51.613
MKX
085925

蘇聯青年科學叢書

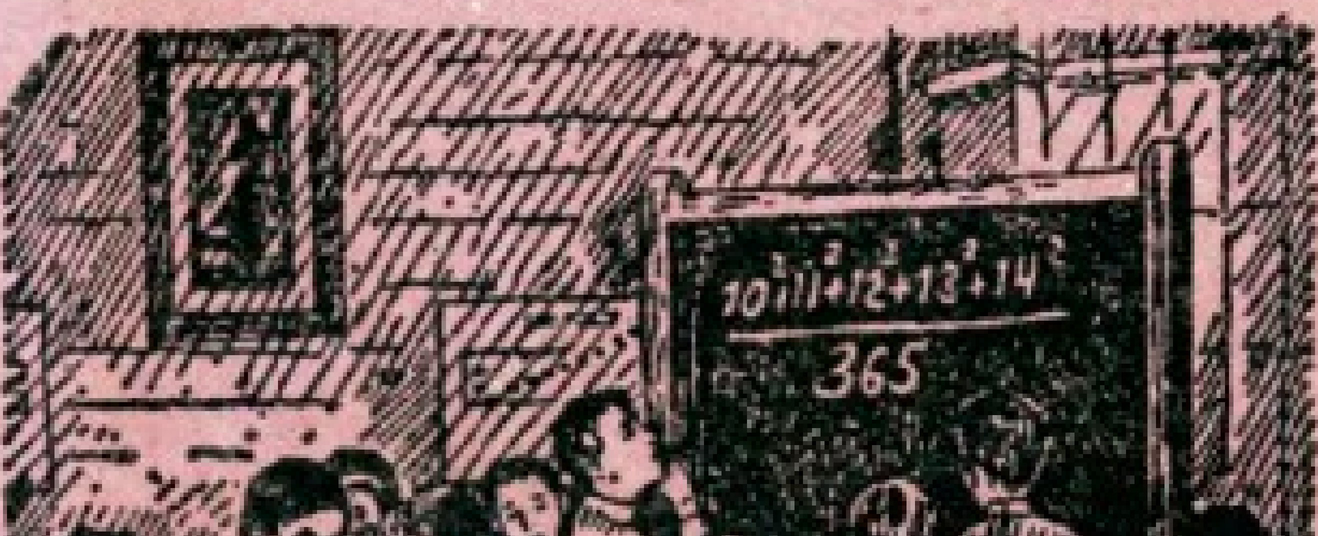
鉄道部干部学校
图书编号 8-0710
图书舘
1962.11.

循環級數

中央人民政府鐵道部
圖書館
幹部學校

馬庫希維契著
朱美琨譯

长沙铁道学院
藏書
图書舘



83
3

開明書店

前　言

這本小册子的內容，作者曾經用來對第九和第十年級學生——莫斯科數學競賽的參加者——講授過．後來，修改了一下，又用來在莫斯科教師進修學院講授．這些講演稿，加以擴充，就成了現在的形狀．

‘循環級數’這個主題和中學課程（算術級數和幾何級數、自然數平方級數、兩多項式的商的係數的級數等等）是很接近的．同時，這個小小的理論*，畢竟是幾位數學分析大家所創立的，也和其他出於他們手筆的理論一樣，完整、簡單而且明白．

循環級數理論的基礎是在十八世紀二十年代由法國數學家棣莫弗[一般人常由所謂棣莫弗公式：$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=\cos n\alpha+i\sin n\alpha$ 而知道他的名字的]和彼得堡科學院最早的一位院士——瑞士數學家旦尼爾·伯努利建立和發表出來的．十八世紀的大數學家，彼得堡科學院院士萊翁那得·歐拉，更將這理論推進了一步，在他的‘無窮小分析導言’(1748)的第十三章中就專討論循環級數（或序列）．在比較後出的

---

* 對於熟悉數學分析的讀者我們可以這樣說，這個理論恰恰和具有常係數的直線微分方程式的理論相平行．

著作中應該特別提出的還有著名的俄羅斯數學家院士契比雪夫 (П. Л. Чебышев) 以及馬爾可夫 (А. А. Марков) 各人講授的定差算法教程中有關循環級數理論的敍述.

1. 循環級數的概念是算術級數和幾何級數概念的擴大和一般化．此外，自然數的平方級數和立方級數、分數化做循環小數時的各位數字所成的級數（以及任何按週期重複的級數）、兩個多項式相除得的商按 x 的昇冪寫出來時各項係數所成的級數等等，都是循環級數的特例．由此很明白，在中學數學課程中必然常常碰見循環級數的．循環級數的理論是數學學科中叫做定差算法裏面的特殊的一章．我們在本書中就講述這種理論，可是並不要求讀者有任何專門的預備知識（只有在一個地方我們不加證明就引用了一個普遍定理，那是要在一次方程式的理論中纔能好好地推證的）．

2. 我們將一個級數寫成如下形式：

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\cdots\cdots,u_n,\cdots\cdots, \tag{1}$$

或者簡單地寫成 $\{u_n\}$．如果存在一個自然數 k 和 k 個數 a_1, $a_2,\cdots\cdots,a_k$（實數或虛數），使得從數碼 n 的某個數值 m 起，

$$u_{n+k}=a_1u_{n+k-1}+a_2u_{n+k-2}+\cdots\cdots+a_ku_n\quad(n\geqslant m\geqslant 1), \tag{2}$$

都成立，那麼級數 (1) 就叫做 **k 階循環級數**，而關係式 (2) 叫做 **k 階循環方程式**．

因此，循環級數的特徵就在於，它的任意項（從某一項

起）可以用緊靠在它前面的、數目確定的——k——幾個項按公式 (2) 表示出來．它的俄文名稱'回復'（возвратная）的由來便是，每逢要求它的較後面的項總得回到較前面的項；（'循環'這名稱則由法文 récurrente——回到起點——而來）．下面舉幾個循環級數的例子：

〔例 1〕**幾何級數** 設有幾何級數

$$u_1=a,\ u_2=aq,\ u_3=aq^2,\cdots\cdots,\ u_n=aq^{n-1},\cdots\cdots;\qquad(3)$$

對這種級數，方程式 (2) 取如下形式：

$$u_{n+1}=qu_n.\qquad(4)$$

這兒 $k=1$ 而 $a_1=q$．因此幾何級數是一階循環級數．

〔例 2〕**算術級數** 對於算術級數

$$u_1=a,\ u_2=a+d,\ u_3=a+2d,\cdots\cdots,\ u_n=a+(n-1)d,\cdots\cdots$$

我們有 $$u_{n+1}=u_n+d.$$

這個關係式並不合於方程式 (2) 的形狀*．可是，如果我們考察，和 n 的兩個相鄰的值相當的兩個方程式：

$$u_{n+2}=u_{n+1}+d \quad 和 \quad u_{n+1}=u_n+d,$$

那麼兩端相減便可引出

$$u_{n+2}-u_{n+1}=u_{n+1}-u_n,$$

也就是 $$u_{n+2}=2u_{n+1}-u_n\qquad(5)$$

這就合於方程式 (2) 的形狀了．這兒 $k=2$，$a_1=2$，$a_2=-1$．

---

* 方程式 (2) 的特徵是，它的右端只能包含級數的項，各項可以帶着常數係數，而沒有包含常數項．

所以,算術級數是二階循環級數.

