欧拉公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ 的几种证明及其在高等数学中的应用

李　劲

（河西学院数学系，甘肃　张掖　734000）

摘　要：在复数域上给出欧拉公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ 的几种证明；举例说明欧拉公式在高等数学中的几类应用.

关键词：欧拉公式；证明；高等数学；应用；举例

中图分类号：O13　　文献标识码：A　　文章编号：1672－0520（2008）05－0001－06

1．欧拉公式的历史渊源及其意义

16 世纪中叶产生了明确的复数概念．“在18 世纪，已有的初等数学包括三角函数、指数函数和对数函数则被推广到了复数领域，这也是受到了积分计算的激发．”[1]这些数学成果，为欧拉公式的产生奠定了基础．

1714 年，英国数学家科兹（Cotes，Roger，1682～1716），首先发表了定理

$$\sqrt{-1}\,\phi=\log_e(\cos\phi+\sqrt{-1}\sin\phi) \tag{1}$$

1740 年10 月18 日，瑞士数学家欧拉（Euler，Leonard，1707～1783）在给瑞士数学家约翰·伯努利（JohnBernoulli，1667～1748）的信中说，$y=2\cos x$ 和 $y=e^{\sqrt{-1}x}+e^{-\sqrt{-1}x}$ 都是同一个微分方程的解，因此它们应该相等．1743 年他又发表了这个结果，即

$$\cos s=\frac{e^{\sqrt{-1}s}+e^{-\sqrt{-1}s}}{2},\ \sin s=\frac{e^{\sqrt{-1}s}-e^{-\sqrt{-1}s}}{2\sqrt{-1}} \tag{2}$$

1748 年欧拉重新发现了科兹所发现的结果（1）式，它也可以由（2）式导出．[2]

“1777 年，欧拉在递交给圣彼得堡科学院的论文《微分公式》中首次使用 i 来表示 $\sqrt{-1}$，但很少有人注意它．直到1801 年，德国数学家高斯（Gauss，Carl Friedrich，1777～1855）系统地使用了这个符号，以后渐渐流行，沿用至今．”[3]

由 $i=\sqrt{-1}$ 和上述（1）、（2）两式得

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x,\ (x\in R) \tag{3}$$

这就是著名的欧拉公式．

指数函数和三角函数在实数域中几乎没有什么联系，而在复数域中却发现了它们可以相互转化，并被欧拉公式这个非常简单的关系式联系在一起．特别是当 $x=\pi$ 时，欧拉公式便写成了 $e^{i\pi}+1=0$，这个等式将数中最富特色的五个数0，1，i，e，π 绝妙地联系在一起，“1 是正整数也是实数的基本单位，i 是虚数的基本单位，0 是唯一的中性数，它们都具有独特的地位，最具代表性．可以说，i 来源于代数，π 来源于几何，e 来源于分析，e 与 π 在超越数之中都独具特色．这5 个看来似乎是互不相干的数，居然如此和谐地统一在一个式子中．”[4]因而，公式 $e^{i\pi}+1=0$ 成为人们公认的优美公式，被视为数学美的一个象征．这充分地揭示了数学的统一性、简洁性、奇异性等美学特性，了解这些丰富的数学文化内容，对于通过高等数学学习提高大学生的综合素质、提高数学教育的质量具有重要意义．

收稿日期：2008-04-22

作者简介：李劲（1957－），男，甘肃临潭人，河西学院数学系副教授，主要从事数学教育教学研究．

2. 欧拉公式的证明

欧拉公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ 有广泛而重要的应用，但在相关文献中未见到对这个公式比较系统和完整的多种证明。为了进一步挖掘欧拉公式的应用及其数学教育方的重要意义，以下在复数域上给出欧拉公式的几种比较系统的证明。

证法一：（复指数函数定义法）

因为对任何复数 $z=x+iy$，($x,y\in R$)，复指数函数定义为 $e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$．[5]所以，当复数 z 的实部 $x=0$ 时，就得到欧拉公式 $e^{iy}=\cos y+i\sin y$． （证完）

证法二：（分离变量积分法）

设复数 $z=\cos x+i\sin x$，($x\in R$)，两边对 x 求导数，得

$$\frac{dz}{dx}=-\sin x+i\cos x=i^2\sin x+i\cos x=i(\cos x+i\sin x)=iz.$$

分离变量并对两边积分，得

$$\int\frac{1}{z}dz=\int i\,dx，\text{即}\ln z=ix+C$$

取 $x=0$ 得，$C=0$，故，有 $\ln z=ix$，即 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$． （证完）

