

8.1 不定积分概念与基本积分公式

1. 验证下列等式,并与(3)、(4)两式相比照:

$$(1) \int f'(x) dx = f(x) + C; \quad (2) \int df(x) = f(x) + C.$$

2. 求一曲线 $y=f(x)$,使得在曲线上每一点 (x,y) 处的切线斜率为 $2x$,且通过点 $(2,5)$.

3. 验证 $y = \frac{x^2}{2} \operatorname{sgn} x$ 是 $|x|$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的一个原函数.

4. 据理说明为什么每一个含有第一类间断点的函数都没有原函数?

5. 求下列不定积分:

$$(1) \int \left(1 - x + x^3 - \frac{1}{\sqrt{x^2}} \right) dx;$$

$$(2) \int \left(x - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 dx;$$

$$(3) \int \frac{dx}{\sqrt{2gx}} \quad (g \text{ 为正常数});$$

$$(4) \int (2^x + 3^x)^2 dx;$$

$$(5) \int \frac{3}{\sqrt{4-4x^2}} dx;$$

$$(6) \int \frac{x^2}{3(1+x^2)} dx;$$

$$(7) \int \tan^2 x dx;$$

$$(8) \int \sin^2 x dx;$$

$$(11) \int 10^t \cdot 3^{2t} dt;$$

$$(12) \int \sqrt{x} \sqrt{x} \sqrt{x} dx;$$

$$(13) \int \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right) dx;$$

$$(14) \int (\cos x + \sin x)^2 dx;$$

$$(15) \int \cos x \cdot \cos 2x dx;$$

$$(16) \int (e^x - e^{-x})^3 dx;$$

$$(17) \int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx;$$

$$(18) \int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} dx.$$

6. 求下列不定积分:

$$(1) \int e^{-x} dx;$$

$$(2) \int |\sin x| dx.$$

7. 设 $f'(\arctan x) = x^2$, 求 $f(x)$.

8. 举例说明含有第二类间断点的函数可能有原函数,也可能没有原函数.

8.2 换元积分法分部积分法

1. 应用换元积分法求下列不定积分:

(1) $\int \cos(3x + 4) dx;$

(2) $\int xe^{2x^2} dx;$

$$(3) \int \frac{dx}{2x+1};$$

$$(4) \int (1+x)^n dx;$$

$$(5) \int \left(\frac{1}{\sqrt{3-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-3x^2}} \right) dx;$$

$$(6) \int 2^{2x+3} dx;$$

$$(7) \int \sqrt{8-3x} dx;$$

$$(8) \int \frac{dx}{\sqrt[3]{7-5x}};$$

$$(9) \int x \sin x^2 dx;$$

$$(10) \int \frac{dx}{\sin^2(2x + \frac{\pi}{4})};$$

$$(11) \int \frac{dx}{1 + \cos x};$$

$$(12) \int \frac{dx}{1 + \sin x};$$

$$(13) \int \csc x dx;$$

$$(14) \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$(15) \int \frac{x}{4+x^4} dx;$$

$$(16) \int \frac{dx}{x \ln x};$$

$$(17) \int \frac{x^4}{(1-x^5)^3} dx;$$

$$(18) \int \frac{x^3}{x^8-2} dx;$$

$$(21) \int \cos^5 x dx;$$

$$(22) \int \frac{dx}{\sin x \cos x};$$

$$(23) \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}};$$

$$(24) \int \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 8} dx;$$

$$(25) \int \frac{x^2 + 2}{(x + 1)^3} dx;$$

$$(26) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} \quad (a > 0);$$

$$(27) \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \quad (a > 0);$$

$$(28) \int \frac{x^5}{\sqrt{1 - x^2}} dx;$$

$$(29) \int \frac{\sqrt{x}}{1 - \sqrt[3]{x}} dx;$$

$$(30) \int \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x+1} + 1} dx;$$

$$(31) \int x(1 - 2x)^{99} dx;$$

$$(32) \int \frac{dx}{x(1+x^n)} \quad (n \text{ 为自然数});$$

$$(33) \int \frac{x^{2n-1}}{x^n + 1} dx;$$

$$(34) \int \frac{dx}{x \ln x \ln \ln x};$$

$$(35) \int \frac{\ln 2x}{x \ln 4x} dx;$$

$$(36) \int \frac{dx}{x^4 \sqrt{x^2 - 1}}.$$

2. 应用分部积分法求下列不定积分:

$$(1) \int \arcsin x dx;$$

$$(2) \int \ln x dx;$$

$$(3) \int x^2 \cos x dx;$$

$$(4) \int \frac{\ln x}{x^3} dx;$$

$$(3) \int x^2 \cos x dx;$$

$$(4) \int \frac{\ln x}{x^3} dx;$$

$$(5) \int (\ln x)^2 dx;$$

$$(6) \int x \arctan x dx;$$

$$(5) \int (\ln x)^2 dx;$$

$$(6) \int x \arctan x dx;$$

3. 求下列不定积分:

$$(1) \int [f(x)]^\alpha f'(x) dx \quad (\alpha \neq -1);$$

$$(2) \int \frac{f'(x)}{1 + [f(x)]^2} dx;$$

$$(3) \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx;$$

$$(4) \int e^{f(x)} f'(x) dx.$$

4. 证明:

(1) 若 $I_n = \int \tan^n x dx, n = 2, 3, \dots$, 则

(2) 若 $I(m, n) = \int \cos^m x \sin^n x dx$, 则当 $m+n \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned} I(m, n) &= \frac{\cos^{m-1} x \sin^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} I(m-2, n) \\ &= -\frac{\cos^{m+1} x \sin^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} I(m, n-2), \\ n, m &= 2, 3, \dots \end{aligned}$$

5. 利用上题的递推公式计算:

(1) $\int \tan^3 x dx;$

(2) $\int \tan^4 x dx;$

(3) $\int \cos^2 x \sin^4 x dx.$

6. 导出下列不定积分对于正整数 n 的递推公式:

(1) $I_n = \int x^n e^{kx} dx;$

(2) $I_n = \int (\ln x)^n dx;$

$$(3) I_n = \int (\arcsin x)^n dx; \quad (4) I_n = \int e^{ax} \sin^n x dx.$$

7. 利用上题所得递推公式计算:

$$(1) \int x^3 e^{2x} dx;$$

$$(2) \int (\ln x)^3 dx;$$

$$(3) \int (\arcsin x)^3 dx;$$

$$(4) \int e^x \sin^3 x dx.$$

1. 求下列不定积分:

$$(1) \int \frac{x^3}{x-1} dx;$$

$$(2) \int \frac{x-2}{x^2-7x+12} dx;$$

$$(3) \int \frac{dx}{1+x^3};$$

$$(4) \int \frac{dx}{1+x^4};$$

$$(5) \int \frac{dx}{(x-1)(x^2+1)^2}; (6) \int \frac{x-2}{(2x^2+2x+1)^2} dx.$$

2. 求下列不定积分:

$$(1) \int \frac{dx}{5 - 3\cos x}; \quad (2) \int \frac{dx}{2 + \sin^2 x};$$

$$(3) \int \frac{dx}{1 + \tan x}; \quad (4) \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x-x^2}} dx;$$

$$(5) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}};$$

$$(6) \int \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx.$$

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。