〔例 3〕再看一個古老的關於兔子數目的斐波那契* 問題,假定每對大兔每月能生產一對小兔,而每對小兔過一個月就能完全長成. 要求在一年裏面由一對大兔能繁殖出多少對大兔來. 這個問題裏面有趣的並不是正面的答案,那是不難求出的. 眞正有趣的是大兔的總對數所成的級數:最初是 u_1,過了一個月是 u_2,過了兩個月是 u_3,而一般地過了 n 個月是 u_{n+1}. 顯然,$u_1=1$. 過了一個月,有一對小兔生產出來,但大兔的對數還是如舊: $u_2=1$. 過了兩個月,這對小兔也長大了,所以大兔的總對數等於 2: $u_3=2$. 假設我們已經求出 $n-1$ 個月後大兔的對數 (u_n) 和 n 個月後大兔的對數 (u_{n+1}). 因爲在第 n 個月中間原來的 u_n 對大兔又生產了 u_n 對小兔,所以過了 $n+1$ 個月大兔的總對數是

$$u_{n+2}=u_{n+1}+u_n. \tag{6}$$

由此 $u_4=u_3+u_2=3,\ u_5=u_4+u_3=5,$

$u_6=u_5+u_4=8,\ u_7=u_6+u_5=13,\cdots\cdots$

如此我們得出一個級數

$$\left.\begin{array}{l} u_1=1,\ u_2=1,\ u_3=2,\ u_4=3, \\ u_5=5,\ u_6=8,\ u_7=13,\ \cdots\cdots \end{array}\right\} \tag{7}$$

* 斐波那契,即比薩的萊翁那度,中世紀意大利的數學家(1200 年左右),留下了 'Liber abaci' 一書,裏面包括了廣闊的算術和代數的知識,這些知識,是由中央亚細亚國家和拜占庭人傳來的;也有由他自己創造和加以發展了的.

其中每一項都等於緊接着它的前面兩項的和．這個級數叫做**斐波那契級數**，而它的各項叫做**斐波那契數**．方程式 (6) 說明了斐波那契級數是二階循環級數．

〔例 4〕作爲另一個例子我們來考察自然數平方所成的級數：

$$u_1=1^2,\ u_2=2^2,\ u_3=3^2,\cdots\cdots,u_n=n^2,\cdots\cdots \tag{8}$$

這兒 $u_{n+1}=(n+1)^2=n^2+2n+1$，因而

$$u_{n+1}=u_n+2n+1 \tag{9}$$

把 n 加大 1，得到

$$u_{n+2}=u_{n+1}+2n+3. \tag{10}$$

所以 [(10) 和 (9) 兩端相減]，

$$u_{n+2}-u_{n+1}=u_{n+1}-u_n+2,$$

也就是

$$u_{n+2}=2u_{n+1}-u_n+2. \tag{11}$$

把等式 (11) 中的 n 加大 1，就有

$$u_{n+3}=2u_{n+2}-u_{n+1}+2, \tag{12}$$

由此 [(12) 和 (11) 兩端相減]

$$u_{n+3}-u_{n+2}=2u_{n+2}-3u_{n+1}+u_n,$$

也就是

$$u_{n+3}=3u_{n+2}-3u_{n+1}+u_n. \tag{13}$$

我們就得到了一個三階循環方程式．所以，級數 (8) 是一個三階循環級數．用同樣的方法可以證明自然數立方所成的級數

$$1^3,\ 2^3,\ 3^3,\cdots\cdots,\ n^3,\cdots\cdots \tag{14}$$

是四階循環級數．它的各項適合方程式

$$u_{n+4}=4u_{n+3}-6u_{n+2}+4u_{n+1}-u_n, \tag{15}$$

這個式子希望讀者自己推證出來．

〔例 5〕一切有按週期重複的級數都是循環級數．例如把分數 $\frac{761}{1332}$ 化成小數：

$$\frac{761}{1332}=0.57132132132\cdots\cdots,$$

我們來觀察這小數中各位數字所成的級數．

這兒
$$\left.\begin{array}{l} u_1=5,\ u_2=7,\ u_3=1,\ u_4=3, \\ u_5=2,\ u_6=1,\ u_7=3,\ \cdots\cdots \end{array}\right\} \tag{16}$$

很明顯地，　$u_{n+3}=u_n\quad(n\geqslant 3).$　　(17)

要把上式表示成方程式 (2) 的形狀，只須將它寫做

$$u_{n+3}=0\cdot u_{n+2}+0\cdot u_{n+1}+1\cdot u_n.$$

由此很顯然，這是一個三階循環方程式 ($k=3$, $a_1=0$, $a_2=0$, $a_3=1$)．所以，級數 (16) 是三階循環級數．

〔例 6〕現在來研究兩個多項式相除的商，按 x 的昇冪排列時各係數所成的級數．假設

$$P(x)=A_0+A_1x+\cdots\cdots+A_lx^l$$

和
$$Q(x)=B_0+B_1x+\cdots\cdots+B_kx^k\qquad(B_0\neq 0).$$

用 $Q(x)$ 除 $P(x)$；如果 $P(x)$ 不能用 $Q(x)$ 除盡，那麼可以無限制地除下去，逐步得出商的各項：

$$D_0+D_1x+D_2x^2+D_3x^3+\cdots\cdots+D_nx^n+\cdots\cdots$$

我們來看級數

$$u_1=D_0,\ u_2=D_1,\cdots\cdots,\ u_n=D_{n-1},\cdots\cdots \qquad (18)$$

而要證明它是一個 k 階循環級數（記住，k 是除式的次數）．爲達這一目的，任意指定一個自然數 n，只要適合唯一的條件 $n \geqslant l-k+1$，而將除法過程停止在求得商中含 x^{n+k} 的項的地方．這時餘式應當是一個多項式 $R(x)$，其中一切項的次數都高於 $n+k$．被除式、除式、商式、餘式相互間的關係則可以用下面的恆等式來表示：

$$A_0+\cdots\cdots+A_lx^l$$
$$=(B_0+\cdots\cdots+B_kx^k)\cdot(D_0+\cdots\cdots+D_{n+k}x^{n+k})+R(x).$$

求出這個恆等式左右兩端中 x^{n+k} 的係數而使它們相等．因爲 $n+k \geqslant l+1$，所以左端中 x^{n+k} 的係數等於零．因而右端中 x^{n+k} 的係數也必須等於零．可是這兒只有乘積 $(B_0+\cdots\cdots+B_kx^k)\cdot(D_0+\cdots\cdots+D_{n+k}x^{n+k})$ 中纔含 x^{n+k} 的項［我們已經講過，$R(x)$ 只含 x 的更高次的項］．因此，所求的係數是

$$D_{n+k}B_0+D_{n+k-1}B_1+\cdots\cdots+D_nB_k; \qquad (19)$$

依照上面講的，它必須等於零：

$$D_{n+k}B_0+D_{n+k-1}B_1+\cdots\cdots+D_nB_k=0,$$

由此（記住，$B_0 \neq 0$）

$$D_{n+k}=-\frac{B_1}{B_0}D_{n+k-1}-\cdots\cdots-\frac{B_k}{B_0}D_n \quad (n \geqslant l-k+1). \quad (20)$$

這是一個 k 階循環方程式，跟着又可知道級數 (18) 是

k 階循環級數.

