b_2|+\frac{1}{2}|b_1||b_2|+\frac{1}{2}|a_1||a_2|$

$=|a_1||a_2|+|b_1||b_2|$，

从而图(a)与图(b)中非阴影部分面积也相等.

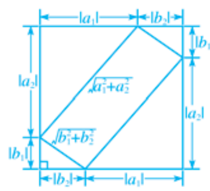
即 $|a_1||b_1|+|a_2||b_2|=\sqrt{|a_1|^2+|a_2|^2}\cdot\sqrt{|b_1|^2+|b_2|^2}\cdot\sin\theta.$

于是 $|a_1b_1+a_2b_2|\leqslant|a_1||b_1|+|a_2||b_2|\leqslant\sqrt{|a_1|^2+|a_2|^2}\cdot\sqrt{|b_1|^2+|b_2|^2}.$

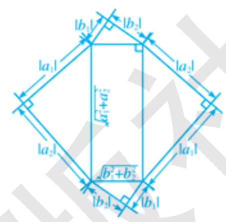
即 $(a_1b_1+a_2b_2)^2\leqslant(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2).$

证明 2　如图 5－3，很明显

$$S_{图(c)}\leqslant S_{图(d)},$$



(c)



(d)

图 5－3

即 $(|a_1|+|b_2|)(|a_2|+|b_1|)\leqslant 2\left(\frac{1}{2}|a_1||a_2|+\frac{1}{2}|b_1||b_2|\right)+\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2}.$

展开，整理得：

$|a_1||b_1|+|a_2||b_2|\leqslant\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2}.$

$\because$ $|a_1b_1+a_2b_2|\leqslant|a_1b_1|+|a_2b_2|\leqslant\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2}.$

即 $(a_1b_1+a_2b_2)^2\leqslant(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2).$

$$(ab+bc+cd+da)^2\leqslant(a^2+b^2+c^2+d^2)(b^2+c^2+d^2+a^2),$$

即 $$(ab+bc+cd+da)^2\leqslant(a^2+b^2+c^2+d^2)^2.$$

$\because\quad a^2+b^2+c^2+d^2\geqslant 0,$

$\therefore\quad ab+bc+cd+da\leqslant a^2+b^2+c^2+d^2.$

例 2 已知 a_1，a_2，…，a_n 都是实数，求证：

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2\leqslant n(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2).$$

证明 对于两组数：

1，1，…，1；

a_1，a_2，…，a_n.

运用柯西不等式，有

$$(1\cdot a_1+1\cdot a_2+\cdots+1\cdot a_n)^2\leqslant(1^2+1^2+\cdots+1^2)(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2).$$

化简即得欲证之不等式，当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时等号成立.

例 3 已知 x，y 为实数，且满足 $3x^2+2y^2\leqslant 6$，求证：

$$2x+y\leqslant\sqrt{11}.$$

证明 根据柯西不等式，有

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}y\right)^2\leqslant\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right][(\sqrt{3}x)^2+(\sqrt{2}y)^2].$$

化简，有

$$(2x+y)^2\leqslant\frac{11}{6}(3x^2+2y^2).$$

$\because\quad 3x^2+2y^2\leqslant 6,$

$\therefore\quad (2x+y)^2\leqslant 11,$

$\therefore\quad 2x+y\leqslant\sqrt{11}.$

例 4 证明柯西不等式的向量形式：

设$\vec{\alpha}$，$\vec{\beta}$为平面上的两个向量，则

$$|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\geqslant|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|. \tag{⑤}$$

证明 如图 5－1，设$\vec{\alpha}$，$\vec{\beta}$的夹角为 θ，则

$$\cos\theta=\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|}.$$

由$|\cos\theta|\leqslant 1$得

$$\frac{|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|}\leqslant 1.$$

$\therefore\quad |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\geqslant|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|.$

等号成立当且仅当$|\cos\theta|=1$，即$\theta=0$或π，也就是说向量$\vec{\alpha}$，$\vec{\beta}$共线.

