

常用积分表

《常用积分表》编委会

中国科学技术大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

常用积分表/《常用积分表》编委会编. —合肥:中国科学技术大学出版社,2009.7

ISBN 978-7-312-02478-8

I. 常… II. 常… III. 积分—公式(数学)—数学表 IV. O172.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 053981 号

常用积分表

《常用积分表》编委会

责任编辑:李攀峰

出版 中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号, 邮编: 230026
网址: <http://press.ustc.edu.cn>

印刷 合肥晓星印刷有限责任公司

发行 中国科学技术大学出版社

经销 全国新华书店

开本 880 mm×1230 mm 1/32

印张 8.875

字数 358 千

版次 2009 年 7 月第 1 版

印次 2009 年 7 月第 1 次印刷

定价 19.00 元

前 言

这本《常用积分表》是我们在参考国内外众多数学手册和积分表的基础上,选取最基本、最常用的积分公式编纂而成的,它适合大学生们使用,也可供教学和研究人員、工程技术人员参考。

本书包含最常用的初等函数和特殊函数的不定积分与定积分公式 2552 个,另外还有 203 个积分变换公式。积分公式中遇到的所有函数(包括被积函数和积分后的函数)的定义和基本性质都可以在附录中查到。

为了节省篇幅,我们将不定积分公式中等式右边的任意常数都省略了。例如,在积分公式

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

中,我们省去 C ,而写成

$$\int \cos x dx = \sin x$$

但是,在使用这些公式做计算或练习时,一定要记住把积分常数加上去。

按照惯例,积分变量 x, t 和参数 a, b, c, d 取实数, l, m, n 取整数;当有其他限制时,相应公式后面的括号中会给出说明或注释。

为便于查阅和使用,我们尽量将一个积分公式编排在一个页面上。当无法避免一个积分公式分排两面时,我们在前一面的右下角用符号“ \hookrightarrow ”标明,以提醒读者。

本书分 4 个部分,分别是不定积分表、定积分表、积分变换表和附录。不定积分表又分为初等函数的不定积分和特殊函数的不定积

分两个部分,定积分表也分为初等函数的定积分和特殊函数的定积分两个部分.在积分变换表中,我们只选入常用的拉普拉斯变换和傅里叶变换以及傅里叶正弦、余弦变换.附录中给出了初等函数的定义及其相关公式和特殊函数的定义及其基本性质.常用的初等函数的导数表、初等函数的级数展开表也放在附录中.自然科学基本常数和国际单位制被编列在附录的末尾.

本书中积分公式的序号是按初等函数的不定积分、特殊函数的不定积分、初等函数的定积分、特殊函数的定积分4个部分分别编列的.需要注释的符号和函数都在一个小节中首次出现时给出;在同一小节中,该符号具有相同的意义,但不遍及其他小节.

因为这是一本常用的积分表,所以所有的公式都没有注明出处.尽管如此,我们还是在书末列出了主要的参考书目,以便读者查找时参考.

我们感谢中国科学技术大学国家同步辐射实验室和中国科学技术大学出版社对出版这本工具书的大力支持.

对书中的缺点和错误,诚望读者指正.

《常用积分表》编委会

2009年4月

目 录

前言	I
I 不定积分表	1
I.1 初等函数的不定积分	1
I.1.1 基本积分公式	1
I.1.2 包含多项式、有理分式和无理分式的不定积分	3
I.1.2.1 含有 $a+bx$ 的积分	3
I.1.2.2 含有 $a+bx$ 和 $c+dx$ 的积分	5
I.1.2.3 含有 $a+bx^n$ 的积分	7
I.1.2.4 含有 $1\pm x^n$ 的积分	9
I.1.2.5 含有 c^2+x^2 的积分	12
I.1.2.6 含有 c^2-x^2 的积分	13
I.1.2.7 含有 $c^3\pm x^3$ 的积分	14
I.1.2.8 含有 c^4+x^4 的积分	16
I.1.2.9 含有 c^4-x^4 的积分	17
I.1.2.10 含有 $a+bx+cx^2$ 的积分	18
I.1.2.11 含有 $a+bx^k$ 和 \sqrt{x} 的积分	19
I.1.2.12 含有 $\sqrt{a+bx}$ 和 $a+\beta x$ 的积分	20
I.1.2.13 含有 $\sqrt{a+bx}$ 和 $\sqrt{c+dx}$ 的积分	22
I.1.2.14 含有 $\sqrt{a+bx}$ 和 $\sqrt[p]{(a+bx)^n}$ 的积分	23
I.1.2.15 含有 $\sqrt{x^2\pm a^2}$ 的积分	26
I.1.2.16 含有 $\sqrt{a^2-x^2}$ 的积分	30

