第四章 广义积分

在讲述定积分时，我们用到了两个定积分中的限制条件，它们是：

1. 积分区间是有界的；
2. 函数是有界的。

这两个条件在定义 Riemann 定积分以及讨论其存在性时都是十分关键的，比如说，函数有界这一条件是 Riemann 定积分存在的必要条件。这一章里，我们就来讨论将这两个条件放松，是否存在类似于 Riemann 定积分的量存在，这就是无穷积分和瑕积分。

§1 无穷积分及其判别法

1 无穷积分之定义

例 1：求函数 $y=\frac{1}{x^2}$ 在区间 $[a,A]$ 上与 x 轴所围部分的面积。

解：由面积的定义，我们知：$S=\int_a^A \frac{1}{x^2}dx=\frac{1}{a}-\frac{1}{A}$。

上述面积公式对于任意的闭区间 $[a,A]$ 均成立，并且当 $A\to+\infty$ 时，该面积有极限 $\frac{1}{a}$，因而可以将面积的概念推广至 $[a,+\infty)$ 上的面积。这一想法可以推广到任意函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上的“积分”的定义：

定义 1：若函数 $f(x)$ 在 $[a,A]$ 上 Riemann 可积，并且极限 $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx$ 存在且等于有限值。则称该极限为函数 $f(x)$ 定义在 $[a,+\infty)$ 上的无穷积分，记作：$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx$。

这时也称无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，否则称 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散。

同样我们可以定义 $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ 的收敛性。

附注：若 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ 均收敛时，称 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 收敛且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^a f(x)dx+\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{\substack{A\to+\infty\\A'\to-\infty}}\int_{A'}^A f(x)dx。$$

例 2：讨论无穷积分 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ 的敛散性。

解： 由于 $\int_0^A \frac{dx}{1+x^2}=\tan^{-1}A$，

所以：$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim\limits_{A\to+\infty}\tan^{-1}A=\frac{p}{2}$，积分收敛。

例 3：讨论无穷积分$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$的敛散性。$(a>0)$

解：　由于$p\neq1$时，$\int_a^A\frac{dx}{x^p}=\frac{1}{1-p}x^{1-p}\Big|_a^A=\frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{a^{p-1}}-\frac{1}{A^{p-1}}\right)$，

因此：当$p>1$时，$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\frac{1}{(p-1)a^{p-1}}$，积分收敛；

当$p<1$时，由于$\frac{1}{A^{p-1}}\to+\infty$，所以积分发散；

当$p=1$时，$\int_a^A\frac{dx}{x}=\ln\frac{A}{a}\to+\infty$，积分发散。

例 4：讨论无穷积分$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^p x}$的敛散性。$(a>1)$

解：　由于$\int_a^A\frac{dx}{x\ln^p x}=\int_a^A\frac{d\ln x}{\ln^p x}$，所以：

$p\neq1$时，$\int_a^A\frac{dx}{x\ln^p x}=\frac{1}{1-p}\ln^{1-p}x\Big|_a^A=\frac{1}{1-p}\left(\ln^{1-p}A-\ln^{1-p}a\right)$

因此：当$p>1$时，$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^p x}=\frac{\ln^{1-p}a}{p-1}$，积分收敛；

当$p<1$时，由于$\ln^{1-p}A\to\infty$，所以积分发散；

当$p=1$时，$\int_a^A\frac{dx}{x\ln x}=\ln\frac{\ln A}{\ln a}\to+\infty$，积分发散。

例 5：讨论无穷积分$\int_0^{+\infty}\sin xdx$的敛散性。

解：　由于$\int_0^A\sin xdx=1-\cos A$，极限不存在，所以$\int_0^{+\infty}\sin xdx$发散。

2　Cauchy 主值

若讨论积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\sin xdx$之收敛性，由定义我们知道它是发散积分，但若考虑到：$\int_{-A}^{A}\sin xdx=0$，我们有：$\lim\limits_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}\sin xdx=0$。

