

高等数学公式

导数公式:

$$\begin{aligned} (tgx)' &= \sec^2 x & (\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ (ctgx)' &= -\csc^2 x & (\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ (\sec x)' &= \sec x \cdot tgx & (\arctg x)' &= \frac{1}{1+x^2} \\ (\csc x)' &= -\csc x \cdot ctgx & (\arcctg x)' &= -\frac{1}{1+x^2} \\ (a^x)' &= a^x \ln a \\ (\log_a x)' &= \frac{1}{x \ln a} \end{aligned}$$

基本积分表:

$$\begin{aligned} \int tgx dx &= -\ln|\cos x| + C & \int \frac{dx}{\cos^2 x} &= \int \sec^2 x dx = tgx + C \\ \int ctgx dx &= \ln|\sin x| + C & \int \frac{dx}{\sin^2 x} &= \int \csc^2 x dx = -ctgx + C \\ \int \sec x dx &= \ln|\sec x + tgx| + C & \int \sec x \cdot tgx dx &= \sec x + C \\ \int \csc x dx &= \ln|\csc x - ctgx| + C & \int \csc x \cdot ctgx dx &= -\csc x + C \\ \int \frac{dx}{a^2+x^2} &= \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + C & \int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a} + C \\ \int \frac{dx}{x^2-a^2} &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C & \int shx dx &= chx + C \\ \int \frac{dx}{a^2-x^2} &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C & \int chx dx &= shx + C \\ \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} &= \arcsin \frac{x}{a} + C & \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} &= \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \\ \int \sqrt{x^2+a^2} dx &= \frac{x}{2} \sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C \\ \int \sqrt{x^2-a^2} dx &= \frac{x}{2} \sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2} \ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| + C \\ \int \sqrt{a^2-x^2} dx &= \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C \end{aligned}$$

三角函数的有理式积分:

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad u = tg \frac{x}{2}, \quad dx = \frac{2du}{1+u^2}$$

一些初等函数:

$$\text{双曲正弦: } shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\text{双曲余弦: } chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\text{双曲正切: } thx = \frac{shx}{chx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$arshx = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$archx = \pm \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$arthx = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

两个重要极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e = 2.71828182849045..$$

三角函数公式:

• 诱导公式:

函数 角 A	sin	cos	tg	ctg
-a	-sin a	cos a	-tg a	-ctg a
90° - a	cos a	sin a	ctg a	tg a
90° + a	cos a	-sin a	-ctg a	-tg a
180° - a	sin a	-cos a	-tg a	-ctg a
180° + a	-sin a	-cos a	tg a	ctg a
270° - a	-cos a	-sin a	ctg a	tg a
270° + a	-cos a	sin a	-ctg a	-tg a
360° - a	-sin a	cos a	-tg a	-ctg a
360° + a	sin a	cos a	tg a	ctg a

• 和差角公式:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$tg(\alpha \pm \beta) = \frac{tg \alpha \pm tg \beta}{1 \mp tg \alpha \cdot tg \beta}$$

$$ctg(\alpha \pm \beta) = \frac{ctg \alpha \cdot ctg \beta \mp 1}{ctg \beta \pm ctg \alpha}$$

• 和差化积公式:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

• 倍角公式:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \quad \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

• 半角公式:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$$

• 正弦定理:  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

• 余弦定理:  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

• 反三角函数性质:  $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$

$\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x$

高阶导数公式——莱布尼兹 (Leibniz) 公式:

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$$

$$= u^{(n)} v + n u^{(n-1)} v' + \frac{n(n-1)}{2!} u^{(n-2)} v'' + \dots + \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} u^{(n-k)} v^{(k)} + \dots + uv^{(n)}$$

中值定理与导数应用:

拉格朗日中值定理:  $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$

柯西中值定理:  $\frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$

当  $F(x) = x$  时, 柯西中值定理就是拉格朗日中值定理。

曲率:

弧微分公式:  $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$ , 其中  $y' = \operatorname{tg} \alpha$

平均曲率  $\bar{K} = \left| \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} \right|$ .  $\Delta \alpha$ : 从 M 点到 M' 点, 切线斜率的倾角变化量;  $\Delta s$ : MM 弧长。

M 点的曲率:  $K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} \right| = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right| = \frac{|y''|}{\sqrt{(1 + y'^2)^3}}$ .

直线:  $K = 0$ ;

半径为  $a$  的圆:  $K = \frac{1}{a}$ .

定积分的近似计算:

矩形法:  $\int_a^b f(x) \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1})$

梯形法:  $\int_a^b f(x) \approx \frac{b-a}{n}[\frac{1}{2}(y_0 + y_n) + y_1 + \cdots + y_{n-1}]$

抛物线法:  $\int_a^b f(x) \approx \frac{b-a}{3n}[(y_0 + y_n) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1})]$

定积分应用相关公式:

功:  $W = F \cdot s$

水压力:  $F = p \cdot A$

引力:  $F = k \frac{m_1 m_2}{r^2}$ ,  $k$ 为引力系数

函数的平均值:  $\bar{y} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

均方根:  $\sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b f^2(t) dt}$

空间解析几何和向量代数:

空间2点的距离:  $d = |M_1 M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

向量在轴上的投影  $\text{Pr } j_u \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos \varphi$ ,  $\varphi$ 是 $\overrightarrow{AB}$ 与 $u$ 轴的夹角。

$\text{Pr } j_u (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = \text{Pr } j_u \vec{a}_1 + \text{Pr } j_u \vec{a}_2$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \theta = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ , 是一个数量

两向量之间的夹角  $\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$

$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$ ,  $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \theta$ . 例: 线速度:  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ .

向量的混合积  $[\vec{a} \vec{b} \vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cos \alpha$ ,  $\alpha$ 为锐角时,

代表平行六面体的体积

平面的方程:

1、点法式:  $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ , 其中  $\vec{n}=\{A,B,C\}, M_0(x_0, y_0, z_0)$

2、一般方程:  $Ax+By+Cz+D=0$

3、截距式方程:  $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

平面外任意一点到该平面的距离:  $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

空间直线的方程:  $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p} = t$ , 其中  $\vec{s}=\{m,n,p\}$ ; 参数方程  $\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$

二次曲面:

1、椭球面:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

2、抛物面:  $\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z, (p, q \text{ 同号})$

3、双曲面:

单叶双曲面:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

双叶双曲面:  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  (马鞍面)

### 多元函数微分法及应用

全微分:  $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$        $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$

全微分的近似计算:  $\Delta z \approx dz = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y$

多元复合函数的求导法

$z = f[u(t), v(t)]$        $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial t}$

$z = f[u(x, y), v(x, y)]$        $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$

当  $u = u(x, y), v = v(x, y)$  时,

$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$        $dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy$

隐函数的求导公式:

隐函数  $F(x, y) = 0$ ,       $\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$ ,       $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{F_x}{F_y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{F_x}{F_y} \right) \cdot \frac{dy}{dx}$

隐函数  $F(x, y, z) = 0$ ,       $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$ ,       $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$

$$\text{隐函数方程组} \begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases} \quad J = \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, x)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, v)} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, y)}$$

微分法在几何上的应用:

$$\text{空间曲线} \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \omega(t) \end{cases} \text{在点} M(x_0, y_0, z_0) \text{处的切线方程: } \frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)} = \frac{y-y_0}{\psi'(t_0)} = \frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$$

在点 $M$ 处的法平面方程:  $\varphi'(t_0)(x-x_0) + \psi'(t_0)(y-y_0) + \omega'(t_0)(z-z_0) = 0$

$$\text{若空间曲线方程为} \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}, \text{则切向量} \vec{T} = \left\{ \begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix} \right\}$$

曲面 $F(x, y, z) = 0$ 上一点 $M(x_0, y_0, z_0)$ , 则:

1、过此点的法向量:  $\vec{n} = \{F_x(x_0, y_0, z_0), F_y(x_0, y_0, z_0), F_z(x_0, y_0, z_0)\}$

2、过此点的切平面方程  $F_x(x_0, y_0, z_0)(x-x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y-y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z-z_0) = 0$

3、过此点的法线方程:  $\frac{x-x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y-y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z-z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$

方向导数与梯度:

函数 $z = f(x, y)$ 在一点 $p(x, y)$ 沿任一方向的方向导数为  $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \varphi$

其中 $\varphi$ 为 $x$ 轴到方向 $l$ 的转角。

函数 $z = f(x, y)$ 在一点 $p(x, y)$ 的梯度:  $\text{grad} f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j}$