I. 1. 2. 17	含有 $\sqrt{a+bx+cx^2}$ 的积分	34
I. 1. 2. 18	含有 $\sqrt{bx+cx^2}$ 和 $\sqrt{bx-cx^2}$ 的积分	37
I. 1. 2. 19	含有 $\sqrt{a+cx^2}$ 和 x^n 的积分	38
I. 1. 2. 20	含有 $\sqrt{2ax-x^2}$ 和 $\sqrt{2ax+x^2}$ 的积分	40
I. 1. 2. 21	其他形式的代数函数的积分	41
I. 1. 3	三角函数和反三角函数的不定积分	44
I. 1. 3. 1	含有 $\sin^n ax, \cos^n ax, \tan^n ax, \cot^n ax, \sec^n ax, \csc^n ax$ 的积分	44
I. 1. 3. 2	含有 $\sin^m ax \cos^n ax$ 的积分	47
I. 1. 3. 3	含有 $\frac{\sin^m ax}{\cos^n ax}$ 和 $\frac{\cos^m ax}{\sin^n ax}$ 的积分	47
I. 1. 3. 4	含有 $x^m \sin^n ax$ 和 $x^m \cos^n ax$ 的积分	50
I. 1. 3. 5	含有 $\frac{\sin^n ax}{x^m}, \frac{x^m}{\sin^n ax}, \frac{\cos^n ax}{x^m}, \frac{x^m}{\cos^n ax}$ 的积分	52
I. 1. 3. 6	含有 $\sin ax \sin bx, \sin ax \cos bx$ 和 $\cos ax \cos bx$ 的积分	55
I. 1. 3. 7	含有 $\frac{1}{\sin^m ax \cos^n ax}$ 的积分	57
I. 1. 3. 8	含有 $1 \pm \sin ax$ 和 $1 \pm \cos ax$ 的积分	58
I. 1. 3. 9	含有 $a \pm b \sin cx$ 和 $a \pm b \cos cx$ 的积分	59
I. 1. 3. 10	含有 $1 \pm b \sin^2 ax, 1 \pm b \cos^2 ax$ 和 $c^2 \pm b^2 \sin^2 ax, c^2 \pm b^2 \cos^2 ax$ 的积分	61
I. 1. 3. 11	含有 $p \sin ax + q \cos ax$ 的积分	63
I. 1. 3. 12	含有 $p^2 \sin^2 ax \pm q^2 \cos^2 ax$ 的积分	64
I. 1. 3. 13	含有 $\sin^m x, \cos^m x$ 与 $\sin nx, \cos nx$ 组合的积分	65
I. 1. 3. 14	含有 $\sin(ax+b)$ 和 $\cos(cx+d)$ 的积分	65
I. 1. 3. 15	含有 $\sqrt{1 \pm \sin ax}$ 和 $\sqrt{1 \pm \cos ax}$ 的积分	66
I. 1. 3. 16	含有 $\sqrt{1 \pm b^2 \sin^2 ax}$ 和 $\sqrt{1 \pm b^2 \cos^2 ax}$ 的积分	67
I. 1. 3. 17	含有 $\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}$ 和 $\sqrt{a^2 \sin^2 x - 1}$ 的积分	69
I. 1. 3. 18	含有 $\tan ax$ 和 $\cot ax$ 的积分	71
I. 1. 3. 19	三角函数与代数函数组合的积分	72
I. 1. 3. 20	三角函数与指数函数和双曲函数组合的积分	73
I. 1. 3. 21	含有 $\sin x^2, \cos x^2$ 和更复杂自变数的三角函数的积分	74
I. 1. 3. 22	反三角函数的积分	75