若取$\vec{\alpha}=(a_1, a_2)$，$\vec{\beta}=(b_1, b_2)$，则⑤即为柯西不等式①.

习题　13

1. 已知$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=1$，$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$，求证：

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n\leqslant 1.$$

2. 已知x，y，z为正数，$x+y+z=1$，求证：

$$x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{1}{3}.$$

3. 已知$a^2+b^2=1$，求证：$|a\cos\alpha+b\sin\alpha|\leqslant 1$.

4. 已知$x_i\geqslant 0$（$i=1, 2, \cdots, n$），求证：

$$\sqrt{(x_1+x_2+\cdots+x_n)(x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3)}\geqslant x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2.$$

5. 设a_1，a_2，$\cdots$，a_n为正实数，运用柯西不等式证明：

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}\geqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}.$$

6. 已知实数a，b，c，d满足

$$a+b+c+d=3,$$

$$a^2+2b^2+3c^2+6d^2=5,$$

求证：$1\leqslant a\leqslant 2$.

5.2　排序不等式

某班同学举行新年谜语竞猜比赛，需要购买价格不同的奖品 4

件、5 件及 6 件，现在选购超市中单价为 1 元、2 元和 3 元的奖品，问最少要花多少钱？最多要花多少钱？

先用具体数字反复实验，而后引出定理，这是数学家在探索新定理时经常使用的方法.

不妨先猜一猜. 凭直觉可以想到，最便宜(单价 1 元)的奖品买最多的件数(6 件)，最贵(单价 3 元)的奖品买最少的件数(4 件)，应是花钱最少的. 于是我们猜测最少花

$$1\times6+2\times5+3\times4=28\ (元).$$

最便宜(单价 1 元)的奖品买最少的件数(4 件)，最贵(单价 3 元)的奖品买最多的件数(6 件)，于是最多花

$$1\times4+2\times5+3\times6=32\ (元).$$

为了证明上述猜测，把所有情形列举出来，可以得到 6 种组合：

$1\times4+2\times5+3\times6=32$，　$1\times4+2\times6+3\times5=31$，

$1\times5+2\times4+3\times6=31$，　$1\times5+2\times6+3\times4=29$，

$1\times6+2\times4+3\times5=29$，　$1\times6+2\times5+3\times4=28$.

比较得：$1\times4+2\times5+3\times6=32$ 最大，$1\times6+2\times5+3\times4=28$ 最小.

让我们进一步考虑两个三元数组 $\{a_1, a_2, a_3\}$，$\{b_1, b_2, b_3\}$，是否也有类似的结论，也就是说，设有两组从小到大排列的数

$$a_1\leqslant a_2\leqslant a_3,$$

$$b_1\leqslant b_2\leqslant b_3,$$

那么　$a_1b_{t_1}+a_2b_{t_2}+a_3b_{t_3}$(乱序和)$\leqslant a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$(同序和)，　①

$a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1$(反序和)$\leqslant a_1b_{t_1}+a_2b_{t_2}+a_3b_{t_3}$(乱序和)　②

是否成立？这里$\{t_1, t_2, t_3\}=\{1, 2, 3\}$.

我们先证不等式①.

(1) 若 $b_{t_3}=b_3$，只需证

$$a_1b_2+a_2b_1\leqslant a_1b_1+a_2b_2. \quad ③$$

③式告诉我们，对于两个二元数组 $\{a_1, a_2\}$，$\{b_1, b_2\}$，计算两两配对乘积之和，不同序所得的和不大于同序所得的和.

因为　$a_1\leqslant a_2$，$b_1\leqslant b_2$，

所以　$a_2-a_1\geqslant0$，$b_2-b_1\geqslant0$.

