

1. 按定义证明下列函数在其定义域内连续：

(1) $f(x) = \frac{1}{x}$; (2) $f(x) = |x|$.

2. 指出下列函数的间断点并说明其类型：

(1) $f(x) = x + \frac{1}{x}$; (2) $f(x) = \frac{\sin x}{|x|}$;

$$(3) f(x) = [\lvert \cos x \rvert]; \quad (4) f(x) = \operatorname{sgn} \lvert x \rvert$$

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

私聊群主拉进题目辅导会员群。

$$(5) f(x) = \operatorname{sgn} (\cos x);$$

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。

$$(6) f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ 为有理数,} \\ -x, & x \text{ 为无理数;} \end{cases}$$

$$(7) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+7}, & -\infty < x < -7, \\ x, & -7 \leq x \leq 1, \\ (x-1) \sin \frac{1}{x-1}, & 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

3. 延拓下列函数,使其在 \mathbb{R} 上连续:

$$(1) f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}; \quad (2) f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2};$$

$$(3) f(x) = x \cos \frac{1}{x}.$$

4. 证明:若 f 在点 x_0 连续, 则 $|f|$ 与 f^2 也在点 x_0 连续. 又问:若 $|f|$ 或 f^2 在 I 上连续, 那么 f 在 I 上是否必连续?

5. 设当 $x \neq 0$ 时 $f(x) = g(x)$, 而 $f(0) \neq g(0)$. 证明: f 与 g 两者中至多有一个在 $x=0$ 连续.

6. 设 f 为区间 I 上的单调函数. 证明:若 $x_0 \in I$ 为 f 的间断点, 则 x_0 必是 f 的第一类间断点.

7. 设函数 f 只有可去间断点, 定义

$$g(x) = \lim_{y \rightarrow x} f(y).$$

证明 g 为连续函数.

8. 设 f 为 \mathbf{R} 上的单调函数, 定义

$$g(x) = f(x+0).$$

证明 g 在 \mathbf{R} 上每一点都右连续.

9. 举出定义在 $[0, 1]$ 上分别符合下述要求的函数:

(1) 只在 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{1}{4}$ 三点不连续的函数;

(2) 只在 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{1}{4}$ 三点连续的函数;

(3) 只在 $\frac{1}{n}$ ($n=1,2,3,\dots$) 上间断的函数;

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。
(3) 只在 $\frac{1}{n}$ ($n=1,2,3,\dots$) 上间断的函数;

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。
教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。
(4) 只在 $x=0$ 右连续,而在其他点都不连续的函数.

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

1. 讨论复合函数 $f \circ g$ 与 $g \circ f$ 的连续性, 设

(1) $f(x) = \operatorname{sgn} x, g(x) = 1+x^2$;

(2) $f(x) = \operatorname{sgn} x, g(x) = (1-x^2)x$.

私聊群主拉进题目辅导会员群。
加群:882056847或826633750。微博: 博硕数学。
教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。
加群:882056847或826633750。

2. 设 f, g 在点 x_0 连续, 证明:

(1) 若 $f(x_0) > g(x_0)$, 则存在 $U(x_0; \delta)$, 使其内有 $f(x) > g(x)$;

(2) 若在某 $U^\circ(x_0)$ 上有 $f(x) > g(x)$, 则 $f(x_0) \geq g(x_0)$.

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。

3. 设 f, g 在区间 I 上连续. 记

$$F(x) = \max\{f(x), g(x)\}, G(x) = \min\{f(x), g(x)\}.$$

证明 F 和 G 也都在 I 上连续.

提示: 利用第一章总练习题 1.

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

私聊群主拉进题目辅导会员群。

4. 设 f 为 \mathbb{R} 上连续函数, 常数 $c > 0$. 记

$$F(x) = \begin{cases} -c, & \text{若 } f(x) < -c, \\ f(x), & \text{若 } |f(x)| \leq c, \\ c, & \text{若 } f(x) > c. \end{cases}$$

证明 F 在 \mathbb{R} 上连续.

提示: $F(x) = \max\{-c, \min\{c, f(x)\}\}$.

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

5. 设 $f(x) = \sin x, g(x) = \begin{cases} x - \pi, & x \leq 0, \\ x + \pi, & x > 0. \end{cases}$

证明: 复合函数 $f \circ g$ 在 $x=0$ 连续, 但 g 在 $x=0$ 不连续.

6. 设 f 在 $[\alpha, +\infty)$ 上连续, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在. 证明: f 在 $[\alpha, +\infty)$ 上有界. 又问 f 在 $[\alpha, +\infty)$ 上必有最大值或最小值吗?

7. 若对任何充分小的 $\varepsilon > 0$, f 在 $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ 上连续, 能否由此推出 f 在 (a, b) 上连续.

8. 求极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\pi - x) \tan x; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x \sqrt{1+2x} - \sqrt{x^3-1}}{x+1}$$

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

9. 证明:若 f 在 $[a, b]$ 上连续, 且对任何 $x \in [a, b]$, $f(x) \neq 0$, 则 f 在 $[a, b]$ 上恒正或恒负。

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。

10. 证明:任一实系数奇次方程至少有一个实根.

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。

11. 试用一致连续的定义证明:若 f, g 都在区间 I 上一致连续, 则 $f+g$ 也在 I 上一致连续.

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。

加群:882056847或826633750。

12. 证明 $f(x) = \sqrt{x}$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续.

提示: $[0, +\infty) = [0, 1] \cup [1, +\infty)$, 利用定理 4.9 和例 10 的结论.

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。

13. 证明 $f(x) = x^2$ 在 $[a, b]$ 上一致连续, 但在 $(-\infty, +\infty)$ 上不一致连续.

14. 设函数 f 在区间 I 上满足利普希茨 (Lipschitz) 条件, 即存在常数 $L > 0$, 使得对 I 上任意两点 x', x'' 都有

$$|f(x') - f(x'')| \leq L|x' - x''|.$$

证明 f 在 I 上一致连续.

15. 证明 $\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续.

提示: 利用不等式 $|\sin x' - \sin x''| \leq |x' - x''|$ (见第三章 §1 例 4).

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

私聊群主拉进题目辅导会员群。

16. 设函数 f 满足第 6 题的条件. 证明 f 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续.

加群:882056847或826633750。教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。

17. 设函数 f 在 $[0, 2a]$ 上连续, 且 $f(0) = f(2a)$. 证明: 存在点 $x_0 \in [0, a]$, 使得 $f(x_0) = f(x_0 + a)$.

18. 设 f 为 $[a, b]$ 上的增函数, 其值域为 $[f(a), f(b)]$. 证明 f 在 $[a, b]$ 上连续.

19. 设 f 在 $[a, b]$ 上连续, $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$. 证明: 存在 $\xi \in [a, b]$, 使得

$$f(\xi) = \frac{1}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)].$$

20. 证明 $f(x) = \cos\sqrt{x}$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续.

提示: $[0, +\infty) = [0, 1] \cup [1, +\infty)$. 在 $[1, +\infty)$ 上成立不等式

$$|\cos\sqrt{x'} - \cos\sqrt{x''}| \leq |\sqrt{x'} - \sqrt{x''}| \leq |x' - x''|.$$

1. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \cos x + 5}{1 + x^2 + \ln(1-x)}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x});$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\sqrt{\sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}} - \sqrt{\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}} \right);$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}; \quad (5) \lim_{x \rightarrow 0} (1+\sin x)^{\cot x}.$$

2. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = a^b$.

提示: $a_n^{b_n} = e^{b_n \ln a_n}$.