I.1.4 对数函数、指数函数和双曲函数的不定积分	78
I.1.4.1 对数函数的积分	78
I.1.4.2 指数函数的积分	82
I.1.4.3 双曲函数的积分	86
I.1.4.4 双曲函数与幂函数、指数函数和三角函数组合的积分	94
I.1.4.5 反双曲函数的积分	97
I.2 特殊函数的不定积分	100
I.2.1 完全椭圆积分的积分	100
I.2.2 勒让德椭圆积分(不完全椭圆积分)的积分	101
I.2.3 指数积分函数的积分	102
I.2.4 正弦积分和余弦积分函数的积分	103
I.2.5 概率积分和菲涅耳函数的积分	104
I.2.6 贝塞尔函数的积分	104
II 定积分表	105
II.1 初等函数的定积分	105
II.1.1 幂函数和代数函数的定积分	105
II.1.1.1 含有 x^n 和 $a^p \pm x^p$ 的积分	105
II.1.1.2 含有 $a^n + x^n$, $a + bx^n$ 和 $a + 2bx + cx^2$ 的积分	107
II.1.1.3 含有 $x^p \pm x^q$ 和 $1 \pm x^n$ 的积分	109
II.1.1.4 含有 $\sqrt{a^n \pm x^n}$ 的积分	110
II.1.2 三角函数和反三角函数的定积分	112
II.1.2.1 含有 $\sin^n x$, $\cos^n x$, $\tan^n x$ 的积分, 积分区间为 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	112
II.1.2.2 含有 $\sin^n x$, $\cos^n x$, $\tan^n x$ 的积分, 积分区间为 $[0, \pi]$	113
II.1.2.3 含有 $\sin nx$ 和 $\cos nx$ 的积分, 积分区间为 $[0, \pi]$	114
II.1.2.4 含有 $\sin mx$ 和 $\cos nx$ 的积分, 积分区间为 $[-\pi, \pi]$	115
II.1.2.5 含有其他倍角三角函数的积分	116
II.1.2.6 含有三角函数的代数式的积分, 积分区间为 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	117
II.1.2.7 含有三角函数的代数式的积分, 积分区间为 $[0, \pi]$	119
II.1.2.8 三角函数的幂函数的积分	120
II.1.2.9 三角函数的幂函数与线性函数的三角函数组合的积分	120

II. 1. 2. 10	三角函数的幂函数与三角函数的有理函数组合的积分	121
II. 1. 2. 11	含有三角函数的线性函数的幂函数的积分	122
II. 1. 2. 12	含有其他形式的三角函数的幂函数的积分	123
II. 1. 2. 13	更复杂自变数的三角函数的积分	125
II. 1. 2. 14	三角函数与有理函数组合的积分	127
II. 1. 2. 15	三角函数与无理函数组合的积分	130
II. 1. 2. 16	三角函数与幂函数组合的积分	131
II. 1. 2. 17	三角函数的有理函数与 x 的有理函数组合的积分	132
II. 1. 2. 18	三角函数的幂函数与 x 的幂函数组合的积分	133
II. 1. 2. 19	含有 $\sin^m ax, \cos^m ax, \tan^m ax$ 和 $\frac{1}{x^m}$ 组合的积分, 积分 区间为 $[0, \infty]$	135
II. 1. 2. 20	含有 $\sqrt{1 \pm k^2 \sin^2 x}$ 和 $\sqrt{1 \pm k^2 \cos^2 x}$ 的积分	136
II. 1. 2. 21	更复杂自变数的三角函数与幂函数组合的积分	137
II. 1. 2. 22	三角函数与指数函数组合的积分	139
II. 1. 2. 23	三角函数与指数函数和幂函数组合的积分, 积分 区间为 $[0, \infty]$	140
II. 1. 2. 24	三角函数与三角函数的指数函数组合的积分	141
II. 1. 2. 25	三角函数与双曲函数组合的积分	141
II. 1. 2. 26	三角函数与双曲函数和幂函数组合的积分	142
II. 1. 2. 27	三角函数与双曲函数、指数函数和幂函数组合的积分	142
II. 1. 2. 28	反三角函数与幂函数和代数函数组合的积分	143
II. 1. 2. 29	反三角函数与三角函数、指数函数和对数函数组合的 积分	146
II. 1. 3	指数函数和对数函数的定积分	147
II. 1. 3. 1	含有 $e^{ax}, e^{-ax}, e^{-ax^2}$ 的积分	147
II. 1. 3. 2	含有更复杂自变数的指数函数的积分	149
II. 1. 3. 3	指数函数的有理式与幂函数和有理函数组合的积分	149
II. 1. 3. 4	指数函数与有理函数组合的积分	152
II. 1. 3. 5	指数函数与无理函数组合的积分	152
II. 1. 3. 6	指数函数的代数函数与幂函数组合的积分	153
II. 1. 3. 7	更复杂自变数的指数函数与幂函数组合的积分	154
II. 1. 3. 8	含有对数函数 $\ln x$ 和 $(\ln x)^n$ 的积分	155