3. 在所有上面舉出的例子裏面,例 6 有最一般的性質.我們還要證明,**任意一個 k 階循環級數**

$$u_1,\ u_2,\cdots\cdots,\ u_n,\cdots\cdots, \tag{21}$$

如果適合這樣一個方程式

$$u_{n+k}=a_1u_{n+k-1}+\cdots\cdots+a_ku_n \quad (n\geqslant m\geqslant 1), \tag{22}$$

那麼它就和用多項式

$$Q(x)=1-a_1x-\cdots\cdots-a_kx^k \tag{23}$$

除某個多項式 $P(x)$ 的商中係數的級數合一.

假設 n 是一個任意自然數,但適合條件 $n>k+m-2$;用 $u_1+u_2x+u_3x^2+\cdots\cdots+u_{n+1}x^n$ 乘多項式 $Q(x)$. 得到

$$\begin{aligned}
&(1-a_1x-a_2x^2-\cdots\cdots-a_kx^k)(u_1+u_2x\\
&\qquad\qquad+\cdots\cdots+u_{k+m-1}x^{k+m-2}+\cdots\cdots+u_{n+1}x^n)\\
&=[u_1+(u_2-a_1u_1)x+\cdots\cdots\\
&\qquad\qquad+(u_{k+m-1}-a_1u_{k+m-2}-\cdots\cdots-a_ku_{m-1})x^{k+m-2}]\\
&\quad+[(u_{k+m}-a_1u_{k+m-1}-\cdots\cdots-a_ku_m)x^{k+m-1}+\cdots\cdots\\
&\qquad\qquad+(u_{n+1}-a_1u_n-\cdots\cdots-a_ku_{n-k+1})x^n]\\
&\quad-[(a_1u_{n+1}+\cdots\cdots+a_ku_{n-k+2})x^{n+1}+\cdots\cdots\\
&\qquad\qquad+a_ku_{n+1}x^{n+k}].
\end{aligned} \tag{24}$$

這兒的第一個方括號裏面是一個多項式,它的次數不比 $l=k+m-2$ 高,它的係數則和我們所取的 n 的數值無關;我們用 $P(x)$ 來表示它:

$$P(x)=u_1+(u_2-a_1u_1)x+\cdots\cdots$$
$$+(u_{k+m-1}-a_1u_{k+m-2}-\cdots\cdots-a_ku_{m-1})x^{k+m-2}. \qquad (25)$$

第二個方括號裏面的多項式，由於等式 (22)，它的一切係數都等於零．最後，末了一個方括號裏面的多項式，它的係數和 n 有關；但是它並不包含次數比 $n+1$ 低的項．用 $R_n(x)$ 來表它，而將恆等式 (24) 寫成下式：

$$P(x)=(1-a_1x-a_2x^2-\cdots\cdots-a_kx^k)(u_1+u_2x$$
$$+\cdots\cdots+u_{n+1}x^n)+R_n(x). \qquad (26)$$

由此顯然，$u_1+u_2x+\cdots\cdots+u_{n+1}x^n$ 是用

$$Q(x)=1-a_1x-a_2x^2-\cdots\cdots-a_kx^k$$

除 $P(x)$ 的商，而 $R_n(x)$ 是其餘式，即

$$u_1,\ u_2,\cdots\cdots,u_n,\ u_{n+1},\cdots\cdots,$$

的確是由多項式 (23) 除 (25) 所得商的係數所成的級數．

我們把斐波那契級數

$$u_1=1,\ u_2=1,\ u_3=2,\ u_4=3,\ u_5=5,\cdots\cdots$$

作爲一個實例來考察．

因爲它的各項適合方程式

$$u_{n+2}=u_{n+1}+u_n \quad (n\geqslant 1),$$

所以這兒 $m=1$, $k=2$, $a_1=1$, $a_2=1$, 和 $Q(x)=1-x-x^2$.

多項式 $P(x)$ 的次數必須不比 $k+m-2=1$ 高．按公式 (25) 還可求得

$$P(x)=1+(1-1\cdot 1)x=1.$$

這樣，斐波那契數和用 $1-x-x^2$ 除 1 所得的商中的係數所成的級數是完全相同的。

4. 在中學課程中，和算術級數、幾何級數及自然數平方級數有關而必須解決的一個問題就是求這些級數的 n 項的和。

假設，一般地，

$$u_1,\ u_2,\cdots\cdots,u_n,\cdots\cdots \tag{27}$$

是一個 k 階循環級數，它的各項適合方程式

$$u_{n+k}=a_1u_{n+k-1}+a_2u_{n+k-2}+\cdots\cdots+a_ku_n \quad (n\geqslant m). \tag{28}$$

觀察 (27) 中各數起首 n 項的和 S_n 所成的新級數

$$S_1=u_1,\ S_2=u_1+u_2,\cdots\cdots,S_n=u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n,\cdots\cdots, \tag{29}$$

而來證明，這個和的級數也是循環的，是 $k+1$ 階的，而且它的各項適合方程式

$$\begin{aligned}S_{n+k+1}=(1+a_1)S_{n+k}+(a_2-a_1)S_{n+k-1}&\\+\cdots\cdots+(a_k-a_{k-1})S_{n+1}-a_kS_n.&\end{aligned} \tag{30}$$

要證明它，先應注意

$$\left.\begin{aligned}&u_1=S_1,\ u_2=S_2-u_1=S_2-S_1,\cdots\cdots,\\&u_n=S_n-(u_1+\cdots\cdots+u_{n-1})=S_n-S_{n-1},\ \cdots\cdots\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

命 $S_0=0$，使得 $u_1=S_1-S_0$，再將方程式 (28) 裏面的 u_1，$u_2,\cdots\cdots,\ u_n,\cdots\cdots$ 用它們以 S_0，$S_1,\cdots\cdots,\ S_n,\cdots\cdots$，表出的式子來代替，得到

$$\begin{aligned}S_{n+k}-S_{n+k-1}=a_1(S_{n+k-1}-S_{n+k-2})&\\+a_2(S_{n+k-2}-S_{n+k-3})+\cdots\cdots+a_k(S_n-S_{n-1}),&\end{aligned}$$

由此

$$S_{n+k}=(1+a_1)S_{n+k-1}+(a_2-a_1)S_{n+k-2}$$
$$+\cdots\cdots+(a_k-a_{k-1})S_n-a_kS_{n-1}\quad(n\geqslant m).$$

或，用 $n+1$ 代 n:

$$S_{n+k+1}=(1+a_1)S_{n+k}+(a_2-a_1)S_{n+k-1}$$
$$+\cdots\cdots+(a_k-a_{k-1})S_{n+1}-a_kS_n\quad(n\geqslant m-1).$$

這是一個 $k+1$ 階循環方程式.