它与方向导数的关系是  $\frac{\partial f}{\partial l} = \text{grad} f(x, y) \cdot \vec{e}$ , 其中 $\vec{e} = \cos \varphi \cdot \vec{i} + \sin \varphi \cdot \vec{j}$ , 为 $l$ 方向上的单位向量。

$\therefore \frac{\partial f}{\partial l}$  是  $\text{grad} f(x, y)$  在  $l$  上的投影。

多元函数的极值及其求法:

设  $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ , 令:  $f_{xx}(x_0, y_0) = A$ ,  $f_{xy}(x_0, y_0) = B$ ,  $f_{yy}(x_0, y_0) = C$

$$\text{则} \begin{cases} AC - B^2 > 0 \text{ 时,} & \begin{cases} A < 0, (x_0, y_0) \text{ 为极大值} \\ A > 0, (x_0, y_0) \text{ 为极小值} \end{cases} \\ AC - B^2 < 0 \text{ 时,} & \text{无极值} \\ AC - B^2 = 0 \text{ 时,} & \text{不确定} \end{cases}$$

重积分及其应用:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

$$\text{曲面 } z = f(x, y) \text{ 的面积 } A = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

$$\text{平面薄片的重心: } \bar{x} = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint_D x \rho(x, y) d\sigma}{\iint_D \rho(x, y) d\sigma}, \quad \bar{y} = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint_D y \rho(x, y) d\sigma}{\iint_D \rho(x, y) d\sigma}$$

$$\text{平面薄片的转动惯量: 对于 } x \text{ 轴 } I_x = \iint_D y^2 \rho(x, y) d\sigma, \quad \text{对于 } y \text{ 轴 } I_y = \iint_D x^2 \rho(x, y) d\sigma$$

平面薄片 (位于  $xoy$  平面) 对  $z$  轴上质点  $M(0, 0, a)$ , ( $a > 0$ ) 的引力:  $F = \{F_x, F_y, F_z\}$ , 其中:

$$F_x = f \iint_D \frac{\rho(x, y) x d\sigma}{(x^2 + y^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad F_y = f \iint_D \frac{\rho(x, y) y d\sigma}{(x^2 + y^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad F_z = -fa \iint_D \frac{\rho(x, y) d\sigma}{(x^2 + y^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

柱面坐标和球面坐标:

$$\text{柱面坐标} \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}, \quad \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega} F(r, \theta, z) r dr d\theta dz,$$

其中:  $F(r, \theta, z) = f(r \cos \theta, r \sin \theta, z)$

$$\text{球面坐标} \begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \varphi \end{cases}, \quad dv = r d\varphi \cdot r \sin \varphi \cdot d\theta \cdot dr = r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega} F(r, \varphi, \theta) r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{r(\varphi, \theta)} F(r, \varphi, \theta) r^2 \sin \varphi dr$$

$$\text{重心: } \bar{x} = \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} x \rho dv, \quad \bar{y} = \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} y \rho dv, \quad \bar{z} = \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} z \rho dv, \quad \text{其中 } M = \bar{x} = \iiint_{\Omega} \rho dv$$

$$\text{转动惯量: } I_x = \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) \rho dv, \quad I_y = \iiint_{\Omega} (x^2 + z^2) \rho dv, \quad I_z = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \rho dv$$

曲线积分:

第一类曲线积分（对弧长的曲线积分）：

设 $f(x, y)$ 在 $L$ 上连续， $L$ 的参数方程为 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ ， $(\alpha \leq t \leq \beta)$ ，则：

$$\int_L f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t), \psi(t)] \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt \quad (\alpha < \beta) \quad \text{特殊情况} \begin{cases} x = t \\ y = \varphi(t) \end{cases}$$

第二类曲线积分（对坐标的曲线积分）：

设 $L$ 的参数方程为 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ ，则：

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} \{P[\varphi(t), \psi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t), \psi(t)]\psi'(t)\} dt$$

两类曲线积分之间的关系： $\int_L P dx + Q dy = \int_L (P \cos \alpha + Q \cos \beta) ds$ ，其中 $\alpha$ 和 $\beta$ 分别为 $L$ 上积分起止点处切向量的方向角。

格林公式： $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy = \int_L P dx + Q dy$  格林公式： $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy = \int_L P dx + Q dy$

当 $P = -y, Q = x$ ，即： $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2$ 时，得到 $D$ 的面积： $A = \iint_D dx dy = \frac{1}{2} \int_L x dy - y dx$

平面上曲线积分与路径无关的条件：

1、 $G$ 是一个单连通区域；

2、 $P(x, y), Q(x, y)$ 在 $G$ 内具有一阶连续偏导数 且 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ 。注意奇点，如 $(0,0)$ ，应

减去对此奇点的积分，注意方向相反！

二元函数的全微分求积

在 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ 时， $P dx + Q dy$ 才是二元函数 $u(x, y)$ 的全微分，其中：

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy, \quad \text{通常设 } x_0 = y_0 = 0.$$

曲面积分：



对面积的曲面积分  $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) ds = \iint_{D_{xy}} f[x, y, z(x, y)] \sqrt{1 + z_x^2(x, y) + z_y^2(x, y)} dx dy$

对坐标的曲面积分  $\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy$  其中:

$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \pm \iint_{D_{xy}} R[x, y, z(x, y)] dx dy$  取曲面的上侧时取正号;

$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz = \pm \iint_{D_{yz}} P[x(y, z), y, z] dy dz$  取曲面的前侧时取正号;

$\iint_{\Sigma} Q(x, y, z) dz dx = \pm \iint_{D_{zx}} Q[x, y(z, x), z] dz dx$  取曲面的右侧时取正号。

两类曲面积分之间的关系:  $\iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds$

高斯公式:

$$\iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \iint_{\Sigma} P dydz + Q dzdx + R dxdy = \iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds$$

高斯公式的物理意义——通量与散度：

散度： $\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ ，即：单位体积内所产生的流体质量，若 $\operatorname{div} \vec{v} < 0$ ，则为消失..

$$\text{通量: } \iint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \vec{n} ds = \iint_{\Sigma} A_n ds = \iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds,$$

因此，高斯公式又可写成： $\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{A} dv = \iint_{\Sigma} A_n ds$

斯托克斯公式——曲线积分与曲面积分的关系：

$$\iint_{\Sigma} \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz$$

$$\text{上式左端又可写成 } \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

空间曲线积分与路径无关的条件： $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$ ， $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$ ， $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

$$\text{旋度: } \operatorname{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

向量场 $\vec{A}$ 沿有向闭曲线 $\Gamma$ 的环流量： $\int_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz = \int_{\Gamma} \vec{A} \cdot \vec{\tau} ds$

常数项级数：

$$\text{等比数列 } 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$\text{等差数列 } 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{(n+1)n}{2}$$

调和级数  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$  是发散的

级数审敛法：

1、正项级数的审敛法——根植审敛法（柯西判别法）：

$$\text{设: } \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n}, \text{ 则} \begin{cases} \rho < 1 \text{ 时, 级数收敛} \\ \rho > 1 \text{ 时, 级数发散} \\ \rho = 1 \text{ 时, 不确定} \end{cases}$$

2、比值审敛法：

$$\text{设: } \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n}, \text{ 则} \begin{cases} \rho < 1 \text{ 时, 级数收敛} \\ \rho > 1 \text{ 时, 级数发散} \\ \rho = 1 \text{ 时, 不确定} \end{cases}$$

3、定义法：

$s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  存在，则收敛；否则发散。

交错级数  $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots$  (或  $-u_1 + u_2 - u_3 + \dots, u_n > 0$ ) 的审敛法——莱布尼兹定理：

如果交错级数满足  $\begin{cases} u_n \geq u_{n+1} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 \end{cases}$ ，那么级数收敛且其和  $\leq u_1$ ，其余项  $r_n$  的绝对值  $|r_n| \leq u_{n+1}$ 。

**绝对收敛与条件收敛：**

(1)  $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ ，其中  $u_n$  为任意实数；

(2)  $|u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots + |u_n| + \dots$

如果(2)收敛，则(1)肯定收敛，且称为绝对收敛级数；

如果(2)发散，而(1)收敛，则称(1)为条件收敛级数。

调和级数： $\sum \frac{1}{n}$  发散，而  $\sum \frac{(-1)^n}{n}$  收敛；

级数： $\sum \frac{1}{n^2}$  收敛；

$p$  级数： $\sum \frac{1}{n^p}$   $\begin{cases} p \leq 1 \text{ 时发散} \\ p > 1 \text{ 时收敛} \end{cases}$