上述这种以两边同时趋于无穷的方法求出的发散积分的极限，称为发散积分的 Cauchy 主值，记作$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty}\sin xdx=0$。

一般地，我们定义：$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\lim\limits_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}f(x)xdx$。

附注：显然，我们有：积分收敛 $\Rightarrow$ Cauchy 主值=积分值；积分发散 $\Rightarrow$ Cauchy 主值可能存在。

3　无穷积分的性质

下列无穷积分之性质，可以由其定义直接得到：

1）　线性运算性质：

若 $f(x), g(x) \in \mathbf{R}[a,+\infty)$（广义积分存在）则：

$$\int_a^{+\infty}\left(f(x)+kg(x)\right)dx=\int_a^{+\infty} f(x)\,dx+k\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$$

2）　分部积分法仍然成立；

3）　换元法仍然成立。

例 6：求无穷积分 $I=\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx dx$。$(a>0)$

解：　$I=\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx dx$

$$=\int_0^{+\infty}\cos bx d\left(-\frac{1}{a}e^{-ax}\right)\overset{\text{分部积分}}{=}-\frac{1}{a}e^{-ax}\cos bx\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{a}\int_0^{+\infty} e^{-ax}(-b\sin bx)dx$$

$$=\frac{1}{a}+\frac{b}{a^2}\int_0^{+\infty}\sin bx de^{-ax}\overset{\text{分部积分}}{=}\frac{1}{a}-\frac{b}{a^2}\int_0^{+\infty} e^{-ax}b\cos bx dx=\frac{1}{a}-\frac{b^2}{a^2}I$$

所以：$I=\dfrac{a}{a^2+b^2}$。

4）　Cauchy 收敛准则：

$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛 $\Leftrightarrow$ 函数 $I(A)=\int_a^{A} f(x)\,dx$ 有极限

$\Leftrightarrow \forall e>0$，$\exists A>a$，当 $A', A''>A$ 时，有：$\left|\int_{A'}^{A''} f(x)\,dx\right|<e$。

5）　绝对收敛与条件收敛：

若无穷积分 $\int_a^{+\infty}\left|f(x)\right|dx$ 收敛，则称 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 绝对收敛；

若无穷积分 $\int_a^{+\infty}\left|f(x)\right|dx$ 发散，但 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛，则称 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 条件收敛。

附注：　显然绝对收敛 $\Rightarrow$ 条件收敛，这是因为 $\left|\int_{A'}^{A''} f(x)\,dx\right|\le\left|\int_{A'}^{A''}\left|f(x)\right|dx\right|$，由 Cauchy 收敛准则可得结论。

4　绝对收敛积分之判别法

下列之判别法均事先假设了积分 $\int_a^{A} f(x)\,dx$ 的存在性。

1) 比较判别法

定理 1：（比较判别法）

1) 当$\exists B$，当$x \geq B$时，

若$\left|f(x)\right| \leq j(x)$，则$\int_a^{+\infty} j(x)dx$收敛$\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$绝对收敛，

若$\left|f(x)\right| \geq j(x) > 0$，则$\int_a^{+\infty} j(x)dx$发散$\Rightarrow \int_a^{+\infty} \left|f(x)\right|dx$发散；

2) 若$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left|f(x)\right|}{j(x)} = l$，则：

$0 \leq l < +\infty$时，$\int_a^{+\infty} j(x)dx$收敛$\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$绝对收敛，

$0 < l \leq +\infty$时，$\int_a^{+\infty} j(x)dx$发散$\Rightarrow \int_a^{+\infty} \left|f(x)\right|dx$发散。

证明：1) 用 Cauchy 收敛准则证明。

若$\int_a^{+\infty} j(x)dx$收敛，则：

$\forall e > 0$，$\exists A > a$，当$A', A'' > A$时，有：$\left|\int_{A'}^{A''} f(x)dx\right| < e$