舉幾個例子:

（甲） **幾何級數** 此處

$$u_n=aq^{n-1}\text{ 和 }S_n=u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n=a+aq+\cdots\cdots+aq^{n-1}.$$

因爲 $\{u_n\}$ 的各項適合方程式 $u_{n+1}=qu_n$，所以 $\{S_n\}$ 的各項適合方程式

$$S_{n+2}=(1+q)S_{n+1}-qS_n. \tag{32}$$

（乙） **自然數平方級數** 此處

$$u_n=n^2\text{ 和 }S_n=1+2^2+\cdots\cdots+n^2.$$

因爲 $\{u_n\}$ 的各項適合方程式

$$u_{n+3}=3u_{n+2}-3u_{n+1}+u_n$$

[參看第六頁 (13)]，所以 $\{S_n\}$ 的各項適合方程式

$$S_{n+4}=4S_{n+3}-6S_{n+2}+4S_{n+1}-S_n.$$

（丙） **斐波那契數** 因爲它們適合方程式

$$u_{n+2}=u_{n+1}+u_n,$$

所以它們 n 項的和 S_n 必須適合方程式

$$S_{n+3}=2S_{n+2}-S_n.$$

5. 對於簡單的循環級數，例如算術級數、幾何級數、自然數平方或立方級數以及週期級數，我們用不到先計算級數中的某一項前面的各項，就能够將這一項求出來．至於斐波那契級數或者由兩多項式的商的係數所成的一般級數，乍一看去，我們就沒有可能這樣地辦，所以如果要計算第十三項斐波那契數 u_{13}，似乎就得把它前面的一切項一項一項地都求出來（利用方程式 $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$）：

$$u_1=1,\ u_2=1,\ u_3=2,\ u_4=3,\ u_5=5,\ u_6=8,$$

$$u_7=13,\ u_8=21,\ u_9=34,\ u_{10}=55,\ u_{11}=89,$$

$$u_{12}=144,\ u_{13}=233.$$

現在我們試將循環級數中各項的結構加以深入的研究，便能得出一個公式，可以用來計算最一般的循環級數的任何項，而不必把它的前面各項都求出來．這種公式可以看做由算術級數或幾何級數中求普遍項的公式的一般化．

假設

$$u_{n+k}=a_1u_{n+k-1}+a_2u_{n+k-2}+\cdots\cdots+a_ku_n \tag{33}$$

是一個 k 階循環方程式．既然它對所有自然數 $n=1,2,3,\cdots\cdots$，都成立，那麼，設 $n=1$，我們就得

$$u_{k+1}=a_1u_k+a_2u_{k-1}+\cdots\cdots+a_ku_1.$$

這麼一來，既然知道了 $u_1, u_2, \cdots\cdots, u_k$，就可以計算 u_{k+1}．再在方程式 (33) 中設 $n=2$，又得

$$u_{k+2}=a_1u_{k+1}+a_2u_k+\cdots\cdots+a_ku_2.$$

所以，現在 u_{k+2} 的數值也可以知道了。一般地說，如果 m 是任何自然數，而我們已經算出一個級數的一些項

$$u_1,\ u_2,\cdots\cdots,\ u_k,\ u_{k+1},\cdots\cdots,\ u_{m+k-1},$$

那麽，設方程式 (33) 中的 $n=m$，我們就能由它求出下面的一項 u_{m+k}.

這麽一來，k 階循環級數的各項，如果適合方程式 (33)，而且級數中起首 k 項：$u_1,\ u_2,\cdots\cdots,\ u_k$ 又已經知道的話，它就可以由這個方程式唯一地決定了．將這 k 項以不同的方法選出（這種選擇並沒有任何限制），可以得出無窮多的不同級數，個個都適合方程式 (33)．這些級數間的差異在它們起首的 k 項中就可看出來（至少應有一項不同），並且由以後的各項也可以發現它們的差異．

例如，一切可能的公比是 q 的幾何級數（它們的首項 u_1 是各異的）都適合一階方程式

$$u_{n+1}=qu_n;$$

一切算術級數，在 $u_1=a$ 和 $u_2=a+d$ 兩項中至少應有一項不同，所以，或者它們的首項 (a) 不同，或者它們的公差 (d) 不同，或者兩者都不相同，但它們卻都適合二階方程式

$$u_{n+2}=2u_{n+1}-u_n$$

（即 $u_{n+2}-u_{n+1}=u_{n+1}-u_n$）．

再看二階方程式

$$u_{n+2}=u_{n+1}+u_n.$$

我們已經知道,斐波那契級數

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\cdots\cdots,$$

是能够適合它的. 這個級數的特徵可以說是 $u_1=u_2=1$. 可是除它以外,只要把 u_1 和 u_2 的數值加以改變,就能得到無窮多的適合上述方程式的級數. 例如,當 $u_1=-3$ 和 $u_2=1$ 時,我們得出級數

$$-3,\ 1,\ -2,\ -1,\ -3,\ -4,\ -7,\ -11,\ -18,\ -29,\cdots\cdots$$

假設我們有一些適合同一方程式 (33) 的級數

$$\left.\begin{array}{l} x_1,\ x_2,\cdots\cdots,\ x_n,\cdots\cdots, \\ y_1,\ y_2,\cdots\cdots,\ y_n,\cdots\cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_1,\ z_2,\cdots\cdots,\ z_n,\cdots\cdots \end{array}\right\} \qquad (34)$$

那麼下面的各等式都能成立:

$$\left.\begin{array}{l} x_{n+k}=a_1x_{n+k-1}+a_2x_{n+k-2}+\cdots\cdots+a_kx_n, \\ y_{n+k}=a_1y_{n+k-1}+a_2y_{n+k-2}+\cdots\cdots+a_ky_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_{n+k}=a_1z_{n+k-1}+a_2z_{n+k-2}+\cdots\cdots+a_kz_n. \end{array}\right\} \qquad (35)$$

取任意一些數 $A,\ B,\cdots\cdots,\ C$,個數和 (34) 中級數的數目相同,用 A 乘 (35) 中第一個方程式的各項,用 B 乘第二個方程式的各項,……,用 C 乘最末一個方程式的各項,再把它們加起來. 因而得到等式:

$$
\begin{aligned}
&Ax_{n+k}+By_{n+k}+\cdots\cdots+Cz_{n+k}\\
&\quad=a_1(Ax_{n+k-1}+By_{n+k-1}+\cdots\cdots+Cz_{n+k-1})\\
&\quad+a_2(Ax_{n+k-2}+By_{n+k-2}+\cdots\cdots+Cz_{n+k-2})\\
&\qquad\qquad+\cdots\cdots+a_k(Ax_n+By_n+\cdots\cdots+Cz_n).
\end{aligned}
\tag{36}
$$

由此可以知道，級數

$$
\left.\begin{aligned}
&t_1=Ax_1+By_1+\cdots\cdots+Cz_1,\\
&t_2=Ax_2+By_2+\cdots\cdots+Cz_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&t_n=Ax_n+By_n+\cdots\cdots+Cz_n,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\}
\tag{37}
$$

也適合所設的方程式 (33). 由 (34) 中的各個級數得出級數 (37) 的方法是用 $A, B, \cdots\cdots, C$,分別去乘 (34) 中的第一,第二,……,最末一個方程式的各項,然後將它們逐項相加 (第一項和第一項加,第二項和第二項加等等). 由於 $A, B, \cdots\cdots, C$ 的選擇是任意的,只要把這幾個數加以改變,一般地說,我們就可以得出 $t_1, t_2, t_3, \cdots\cdots$,各項不同的數值.