将上面两式相乘可得

$$(a_2-a_1)(b_2-b_1)\geqslant0.$$

即　$$a_1b_2+a_2b_1\leqslant a_1b_1+a_2b_2.$$

(2) 若 $b_{t_3}\neq b_3$，则分两步进行. 首先，设 $b_{t_i}=b_3$ ($i=1$ 或 2)，交换 b_{t_i} 与 b_{t_3} 位置，根据③可知

$$a_ib_{t_i}+a_3b_{t_3}=a_ib_3+a_3b_{t_3}\leqslant a_ib_{t_3}+a_3b_3,$$

因此，下一步只需证明

$$a_ib_{t_3}+a_jb_{t_j}\leqslant a_1b_1+a_2b_2.$$

其中 $\{a_i, a_j\}=\{a_1, a_2\}$，$\{b_{t_3}, b_{t_j}\}=\{b_1, b_2\}$. 上式正是③式，因此①式成立.

回顾上述做法，就好比将一群刚入学的小朋友按由矮到高进行排队，有经验的老师总是先只要求小朋友们随意地站成一列（这容易做到），然后再由老师将不合要求的某两个人的位置对换，这样一步步地经过若干次调整即可使队伍达到要求，整个过程既容易进行又井井有条.

现在再证不等式②.

因为　$b_1\leqslant b_2\leqslant b_3$，

所以　$-b_3\leqslant -b_2\leqslant -b_1$.

根据①有

$$a_1(-b_{t_1})+a_2(-b_{t_2})+a_3(-b_{t_3})\leqslant a_1(-b_3)+a_2(-b_2)+a_3(-b_1),$$

故 $a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1\leqslant a_1b_{t_1}+a_2b_{t_2}+a_3b_{t_3}$.

不难想到，运用上面的方法，同样可以证明：对于两个 n 元数组 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，$\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$，如果

$$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n,$$

$$b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n,$$

那么有　$a_1b_{t_1}+a_2b_{t_2}+\cdots+a_nb_{t_n}\leqslant a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$，　④

$a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1\leqslant a_1b_{t_1}+a_2b_{t_2}+\cdots+a_nb_{t_n}$.　⑤

这里 $\{t_1, t_2, \cdots, t_n\}=\{1, 2, \cdots, n\}$.

事实上，若 $b_{t_i}=b_n(t_i<n)$，那么，根据①又有

$$a_1b_{t_1}+a_2b_{t_2}+\cdots+a_ib_{t_i}+\cdots+a_nb_{t_n}\leqslant$$

$$a_1b_{t_1}+a_2b_{t_2}+\cdots+a_ib_{t_n}+\cdots+a_nb_n.$$

又若 $b_{t_j}=b_{n-1}(t_j<n-1)$，那么，根据①又有

$$a_1b_{t_1}+a_2b_{t_2}+\cdots+a_jb_{t_j}+\cdots+a_nb_{t_n}\leqslant$$

$$a_1b_{t_1}+a_2b_{t_2}+\cdots+a_jb_{t_{n-1}}+\cdots+a_{n-1}b_{n-1}+a_nb_n.$$

继续下去，即可得④式.

因 $$b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n,$$

故 $$-b_n\leqslant -b_{n-1}\leqslant\cdots\leqslant -b_1.$$

根据③我们又有

$$a_1(-b_{t_1})+a_2(-b_{t_2})+\cdots+a_n(-b_{t_n})\leqslant$$

$$a_1(-b_n)+a_2(-b_{n-1})+\cdots+a_n(-b_n),$$

两边同除以-1，即得⑤式.

综合④，⑤，我们得到以下重要不等式：

设有两组数 a_1，a_2，…，a_n；b_1，b_2，…，b_n 满足

$$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n,$$

$$b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n.$$

则有

$$a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1\leqslant \quad \text{（反序和）}$$

$$a_1b_{t_1}+a_2b_{t_2}+\cdots+a_nb_{t_n}\leqslant \quad \text{（乱序和）}$$

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n. \quad \text{（同序和）}$$

其中$\{t_1, t_2, \cdots, t_n\}=\{1, 2, \cdots, n\}$.