而$\left|f(x)\right| \leq j(x)$，因此：$\left|\int_{A'}^{A''} f(x)dx\right| \leq \left|\int_{A'}^{A''} \left|f(x)\right|dx\right| \leq \left|\int_{A'}^{A''} j(x)dx\right| < e$

由 Cauchy 收敛准则，$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 绝对收敛。

当$\int_a^{+\infty} j(x)dx$ 发散且$\left|f(x)\right| \geq j(x) > 0$时，与上述命题为逆否命题。

2) 由极限性质可由 2)$\Rightarrow$1)之条件，因而结论均成立。

证毕

2) Cauchy 判别法

由本节例 3，我们知道积分$\int_a^{+\infty} \dfrac{dx}{x^p}$在$p > 1$时收敛，$p \leq 1$时发散。因而在应用定理 1 时，我们可以将$j(x)$取为$\dfrac{1}{x^p}$，这样，比较判别法就变为：

定理 2：（Cauchy **判别法**）

1) **当**$\exists B$，**当** $x \ge B$ **时，**

若 $\left|f(x)\right| \le \dfrac{c}{x^p}$，$p>1$，**则** $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ **绝对收敛，**

若 $\left|f(x)\right| \ge \dfrac{c}{x^p} > 0$，$p \le 1$，**则** $\int_a^{+\infty} \left|f(x)\right| dx$ **发散；**

2) **若** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p \left|f(x)\right| = l$，**则：**

$p>1$ **且** $0 \le l < +\infty$ **时，**$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ **绝对收敛，**

$p \le 1$ **且** $0 < l \le +\infty$ **时，**$\int_a^{+\infty} \left|f(x)\right| dx$ **发散。**

例 7：**求证无穷积分** $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx dx$ **对** $\forall a>0$ **收敛。**

证明：由于 $\left|e^{-ax}\cos bx\right| \le e^{-ax}$，**并且** $\int_0^{+\infty} e^{-ax} dx = \dfrac{1}{a}$，$(a>0)$

所以由定理 1，$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx dx$ **对** $\forall a>0$ **绝对收敛。**

例 8：**讨论无穷积分** $\int_1^{+\infty} \dfrac{\arctan x}{x} dx$ **的敛散性。**

解： **由于** $\dfrac{\arctan x}{x} \sim \dfrac{p}{2x}$，$(x \to +\infty)$，**并且** $\dfrac{\arctan x}{x} > 0$，$(x \ge 1)$

所以由定理 2，**它与** $\int_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x}$ **同时收敛或发散，即无穷积分** $\int_1^{+\infty} \dfrac{\arctan x}{x} dx$ **发散。**

5 Abel 判别法与 Dirichlet 判别法

上述的比较判别法与 Cauchy **判别法都是用来判断一个无穷积分是否绝对收敛的，这里两个判别法则是针对条件收敛性而讨论的，因而相对较复杂。**

1) Abel 判别法

定理 3：（Abel **判别法）设：**

1) $f(x)$ **在** $[a,+\infty)$ **上可积（广义积分收敛），**

2) $g(x)$ **在** $[a,+\infty)$ **上单调有界（**$\left|g(x)\right| \le M$ **）**

则： $f(x)g(x)$ **在** $[a,+\infty)$ **上广义可积。**

证明：应用 Cauchy **收敛原理讨论这一问题。考虑第二积分中值定理，我们有：**

$$\int_{A'}^{A''} f(x)g(x)dx = g(A')\int_{A'}^{x} f(x)dx + g(A'')\int_{x}^{A''} f(x)dx$$

由于 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ **收敛，**$\forall e>0$，$\exists A>a$，**当** $A', A'' > A$ **时（自然** $x>A$ **）**

有$\left|\int_{A'}^{x} f(x)\,dx\right| < \frac{e}{2M}$，$\left|\int_{x}^{A''} f(x)\,dx\right| < \frac{e}{2M}$，因此：