現在假設

$$
u_1,\ u_2, \cdots\cdots,\ u_n, \cdots\cdots \tag{38}
$$

是適合方程式 (33) 的任意一個級數; 這就發生了一個問題: 是不是能够給 $A, B, \cdots\cdots, C$ 以這樣的數值,使得級數 (37) 起首的 k 項和級數 (38) 中起首的 k 項合一呢? 如果這是辦得到的話,那麼依照前面講過的,級數 (37) 和 (38) 的一切項

就都合一了；這就是說，對於任意自然數 n，我們都有

$$u_n = Ax_n + By_n + \cdots\cdots + Cz_n. \tag{39}$$

因此，在我們面前開展了一種可能性（暫時還是假定的）：把適合同一個 k 階循環方程式的無窮多的級數中的任意一個，用它們裏面的某幾個 (34)，按公式 (39) 表示出來．這種可能性能不能成爲現實，就看能不能選好 $A, B, \cdots\cdots, C$ 這幾個數，使它們適合方程組：

$$\left.\begin{aligned} &Ax_1 + By_1 + \cdots\cdots + Cz_1 = u_1, \\ &Ax_2 + By_2 + \cdots\cdots + Cz_2 = u_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &Ax_k + By_k + \cdots\cdots + Cz_k = u_k, \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

這裏方程組右端的 $u_1, u_2, \cdots\cdots, u_k$ 是任意設定的數值．

因爲這兒 $A, B, \cdots\cdots, C$ 是未知數，而方程式的個數等於循環方程式的階 k，由此推知，未知數 $A, B, \cdots\cdots, C$ 的個數［它和 (34) 中級數的個數合一］也應該取成和 k 相等的纔好．我們知道，含 k 個未知數 $A, B, \cdots\cdots, C$ 的 k 個聯立代數方程式 (34) 有沒有解就要看這組方程式的係數：$x_1, y_1, \cdots\cdots, z_1, \cdots\cdots, x_k, y_k, \cdots\cdots, z_k$ 是怎樣的，也就是要看 (34) 中各級數起首的幾項是怎樣的．例如，倘使設

$$\left.\begin{aligned} &x_1 = 1,\ y_1 = 0, \cdots\cdots, z_1 = 0; \\ &x_2 = 0,\ y_2 = 1, \cdots\cdots, z_2 = 0; \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &x_k = 0,\ y_k = 0, \cdots\cdots, z_k = 1. \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

那麽 (40) 的解一定存在.

事實上,這時候方程組 (40) 取得最簡單的形式, 由方程組本身立刻可以看出它的解是

$$\left.\begin{aligned} A&=u_1, \\ B&=u_2, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ C&=u_k. \end{aligned}\right\}$$

很明顯地,還可以有另外整組的數

$$x_1,\cdots\cdots,z_1,\cdots\cdots,x_k,\cdots\cdots,z_k,$$

使得不管方程組 (40) 右端是什麽,它都有解. 例如,設

$$\left.\begin{aligned} x_1&=1,\ y_1=1,\cdots\cdots,\ z_1=1; \\ x_2&=0,\ y_2=1,\cdots\cdots,\ z_2=1; \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_k&=0,\ y_k=0,\cdots\cdots,\ z_k=1. \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

此時方程組成爲

$$\left.\begin{aligned} A+B+\cdots\cdots+C&=u_1, \\ B+\cdots\cdots+C&=u_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots& \\ C&=u_k, \end{aligned}\right\}$$

由此逐步得出

$$C=u_k,\cdots\cdots,\ B=u_2-u_3,\ A=u_1-u_2.$$

講到一般的情形,我們提出下面一個定理:

爲了使含 k 個未知數的 k 個一次代數方程式 (40) ,對於它們右端 u_1, u_2,……, u_k 的任何值都有一解而且只有一解,其充分而且必要的條件是,相應的齊次方程組

$$\left.\begin{array}{l} Ax_1+By_1+\cdots\cdots+Cz_1=0, \\ Ax_2+By_2+\cdots\cdots+Cz_2=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Ax_k+By_k+\cdots\cdots+Cz_k=0, \end{array}\right\} \qquad (40')$$

只有零解*:

$$A=B=\cdots\cdots=C=0.$$

讀者容易證實,這個定理的條件,在 (41) 和 (42) 兩特例中是存在的. 以後我們將遇見一些用到上述命題的例子. 但是暫時還只是根據一個事實來談的,即,總有這種數 x_1,……, z_1,……, x_k,……, z_k [(34) 中各級數的起首的項],使得對於

*此處引敘的命題方便的地方就在於,應用它的時候並不需要熟習行列式的理論. 對於熟悉這種理論的讀者,我們要提醒他,方程組 (40),不管右端的值如何都有解的充分而且必要的條件是,方程組的行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix} x_1 & y_1\cdots\cdots z_1 \\ x_2 & y_2\cdots\cdots z_2 \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ x_k & y_k\cdots\cdots z_k \end{vmatrix}$$

不同於零. 這個恰恰就是方程組 (40) 對於任意一組確定的右端 (例如,都等於零) 只有一解的充分而且必要的條件. 因此,一組含 k 個未知數的 k 個一次方程式對於任何右端解都存在的條件,就和右端爲零時解的唯一性的條件合一. 本文所述命題表示的就是這一事實.

任何 $u_1, u_2, \cdots\cdots, u_k$,方程組 (40) 都有解 (這可以不依賴前面的定理而加以證明).

如果將這樣的數選做 (34) 中各級數的起首的項,那麼,依照前面講的,任何適合循環方程式 (33) 的級數,都可以按公式 (39) 表出來,這兒 $A, B, \cdots\cdots, C$ 是由方程組 (40) 確定的. 將 (34) 中 k 個級數看成一組,用了它就能把任何適合所設方程式 (33) 的級數的項按公式 (39) 表示出來,這種組叫做循環方程式的一個基.

從剛纔的敍述就可知道,每個方程式都有基,而且可以取成各式各樣的. 例如,用

$$\underbrace{\left.\begin{matrix} 1, 0, \cdots\cdots, 0 \\ 0, 1, \cdots\cdots, 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0, 0, \cdots\cdots, 1 \end{matrix}\right\}}_{(k)} \quad \text{或} \quad \underbrace{\left.\begin{matrix} 1, 1, \cdots\cdots, 1 \\ 0, 1, \cdots\cdots, 1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0, 0, \cdots\cdots, 1 \end{matrix}\right\}}_{(k)}$$

做起首的項的級數可作任何 k 階循環方程式的基.

第 5 節所講的總結如下:

對於任何 k 階循環級數,存在無窮多不同的、適合它的級數. 它們中的任何一個,都可以由適合這個方程式而且構成它的基的 k 個級數得出,只要用某些數 $A, B, \cdots\cdots, C$ 相應地乘這 k 個級數中的一個然後逐項相加.

因此,爲了完全地解出一個 k 階循環方程式,只要求出

有限個——k個——適合這個方程式，並且構成它的基的級數就夠了.

用例子來解釋上面說的話.