证法三：（复数幂级数展开式法）

因为 $e^{ix}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(ix)^n}{n!}$，$\cos x=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$，$\sin x=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}$，($x\in R$)，

所以 $\cos x+i\sin x=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+i\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(ix)^n}{n!}=e^{ix}$． （证完）

证法四：（变上限积分法）

考虑变上限积分 $\int_0^y\frac{1}{t^2+1}dt$．

因为 $\int_0^y\frac{1}{t^2+1}dt=\arctan t\Big|_0^y=\arctan y$，又因为

$$\int_0^y\frac{1}{t^2+1}dt=\int_0^y\frac{-1}{2i}\left(\frac{1}{t+i}-\frac{1}{t-i}\right)dt=\frac{i}{2}[\ln(t+i)-\ln(t-i)]\Big|_0^y$$

$$=\frac{i}{2}\left[\ln\frac{(y+i)^2}{y^2+1}-\ln(-1)\right],$$

再设 $\arctan y=\theta$，由此得 $y=\tan\theta$，所以有

$$\theta=\frac{i}{2}\left[\ln\frac{(y+i)^2}{y^2+1}-\ln(-1)\right]=\frac{i}{2}\left[\ln\frac{(\tan\theta+i)^2}{\tan^2\theta+1}-\ln(-1)\right]$$

$$=\frac{i}{2}\left[\ln\frac{\cos^2\theta(\tan\theta+i)^2}{-1}\right]=\frac{i}{2}\ln(\cos^2\theta-2i\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta)$$

$$=\frac{i}{2}\ln[(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))^2]=i\ln[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)],$$

即 $i(-\theta)=\ln[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]$．

令 $x=-\theta$，得 $ix=\ln(\cos x+i\sin x)$，

即有 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$． （证完）

证法五：（极限法）

当$x=0$时，欧拉公式显然成立；

当$x\neq 0$时，考虑极限$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{ix}{n})^n$，($x\in R$，$n\in N$).

一方面，令$t=\frac{n}{ix}$，则有

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{ix}{n})^n=\lim_{n\to\infty}[(1+\frac{1}{t})^t]^{ix}=e^{ix}. \tag{4}$$

另一方面，将$1+\frac{ix}{n}$化为三角式，得

$$1+\frac{ix}{n}=\sqrt{1+(\frac{x}{n})^2}\,[\cos(\arctan(\frac{x}{n}))+i\sin(\arctan(\frac{x}{n}))],$$

由棣莫夫公式得

$$(1+\frac{ix}{n})^n=[1+(\frac{x}{n})^2]^{\frac{n}{2}}[\cos(n\arctan(\frac{x}{n}))+i\sin(n\arctan(\frac{x}{n}))],$$

而$\lim\limits_{n\to\infty}[1+(\frac{x}{n})^2]^{\frac{n}{2}}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\cos(n\arctan(\frac{x}{n}))=x$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(n\arctan(\frac{x}{n}))=x$，

所以有

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{ix}{n})^n=\cos x+i\sin x. \tag{5}$$

由(4)、(5)两式得$e^{ix}=\cos x+i\sin x$. （证完）

3．欧拉公式在高等数学中的应用

欧拉公式在初等数学中有广泛的应用，特别是在三角函数恒等式证明中有十分重要的应用．在高等数学中欧拉公式也有极为广泛的应用，下面举例说明．

3.1 计算

例1 计算下列各式的值

(1) i^i；(2) $\ln(-1)$.

解 (1) 因为由欧拉公式得$i=e^{\frac{\pi}{2}i}$，所以$i^i=(e^{\frac{\pi}{2}i})^i=e^{-\frac{\pi}{2}}$.（这说明 i^i不是虚数）

(2) 在欧拉公式中，取$x=\pi+2n\pi$，($n=0,\pm1,\pm2,\cdots$)，得

$$e^{i(\pi+2n\pi)}=\cos(\pi+2n\pi)+i\sin(\pi+2n\pi)=-1.$$

所以$\ln(-1)=i(\pi+2n\pi)$，($n=0,\pm1,\pm2,\cdots$).[6]

3.2 求高阶导数

例2 设$f(x)=e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha)$，其中$\alpha$为常数，求$f^{(n)}(x)$.

解 构造辅助函数$g(x)=e^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha)$，及$F(x)=f(x)+ig(x)$.