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x)g(x)\,dx\right| \le \left|g(A')\right|\left|\int_{A'}^{x} f(x)\,dx\right| + \left|g(A'')\right|\left|\int_{x}^{A''} f(x)\,dx\right|$$

$$< M\frac{e}{2M} + M\frac{e}{2M} = e$$

即：无穷积分$\int_{a}^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$收敛。

证毕

2) Dirichlet 判别法

定理 4：（Dirichlet 判别法）设：

1) $F(A)=\int_a^A f(x)\,dx$是$[a,+\infty)$上的有界函数，$\left|F(x)\right| \le M$，
2) $g(x)$在$[a,+\infty)$上单调趋于零（$x \to +\infty$）

则：$f(x)g(x)$在$[a,+\infty)$上广义可积。

证明：同定理 3 的证明，应用 Cauchy 收敛原理讨论这一问题。考虑第二积分中值定理，我们有：

$$\int_{A'}^{A''} f(x)g(x)\,dx = g(A')\int_{A'}^{x} f(x)\,dx + g(A'')\int_{x}^{A''} f(x)\,dx$$

由于$g(x)$单调趋于零，$\forall e>0$，$\exists A>a$，当$A', A''>A$时

有$\left|g(A')\right| < \frac{e}{4M}$，$\left|g(A'')\right| < \frac{e}{4M}$，因此：

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x)g(x)\,dx\right| \le \left|g(A')\right|\left|\int_{A'}^{x} f(x)\,dx\right| + \left|g(A'')\right|\left|\int_{x}^{A''} f(x)\,dx\right|$$

$$< \frac{e}{4M}\left|F(x)-F(A')\right| + \frac{e}{4M}\left|F(A'')-F(x)\right| \le e$$

因而由收敛原理知无穷积分$\int_{a}^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$收敛。

证毕

例 9：证明无穷积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$条件收敛。

证明：1) 由于$g(x)=\frac{1}{x}$单调下降趋于零，并且：

$$\left|F(A)\right| = \left|\int_1^A \sin x\,dx\right| = \left|\cos 1 - \cos A\right| \le 2$$

由 Dirichlet 判别法知，$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$收敛。

2) 考虑到 $\frac{|\sin x|}{x} \ge \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x}$，类似于 1)的讨论易知

$\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x} dx$ 收敛，而 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x}$ 发散，所以 $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ 发散。

综上所述，无穷积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 条件收敛。

§2 瑕积分及其收敛性

1 瑕积分（无界函数的广义积分）之定义

定义 2：设 $f(x)$ 在 $x=b$ 点的邻域内无界，$\forall h>0$，$f(x) \in \mathbf{R}[a, b-h]$，

若 $\lim\limits_{h\to 0^+} \int_a^{b-h} f(x) dx$ 存在（有限值），称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上广义可积，

记 $\int_a^b f(x) dx = \lim\limits_{h\to 0^+} \int_a^{b-h} f(x) dx$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上之瑕积分，b 成为瑕点。

瑕积分存在也称为 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛，否则称 $\int_a^b f(x) dx$ 发散。

同理对于 $x=a$ 是瑕点，则定义 $\int_a^b f(x) dx = \lim\limits_{h\to 0^+} \int_{a+h}^b f(x) dx$；若 $x=c\in(a,b)$ 是无界点（瑕点），则需分别讨论 $\int_a^c f(x) dx$ 及 $\int_c^b f(x) dx$ 之收敛性，若两个积分均收敛，则称 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛，且：

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \lim_{h\to 0^+} \int_a^{c-h} f(x) dx + \lim_{h'\to 0^+} \int_{a+h'}^b f(x) dx$$

例 1：讨论积分 $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ 之收敛性。

解： 瑕点：只有一个瑕点 $x=a$；

考虑函数：$j(h) = \int_{a+h}^b \frac{dx}{(x-a)^p}$，

当 $p\ne 1$ 时，$j(h) = \frac{1}{1-p}(x-a)^{1-p}\Big|_{a+h}^b = \frac{1}{1-p}\left[(b-a)^{1-p} - h^{1-p}\right]$，