**幂级数：**

$$1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots \begin{cases} |x| < 1 \text{ 时, 收敛于 } \frac{1}{1-x} \\ |x| \geq 1 \text{ 时, 发散} \end{cases}$$

对于级数(3) $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$ , 如果它不是仅在原点收敛, 也不是在全

数轴上都收敛, 则必存在 $R$ , 使  $\begin{cases} |x| < R \text{ 时收敛} \\ |x| > R \text{ 时发散} \\ |x| = R \text{ 时不定} \end{cases}$ , 其中 $R$ 称为收敛半径。

求收敛半径的方法: 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$ , 其中 $a_n, a_{n+1}$ 是(3)的系数, 则  $\begin{cases} \rho \neq 0 \text{ 时, } R = \frac{1}{\rho} \\ \rho = 0 \text{ 时, } R = +\infty \\ \rho = +\infty \text{ 时, } R = 0 \end{cases}$

函数展开成幂级数:

$$\text{函数展开成泰勒级数: } f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \cdots$$

余项:  $R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ ,  $f(x)$ 可以展开成泰勒级数的充要条件是  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$

$$x_0 = 0 \text{ 时即为麦克劳林公式: } f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

一些函数展开成幂级数:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots \quad (-1 < x < 1)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

欧拉公式:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad \text{或} \quad \begin{cases} \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} \end{cases}$$

三角级数:

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

其中,  $a_0 = 2A_0$ ,  $a_n = A_n \sin \varphi_n$ ,  $b_n = A_n \cos \varphi_n$ ,  $\omega t = x$ 。

正交性  $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \cdots, \sin nx, \cos nx, \cdots$  任意两个不同项的乘积在 $[-\pi, \pi]$ 上的积分=0。

傅立叶级数:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad \text{周期} = 2\pi$$

$$\text{其中} \begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx & (n=0,1,2,\dots) \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx & (n=1,2,3,\dots) \end{cases}$$

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8} \quad \left/ \quad 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6} \text{ (相加)}$$

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots = \frac{\pi^2}{24} \quad \left/ \quad 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{12} \text{ (相减)}$$

正弦级数:  $a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad n=1,2,3,\dots \quad f(x) = \sum b_n \sin nx$  是奇函数

余弦级数:  $b_n = 0, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad n=0,1,2,\dots \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx$  是偶函数

周期为  $2l$  的周期函数的傅立叶级数:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right), \quad \text{周期} = 2l$$

$$\text{其中} \begin{cases} a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx & (n=0,1,2,\dots) \\ b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx & (n=1,2,3,\dots) \end{cases}$$

**微分方程的相关概念:**

一阶微分方程:  $y' = f(x, y)$  或  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$

可分离变量的微分方程 一阶微分方程可以化为  $g(y)dy = f(x)dx$  的形式, 解法:

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx \quad \text{得: } G(y) = F(x) + C \text{ 称为隐式通解。}$$

齐次方程: 一阶微分方程可以写成  $\frac{dy}{dx} = f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ , 即写成  $\frac{y}{x}$  的函数, 解法:

设  $u = \frac{y}{x}$ , 则  $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$ ,  $u + \frac{du}{dx} = \varphi(u)$ ,  $\therefore \frac{dx}{x} = \frac{du}{\varphi(u) - u}$  分离变量, 积分后将  $\frac{y}{x}$  代替  $u$ ,

即得齐次方程通解。

**一阶线性微分方程:**

1、一阶线性微分方程:  $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$

$$\begin{cases} \text{当 } Q(x) = 0 \text{ 时, 为齐次方程, } y = Ce^{-\int P(x)dx} \\ \text{当 } Q(x) \neq 0 \text{ 时, 为非齐次方程, } y = \left( \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right) e^{-\int P(x)dx} \end{cases}$$

2、贝努力方程:  $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n, (n \neq 0, 1)$

**全微分方程:**

如果  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$  中左端是某函数的全微分方程, 即:

$$du(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \quad \text{其中: } \frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$$

$\therefore u(x, y) = C$  应该是该全微分方程的通解。

**二阶微分方程:**

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = f(x), \begin{cases} f(x) \equiv 0 \text{ 时为齐次} \\ f(x) \neq 0 \text{ 时为非齐次} \end{cases}$$

**二阶常系数齐次线性微分方程及其解法:**

(\*)  $y'' + py' + qy = 0$ , 其中  $p, q$  为常数;

求解步骤:

1、写出特征方程  $(\Delta)r^2 + pr + q = 0$ , 其中  $r^2$ ,  $r$  的系数及常数项恰好是(\*)式中  $y'', y', y$  的系数;

2、求出  $(\Delta)$  式的两个根  $r_1, r_2$

3. 根据 $r_1, r_2$ 的不同情况, 按下表写出(\*)式的通解:

$r_1, r_2$ 的形式	(*)式的通解
两个不相等实根( $p^2 - 4q > 0$ )	$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$
两个相等实根( $p^2 - 4q = 0$ )	$y = (c_1 + c_2 x) e^{r_1 x}$
一对共轭复根( $p^2 - 4q < 0$ )  $r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \alpha - i\beta$ $\alpha = -\frac{p}{2}, \beta = \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2}$	$y = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$

二阶常系数非齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = f(x), \quad p, q \text{ 为常数}$$

$$f(x) = e^{\lambda x} P_m(x) \text{ 型, } \lambda \text{ 为常数;}$$

$$f(x) = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos \omega x + P_n(x) \sin \omega x] \text{ 型}$$

## 概率论与数理统计

1. 随机事件及其概率

$$A \cup \Omega = \Omega \quad A \cap \Omega = A$$

吸收律:  $A \cup \emptyset = A \quad A \cap \emptyset = \emptyset$

$$A \cup (AB) = A \quad A \cap (A \cup B) = A$$

$$A - B = A\bar{B} = A - (AB)$$

反演律:  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \bar{B} \quad \overline{AB} = \bar{A} \cup \bar{B}$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i \quad \overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i$$

2. 概率的定义及其计算

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

若  $A \subset B \Rightarrow P(B - A) = P(B) - P(A)$

对任意两个事件  $A, B$ , 有  $P(B - A) = P(B) - P(AB)$

加法公式: 对任意两个事件  $A, B$ , 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i A_j A_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n)$$

3. 条件概率  $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$

乘法公式

$$P(AB) = P(A)P(B|A) \quad (P(A) > 0)$$

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2 | A_1) \cdots P(A_n | A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) \quad \text{全概率公式}$$

$$(P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) > 0)$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(AB_i) = \sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P(A|B_i)$$

Bayes 公式

$$P(B_k|A) = \frac{P(AB_k)}{P(A)} = \frac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i)}$$

4. 随机变量及其分布

分布函数计算

$$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$$

$$= F(b) - F(a)$$

5. 离散型随机变量

(1) 0 - 1 分布

$$P(X = k) = p^k (1-p)^{1-k}, \quad k = 0, 1$$

(2) 二项分布  $B(n, p)$

若  $P(A) = p$

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

\* Poisson 定理

$$\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda > 0$$

有  $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$



(3) Poisson 分布  $P(\lambda)$

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

6. 连续型随机变量

(1) 均匀分布  $U(a, b)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, \\ \frac{x-a}{b-a}, \\ 1 \end{cases}$$

(2) 指数分布  $E(\lambda)$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

(3) 正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < +\infty$$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

\*  $N(0, 1)$  — 标准正态分布

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad -\infty < x < +\infty$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad -\infty < x < +\infty$$

7. 多维随机变量及其分布

二维随机变量  $(X, Y)$  的分布函数

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) dv du$$

边缘分布函数与边缘密度函数

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v) dv du$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, v) dv$$

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v) du dv$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, y) du$$

8. 连续型二维随机变量

(1) 区域  $G$  上的均匀分布,  $U(G)$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{A}, & (x, y) \in G \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(2) 二维正态分布

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \times e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[ \frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right]}$$

9. 二维随机变量的 条件分布

$-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$

$$f(x, y) = f_X(x)f_{Y|X}(y|x) \quad f_X(x) > 0$$

$$= f_Y(y)f_{X|Y}(x|y) \quad f_Y(y) > 0$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|Y}(x|y)f_Y(y) dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y|X}(y|x)f_X(x) dx$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{f_{Y|X}(y|x)f_X(x)}{f_Y(y)}$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)}{f_X(x)}$$

10. 随机变量的数字特征

数学期望

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k p_k$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx$$