则由欧拉公式得

$$F(x)=e^{x\cos\alpha}[\cos(x\sin\alpha)+i\sin(x\sin\alpha)]=e^{x\cos\alpha}e^{ix\sin\alpha}=e^{x(\cos\alpha+i\sin\alpha)}=e^{xe^{i\alpha}},$$

于是，$F^{(n)}(x)=e^{in\alpha}e^{xe^{i\alpha}}$

$$=(\cos n\alpha+i\sin n\alpha)e^{x\cos\alpha}[\cos(x\sin\alpha)+i\sin(x\sin\alpha)]$$

$$=e^{x\cos\alpha}[\cos(n\alpha+x\sin\alpha)+i\sin(n\alpha+x\sin\alpha)],$$

分离其实部和虚部，即可得所求

$$f^{(n)}(x)=e^{x\cos\alpha}\cos(n\alpha+x\sin\alpha).$$

3.3 求函数的级数展开式

例3 求函数 $f(x)=e^{\sqrt{3}x}(3\cos x-2\sin x)$ 的麦克劳林展式.

解 构造辅助函数 $f_1(x)=e^{\sqrt{3}x}\cos x$，$f_2(x)=e^{\sqrt{3}x}\sin x$，及

$$F(x)=f_1(x)+i\,f_2(x)=e^{\sqrt{3}x}e^{ix}=e^{(\sqrt{3}+i)x}.$$

则 $F(x)$ 的麦克劳林展式为

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}[(\sqrt{3}+i)x]^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}[(2e^{i\frac{\pi}{6}})x]^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}(\cos\frac{n\pi}{6}+i\sin\frac{n\pi}{6})x^n.$$

分离其实部和虚部得

$$f_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}x^n\cos\frac{n\pi}{6},\quad f_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}x^n\sin\frac{n\pi}{6},$$

所以

$$f(x)=3f_1(x)-2f_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}(3\cos\frac{n\pi}{6}-2\sin\frac{n\pi}{6})x^n.$$

3.4 积分计算

例4 计算 $\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx$ 和 $\int e^{\alpha x}\sin\beta x dx$，其中 α 、β 为常数.

解 设 $f_1(x)=\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx$，$f_2(x)=\int e^{\alpha x}\sin\beta x dx$，则有

$$\begin{aligned}f_1(x)+i\,f_2(x)&=\int e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)dx\\&=\int e^{\alpha x}e^{i\beta x}dx=\int e^{(\alpha+i\beta)x}dx=\frac{1}{\alpha+i\beta}e^{(\alpha+i\beta)x}+C\\&=\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha-i\beta)e^{i\beta x}+C\\&=\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}[(\alpha\cos\beta x+\beta\sin\beta x)+i(\alpha\sin\beta x-\beta\cos\beta x)]+C,\end{aligned}$$

分离其实部和虚部得

$$f_1(x)=\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx=\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\cos\beta x+\beta\sin\beta x)+C_1,$$

$$f_2(x)=\int e^{\alpha x}\sin\beta x dx=\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\sin\beta x-\beta\cos\beta x)+C_2.$$

3.5 求三角级数的和函数

例6 求三角级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n\sin nx}{n!}$ 在收敛域（$-\infty$，$+\infty$）上的和函数.[7]

解 设所求为 $s(x)$. 构造在（$-\infty$，$+\infty$）上收敛的三角级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n\cos nx}{n!}$，并设其和函数为 $t(x)$. 于是有

$$t(x)+is(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}(\cos nx+i\sin nx)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}e^{nxi}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(3e^{xi})^n=e^{3e^{xi}}=e^{3(\cos x+i\sin x)}$$

$$=e^{3\cos x}[\cos(3\sin x)+i\sin(3\sin x)]$$

分离其实部和虚部得三角级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n\sin nx}{n!}$ 在收敛域（$-\infty$，$+\infty$）上的和函数为

$$s(x)=e^{3\cos x}\sin(3\sin x).$$

3.6 求复数形式的傅立叶级数

例6　根据实数形式的傅里叶级数求复数形式的傅立叶级数．[7]

解　若函数 $f(x)$ 以 2π 为周期，在 $[-\pi,\pi]$ 上连续或至多有第一类间断点，且在 $[-\pi,\pi]$ 上至多有有限个单调区间，则其实数形式的傅里叶级数为 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$,

其中傅里叶系数为

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx,\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx,\ n=0,1,2,\cdots. \tag{6}$$

因为

$$\cos nx=\frac{1}{2}(e^{inx}+e^{-inx}),\ \sin nx=\frac{1}{2}(e^{inx}-e^{-inx}),$$