所以 $p<1$ 时，$j(h) \to \frac{1}{1-p}(b-a)^{1-p}$，积分收敛，$p>1$ 时积分发散；

当 $p=1$ 时，$j(h) = \ln|x-a|\Big|_{a+h}^b = \ln\frac{b-a}{h} \to \infty$，积分发散。

从该例可知，象$(x-c)^{-p}$这样的函数，无论c点在积分区间端点或内部，均有$p<1$收敛，$p\ge 1$发散。（这在形式上与无穷限广义积分相反）

例 2：讨论$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$之收敛性。

解：　由于$\int_0^{1-h} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_0^{1-h} = \arcsin(1-h) \to \frac{p}{2}$，因而积分收敛至$\frac{p}{2}$。

考虑积分$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$。它是发散的，$x=0$为其瑕点。

但由于$\int_{-1}^{-h} \frac{dx}{x} + \int_h^1 \frac{dx}{x} = \ln|h| + \ln\left|\frac{1}{h}\right| = 0$，因而$\lim_{h\to 0^+}\left[\int_{-1}^{-h} \frac{dx}{x} + \int_h^1 \frac{dx}{x}\right] = 0$，类似于无穷积分的 Cauchy 主值，我们也可以定义瑕积分之 Cauchy 主值：

$$v.p.\int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0^+}\left[\int_a^{c-h} f(x)dx + \int_{c+h}^b f(x)dx\right]$$

2　瑕积分之性质

下面几部分的讨论与无穷积分完全类似，首先我们有瑕积分的基本性质：

1. 线性运算性质成立；
2. 换元法与分部积分法成立；
3. 绝对收敛与条件收敛性质以及相互关系仍成立。
4. 收敛原理：

   若$x=a$是瑕点，$\int_a^b f(x)dx$收敛

   $\Leftrightarrow \forall e>0$，$\exists d>0$，$0<h',h''<d$时，有$\left|\int_{a+h'}^{a+h''} f(x)dx\right| < e$

3　Cauchy 判别法

对于瑕积分，也有无穷积分类似的比较判别法与 Cauchy 判别法，这里只将 Cauchy 判别法列出。设$x=a$为瑕点，

1. 若$|f(x)| \le \frac{c}{(x-a)^p}$，$p<1$，则$\int_a^b f(x)dx$绝对收敛；

   若$|f(x)| \ge \frac{c}{(x-a)^p} > 0$，$p\ge 1$，则$\int_a^b f(x)dx$发散。

   （只需在$x=a$右邻域内不等式成立）

2. 若$\lim_{x\to a^+}(x-a)^p|f(x)| = l$，则：

   $p<1$且$0\le l<+\infty$时，$\int_a^b f(x)dx$绝对收敛；

   $p\ge 1$且$0<l\le+\infty$时，$\int_a^b f(x)dx$发散。

例 3：讨论积分$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\ln x}$的敛散性。

解： 瑕点：有两个瑕点$x=0$与$x=1$；

当$x\to 0^+$时，由于$\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}\ln x}\to 0$，所以$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x}\ln x}$收敛；

当$x\to 1^-$时，由于$(1-x)\frac{1}{\sqrt{x}\ln x}\to -1$，所以$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\ln x}$发散，

综上，积分$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\ln x}$发散。

4 无穷积分与瑕积分之关系

当$x=a$为积分瑕点时，我们有：

$$\int_a^b f(x)\,dx \overset{y=\frac{1}{x-a}}{=} \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f\left(a+\frac{1}{y}\right)\frac{dy}{y^2}$$