II. 1. 3. 9	含有更复杂自变数的对数函数的积分	156
II. 1. 3. 10	对数函数与有理函数组合的积分	159
II. 1. 3. 11	对数函数与无理函数组合的积分	160
II. 1. 3. 12	对数函数与幂函数和有理函数组合的积分	160
II. 1. 3. 13	含有对数函数的幂函数的积分	161
II. 1. 3. 14	更复杂自变数的对数函数与代数函数组合的积分	162
II. 1. 3. 15	对数函数与指数函数组合的积分	163
II. 1. 3. 16	对数函数与三角函数组合的积分	164
II. 1. 3. 17	对数函数与三角函数、指数函数、双曲函数和幂函数 组合的积分	166
II. 1. 4	双曲函数和反双曲函数的定积分	167
II. 1. 4. 1	含有 $\sinh ax$ 和 $\cosh bx$ 的积分, 积分区间为 $[0, \infty]$	167
II. 1. 4. 2	双曲函数与指数函数组合的积分	170
II. 1. 4. 3	反双曲函数的积分	170
II. 1. 5	重积分	172
II. 1. 5. 1	积分次序和积分变量交换的积分	172
II. 1. 5. 2	具有常数积分限的二重积分和三重积分	173
II. 2	特殊函数的定积分	174
II. 2. 1	椭圆函数的定积分	174
II. 2. 1. 1	椭圆积分的积分	174
II. 2. 1. 2	椭圆积分相对于模数的积分	175
II. 2. 1. 3	完全椭圆积分相对于模数的积分	175
II. 2. 2	指数积分、正弦积分等函数的定积分	176
II. 2. 2. 1	指数积分的积分	176
II. 2. 2. 2	对数积分的积分	177
II. 2. 2. 3	正弦积分和余弦积分函数的积分	177
II. 2. 2. 4	概率积分函数的积分	179
II. 2. 2. 5	菲涅耳函数的积分	179
II. 2. 3	伽马(Gamma)函数的定积分	180
II. 2. 3. 1	伽马函数的积分	180
II. 2. 3. 2	伽马函数与三角函数组合的积分	181
II. 2. 3. 3	伽马函数的对数的积分	181
II. 2. 3. 4	ψ 函数的积分	182

II.2.4	贝塞尔(Bessel)函数的定积分	183
II.2.4.1	贝塞尔函数的积分	183
II.2.4.2	贝塞尔函数与 x 组合的积分	184
II.2.4.3	贝塞尔函数与代数函数组合的积分	185
II.2.4.4	贝塞尔函数与幂函数组合的积分	186
II.2.4.5	贝塞尔函数与三角函数组合的积分	187
II.2.4.6	贝塞尔函数与指数函数和幂函数组合的积分	189
II.2.4.7	贝塞尔函数与对数函数或双曲函数组合的积分	190
II.2.5	勒让德(Legendre)函数和连带勒让德函数的定积分	191
II.2.5.1	连带勒让德函数的积分	191
II.2.5.2	勒让德多项式与代数函数组合的积分	191
II.2.5.3	勒让德多项式与其他初等函数组合的积分	192
II.2.6	正交多项式的定积分	193
II.2.6.1	埃尔米特(Hermite)多项式的积分	193
II.2.6.2	拉盖尔(Laguerre)多项式的积分	194
II.2.7	δ 函数的定积分	195
III	积分变换表	196
III.1	拉普拉斯(Laplace)变换	196
III.2	傅里叶(Fourier)变换	203
III.3	傅里叶(Fourier)正弦变换	208
III.4	傅里叶(Fourier)余弦变换	211
IV	附录	213
IV.1	常用函数的定义和性质	213
IV.1.1	初等函数	213
IV.1.1.1	幂函数和代数函数	213
IV.1.1.2	指数函数和对数函数	214
IV.1.1.3	三角函数和反三角函数	215
IV.1.1.4	双曲函数和反双曲函数	219
IV.1.2	特殊函数	222
IV.1.2.1	Γ 函数(第二类欧拉积分)	222