所以有

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$
$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[(\frac{1}{2}a_n-\frac{i}{2}b_n)e^{inx}+(\frac{1}{2}a_n+\frac{i}{2}b_n)e^{-inx}]$$

在（6）式中，若以（$-n$）代替 n，则有

$$a_{-n}=a_n,\ b_{-n}=-b_n,$$

记 $c_n=\frac{1}{2}a_n-\frac{i}{2}b_n$，$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$．于是，函数 $f(x)$ 的复数形式的傅里叶级数为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx},$$

其中系数计算公式为

$$c_n=\frac{1}{2}(a_n-ib_n)$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)(\cos nx-i\sin nx)dx$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx.$$

3.7 求微分方程的通解

例7　求微分方程 $y^{(4)}-2y'''+5y''=0$ 的通解．[8]

解　原方程的特征方程为

$$\lambda^4-2\lambda^3+5\lambda^2=0,\ 即\ \lambda^2(\lambda^2-2\lambda+5)=0.$$

由此可知，该特征方程的特征根为 $\lambda_1=\lambda_2=0$，$\lambda_{3,4}=1\pm 2i$.

于是，由欧拉公式及微分方程解的叠加原理得原方程的通解为

$$y=C_1+C_2x+e^x(C_3\cos 2x+C_4\sin 2x).$$

4. 結束语

以上证明和几个方面的实例表明，欧拉公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ 可以将高等数学中的许多知识点联系起来，形成知识链. 掌握欧拉公式及其广泛应用，对于掌握有关数学思想、增强数学审美意识、提高高等数学的学习质量具有重要意义. 有必要对欧拉公式的应用进行更深入的探讨.

参考文献

[1] 李文林. 数学史教程 [M]. 北京：高等教育出版社，2000.
[2]（美）M·克莱因. 古今数学思想 [M].（第二册）. 上海：科学技术出版社，1979.
[3] 杜瑞芝. 数学史辞典 [M]. 济南：山东教育出版社，2000.
[4] 张楚廷. 数学文化 [M]. 北京：高等教育出版社，2000.
[5] 钟玉泉. 复变函数论（第三版）[M]. 北京：高等教育出版社，2004.
[6] 陈仁政. 不可思议的 [M]. 北京：科学出版社，2005.
[7] 龚成通. 高等数学起跑第一步 [M]. 上海：华东理工大学出版社，2004.
[8] 同济大学数学教研室. 高等数学（第四版）[M]. 北京：高等教育出版社，1996.

The Proof and Application of Ewler's Formula in Higher Mathematics

Li Jin

（Department of Mathematics，Hexi University，Zhangye，Gansu，734000）

Abstract: This paper presents a few proofs of Euler's formula $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ in the field of complex number，and shows several applications of Eulev's formula in higher mathematics.

Key words: Euler's formula;Proof;Higher mathematics;Application；Examples

［责任编辑：张飞羽］

下接第（44）页

Analysis of Chemical Constituents of Volatile Oil from Artemisia Argyi with Different Methods

Xu Xin-Jian Song Hai Xue Guo-qin An Hong-gang Wu Dong-qing

（Key Laboratory of Resources and Environment Chemistry of West China,Zhangye Gansu 734000;Department of Chemistry,Hexi University,Zhangye Gansu 734000）

Abstract: In order to analyze chemical constituents of the volatile oil form Artemisia argyi Levl.et Vant, the volatile oil was extracted from Artemisia argyi Levl.et Vant. with different methods ,the components of the volatile oil were separated and identified by GC-MS, the relative content of each component was determined by area normalization. The result showed that the oil with stream distillation is different than the solvent-extraction,and. Stream distillation is ideal for extracting the volatile oils,and solvent-extraction is also viable.

Key words: Artemisia argyi Levl.et Vant.; Volatile oil; GC-MS

［责任编辑：许耀照］

欧拉公式eix=cosx+isinx的几种证明及其在高等数学中的应用

作者： 李劲， Li Jin
作者单位： 河西学院数学系,甘肃,张掖,734000
刊名： 河西学院学报
英文刊名： JOURNAL OF HEXI UNIVERSITY
年，卷(期)： 2008,24(5)

参考文献(8条)

1. 李文林 数学史教程 2000

2. M・克莱因 古今数学思想 1979

3. 杜瑞芝 数学史辞典 2000

4. 张楚廷 数学文化 2000

5. 钟玉泉 复变函数论 2004

6. 陈仁政 不可思议的 2005

7. 龚成通 高等数学起跑第一步 2004

8. 同济大学数学教研室 高等数学 1996

本文读者也读过(9条)