随机变量函数的数学期望

$X$  的  $k$  阶原点矩  $E(X^k)$

$X$  的  $k$  阶绝对原点矩  $E(|X|^k)$

$X$  的  $k$  阶中心矩  $E((X - E(X))^k)$

$X$  的方差  $E((X - E(X))^2) = D(X)$

$X, Y$  的  $k + l$  阶混合原点矩  $E(X^k Y^l)$

$X, Y$  的  $k + l$  阶混合中心矩

$$E((X - E(X))^k (Y - E(Y))^l)$$

$X, Y$  的二阶混合原点矩  $E(XY)$

$X, Y$  的二阶混合中心矩  $X, Y$  的协方差

$$E((X - E(X))(Y - E(Y)))$$

$X, Y$  的相关系数

$$E\left(\frac{(X - E(X))(Y - E(Y))}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}\right) = \rho_{XY}$$

$X$  的方差

$$D(X) = E((X - E(X))^2)$$

$$D(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

协方差

$$\text{cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$$

$$= E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$= \pm \frac{1}{2}(D(X \pm Y) - D(X) - D(Y))$$

$$\text{相关系数 } \rho_{XY} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

简单整理了一下，中心极限定理及数理统计部分多概念少公式故未详细列出

## 线性代数

行列式

$n$  行列式共有  $n^2$  个元素，展开后有  $n!$  项，可分解为  $2^n$  行列式；

代数余子式的性质：

①、 $A_{ij}$  和  $a_{ij}$  的大小无关；

②、某行（列）的元素乘以其它行（列）元素的代数余子式为 0；

③、某行（列）的元素乘以该行（列）元素的代数余子式为  $|A|$ ；

代数余子式和余子式的关系： $M_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$        $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

设  $n$  行列式  $D$ ：

将  $D$  上、下翻转或左右翻转，所得行列式为  $D_1$ ，则  $D_1 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D$ ；

将  $D$  顺时针或逆时针旋转  $90^\circ$ ，所得行列式为  $D_2$ ，则  $D_2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D$ ；

将  $D$  主对角线翻转后（转置），所得行列式为  $D_3$ ，则  $D_3 = D$ ；

将  $D$  主副角线翻转后，所得行列式为  $D_4$ ，则  $D_4 = D$ ；

行列式的重要公式：

①、主对角行列式：主对角元素的乘积；

②、副对角行列式：副对角元素的乘积  $\times (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ ；

③、上、下三角行列式 ( $|\blacktriangledown| = |\blacktriangle|$ )：主对角元素的乘积；

④、 $|\blacktriangledown|$  和  $|\blacktriangle|$ ：副对角元素的乘积  $\times (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ ；

⑤、拉普拉斯展开式： $\begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = |A||B|$ 、 $\begin{vmatrix} C & A \\ B & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & A \\ B & C \end{vmatrix} = (-1)^{m \cdot n} |A||B|$

⑥、范德蒙行列式：大指标减小指标的连乘积；

⑦、特征值；

对于  $n$  阶行列式  $|A|$ ，恒有： $|\lambda E - A| = \lambda^n + \sum_{k=1}^n (-1)^k S_k \lambda^{n-k}$ ，其中  $S_k$  为  $k$  阶主子式；

证明  $|A| = 0$  的方法：

①、 $|A| = -|A|$ ；

②、反证法；

③、构造齐次方程组  $Ax = 0$ ，证明其有非零解；

④、利用秩，证明  $r(A) < n$ ；

⑤、证明 0 是其特征值；

矩阵

$A$  是  $n$  阶可逆矩阵：

$\Leftrightarrow |A| \neq 0$ （是非奇异矩阵）；

$\Leftrightarrow r(A) = n$ （是满秩矩阵）

$\Leftrightarrow A$  的行（列）向量组线性无关；

$\Leftrightarrow$  齐次方程组  $Ax=0$  有非零解;

$\Leftrightarrow \forall b \in R^n, Ax=b$  总有唯一解;

$\Leftrightarrow A$  与  $E$  等价;

$\Leftrightarrow A$  可表示成若干个初等矩阵的乘积;

$\Leftrightarrow A$  的特征值全不为 0;

$\Leftrightarrow A^T A$  是正定矩阵;

$\Leftrightarrow A$  的行(列)向量组是  $R^n$  的一组基;

$\Leftrightarrow A$  是  $R^n$  中某两组基的过渡矩阵;

对于  $n$  阶矩阵  $A: AA^* = A^*A = |A|E$  无条件恒成立;

$$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1} \quad (A^{-1})^T = (A^T)^{-1} \quad (A^*)^T = (A^T)^*$$

$$(AB)^T = B^T A^T \quad (AB)^* = B^* A^* \quad (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

矩阵是表格, 推导符号为波浪号或箭头; 行列式是数值, 可求代数和;

关于分块矩阵的重要结论, 其中均  $A、B$  可逆:

若  $A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$ , 则:

I、 $|A| = |A_1| |A_2| \cdots |A_s|$ ;

II、 $A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$ ;

②、 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$ ; (主对角分块)

③、 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$ ; (副对角分块)

④、 $\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$ ; (拉普拉斯)

⑤、 $\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}$ ; (拉普拉斯)

矩阵的初等变换与线性方程组

一个  $m \times n$  矩阵  $A$ , 总可经过初等变换化为标准形, 其标准形是唯一确定的:  $F = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m \times n}$ ;

等价类：所有与  $A$  等价的矩阵组成的一个集合，称为一个等价类；标准形为其形状最简单的矩阵；

对于同型矩阵  $A, B$ ，若  $r(A) = r(B) \Leftrightarrow A \sim B$ ；

行最简形矩阵：

- ①、只能通过初等行变换获得；
- ②、每行首个非 0 元素必须为 1；
- ③、每行首个非 0 元素所在列的其他元素必须为 0；

初等行变换的应用：（初等列变换类似，或转置后采用初等行变换）

若  $(A, E) \xrightarrow{r} (E, X)$ ，则  $A$  可逆，且  $X = A^{-1}$ ；

②、对矩阵  $(A, B)$  做初等行变化，当  $A$  变为  $E$  时， $B$  就变成  $A^{-1}B$ ，即： $(A, B) \xrightarrow{r} (E, A^{-1}B)$ ；

③、求解线性方程组：对于  $n$  个未知数  $n$  个方程  $Ax = b$ ，如果  $(A, b) \xrightarrow{r} (E, x)$ ，则  $A$  可逆，且  $x = A^{-1}b$ ；

初等矩阵和对角矩阵的概念：

①、初等矩阵是行变换还是列变换，由其位置决定：左乘为初等行矩阵、右乘为初等列矩阵；

②、 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ ，左乘矩阵  $A$ ， $\lambda_i$  乘  $A$  的各行元素；右乘， $\lambda_i$  乘  $A$  的各列元素；

③、对调两行或两列，符号  $E(i, j)$ ，且  $E(i, j)^{-1} = E(i, j)$ ，例如： $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & & \\ & & & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ ；

④、倍乘某行或某列，符号  $E(i(k))$ ，且  $E(i(k))^{-1} = E(i(\frac{1}{k}))$ ，例如： $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & k & & \\ & & & \\ & & & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{k} & & \\ & & & \\ & & & 1 \end{pmatrix} (k \neq 0)$ ；

⑤、倍加某行或某列，符号  $E(ij(k))$ ，且  $E(ij(k))^{-1} = E(ij(-k))$ ，如： $\begin{pmatrix} 1 & & k & \\ & 1 & & \\ & & & \\ & & & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & -k & \\ & 1 & & \\ & & & \\ & & & 1 \end{pmatrix} (k \neq 0)$ ；

矩阵秩的基本性质：

- ①、 $0 \leq r(A_{m \times n}) \leq \min(m, n)$ ；
- ②、 $r(A^T) = r(A)$ ；
- ③、若  $A \sim B$ ，则  $r(A) = r(B)$ ；
- ④、若  $P, Q$  可逆，则  $r(A) = r(PA) = r(AQ) = r(PAQ)$ ；（可逆矩阵不影响矩阵的秩）
- ⑤、 $\max(r(A), r(B)) \leq r(A, B) \leq r(A) + r(B)$ ；（※）
- ⑥、 $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$ ；（※）

⑦、 $r(\mathbf{AB}) \leq \min(r(\mathbf{A}), r(\mathbf{B}))$ ; (※)

⑧、如果  $\mathbf{A}$  是  $m \times n$  矩阵,  $\mathbf{B}$  是  $n \times s$  矩阵, 且  $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ , 则: (※)