因此任意一个瑕积分均可化为无穷积分之形式，反之亦然。

5 条件收敛判别法

与无穷积分类似，对于条件收敛的级数，我们有如下两个判别法：

1. Abel 判别法

   若$\int_a^b f(x)\,dx$收敛且$g(x)$单调有界，则$\int_a^b f(x)g(x)\,dx$收敛。

2. Dirichlet 判别法（假设$x=a$为瑕点）

   若$\int_{a+h}^b f(x)\,dx$有界，$g(x)$单调趋于零$\left(x\to a^+\right)$，则$\int_a^b f(x)g(x)\,dx$收敛。

例 4：讨论积分$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\cos\frac{1}{x}\,dx$之收敛性。

解： 1) 考虑到$\left|\frac{1}{x^p}\cos\frac{1}{x}\right|\le\frac{1}{x^p}$，所以$p<1$时积分绝对收敛；

2) 由于$\int_h^1 \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\,dx=-\sin\frac{1}{x}\Big|_h^1=\sin\frac{1}{h}-\sin 1$，所以$\left|\int_h^1 \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\,dx\right|\le 2$；

而x^{2-p}在$2-p>0$，即$p<2$时单调趋于零，

所以$1\le p<2$时，$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\cos\frac{1}{x}\,dx$收敛（Dirichlet 判别法）

另一方面，考虑到$\left|\frac{1}{x^p}\cos\frac{1}{x}\right|\ge\frac{1}{x^p}\cos^2\frac{1}{x}=\frac{1}{2x^p}+\frac{1}{2x^p}\cos\frac{2}{x}$，

由于$1\le p<2$时$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$发散，由 1）知：$\int_0^1 \frac{1}{2x^p}\cos\frac{2}{x}\,dx$收敛，

所以$1\le p<2$**时，**$\int_0^1\left|\frac{1}{x^p}\cos\frac{1}{x}\right|dx$**发散，即**$1\le p<2$**时积分条件收敛。**

3) $p=2$**时，**$\int_h^1\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}dx=\sin\frac{1}{h}-\sin 1$**，积分发散，**

$p>2$**时，若**$\int_0^1\frac{1}{x^p}\cos\frac{1}{x}dx$**收敛，则考虑：**$\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}=x^{p-2}\cdot\frac{1}{x^p}\cos\frac{1}{x}$

x^{p-2}**单调有界，由** Abel **判别法可知积分**$\int_0^1\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}dx$**收敛，**

这与$p=2$**时积分发散矛盾，**$\therefore p\ge 2$**时积分发散。**

习题

1．**求无穷积分：**

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{(a^2+x^2)^3}$；(2) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(1+x^2)}$；

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln xdx}{(1+x)^2}$；(4) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}$；

(5) $\int_0^{+\infty}e^{-x}\cos axdx$；(6) $\int_0^{+\infty}e^{-x}\sin axdx$；

(7) $\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx$；(8) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}$；

(9) $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx$；(10) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{1+x^2}}$；

(11) $\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$；(12) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^n)\sqrt[n]{1+x^n}}$。

2．**求无穷积分：**

(1) $\int_0^{+\infty}x^ne^{-x}dx$；(2) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(a^2+x^2)^n}\quad(a>0)$；

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(ax^2+2bx+c)^n}$（$n$**为自然数，**$ac-b^2>0$）。

3．**设**$f(x)\le h(x)\le g(x),\ a\le x<+\infty$**，且**

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx\text{，}\int_a^{+\infty}g(x)dx$$

收敛。求证：$\int_a^{+\infty}h(x)dx$**收敛。**

4．**若**$f(x)$**在**$[a,+\infty)$**上单调下降，且积分**$\int_a^{+\infty}f(x)dx$**收敛。求证：**$\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)=0$。

5．**判别下列无穷积分的收敛性：**

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{x^2dx}{x^4-x^2+1}$；(2) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^2}}$；

(3) $\int_0^{+\infty}x^pe^{-x}dx\quad(p\ge 0)$；(4) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^p}dx$；