〔例1〕假設已給一個二階循環方程式:

$$u_{n+2}=2u_{n+1}-u_n.$$

它的基必然由兩個級數構成:

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\cdots\cdots,x_n,\cdots\cdots$$

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\cdots\cdots,y_n,\cdots\cdots$$

我們將它們這樣地選定，即設

$$x_1=1,\ x_2=1\ \text{和}\ y_1=0,\ y_2=1.$$

因爲所設的循環方程式，如果改寫成

$$u_{n+2}-u_{n+1}=u_{n+1}-u_n$$

的形式，就表明級數中兩鄰項的差是一個常數，即適合所設循環方程式的級數必須是算術級數，所以在級數 $\{x_n\}$ 的起首兩項是 $x_1=1$ 和 $x_2=1$ 時，我們得出公差爲零的算術級數，即

$$1,1,1,\cdots\cdots,1,\cdots\cdots(x_n=1),$$

而在級數 $\{y_n\}$ 的情形，因其起首兩項是 $y_1=0$ 和 $y_2=1$，則得出公差爲1的算術級數，即

$$0,1,2,\cdots\cdots,(n-1),\cdots\cdots\quad(y_n=n-1).$$

依照公式(39)任何適合所設方程式的循環方程式的項可以表成

$$u_n=Ax_n+By_n=A+B(n-1)$$

的形式，此處 A 和 B 應由下列兩方程式決定：

$$u_1=A+B(1-1),$$

$$u_2=A+B(2-1),$$

即 $$u_1=A,\qquad u_2=A+B.$$

由此 $$A=u_1,\qquad B=u_2-u_1,$$

所以 $$u_n=u_1+(n-1)(u_2-u_1).$$

這就是任何適合方程式

$$u_{n+2}=2u_{n+1}-u_n$$

的級數的項的普遍公式。

命 $u_1=a$, $u_2-u_1=d$，我們將它表成另一形式：

$$u_n=a+(n-1)d.$$

這剛好是大家熟悉的算術級數中普遍項的公式。

〔例2〕再看另外一個二階循環方程式：

$$u_{n+2}=u_{n+1}+u_n.$$

命 $x_1=1$, $x_2=1$，我們得到已經慣熟了的斐波那契級數：

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\cdots\cdots$$

又取級數 $\{y_n\}$，其中 $y_1=0$ 和 $y_2=1$，作爲第二個構成基的級數。我們有

$$y_3=y_2+y_1=1,\quad y_4=y_3+y_2=2,\quad y_5=y_4+y_3=3,\cdots\cdots$$

這兒 $y_2=x_1$, $y_3=x_2$, $y_4=x_3$, $y_5=x_4$, $\cdots\cdots$，而一般地，$y_n=x_{n-1}$ $(n=2,3,\cdots\cdots)$。事實上，如果我們已經證明當 $n\leqslant m+1$ 的時候這個等式成立，那麼，作爲特例，$y_{m+1}=x_m$,

$y_m=x_{m-1}$ 就應該成立，因此我們得到

$$y_{m+2}=y_{m+1}+y_m=x_m+x_{m-1}=x_{m+1},$$

即所假定的等式對於 $n=m+2$ 也是正確的.

如此 $$y_n=x_{n-1} \qquad (n=2,3,\cdots\cdots).$$

所以對於任何適合方程式

$$u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$$

的級數，根據以前講的［公式 (39)］，我們都有

$$u_n=Ax_n+By_n,$$

此處 A 和 B 由下列聯立方程式決定:

$$u_1=Ax_1+By_1=A,$$

$$u_2=Ax_2+By_2=A+B,$$

由此 $$A=u_1, \qquad B=u_2-u_1$$

和 $$u_n=u_1x_n+(u_2-u_1)y_n.$$

當 $n\geqslant 2$ 時，y_n 可以用 x_{n-1} 來代替，由此

$$u_n=u_1x_n+(u_2-u_1)x_{n-1} \qquad (n\geqslant 2),$$

也就是

$$u_n=u_1(x_n-x_{n-1})+u_2x_{n-1}.$$

當 $n\geqslant 3$ 時，

$$x_n=x_{n-1}+x_{n-2}, \quad 即 \quad x_n-x_{n-1}=x_{n-2},$$

因而 $$u_n=u_1x_{n-2}+u_2x_{n-1} \qquad (n\geqslant 3).$$

如此，任何適合方程式

$$u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$$

的級數 $\{u_n\}$ 的各項可以用斐波那契數按我們得出的公式來表示．特例，如果 $u_1=-3$，$u_2=1$（參看第 15 頁），那麼

$$u_n=-3\,x_{n-2}+x_{n-1}\quad(n\geqslant 3).$$

6. 現在來證明，在某些很廣泛的條件下，我們可以找出 k 個公比各各不同的幾何級數來做循環方程式 (33) 的基：

$$u_{n+k}=a_1\,u_{n+k-1}+a_2u_{n+k-2}+\cdots\cdots+a_k\,u_n.$$

為了這個目的，我們先求，在什麼條件下，幾何級數

$$x_1=1,\ x_2=q,\cdots\cdots,\ x_n=q^{n-1},\cdots\cdots\quad(q\neq 0)$$

能够適合方程式 (33)．容易看出

$$x_{n+k}=q^{n+k-1},\ x_{n+k-1}=q^{n+k-2},\cdots\cdots,\ x_n=q^{n-1}.$$

將這些數值代替方程式 (33) 中的 u_{n+k}，u_{n+k-1}，$\cdots\cdots$，u_n，我們得到

$$q^{n+k-1}=a_1\,q^{n+k-2}+a_2\,q^{n+k-3}+\cdots\cdots+a_k\,q^{n-1},$$

由此
$$q^k=a_1\,q^{k-1}+a_2\,q^{k-2}+\cdots\cdots+a_k. \tag{43}$$

這樣一來，一個級數只有當它的公比 q 適合以 k 階循環方程式 (33) 的相當係數為係數的代數方程式 (43) 時，它纔能適合這個循環方程式．

方程式 (43) 叫做循環方程式 (33) 的特徵方程式．如果 $q=\alpha$ 是特徵方程式的任意一個根（實的或虛的），那麼，命

$$x_n=\alpha^{n-1}\quad(n=1,2,\cdots\cdots), \tag{44}$$

就得到一個首項為 $x_1=1$，公比為 α，並且適合方程式 (33) 的級數．事實上，α 依條件就是方程式 (43) 的根，即

$$\alpha^k = a_1\,\alpha^{k-1} + a_2\,\alpha^{k-2} + \cdots\cdots + a_k.$$

兩端乘以 α^{n-1}，此處 n 是任意的自然數，我們得到

$$\alpha^{n+k-1} = a_1\,\alpha^{n+k-2} + a_2\,\alpha^{n+k-3} + \cdots\cdots + a_k\,\alpha^{n-1},$$

即級數 (44) 適合方程式 (33).

如此，對於特徵方程式 (43) 的每一個根 $q=\alpha$，對應了一個以 α 爲公比，並且適合循環方程式 (33) 的幾何級數 (44).

要想只由一些不同公比的幾何級數構成一個基，它們必須有足夠的數目，即應該有 k 個這樣的級數，而爲了這個，特徵方程式必須有 k 個不同的根.