I、 $\mathbf{B}$  的列向量全部是齐次

方程组  $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$  解 (转置运算后的结论);

II、 $r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B}) \leq n$

⑨、若  $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$  均为  $n$  阶方阵, 则  $r(\mathbf{AB}) \geq r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B}) - n$ ;

三种特殊矩阵的方幂:

①、秩为 1 的矩阵: 一定可以分解为列矩阵 (向量)  $\times$  行矩阵 (向量) 的形式, 再采用结合律;

②、型如  $\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{a} & \mathbf{c} \\ 0 & 1 & \mathbf{b} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  的矩阵: 利用二项展开式;

二 项 展 开 式 :

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})^n = C_n^0 \mathbf{a}^n + C_n^1 \mathbf{a}^{n-1} \mathbf{b}^1 + \cdots + C_n^m \mathbf{a}^{n-m} \mathbf{b}^m + \cdots + C_n^{n-1} \mathbf{a}^1 \mathbf{b}^{n-1} + C_n^n \mathbf{b}^n = \sum_{m=0}^n C_n^m \mathbf{a}^m \mathbf{b}^{n-m};$$

注: I、 $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^n$  展开后有

$n+1$  项;

$$\text{II、} C_n^m = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad C_n^0 = C_n^n = 1$$

$$\text{III、组合的性质: } C_n^m = C_n^{n-m} \quad C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1} \quad \sum_{r=0}^n C_n^r = 2^n \quad r C_n^r = n C_{n-1}^{r-1};$$

③、利用特征值和相似对角化:

伴随矩阵:

$$\text{①、伴随矩阵的秩: } r(\mathbf{A}^*) = \begin{cases} n & r(\mathbf{A}) = n \\ 1 & r(\mathbf{A}) = n-1; \\ 0 & r(\mathbf{A}) < n-1 \end{cases}$$

$$\text{②、伴随矩阵的特征值: } \frac{|\mathbf{A}|}{\lambda} \quad (\mathbf{AX} = \lambda \mathbf{X}, \mathbf{A}^* = |\mathbf{A}| \mathbf{A}^{-1} \Rightarrow \mathbf{A}^* \mathbf{X} = \frac{|\mathbf{A}|}{\lambda} \mathbf{X});$$

$$\text{③、} \mathbf{A}^* = |\mathbf{A}| \mathbf{A}^{-1}, \quad |\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}|^{n-1}$$

关于  $\mathbf{A}$  矩阵秩的描述:

①、 $r(\mathbf{A}) = n$ ,  $\mathbf{A}$  中有  $n$  阶子式不为 0,  $n+1$  阶子式全部为 0; (两句话)

②、 $r(\mathbf{A}) < n$ ,  $\mathbf{A}$  中有  $n$  阶子式全部为 0;

③、 $r(\mathbf{A}) \geq n$ ,  $\mathbf{A}$  中有  $n$  阶子式不为 0;

线性方程组:  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , 其中  $\mathbf{A}$  为  $m \times n$  矩阵, 则:

- ①、 $m$  与方程的个数相同，即方程组  $Ax=b$  有  $m$  个方程；
- ②、 $n$  与方程组得未知数个数相同，方程组  $Ax=b$  为  $n$  元方程；

线性方程组  $Ax=b$  的求解：

- ①、对增广矩阵  $B$  进行初等行变换（只能使用初等行变换）；
- ②、齐次解为对应齐次方程组的解；
- ③、特解：自由变量赋初值后求得；

由  $n$  个未知数  $m$  个方程的方程组构成  $n$  元线性方程：

$$\textcircled{1}、\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_n \end{cases} ;$$

$$\textcircled{2}、\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \Leftrightarrow Ax=b \text{ (向量方程, } A \text{ 为 } m \times n \text{ 矩阵, } m \text{ 个方程, } n \text{ 个未知数)}$$

$$\textcircled{3}、(a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \beta \text{ (全部按列分块, 其中 } \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{);}$$

$$\textcircled{4}、a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=\beta \text{ (线性表出)}$$

$$\textcircled{5}、有解的充要条件:  $r(A)=r(A,\beta) \leq n$  ( $n$  为未知数的个数或维数)$$

向量组的线性相关性

$m$  个  $n$  维列向量所组成的向量组  $A$ :  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  构成  $n \times m$  矩阵  $A=(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ ;

$$m \text{ 个 } n \text{ 维行向量所组成的向量组 } B: \beta_1^T, \beta_2^T, \dots, \beta_m^T \text{ 构成 } m \times n \text{ 矩阵 } B = \begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \vdots \\ \beta_m^T \end{pmatrix};$$

含有有限个向量的有序向量组与矩阵一一对应；

- ①、向量组的线性相关、无关  $\Leftrightarrow Ax=0$  有、无非零解；（齐次线性方程组）
- ②、向量的线性表出  $\Leftrightarrow Ax=b$  是否有解；（线性方程组）
- ③、向量组的相互线性表示  $\Leftrightarrow AX=B$  是否有解；（矩阵方程）

矩阵  $A_{m \times n}$  与  $B_{l \times n}$  行向量组等价的充分必要条件是：齐次方程组  $Ax=0$  和  $Bx=0$  同解；（ $P_{101}$  例 14）

$$r(A^T A)=r(A); \text{ (} P_{101} \text{ 例 15)}$$

$n$  维向量线性相关的几何意义：



- ①、 $\alpha$  线性相关  $\Leftrightarrow \alpha=0$ ;
- ②、 $\alpha, \beta$  线性相关  $\Leftrightarrow \alpha, \beta$  坐标成比例或共线  
 (平行);
- ③、 $\alpha, \beta, \gamma$  线性相关  $\Leftrightarrow \alpha, \beta, \gamma$  共面;

线性相关与无关的两套定理:

若  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性相关, 则  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \alpha_{s+1}$  必线性相关;

若  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关, 则  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}$  必线性无关; (向量的个数加加减减, 二者为对偶)

若  $r$  维向量组  $A$  的每个向量上添上  $n-r$  个分量, 构成  $n$  维向量组  $B$ :

若  $A$  线性无关, 则  $B$  也线性无关; 反之若  $B$  线性相关, 则  $A$  也线性相关; (向量组的维数加加减减)

简言之: 无关组延长后仍无关, 反之, 不确定;

向量组  $A$  (个数为  $r$ ) 能由向量组  $B$  (个数为  $s$ ) 线性表示, 且  $A$  线性无关, 则  $r \leq s$  (二版  $P_{74}$  定理 7);

向量组  $A$  能由向量组  $B$  线性表示, 则  $r(A) \leq r(B)$ ; ( $P_{86}$  定理 3)

向量组  $A$  能由向量组  $B$  线性表示

$\Leftrightarrow AX=B$  有解;

$$\Leftrightarrow r(A) = r(A, B) \quad (P_{85} \text{ 定理 2})$$

向量组  $A$  能由向量组  $B$  等价  $\Leftrightarrow r(A) = r(B) = r(A, B)$  ( $P_{85}$  定理 2 推论)

方阵  $A$  可逆  $\Leftrightarrow$  存在有限个初等矩阵  $P_1, P_2, \dots, P_l$ , 使  $A = P_1 P_2 \dots P_l$ ;

①、矩阵行等价:  $A \overset{r}{\sim} B \Leftrightarrow PA=B$  (左乘,  $P$  可逆)  $\Leftrightarrow Ax=0$  与  $Bx=0$  同解

②、矩阵列等价:  $A \overset{c}{\sim} B \Leftrightarrow AQ=B$  (右乘,  $Q$  可逆);

③、矩阵等价:  $A \sim B \Leftrightarrow PAQ=B$  ( $P, Q$  可逆);

对于矩阵  $A_{m \times n}$  与  $B_{l \times n}$ :

①、若  $A$  与  $B$  行等价, 则  $A$  与  $B$  的行秩相等;

②、若  $A$  与  $B$  行等价, 则  $Ax=0$  与  $Bx=0$  同解, 且  $A$  与  $B$  的任何对应的列向量组具有相同的线性相关性;

③、矩阵的初等变换不改变矩阵的秩;

④、矩阵  $A$  的行秩等于列秩;

若  $A_{m \times s} B_{s \times n} = C_{m \times n}$ , 则:

①、 $C$  的列向量组能由  $A$  的列向量组线性表示,  $B$  为系数矩阵;

②、 $C$  的行向量组能由  $B$  的行向量组线性表示,  $A^T$  为系数矩阵; (转置)