IV. 1. 2. 2	B 函数(第一类欧拉积分)	225
IV. 1. 2. 3	ψ 函数	225
IV. 1. 2. 4	误差函数 $\operatorname{erf}(x)$ 和补余误差函数 $\operatorname{erfc}(x)$	227
IV. 1. 2. 5	菲涅耳(Fresnel)函数 $S(z)$ 和 $C(z)$	228
IV. 1. 2. 6	正弦积分 $\operatorname{Si}(z)$, $\operatorname{si}(z)$ 和余弦积分 $\operatorname{Ci}(z)$, $\operatorname{ci}(z)$	228
IV. 1. 2. 7	指数积分 $\operatorname{Ei}(z)$ 和对数积分 $\operatorname{li}(z)$	229
IV. 1. 2. 8	勒让德(Legendre)椭圆积分 $F(k, \varphi)$, $E(k, \varphi)$, $\Pi(h, k, \varphi)$	230
IV. 1. 2. 9	完全椭圆积分 $K(k)$, $E(k)$, $\Pi(h, k)$	231
IV. 1. 2. 10	贝塞尔(Bessel)函数(柱函数) $J_\nu(z)$, $N_\nu(z)$, $H_\nu^{(1)}(z)$, $H_\nu^{(2)}(z)$, $I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$	232
IV. 1. 2. 11	勒让德(Legendre)函数(球函数) $P_n(x)$ 和 $Q_n(x)$	239
IV. 1. 2. 12	连带勒让德函数 $P_n^m(x)$ 和 $Q_n^m(x)$	241
IV. 1. 2. 13	埃尔米特(Hermite)多项式 $H_n(x)$	242
IV. 1. 2. 14	拉盖尔(Laguerre)多项式 $L_n(x)$ 和连带拉盖尔多项式 $L_n^m(x)$	243
IV. 1. 2. 15	δ 函数	244
IV. 2	常用导数表	246
IV. 3	常用级数展开	249
IV. 3. 1	二项式函数	249
IV. 3. 2	指数函数	250
IV. 3. 3	对数函数	251
IV. 3. 4	三角函数	252
IV. 3. 5	反三角函数	253
IV. 3. 6	双曲函数	254
IV. 3. 7	反双曲函数	255
IV. 4	自然科学基本常数	256
IV. 4. 1	数学常数	256
IV. 4. 1. 1	常数 π (圆周率)	256
IV. 4. 1. 2	常数 e (自然对数之底)	257
IV. 4. 1. 3	欧拉(Euler)常数 γ	257
IV. 4. 1. 4	黄金分割比例常数 ϕ	257
IV. 4. 1. 5	卡特兰(Catalan)常数 G	258
IV. 4. 1. 6	伯努利(Bernoulli)多项式 $B_n(x)$ 和伯努利数 B_n	258

IV. 4. 1. 7 欧拉(Euler)多项式 $E_n(x)$ 和欧拉数 E_n	259
IV. 4. 2 物理学常数	259
IV. 4. 3 化学常数(元素周期表)	260
IV. 4. 4 天文学常数	262
IV. 4. 5 地学常数	263
IV. 5 国际单位制(SI)	265
IV. 5. 1 国际单位制(SI)中十进制倍数和词头表示法	265
IV. 5. 2 国际单位制(SI)的基本单位	266
IV. 5. 3 国际单位制(SI)中具有专门名称的导出单位	267
符号索引	268
参考书目	270

I 不定积分表

在所有不定积分公式中,都省略了积分常数 C . 公式中出现的变量和常量,都应在使表达式有定义的范围之内.

I . 1 初等函数的不定积分

凡在右端出现 $\ln|x|$ 或 $\ln|f(x)|$ 的积分公式中,我们都认为 x 是实变量. 当 x 是复变量时,公式中的 $\ln|x|, \ln|f(x)|$ 要相应地改为 $\operatorname{Ln}x, \operatorname{Ln}f(x)$, 其中, $\operatorname{Ln}f(x) = \ln|f(x)| + i \operatorname{Arg} f(x)$, $\operatorname{Arg} f(x)$ 是 $f(x)$ 的辐角.

I . 1. 1 基本积分公式

1. $\int a dx = ax$

2. $\int a f(x) dx = a \int f(x) dx$

3. $\int \varphi[y(x)] dx = \int \frac{\varphi(y)}{y'} dy$

(这里, $y' = \frac{dy}{dx} \neq 0$)

4. $\int (u + v) dx = \int u dx + \int v dx$

(这里, u 和 v 都是 x 的函数, 以下同)

$$5. \int u dv = uv - \int v du$$

$$6. \int u \frac{dv}{dx} dx = uv - \int v \frac{du}{dx} dx$$

$$7. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$$

$$8. \int \sqrt{x^m} dx = \frac{2x \sqrt{x^m}}{m+2} \quad (m \neq -2)$$

$$9. \int \sqrt[p]{x^m} dx = \frac{px \sqrt[p]{x^m}}{m+p} \quad (m+p \neq 0)$$

$$10. \int \frac{dx}{x} = \ln |x|$$

$$11. \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)|$$

(这里, $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$, 以下同)

$$12. \int f'(x)[f(x)]^a dx = \frac{1}{a+1}[f(x)]^{a+1} \quad (a \neq -1)$$

$$13. \int e^x dx = e^x$$

$$14. \int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} \quad (a \neq 0)$$

$$15. \int b^x dx = \frac{b^x}{\ln b} \quad (b > 0, b \neq 1)$$

$$16. \int b^{ax} dx = \frac{b^{ax}}{a \ln b} \quad (b > 0, b \neq 1, a \neq 0)$$