（5）$\int_1^{+\infty}\frac{(\ln x)^n}{x^2}dx$ （n 自然数）；　（6）$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx$ ；

（7）$\int_0^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^q}dx\quad(p,q>0)$ ；　（8）$\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{1+x^n}dx$ ；

（9）$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x|\cos x|}$ ；　（10）$\int_1^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right]dx$ ；

（11）$\int_1^{+\infty}\ln\left(\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}\right)dx$ ；　（12）$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}\ln\left(1-\frac{\sin^2 x}{2}\right)^{-1}dx$ ；

（13）$\int_0^{+\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx$ ，其中 $P_n(x)$ 与 $Q_m(x)$ 分别为 n 次及 m 次多项式，且 $Q_m(x)\neq 0$

6．讨论下列无穷积分的收敛及绝对收敛。

（1）$\int_0^{+\infty}\frac{\cos^2 x}{x}dx$ ；　（2）$\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x}dx$ ；

（3）$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx$ ；　（4）$\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}dx\quad p>0$。

7．设 $f(x)$ 单调下降趋于零，$f'(x)\in C[0,+\infty)$。求证：

$$\int_0^{+\infty} f'(x)\sin^2 x dx$$

收敛。

8．设 $f(x)\in C[0,+\infty)$ ，且 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 条件收敛。求证：

$$\int_0^{+\infty}\max(f(x),0)dx,\quad \int_0^{+\infty}\min(f(x),0)dx$$

发散。

9．求下列瑕积分：

（1）$\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{a-x}}$ ；　（2）$\int_0^a x\sqrt{\frac{x}{a-x}}dx$ ；

（3）$\int_a^b\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ ；　（4）$\int_0^{\frac{p}{2}}\cos x\ln\sin x dx$ ；

（5）$\int_0^1 x^n\ln^n x dx$ ；　（6）$\int_0^{\frac{p}{2}}\sqrt{\mathrm{tg} x}dx$ ；

（7）$\int_0^1\ln x dx$ ；

（8）$\int_0^{\frac{p}{2}}\frac{\sin x dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}\quad(a\neq 0,b\neq 0)$。

10．求极限

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}。$$

11．判别下列瑕积分的收敛性：

（1）$\int_0^1\frac{dx}{\ln x}$ ；　（2）$\int_0^1\frac{\ln x}{1-x}dx$ ；

（3）$\int_0^1\ln x\ln(1-x)dx$ ；　（4）$\int_0^p\frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$ ；

（5） $\int_0^{\frac{p}{2}}\frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$； （6） $\int_0^1 x^a\ln x dx$；

（7） $\int_0^1\frac{1-\cos x}{x^m}dx$； （8） $\int_0^1\frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{\ln x}dx$。

12．**判别收敛性：**

（1） $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}}$； （2） $\int_1^{+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{-1}dx$；

（3） $\int_0^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx$； （4） $\int_0^{+\infty}\frac{(\mathrm{arctg}x)^q}{x^p}dx$；

（5） $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx$； （6） $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^p+x^q}$；

（7） $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p\ln^q x}$； （8） $\int_0^{+\infty}\frac{x^m dx}{x^n+x^p}$。

13．**讨论下列积分的收敛性与绝对收敛性：**

（1） $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^p x}{1+x^q}dx$； （2） $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^p x}{x^q}dx$；

（3） $\int_0^{+\infty}\sin(x^2)dx$； （4） $\int_1^{+\infty}(\ln x)^p\frac{\sin x}{x}dx$。

14．**判别收敛性：**

（1） $\int_0^{+\infty}\sin x^p dx$； （2） $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}dx$；

（3） $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-x}dx$； （4） $\int_0^{+\infty}\frac{x-[x]-\frac{1}{2}}{x^p}dx$；

（5） $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\cos\frac{1}{x}}{x^p}dx$； （6） $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x\sin\frac{1}{x}}{x^p}dx$。