上述不等式即为**排序不等式**，也可简述为

反序和$\leqslant$乱序和$\leqslant$同序和.

例 1　已知 a，b，c 为正数，求证：

$$\frac{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}{a+b+c}\geqslant abc.$$

证明　根据所证不等式中 a，b，c 的“地位”的对称性，不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$，则

$$\frac{1}{a}\leqslant\frac{1}{b}\leqslant\frac{1}{c}, \quad bc\leqslant ca\leqslant ab.$$

由排序不等式：同序和$\geqslant$乱序和

得 $$\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\geqslant\frac{bc}{c}+\frac{ca}{a}+\frac{ab}{b}.$$

即两边同乘 $abc>0$，得

$$b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2\geqslant abc(a+b+c).$$

又 $$a+b+c>0,$$

所以 $$\frac{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}{a+b+c}\geqslant abc.$$

例 2 设集合 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}=\{1, 2, \cdots, n\}$，求证：

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n-1}{n}\leqslant\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

证明 将 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ 自小到大排序，不妨设为

$$1\leqslant c_1<c_2<\cdots<c_{n-1}\leqslant n,$$

又将 $a_2, a_3, \cdots, a_n$ 自小到大排序，有

$$1\leqslant b_1<b_2<\cdots<b_{n-1}\leqslant n.$$

由此可得

$$1\geqslant\frac{1}{b_1}>\frac{1}{b_2}>\cdots>\frac{1}{b_{n-1}}\geqslant\frac{1}{n}.$$

根据排序不等式，有

$$\begin{aligned}&\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}\\ \geqslant\ & c_1\cdot\frac{1}{b_1}+c_2\cdot\frac{1}{b_2}+\cdots+c_{n-1}\cdot\frac{1}{b_{n-1}}\\ \geqslant\ & 1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{3}+\cdots+(n-1)\cdot\frac{1}{n}\\ =\ & \frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n-1}{n}.\end{aligned}$$

与上一节运用柯西不等式相类似，运用排序不等式首先在于能根据需要确定两组数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 与 $b_1, b_2, \cdots, b_n$.

例 3 设有 10 人各拿一个提桶同到水龙头前打水，设水龙头注满第 i（$i=1, 2, \cdots, 10$）个人的提桶需时 T_i min，假定这些 T_i 各不相同，问：

当只有一个水龙头可用时，应如何安排这 10 个人的次序，使他们的总的花费时间（包括个人自己接水所花的时间）最少？这时间等于多少？（需证明你的论断.）

解 假若水桶按 $i_1, i_2, \cdots, i_{10}$ 顺序打水，那么总共所需时间为

$$f(t)=T_{i_1}+(T_{i_1}+T_{i_2})+\cdots+(T_{i_1}+T_{i_2}+\cdots+T_{i_{10}})$$
$$=10T_{i_1}+9T_{i_2}+\cdots+2T_{i_9}+T_{i_{10}}.$$

不妨设 $T_1<T_2<\cdots<T_{10}$，那么，根据排序不等式，有

$$f(t)\geqslant 10T_1+9T_2+\cdots+T_{10},$$

所花最少时间为 $10T_1+9T_2+\cdots+T_{10}$，按照注满提桶花时少的在前面的原则安排这 10 个人的次序.

探究题 当有两个水龙头可用时，应如何安排这 10 个人的次序，使他们的总的花费时间为最少？这时间等于多少？(需证明你的论断.)

习题 14

1. 设 a_1，a_2，…，a_n 为实数，用排序不等式证明：

$$a_1c_1+a_2c_2+\cdots+a_nc_n\leqslant a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2,$$

其中 c_1，c_2，…，c_n 为 a_1，a_2，…，a_n 的任一排列.