假定，特徵方程式所有的根都是各各不同的:

$$q_1=\alpha,\quad q_2=\beta, \cdots\cdots,\quad q_k=\gamma.$$

這時可以得出 k 個適合方程式 (33) 的幾何級數:

$$\left.\begin{array}{l} 1,\ \alpha,\ \alpha^2, \cdots\cdots,\ \alpha^{n-1}, \cdots\cdots, \\ 1,\ \beta,\ \beta^2, \cdots\cdots,\ \beta^{n-1}, \cdots\cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 1,\ \gamma,\ \gamma^2, \cdots\cdots,\ \gamma^{n-1}, \cdots\cdots \end{array}\right\} \qquad (45)$$

我們要證明，(45) 這組級數構成方程式 (33) 的基，即對於每一個適合方程式 (33) 的級數 $\{u_n\}$，可以選定這樣的數 $A, B, \cdots\cdots, C$，使得對於任何數 n，都有:

$$u_n = A\,\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1} + \cdots\cdots + C\gamma^{n-1}. \qquad (46)$$

爲了證明這個，只要證實，在 (45) 中取 $n=1, 2, \cdots\cdots, k$ 所得出的方程組:

$$\left.\begin{aligned} A+B+\cdots\cdots+C&=u_1,\\ A\alpha+B\beta+\cdots\cdots+C\gamma&=u_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\cdots\\ A\alpha^{k-1}+B\beta^{k-1}+\cdots\cdots+C\gamma^{k-1}&=u_k,\end{aligned}\right\}\tag{47}$$

不管右端的值怎樣,就 $A, B,\cdots\cdots, C$ 說都有解就行了. 可是爲了證明這點又只須(參看第 19 頁)相當的齊次方程組

$$\left.\begin{aligned} A+B+\cdots\cdots+C&=0,\\ A\alpha+B\beta+\cdots\cdots+C\gamma&=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\cdots\\ A\alpha^{k-1}+B\beta^{k-1}+\cdots\cdots+C\gamma^{k-1}&=0\end{aligned}\right\}\tag{48}$$

只有零解. 但這個的確也就是如此.

事實上,假定 (48) 還有零解以外的解, 卽有一些數 A, $B,\cdots\cdots, C$, 其中至少有一個,例如 A, 不等於零,能够適合方程組 (48). 爲了由此引出矛盾來,我們先來設計一個 $k-1$ 次的多項式 $M(x)$, 當 $x=\beta,\cdots\cdots, x=\gamma$ 時,它要變成零,而當 $x=\alpha$ 時,它要變成 1. 因爲這個多項式是 $k-1$ 次的而對於 $k-1$ 個不同的 n 的值: $\beta,\cdots\cdots,\gamma$ 它都變成零, 所以它必須有這個形式:

$$M(x)=\mu(x-\beta)\cdots\cdots(x-\gamma),$$

這兒 μ 是一個常數. 設 $x=\alpha$, 我們應該有 $M(\alpha)=1$, 由此

$$1=\mu(\alpha-\beta)\cdots\cdots(\alpha-\gamma)$$

因而

$$\mu=\frac{1}{(\alpha-\beta)\cdots\cdots(\alpha-\gamma)}.$$

這樣 $$M(x)=\frac{(x-\beta)\cdots\cdots(x-\gamma)}{(\alpha-\beta\ \cdots\cdots(\alpha-\gamma)};$$

很明白，它確實適合所設的條件．去括號，再歸併同類項，將它表成如下的形式：

$$M(x)=m_0+m_1x+\cdots\cdots+m_{k-1}x^{k-1}.$$

如果現在用 m_0, m_1, $\cdots\cdots$, m_{k-1} 分別去乘方程式 (48) 然後逐項相加，那麼可以得出

$$\begin{gathered}A(m_0+m_1\alpha+\cdots\cdots+m_{k-1}\alpha^{k-1})\\+B(m_0+m_1\beta+\cdots\cdots+m_{k-1}\beta^{k-1})\\+C(m_0+m_1\gamma+\cdots\cdots+m_{k-1}\gamma^{k-1})=0,\end{gathered}$$

也就是

$$AM(\alpha)+BM(\beta)+\cdots\cdots+CM(\gamma)=0.$$

但是 $M(\alpha)=1$, $M(\beta)=0,\cdots\cdots$, $M(\gamma)=0$，因而

$$A=0,$$

和假設矛盾．

如此，方程組 (48) 只有零解，因而，方程組 (47) 對於任何 u_1, $u_2,\cdots\cdots$, u_k，都有（唯一的）解，而這就意味着，(45) 這組級數構成方程式 (33) 的基．

這樣，我們得出，對於每一個循環方程式

$$u_{n+k}=a_1u_{n+k-1}+\cdots\cdots+a_ku_n,$$

如果和它相當的特徵方程式

$$q^k=a_1q^{k-1}+a_2q^{k-2}+\cdots\cdots+a_k$$

的根各各不同：$q=\alpha$, $q=\beta$, ……, $q=\gamma$, 總存在一個基，它由公比各為 α, β, ……, γ 的 k 個幾何級數構成. 換一句話說，對於任何適合方程式 (33) 的級數 $\{u_n\}$，總有 k 個數：A, B, ……, C [它們由方程組 (47) 求出]，使得

$$u_n=A\alpha^{n-1}+B\beta^{n-1}+\cdots\cdots+C\gamma^{n-1} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\cdots\cdots).$$

第 6 節所講的總結如下：

對於任何 k 階循環方程式都對應了一個各項係數和它相同的 k 次代數方程式，這就是它的特徵方程式. 這個特徵方程式的每一個根都是一個適合所設的循環方程式的幾何級數的公比. 當這個特徵方程式一切的根各各不同時，就得到 k 個幾何級數，構成循環方程式的基. 因而，在這種情況下任何適合循環方程式的級數的項，可以由某些幾何級數 (數目為 k) 逐項相加得出來.

7. 讓我們來應用這個已求到的結果. 先從斐波那契級數開始. 這兒循環方程式是這樣的：

$$u_{n+2}=u_{n+1}+u_n,$$

因而，特徵方程式 (43) 有如下形式：

$$q^2=q+1.$$

解這個方程式，得到兩個相異的實根：

$$\alpha=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5} \text{ 和 } \beta=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

所以斐波那契級數的普遍項可以寫成這樣：

$$u_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1}.$$

爲了求未知的係數 A 和 B，我們設 $n=1$ 和 $n=2$；得到

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = 1 = A+B, \\ u_2 = 1 = A\alpha + B\beta = \dfrac{1}{2}(A+B) + \dfrac{\sqrt{5}}{2}(A-B). \end{array}\right\}$$

解這組聯立方程式，求得

$$A = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}, \qquad B = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}},$$

因而，

$$u_n = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1},$$

也就是

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]. \qquad (49)$$

這便是斐波那契數的一般表示式．乍一看，所得的公式頗爲繁複，用來計算不會有什麽方便．可是靠它的幫助卻能得出一系列有趣的結果．例如，我們來證明兩個相鄰的斐波那契數平方的和還是一個斐波那契數．

事實上：

$$u_n^2 = \frac{1}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} - 2(-1)^n\right],$$

$$u_{n+1}^2 = \frac{1}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+2} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+2} - 2(-1)^{n+1}\right];$$

因而，

$$u_{n+1}^2+u_n^2$$
$$=\frac{1}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}\cdot\frac{5+\sqrt{5}}{2}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\cdot\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right]$$
$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1}\right]=u_{2n+1}.$$

如此
$$u_{n+1}^2+u_n^2=u_{2n+1}. \tag{50}$$

例如
$$u_{13}=u_7^2+u_6^2=13^2+8^2=233.$$

順便說一下，這個 u_{13} 也就是斐波那契問題的答案.