齐次方程组  $Bx=0$  的解一定是  $ABx=0$  的解，考试中可以直接作为定理使用，而无需证明：

①、 $ABx=0$  只有零解  $\Rightarrow Bx=0$  只有零解；

②、 $Bx=0$  有非零解  $\Rightarrow ABx=0$  一定存在非零解；

设向量组  $B_{n \times r} : b_1, b_2, \dots, b_r$  可由向量组  $A_{n \times s} : a_1, a_2, \dots, a_s$  线性表示为：（ $P_{110}$  题 19 结论）

$$(b_1, b_2, \dots, b_r) = (a_1, a_2, \dots, a_s)K \quad (B = AK)$$

其中  $K$  为  $s \times r$ ，且  $A$  线性无关，则  $B$  组线性无关  $\Leftrightarrow r(K) = r$ ；（ $B$  与  $K$  的列向量组具有相同线性相关性）

（必要性： $\because r = r(B) = r(AK) \leq r(K), r(K) \leq r, \therefore r(K) = r$ ；充分性：反证法）

注：当  $r = s$  时， $K$  为方阵，可当作定理使用；

①、对矩阵  $A_{m \times n}$ ，存在  $Q_{n \times m}$ ， $AQ = E_m \Leftrightarrow r(A) = m$ 、 $Q$  的列向量线性无关；（ $P_{87}$ ）

②、对矩阵  $A_{m \times n}$ ，存在  $P_{n \times m}$ ， $PA = E_n \Leftrightarrow r(A) = n$ 、 $P$  的行向量线性无关；

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性相关

$\Leftrightarrow$  存在一组不全为 0 的数  $k_1, k_2, \dots, k_s$ ，使得  $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$  成立；（定义）

$$\Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} = 0 \text{ 有非零解，即 } Ax=0 \text{ 有非零解；}$$

$\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) < s$ ，系数矩阵的秩小于未知数的个数；

设  $m \times n$  的矩阵  $A$  的秩为  $r$ ，则  $n$  元齐次线性方程组  $Ax=0$  的解集  $S$  的秩为： $r(S) = n - r$ ；

若  $\eta^*$  为  $Ax=b$  的一个解， $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$  为  $Ax=0$  的一个基础解系，则  $\eta^*, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$  线性无关；（ $P_{111}$  题 33 结论）

### 相似矩阵和二次型

正交矩阵  $\Leftrightarrow A^T A = E$  或  $A^{-1} = A^T$ （定义），性质：

①、 $A$  的列向量都是单位向量，且两两正交，即  $a_i^T a_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} (i, j = 1, 2, \dots, n)$ ；

②、若  $A$  为正交矩阵，则  $A^{-1} = A^T$  也为正交阵，且  $|A| = \pm 1$ ；

③、若  $A$ 、 $B$  正交阵，则  $AB$  也是正交阵；

注意：求解正交阵，千万不要忘记施密特正交化和单位化；

施密特正交化： $(a_1, a_2, \dots, a_r)$

$$b_1 = a_1;$$

$$b_2 = a_2 - \frac{[b_1, a_2]}{[b_1, b_1]} b_1$$

.....

$$b_r = a_r - \frac{[b_1, a_r]}{[b_1, b_1]} b_1 - \frac{[b_2, a_r]}{[b_2, b_2]} b_2 - \cdots - \frac{[b_{r-1}, a_r]}{[b_{r-1}, b_{r-1}]} b_{r-1};$$

对于普通方阵，不同特征值对应的特征向量线性无关；

对于**实对称阵**，不同特征值对应的特征向量正交；

①、**A**与**B**等价  $\Leftrightarrow$  **A**经过初等变换得到**B**；

$\Leftrightarrow PAQ = B$ ，**P**、**Q**可逆；

$\Leftrightarrow r(A) = r(B)$ ，**A**、**B**同型；

②、**A**与**B**合同  $\Leftrightarrow C^T A C = B$ ，其中可逆；

$\Leftrightarrow x^T A x$ 与 $x^T B x$ 有相同的正、负惯性指数；

③、**A**与**B**相似  $\Leftrightarrow P^{-1} A P = B$ ；

相似一定合同、合同未必相似；

若**C**为正交矩阵，则 $C^T A C = B \Rightarrow A \square B$ ，（合同、相似的约束条件不同，相似的更严格）；

**A**为对称阵，则**A**为二次型矩阵；

**n**元二次型 $x^T A x$ 为正定：

$\Leftrightarrow$ **A**的正惯性指数为**n**；

$\Leftrightarrow$ **A**与**E**合同，即存在可逆矩阵**C**，使 $C^T A C = E$ ；

$\Leftrightarrow$ **A**的所有特征值均为正数；

$\Leftrightarrow$ **A**的各阶顺序主子式均大于0；

$\Rightarrow a_{ii} > 0, |A| > 0$ ；（必要条件）

## 初等数学常用公式

乘法公式与二项式定理

- (1)  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- (2)  $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3; (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- (3)  $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \dots + C_n^k a^{n-k}b^k + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^n b^n$
- (4)  $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc) = a^3+b^3+c^3-3abc;$
- (5)  $(a+b-c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc$

二、因式分解

- (1)  $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
- (2)  $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2); a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2);$
- (3)  $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$

三、分式裂项

- (1)  $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$
- (2)  $\frac{1}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{b-a} \left( \frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+b} \right)$

四、指数运算

- (1)  $a^{-n} = \frac{1}{a^n} (a \neq 0)$
- (2)  $a^0 = 1 (a \neq 1)$
- (3)  $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} (a \geq 0)$
- (4)  $a^m a^n = a^{m+n}$
- (5)  $a^m \div a^n = a^{m-n}$
- (6)  $(a^m)^n = a^{mn}$
- (7)  $\left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n} (a \neq 0)$
- (8)  $(ab)^n = a^n b^n$
- (9)  $\sqrt{a^2} = |a|$

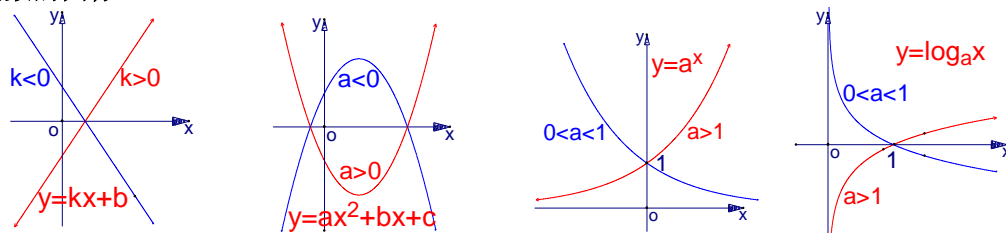
五、对数运算

- (1)  $a^{\log_a N} = N$
- (2)  $\log_a b^n = n \log_a b$
- (3)  $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$
- (4)  $\log_a a = 1$
- (5)  $\log_a^1 = 0$
- (6)  $\log_a^{MN} = \log_a^M + \log_a^N$
- (7)  $\log_a^{\frac{M}{N}} = \log_a^M - \log_a^N$
- (8)  $\log_a^b = \frac{1}{\log_b^a}$
- (9)  $\lg a = \log_{10}^a, \ln a = \log_e^a$

六、排列组合

- (1)  $P_n^m = n(n-1)\cdots[n-(m-1)] = \frac{n!}{(n-m)!}$  (约定  $0! = 1$ )
- (2)  $C_n^m = \frac{P_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$
- (3)  $C_n^m = C_n^{n-m}$
- (4)  $C_n^m + C_n^{m-1} = C_{n+1}^m$
- (5)  $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$

常见函数的图像:



分数指数幂与根式的性质:

- (1)  $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$  ( $a > 0, m, n \in \mathbb{N}^*,$  且  $n > 1$ ).
- (2)  $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$  ( $a > 0, m, n \in \mathbb{N}^*,$  且  $n > 1$ ).
- (3)  $(\sqrt[n]{a})^n = a$ .
- (4) 当  $n$  为奇数时,  $\sqrt[n]{a^n} = a$ ; 当  $n$  为偶数时,  $\sqrt[n]{a^n} = |a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$ .

指数式与对数式的互化式:  $\log_a N = b \Leftrightarrow a^b = N$  ( $a > 0, a \neq 1, N > 0$ ).