2. 设 c_1，c_2，…，c_n 为正整数组 a_1，a_2，…，a_n 的某一排列，则

$$\frac{a_1}{c_1}+\frac{a_2}{c_2}+\cdots+\frac{a_n}{c_n}\geqslant n.$$

3. 设 x_i 为正数（$i=1$，2，…，n），求证：

$$\frac{x_1^\beta}{x_2^\alpha}+\frac{x_2^\beta}{x_3^\alpha}+\cdots+\frac{x_{n-1}^\beta}{x_n^\alpha}+\frac{x_n^\beta}{x_1^\alpha}\geqslant x_1^{\beta-\alpha}+x_2^{\beta-\alpha}+\cdots+x_n^{\beta-\alpha}.$$

4. 已知 a_1，a_2，a_3 为两两不等的正整数，求证：

$$a_1+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{3^2}\geqslant 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}.$$

5. 已知 a_1，a_2，…，a_n 为两两不等的正整数，求证：对于任意正整数 n，不等式 $a_1+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{3^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^2}\geqslant 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ 成立.

6. 证明车比雪夫不等式：若

$$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n,$$
$$b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n,$$

则 $\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{n}\geqslant\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\cdot\dfrac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}.$

5.3 贝努利不等式

我们已学过二项式定理，根据二项式定理易知，当 $x>0$，n 为正整数时，有

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx. \qquad ①$$

其实，当 $x>-1$ 时，不等式①仍然成立，这一点我们不难用数学归纳法给予证明.

（1）$n=1$ 时，不等式①显然成立.

（2）假设 $n=k$ 时不等式①成立. 因 $x>-1$，可得 $x+1>0$，则

$$\begin{aligned}(1+x)^{k+1} &= (1+x)^k(1+x)\\ &\geqslant (1+kx)(1+x)\\ &= 1+(k+1)x+kx^2\\ &\geqslant 1+(k+1)x.\end{aligned}$$

$n=k+1$ 时不等式①也成立.

根据（1），（2）可知对任何正整数 n，当 $x>-1$ 时，不等式①成立.

我们称不等式

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx\ (x>-1) \qquad ②$$

为**贝努利不等式**（Bernoulli inequality）.

例　已知 $a>c>d>b>0$，$a+b=c+d$，n 为大于 1 的正整数，求证：

$$a^n+b^n>c^n+d^n.$$

证明　设 $a=c+\delta$，$b=d-\delta$，则 $\sigma>0$，于是

$$\begin{aligned}&(a^n+b^n)-(c^n+d^n)\\ =&(c+\delta)^n+(d-\delta)^n-(c^n+d^n)\\ =&c^n\left(1+\frac{\delta}{c}\right)^n+d^n\left(1-\frac{\delta}{d}\right)^n-(c^n+d^n). \qquad ③\end{aligned}$$

根据贝努利不等式，有

$$\left(1+\frac{\delta}{c}\right)^n \geqslant 1+n\cdot\frac{\delta}{c}, \qquad ④$$

$$\left(1-\frac{\delta}{d}\right)^n \geqslant 1-n\cdot\frac{\delta}{d}. \qquad ⑤$$

由③，④，⑤可得

$$\begin{aligned}
&(a^n+b^n)-(c^n+d^n)\\
\geqslant\ & c^n\left(1+n\cdot\frac{\delta}{c}\right)+d^n\left(1-n\cdot\frac{\delta}{d}\right)-(c^n+d^n)\\
=\ &(c^{n-1}-d^{n-1})n\delta\\
>\ &0.
\end{aligned}$$

∴ $a^n+b^n>c^n+d^n$.