$$17. \int \ln x dx = x \ln x - x$$

$$18. \int \sin x dx = -\cos x$$

$$19. \int \cos x dx = \sin x$$

$$20. \int \tan x dx = -\ln |\cos x|$$

$$21. \int \cot x dx = \ln |\sin x|$$

$$22. \int \sinh x dx = \cosh x$$

$$23. \int \cosh x dx = \sinh x$$

$$24. \int \tanh x dx = \ln(\cosh x)$$

$$25. \int \coth x dx = \ln |\sinh x|$$

$$26. \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \quad (a \neq 0)$$

$$27. \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{artanh} \frac{x}{a} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| \quad (a^2 > x^2)$$

$$28. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = -\frac{1}{a} \operatorname{arcoth} \frac{x}{a} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \quad (x^2 > a^2)$$

$$29. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} \quad (a^2 > x^2)$$

$$30. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|$$

I. 1.2 包含多项式、有理分式和无理分式的不定积分

当没有特别说明时, l, m, n 为整数; $a, b, c, d, p, q, r, \alpha, \beta, \gamma$ 为实常数.

I. 1.2.1 含有 $a + bx$ 的积分

$$31. \int (a + bx)^n dx = \frac{(a + bx)^{n+1}}{(n+1)b} \quad (n \neq -1, 0; b \neq 0)$$

$$32. \int x(a + bx) dx = \frac{x^2}{2} \left(a + \frac{2b}{3}x \right)$$

$$33. \int x^2(a + bx) dx = \frac{x^3}{3} \left(a + \frac{3b}{4}x \right)$$

$$34. \int x^m(a + bx) dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \left[a + \frac{(m+1)b}{m+2}x \right] \quad (m \neq -1, -2)$$

$$35. \int x(a + bx)^n dx = \frac{1}{b^2(n+2)}(a + bx)^{n+2} - \frac{a}{b^2(n+1)}(a + bx)^{n+1} \quad (n \neq -1, -2)$$

$$36. \int x^2(a + bx)^n dx = \frac{1}{b^3} \left[\frac{(a + bx)^{n+3}}{n+3} - 2a \frac{(a + bx)^{n+2}}{n+2} + a^2 \frac{(a + bx)^{n+1}}{n+1} \right]$$

($n \neq -1, -2, -3$)

37. $\int x^m (a+bx)^n dx$
 $= \frac{x^{m+1} (a+bx)^n}{m+n+1} + \frac{an}{m+n+1} \int x^m (a+bx)^{n-1} dx$
 $= \frac{1}{a(n+1)} \left[-x^{m+1} (a+bx)^{n+1} + (m+n+2) \int x^m (a+bx)^{n+1} dx \right]$
 $= \frac{1}{b(m+n+1)} \left[x^m (a+bx)^{n+1} - ma \int x^{m-1} (a+bx)^n dx \right]$
38. $\int \frac{a+bx}{x} dx = a \ln |x| + bx$
39. $\int \frac{a+bx}{x^2} dx = b \ln |x| - \frac{a}{x}$
40. $\int \frac{a+bx}{x^n} dx = -\frac{a}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{b}{(n-2)x^{n-2}} \quad (n > 2)$
41. $\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b} \ln |a+bx|$
42. $\int \frac{dx}{(a+bx)^2} = -\frac{1}{b(a+bx)}$
43. $\int \frac{dx}{(a+bx)^n} = -\frac{1}{(n-1)b(a+bx)^{n-1}} \quad (n \neq 0, 1)$
44. $\int \frac{x}{a+bx} dx = \frac{x}{b} - \frac{a}{b^2} \ln |a+bx|$
45. $\int \frac{x}{(a+bx)^2} dx = \frac{1}{b^2} \left[\ln |a+bx| + \frac{a}{a+bx} \right]$
46. $\int \frac{x}{(a+bx)^n} dx = \frac{1}{b^2} \left[-\frac{1}{(n-2)(a+bx)^{n-2}} + \frac{a}{(n-1)(a+bx)^{n-1}} \right]$
 $(n \neq 1, 2)$
47. $\int \frac{x^2}{a+bx} dx = \frac{1}{b^3} \left[\frac{1}{2} (a+bx)^2 - 2a(a+bx) + a^2 \ln |a+bx| \right]$
48. $\int \frac{x^2}{(a+bx)^2} dx = \frac{1}{b^3} \left[a+bx - 2a \ln |a+bx| - \frac{a^2}{a+bx} \right]$
49. $\int \frac{x^2}{(a+bx)^3} dx = \frac{1}{b^3} \left[\ln |a+bx| + \frac{2a}{a+bx} - \frac{a^2}{2(a+bx)^2} \right]$
50. $\int \frac{x^2}{(a+bx)^n} dx$
 $= \frac{1}{b^3} \left[-\frac{1}{(n-3)(a+bx)^{n-3}} + \frac{2a}{(n-2)(a+bx)^{n-2}} - \frac{a^2}{(n-1)(a+bx)^{n-1}} \right]$
 $(n \neq 1, 2, 3)$
51. $\int \frac{x^m}{a+bx} dx = \frac{1}{b} \left[\left(-\frac{a}{b}\right)^m \ln |a+bx| + x^m \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{m-k} \left(-\frac{a}{bx}\right)^k \right]$