指数性质:

- (1)  $1, a^{-p} = \frac{1}{a^p}$  ; (2)  $a^0 = 1$  ( $a \neq 0$ ) ; (3)  $a^{mm} = (a^m)^n$
- (4)  $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$  ( $a > 0, r, s \in \mathbb{Q}$ ) ; (5)  $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$  ;

指数函数:

- (1)  $y = a^x$  ( $a > 1$ ) 在定义域内是单调递增函数;
- (2)  $y = a^x$  ( $0 < a < 1$ ) 在定义域内是单调递减函数。注: 指数函数图象都恒过点  $(0, 1)$

对数性质:

- (1)  $\log_a M + \log_a N = \log_a(MN)$  ; (2)  $\log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N}$  ;
- (3)  $\log_a b^m = m \cdot \log_a b$  ; (4)  $\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \cdot \log_a b$  ; (5)  $\log_a 1 = 0$
- (6)  $\log_a a = 1$  ; (7)  $a^{1 \circ a^b} = b$

对数函数:

- (1)  $y = \log_a x$  ( $a > 1$ ) 在定义域内是单调递增函数;
- (2)  $y = \log_a x$  ( $0 < a < 1$ ) 在定义域内是单调递减函数; 注: 对数函数图象都恒过点  $(1, 0)$
- (3)  $\log_a x > 0 \Leftrightarrow a < x \in (0, 1)$  或  $x \in (+\infty)$
- (4)  $\log_a x < 0 \Leftrightarrow a \in (0, 1)$  则  $x \in (1, +\infty)$  或  $a \in (1, +\infty)$  则  $x \in (0, 1)$

对数的换底公式： $\log_a N = \frac{\log_m N}{\log_m a}$  ( $a > 0$ , 且  $a \neq 1$ ,  $m > 0$ , 且  $m \neq 1$ ,  $N > 0$ ).

对数恒等式： $a^{\log_a N} = N$  ( $a > 0$ , 且  $a \neq 1$ ,  $N > 0$ ).

推论  $\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b$  ( $a > 0$ , 且  $a \neq 1$ ,  $N > 0$ ).

对数的四则运算法则: 若  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $M > 0$ ,  $N > 0$ , 则

(1)  $\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$ ;      (2)  $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$ ;

(3)  $\log_a M^n = n \log_a M$  ( $n \in R$ );      (4)  $\log_{a^m} N^n = \frac{n}{m} \log_a N$  ( $n, m \in R$ ).

等差数列:

通项公式: (1)  $a_n = a_1 + (n-1)d$ , 其中  $a_1$  为首项,  $d$  为公差,  $n$  为项数,  $a_n$  为末项。

(2) 推广:  $a_n = a_k + (n-k)d$

(3)  $a_n = S_n - S_{n-1}$  ( $n \geq 2$ ) (注: 该公式对任意数列都适用)

前  $n$  项和: (1)  $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$ ; 其中  $a_1$  为首项,  $n$  为项数,  $a_n$  为末项。

(2)  $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$

(3)  $S_n = S_{n-1} + a_n$  ( $n \geq 2$ ) (注: 该公式对任意数列都适用)

(4)  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  (注: 该公式对任意数列都适用)

常用性质: (1)、若  $m+n=p+q$ , 则有  $a_m + a_n = a_p + a_q$ ;

注: 若  $a_m$  是  $a_n, a_p$  的等差中项, 则有  $2a_m = a_n + a_p \Leftrightarrow n, m, p$  成等差。

(2)、若  $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$  为等差数列, 则  $\{a_n \pm b_n\}$  为等差数列。

(3)、 $\{a_n\}$  为等差数列,  $S_n$  为其前  $n$  项和, 则  $S_m, S_{2m} - S_m, S_{3m} - S_{2m}$  也成等差数列。

(4)、 $a_p = qa, q \neq a$  则  $\frac{1}{a-p} = 0$  ;

(5)  $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

等比数列:

通项公式: (1)  $a_n = a_1 q^{n-1} = \frac{a_1}{q} \cdot q^n$  ( $n \in N^*$ ), 其中  $a_1$  为首项,  $n$  为项数,  $q$  为公比。

(2) 推广:  $a_n = a_k \cdot q^{n-k}$

(3)  $a_n = S_n - S_{n-1} (n \geq 2)$  (注: 该公式对任意数列都适用)

前  $n$  项和: (1)  $S_n = S_{n-1} + a_n (n \geq 2)$  (注: 该公式对任意数列都适用)

(2)  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  (注: 该公式对任意数列都适用)

$$(3) S_n = \begin{cases} na_1 & (q=1) \\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} & (q \neq 1) \end{cases}$$

常用性质: (1)、若  $m+n=p+q$ , 则有  $a_m \cdot a_n = a_p \cdot a_q$  ;

注: 若  $a_m$  是  $a_n, a_p$  的等比中项, 则有  $a_m^2 = a_n \cdot a_p \Leftrightarrow n, m, p$  成等比。

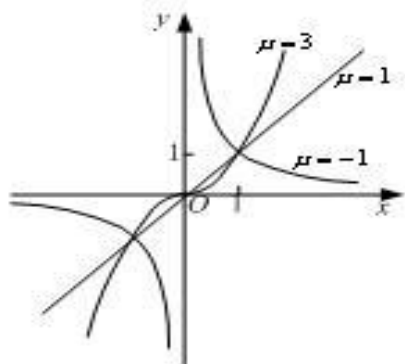
(2)、若  $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$  为等比数列, 则  $\{a_n \cdot b_n\}$  为等比数列

。

## 基本初等函数及图形

(1) **常值函数** (也称常数函数)  $y = c$  (其中  $c$  为常数)

(2) **幂函数**  $y = x^\mu$ ,  $\mu$  是常数;



1. 当  $u$  为正整数时, 函数的定义域为区间  $x \in (-\infty, +\infty)$ , 他们的图形都经过原点, 并当  $u > 1$  时在原点处与  $X$  轴相切. 且  $u$  为奇数时, 图形关于原点对称;  $u$  为偶数时图形关于  $Y$  轴对称;

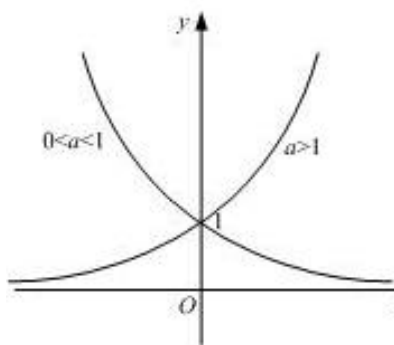
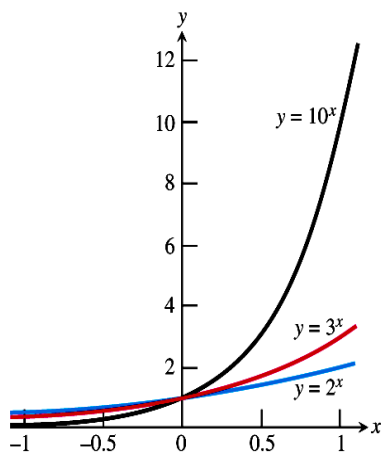
2. 当  $u$  为负整数时. 函数的定义域为除去  $x=0$  的所有实数。

3. 当  $u$  为正有理数  $m/n$  时,  $n$  为偶数时函数的定义域为  $(0, +\infty)$ ,  $n$  为奇数时函数的定义域为  $(-\infty, +\infty)$ 。函数的图形均经过原点和  $(1, 1)$ 。

如果  $m > n$  图形于  $x$  轴相切, 如果  $m < n$ , 图形于  $y$  轴相切, 且  $m$  为偶数时, 还跟  $y$  轴对称;  $m, n$  均为奇数时, 跟原点对称

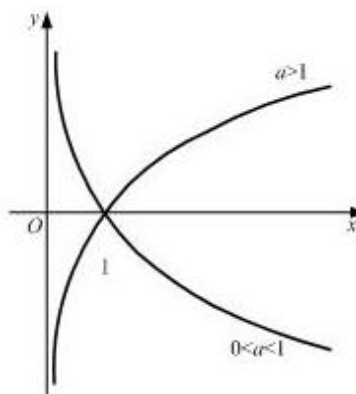
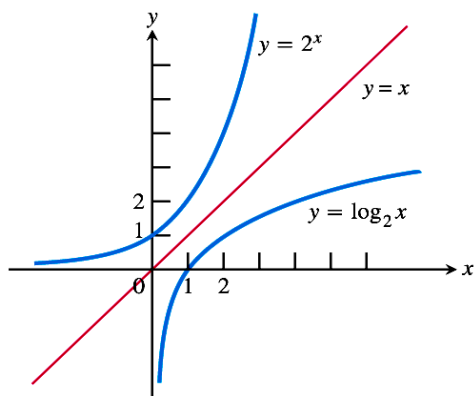
4. 当  $u$  为负有理数时,  $n$  为偶数时, 函数的定义域为大于零的一切实数;  $n$  为奇数时, 定义域为去除  $x=0$  以外的一切实数。

(3) **指数函数**  $y = a^x$  ( $a$  是常数且  $a > 0, a \neq 1$ ),  $x \in (-\infty, +\infty)$  ;



1. 当  $a > 1$  时函数为单调增, 当  $a < 1$  时函数为单调减.
2. 不论  $x$  为何值,  $y$  总是正的, 图形在  $x$  轴上方.
3. 当  $x=0$  时,  $y=1$ , 所以他的图形通过  $(0, 1)$  点.