数学建模

增设汽油中转站

A 地生产汽油，B 地需要汽油，一辆满载汽油的 Ω 型运油汽车往返 A 至 B 地刚好耗尽其所运汽油．因此，需要在 A，B 两地间增设一些汽油中转站．

若规定运油率$=\dfrac{B\text{ 地获油量}}{A\text{ 地运出油量}}$，那么欲使运油率 λ 达到 30%，途中需设多少个中转站？

设从 A 地到 B 地顺次增设 n 个中转站 $C_1, C_2, \cdots, C_n$，C_i 到 C_{i+1}（$i=0,1,2,\cdots,n$，且 $C_0=A$，$C_{n+1}=B$）的路程为 s_{i+1}，且

$$s_1+s_2+\cdots+s_{n+1}=1.$$

又设 Ω 型运油车满载时所运油量为 1，则该车每单位路程的耗油量为 $\dfrac{1}{2}$（因为汽车往返一次所有路程为 2，恰好耗油 1）．

再设从 A 地运出 a 单位汽油（可保证有油运至 B 地），由汽车的运油量为 1 可知，相当于 a 辆汽车从 A 地出发运油至 C_1，从而 C_1 处所获油量为

$$y_1=a-a\cdot 2s_1\cdot\frac{1}{2}=a(1-s_1).$$

又相当于有 $a(1-s_1)$ 辆汽车从 C_1 处出发运油至 C_2，从而 C_2 处所获油量

$$\begin{aligned}y_2&=a(1-s_1)-a(1-s_1)\cdot 2s_2\cdot\frac{1}{2}\\&=a(1-s_1)(1-s_2).\end{aligned}$$

依次类推，可得 B 地所获油量为

$$y_{n+1}=a(1-s_1)(1-s_2)\cdots(1-s_{n+1}).$$

从而运油率

$$\lambda=\frac{a(1-s_1)(1-s_2)\cdots(1-s_{n+1})}{a}$$
$$=(1-s_1)(1-s_2)\cdots(1-s_{n+1})$$
$$\leqslant\left[\frac{(1-s_1)+(1-s_2)+\cdots+(1-s_{n+1})}{n+1}\right]^{n+1}$$
$$=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-(n+1)}.$$

当且仅当 $s_1=s_2=\cdots=s_{n+1}=\dfrac{n}{n+1}$ 时取等号.

所以，最大运油率为 $\lambda_{\max}=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-(n+1)}$.

设 $\dfrac{1}{x_n}=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-(n+1)}$，则

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}$$
$$=\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+2}}\cdot\frac{n+1}{n}$$
$$=\left[\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right]^{n+2}\cdot\frac{n+1}{n}$$
$$=\left[\frac{1}{1+\frac{1}{n(n+2)}}\right]^{n+2}\cdot\frac{n+1}{n}$$
$$=\frac{1}{\left[1+\frac{1}{n(n+2)}\right]^{n+2}}\cdot\frac{n+1}{n}. \quad ①$$

根据贝努利不等式，有

$$\left[1+\frac{1}{n(n+2)}\right]^{n+2}>1+(n+2)\cdot\frac{1}{n(n+2)}=\frac{n+1}{n}. \quad ②$$

由①，②可得

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}<\frac{1}{\frac{n+1}{n}}\cdot\frac{n+1}{n}=1.$$

所以 $$\frac{1}{x_{n+1}}>\frac{1}{x_n}.$$

表明数列$\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$是递增数列，从而$\lambda_{\max}$随 n 的增大而增大.

$n=1$ 时，$\lambda_{\max}=\dfrac{1}{4}<30\%$；

$n=2$ 时，$\lambda_{\max}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-3}=\dfrac{8}{27}<30\%$；

$n=3$ 时，$\lambda_{\max}=\left(\dfrac{4}{3}\right)^{-4}=\dfrac{81}{256}>30\%$.

所以，至少应设置 3 个运油中转站.

课程总结报告参考题

完成一个学习总结报告，在班上交流．报告应包括以下三方面的内容：

（1）知识的总结．对本专题所介绍的不等式中蕴涵的数学思想方法和数学背景进行总结．

（2）拓展．通过查阅资料、调查研究、访问求教、合作交流、独立思考，进一步探讨不等式的应用．

（3）自己对不等式学习的感受．

附 录

数学词汇中英文对照表

（按词汇所在页码先后排序）