52.
$$\int \frac{x^n}{(a+bx)^2} dx = \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{k-1} \frac{k!^{k-1} x^{m-k}}{(m-k)b^{k+1}} + (-1)^{m-1} \frac{a^m}{b^{m+1}(a+bx)}$$

$$+ (-1)^{m+1} \frac{m!^{m-1}}{b^{m+1}} \ln |a+bx|$$
53.
$$\int \frac{x^m}{(a+bx)^n} dx = \frac{1}{b^{m+1}} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{(-a)^k (a+bx)^{m-n-k+1}}{m-n-k+1}$$

 (这里, $m-n-k+1=0$ 的项要替换成 $\binom{m}{n-1} (-a)^{m-n+1} \ln |a+bx|$)
54.
$$\int \frac{dx}{x(a+bx)} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a+bx}{x} \right|$$
55.
$$\int \frac{dx}{x(a+bx)^2} = \frac{1}{a(a+bx)} - \frac{1}{a^2} \ln \left| \frac{a+bx}{x} \right|$$
56.
$$\int \frac{dx}{x(a+bx)^n} = -\frac{1}{a^n} \ln \left| \frac{a+bx}{x} \right| + \frac{1}{a^n} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{(-bx)^k}{k(a+bx)^k} \quad (n \neq 0)$$
57.
$$\int \frac{dx}{x^2(a+bx)} = -\frac{1}{ax} + \frac{b}{a^2} \ln \left| \frac{a+bx}{x} \right|$$
58.
$$\int \frac{dx}{x^2(a+bx)^2} = -\frac{a+2bx}{a^2 x(a+bx)} + \frac{2b}{a^3} \ln \left| \frac{a+bx}{x} \right|$$
59.
$$\int \frac{dx}{x^2(a+bx)^n}$$

$$= \frac{1}{a^{n+1}} \left[nb \ln \left| \frac{a+bx}{x} \right| - \frac{a+bx}{x} + \frac{a+bx}{x} \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \frac{(-bx)^k}{(k-1)(a+bx)^k} \right]$$

 ($n \neq 0, 1$)
60.
$$\int \frac{dx}{x^m(a+bx)} = \frac{1}{b} \left[\left(-\frac{b}{a}\right)^m \ln |a+bx| - \frac{1}{x^m} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{m+1} \left(-\frac{a}{bx}\right)^k \right]$$
61.
$$\int \frac{dx}{x^m(a+bx)^n} = -\frac{1}{a^{m+n-1}} \sum_{k=0}^{m+n-2} \binom{m+n-2}{k} \frac{(a+bx)^{m-k-1} (-b)^k}{(m-k-1)^{m-k-1} x^{m-k-1}}$$

 (这里, $m-k-1=0$ 的项要替换成 $\binom{m+n-2}{n-1} (-b)^{m-1} \ln \left| \frac{a+bx}{x} \right|$)

I. 1. 2. 2 含有 $a+bx$ 和 $c+dx$ 的积分

令 $u = a+bx$, $v = c+dx$ 和 $k = ad-bx$, $k \neq 0$. (如果 $k=0$, 则 $v = \frac{c}{a}u$, 这是 I. 1. 2. 1 小节的情形, 应该使用其中相应的公式.)

$$62. \int \frac{dx}{uv} = \frac{1}{k} \ln \left| \frac{v}{u} \right|$$

$$63. \int \frac{x}{uv} dx = \frac{1}{k} \left(\frac{a}{b} \ln |u| - \frac{c}{d} \ln |v| \right)$$

$$64. \int \frac{x^2}{uv} dx = \frac{x}{bd} - \frac{a}{b^2 d} \ln |u| - \frac{c}{bd^2} \ln |v| + \frac{ac}{kbd} \ln \left| \frac{v}{u} \right|$$

$$65. \int \frac{dx}{u^2 v} = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{u} + \frac{d}{k} \ln \left| \frac{v}{u} \right| \right)$$

$$66. \int \frac{dx}{u^2 v^2} = -\frac{1}{k^2} \left(\frac{b}{u} + \frac{d}{v} \right) - \frac{2bd}{k^3} \ln \left| \frac{v}{u} \right|$$