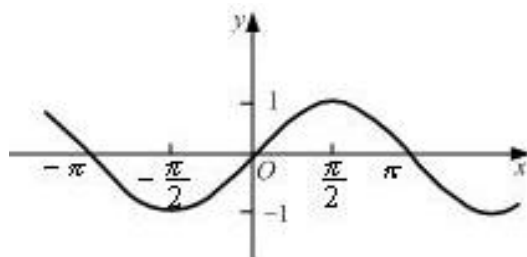
(4) **对数函数**  $y = \log_a x$  ( $a$  是常数且  $a > 0, a \neq 1$ ),  $x \in (0, +\infty)$  ;



1. 他的图形为于  $y$  轴的右方. 并通过点  $(1, 0)$
2. 当  $a > 1$  时在区间  $(0, 1)$ ,  $y$  的值为负. 图形位于  $x$  的下方. 在区间  $(1, +\infty)$ ,  $y$  值为正, 图形位于  $x$  轴上方. 在定义域是单调增函数.  
 $a < 1$  在实用中很少用到/

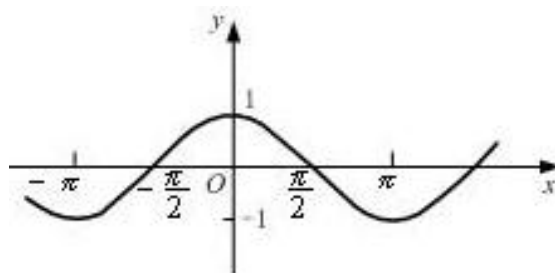
(5) **三角函数**

正弦函数  $y = \sin x$ ,  $x \in (-\infty, +\infty)$ ,  $y \in [-1, 1]$ ,

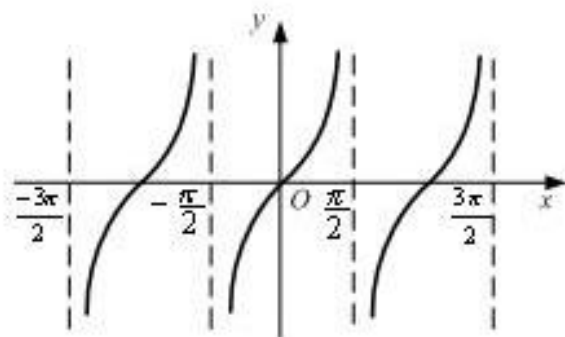




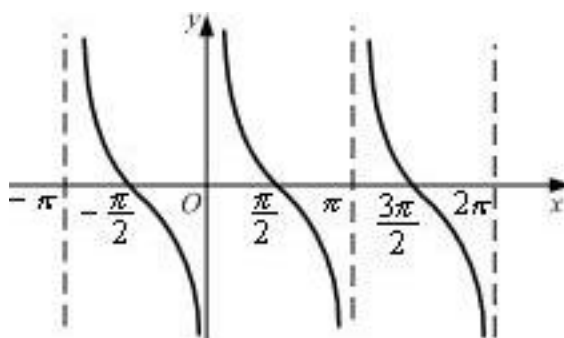
余弦函数  $y = \cos x$ ,  $x \in (-\infty, +\infty)$ ,  $y \in [-1, 1]$ ,



正切函数  $y = \tan x$ ,  $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ ,  $k \in Z$ ,  $y \in (-\infty, +\infty)$ ,

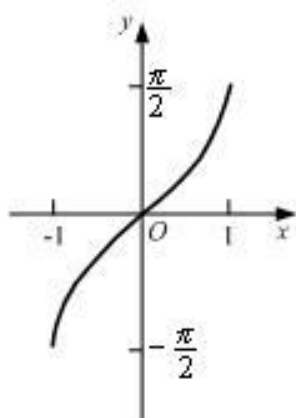


余切函数  $y = \cot x$ ,  $x \neq k\pi$ ,  $k \in Z$ ,  $y \in (-\infty, +\infty)$ ;

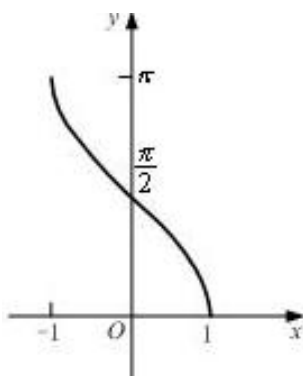


### (6) 反三角函数

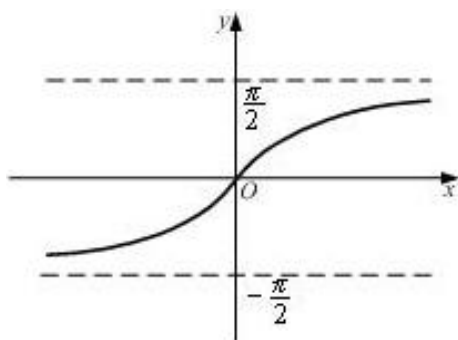
反正弦函数  $y = \arcsin x$ ,  $x \in [-1, 1]$ ,  $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ,



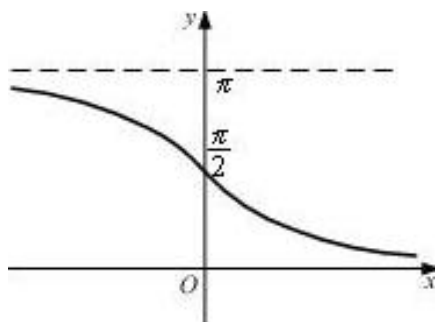
反余弦函数  $y = \arccos x$ ,  $x \in [-1, 1]$ ,  $y \in [0, \pi]$ ,



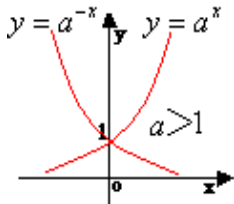
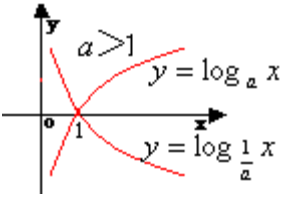
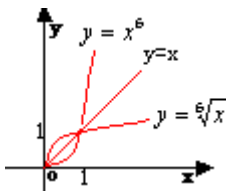
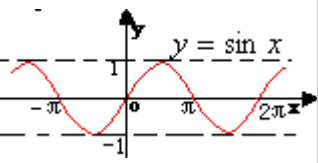
反正切函数  $y = \arctan x$ ,  $x \in (-\infty, +\infty)$ ,  $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ,



反余切函数  $y = \text{arc cot } x$ ,  $x \in (-\infty, +\infty)$ ,  $y \in (0, \pi)$ .



小结:

函数名称	函数的记号	函数的图形	函数的性质
指数函数	$y = a^x (a > 0, a \neq 1)$		a): 不论 $x$ 为何值, $y$ 总为正数; b): 当 $x=0$ 时, $y=1$ .
对数函数	$y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$		a): 其图形总位于 $y$ 轴右侧, 并过 $(1, 0)$ 点 b): 当 $a > 1$ 时, 在区间 $(0, 1)$ 的值为负; 在区间 $(1, +\infty)$ 的值为正; 在定义域内单调增.
幂函数	$y = x^a$ (a 为任意实数)	 <p style="color: blue;">这里只画出部分函数图形的一部分。</p>	令 $a=m/n$ a): 当 $m$ 为偶数 $n$ 为奇数时, $y$ 是偶函数; b): 当 $m, n$ 都是奇数时, $y$ 是奇函数; c): 当 $m$ 奇 $n$ 偶时, $y$ 在 $(-\infty, 0)$ 无意义.
三角函数	$y = \sin x$ (正弦函数)  这里只写出了正弦函数		a): 正弦函数是以 $2\pi$ 为周期的周期函数 b): 正弦函数是奇函数且 $ \sin x  \leq 1$