$$67. \int \frac{x}{u^2 v} dx = -\frac{a}{bku} - \frac{c}{k^2} \ln \left| \frac{v}{u} \right|$$

$$68. \int \frac{x}{u^2 v^2} dx = \frac{1}{k^2} \left(\frac{a}{u} + \frac{c}{v} \right) + \frac{ad+bc}{k^3} \ln \left| \frac{v}{u} \right|$$

$$69. \int \frac{x^2}{u^2 v} dx = \frac{a^2}{b^2 ku} + \frac{1}{k^2} \left[\frac{c^2}{d} \ln |v| + \frac{a(k-bc)}{b^2} \ln |u| \right]$$

$$70. \int \frac{x^2}{u^2 v^2} dx = -\frac{1}{k^2} \left(\frac{a^2}{bu} + \frac{c^2}{dv} \right) - \frac{2ac}{k^3} \ln \left| \frac{v}{u} \right|$$

$$71. \int \frac{dx}{u^n v^m} = \frac{1}{k(m-1)} \left[-\frac{1}{u^{n-1} v^{m-1}} - b(m+n-2) \int \frac{dx}{u^n v^{m-1}} \right]$$

$$72. \int u^m v^n dx = \frac{u^{m+1} v^n}{(m+n+1)b} + \frac{nk}{(n+n+1)b} \int u^m v^{n-1} dx$$

$$73. \int \frac{u}{v} dx = \frac{bx}{d} + \frac{k}{d^2} \ln |v|$$

$$74. \int \frac{u^m}{v} dx = \sum_{r=0}^{m-1} \frac{k^r u^{m-r}}{(m-r)d^{r+1}} + \frac{k^m}{d^{m+1}} \ln |v|$$

$$75. \int \frac{u^m}{v^n} dx = -\frac{1}{k(n-1)} \left[\frac{u^{m+1}}{v^{n-1}} + b(n-m-2) \int \frac{u^m}{v^{n-1}} dx \right]$$

$$= -\frac{1}{d(n-m-1)} \left(\frac{u^m}{v^{n-1}} + mk \int \frac{u^{m-1}}{v^n} dx \right)$$

$$= -\frac{1}{d(n-1)} \left(\frac{u^m}{v^{n-1}} - mb \int \frac{u^{m-1}}{v^{n-1}} dx \right) \quad (n \neq 1)$$

参 考 书 目

- [1] 《实用积分表》编委会. 实用积分表[M]. 合肥:中国科学技术大学出版社, 2006.
- [2] DANIEL ZWILLINGER, et al. CRC Standard Mathematical Tables and Formulae[M]. CRC Press, 世界图书出版公司, 1988
- [3] J·J·图马, R·A·沃尔什. 工程数学手册[M]. 欧阳芳锐, 张玉平, 译. 北京:科学出版社, 2002
- [4] GRADSHTEYN I S, RYZHIK I M. Table of Integrals, Series, and Products[M]. Academic Press, 1980, 2000
- [5] И·М·雷日克, И·С·格拉德什坦. 函数表与积分表[M]. 北京:高等教育出版社, 1959
- [6] 徐桂芳. 积分表[M]. 上海:上海科学技术出版社, 1959
- [7] 邹凤梧, 等. 积分表汇编[M]. 北京:宇航出版社, 1992
- [8] MILTON ABRAMOWITZ, IRENE A STEGUN. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables [M]. National Bureau of Standards, U. S., 1965
- [9] WILLIAM J THOMPSON. Atlas for Computing Mathematical Functions [M]. John Wiley & Sons, Inc., 1997
- [10] 《数学手册》编写组. 数学手册[M]. 北京:高等教育出版社, 1979
- [11] ANDREWS L C. Special Functions for Engineers and Applied Mathematicians[M]. Macmillan Publishing Company, 1985
- [12] 王竹溪, 郭敦仁. 特殊函数概论[M]. 北京:北京大学出版社, 2000
- [13] 马振华, 等. 现代应用数学手册. 现代应用分析卷[M]. 北京:清华大学出版社, 2003
- [14] 现代数学手册编纂委员会. 现代数学手册. 经典数学卷[M]. 武汉:华中科技大学出版社, 2000
- [15] 沈永欢, 等. 实用数学手册[M]. 北京:科学出版社, 2002
- [16] A·科恩, M·科恩. 数学手册[M]. 周民强, 等, 译. 北京:工人出版社, 1987
- [17] BRYCHKOV YU A, MARICHEV O I, PRUDNIKOV A P. Tables of Indefinite Integrals[M]. Gordon and Breach Science Publishers, 1989