我們建議讀者自己去證明在斐波那契數間，有一個比(50)更一般的關係，即

$$u_nu_m+u_{n+1}u_{m+1}=u_{n+m+1}. \tag{51}$$

我們再證明下面的定理，作為公式(49)的另外一個應用:

假設 a 和 b 是兩個自然數，又 $a<b$; 那麼用歐幾里得計算法（即輾轉相除法）求 a 和 b 的最大公約數時，其中逐步相除的次數總不超過數 a（按十進位制寫出）所含數字的個數的五倍.

應用歐幾里得計算法來求 a 和 b 的最大公約數，我們得到一串等式的鏈鎖:

$$\left.\begin{array}{rl}
(1) & b=ax'+y',\\
(2) & a=y'x''+y'',\\
(3) & y'=y''x'''+y''',\\
\multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\
(k) & y^{(k-2)}=y^{(k-1)}x^{(k)}+y^{(k)},\\
(k+1) & y^{(k-1)}=y^{(k)}x^{(k+1)}.
\end{array}\right\} \tag{52}$$

這兒逐步的餘數適合不等式

$$a>y'>y''>y'''>\cdots\cdots>y^{(k-1)}>y^{(k)}\geqslant 1.$$

在 (52) 的最後一個等式中的餘數等於零．所以，在它前面的餘數 y^k 就是 a 和 b 的最大公約數．因此 k 表示求最大公約數所需運算的次數．我們的問題，已經講過，在於估計次數 k 的值．爲了這個目的，把 $y^{(k)}$, $y^{(k-1)}$,……, y', a 這幾個數和斐波那契數 u_1, u_2, u_3, ……來比較．我們可以看到，$y^{(k)}\geqslant 1=u_2$，但它前面一個餘數 $y^{(k-1)}$ 大於 $y^{(k)}$，因而，$y^{(k-1)}\geqslant 2=u_3$．所以由等式 k 推斷出

$$y^{(k-2)}=y^{(k-1)}x^{(k)}+y^{(k)}\geqslant y^{(k-1)}\cdot 1+y^{(k)}\geqslant u_3+u_2=u_4.$$

如此，$y^{(k)}\geqslant u_2$, $y^{(k-1)}\geqslant u_3$, $y^{(k-2)}\geqslant u_4$.

假定我們已經證明下面各不等式的正確性：

$$y^{(k)}\geqslant u_2,\cdots\cdots, y^{(m)}\geqslant u_{k-m+2}, y^{(m-1)}\geqslant u_{k-m+3}\ (m-1\geqslant 2).$$

那麼由等式 $y^{(m-2)}=y^{(m-1)}x^{(m)}+y^{(m)}$ 就可以推出

$$y^{(m-2)}\geqslant y^{(m-1)}\cdot 1+y^{(m)}\geqslant u_{k-m+3}+u_{k-m+2}=u_{k-m+4}.$$

這樣逐步推論下去，可以達到

$$y''\geqslant u_k,\ y'\geqslant u_{k+1}$$

最後，由關係式 (2) 得出

$$a=y'x''+y''\geqslant y'\cdot 1+y''\geqslant u_{k+1}+u_k=u_{k+2}.$$

但是，按公式 (49)，u_{k+2} 有下面的形式：

$$u_{k+2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}\right].$$

所以 $$a\geqslant\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}\right]$$

$$>\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}-1\right] \qquad (53)$$

$\left(\text{因爲}\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right|<1,\text{所以}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}<1\right).$

由 (53) 得到

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}<a\sqrt{5}+1<\sqrt{5}\,(a+1)<\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2}(a+1)$$

$$\left(\sqrt{5}\quad\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2}=\frac{3+\sqrt{5}}{2},\text{因爲}\sqrt{5}<3\right).$$

所以 $$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}<a+1. \qquad (54)$$

我們現在注意

$$u_5=5=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{5}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{5}\right]$$

$$<\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{5}+1\right],$$

由此 $$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{5}>5\sqrt{5}-1>10.$$

所以 $$10^{k}<\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{5k}<(a+1)^{5}. \qquad (55)$$

如果數 a 按十進位制寫時有 n 個數字 (卽 a 是 n 位數)，那麼，很明白地，

$$10^{n-1}\leqslant a<10^{n},$$

由此 $$a+1\leqslant 10^n,$$

因而，根據不等式 (55)，

$$10^k<(a+1)^5\leqslant 10^{5n},$$

也就是 $$k<5n. \tag{56}$$

這就是所求的結果：在歐幾里得計算法中輾轉相除的次數 k，小於 a,b 兩數中較小一個按十進位制寫出所含數字個數的五倍．由這兒敍述的證明還可以看出，應用歐幾里得計算法最不利的情況（意思是運算次數極大，接近了定理所確立的限度）就是 b 和 a 恰好是相鄰的斐波那契數的時候．爲了使大家相信起見，舉 $b=u_{20}=6765$ 和 $a=u_{19}=4181$ 做例子．這兒，a 是一個四位數，因而，依照證明出來的定理，在歐幾里得計算法中運算的次數小於 $5\cdot 4=20$．這例子中實際運算的次數是 $k=17$．事實上：

(1) $6765=4181\cdot 1+2584,$	(10) $89=55\cdot 1+34,$
(2) $4181=2584\cdot 1+1597,$	(11) $55=34\cdot 1+21,$
(3) $2584=1597\cdot 1+987,$	(12) $34=21\cdot 1+13,$
(4) $1597=987\cdot 1+610,$	(13) $21=13\cdot 1+8,$
(5) $987=610\cdot 1+377,$	(14) $13=8\cdot 1+5,$
(6) $610=377\cdot 1+233,$	(15) $8=5\cdot 1+3,$
(7) $377=233\cdot 1+144,$	(16) $5=3\cdot 1+2,$
(8) $233=144\cdot 1+89,$	(17) $3=2\cdot 1+1,$
(9) $144=89\cdot 1+55,$	(18) $2=1\cdot 2+0.$

這裏，逐步得出的餘數是遞降的斐波那契數．一切的商(除了最末的一個)都等於1，這就說明了爲什麼運算次數是最多的理由．最大公約數顯然是1[等式(17)]，這就兩個相鄰的斐波那契數說來，是一開始就可預先見到的．實際上，由$u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$就知道，u_{n+2}和u_{n+1}的最大公約數跟u_{n+1}和u_n的最大公約數合一．所以，每對相鄰的斐波那契數的最大公約數總是一樣的．爲了求出它來，只要看第一對$u_2=u_1=1$就够了，由此可知，它等於1．

8. 我們研究週期級數(16)：

$u_1=5$，$u_2=7$，$u_3=1$，$u_4=3$，$u_5=2$，$u_6=1$，$u_7=3$，……，

作爲第二個例子．

這兒循環方程式是

$$u_{n+3}=u_n \quad (n\geqslant 3),$$

因而，特徵方程式是

$$q^3=1.$$

這個方程式有三個根：

$$\alpha=1,\ \beta=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{和}\ \gamma=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

所以級數的普遍項可以表成如下形式：

$$\begin{aligned}u_n&=A\alpha^{n-1}+B\beta^{n-1}+C\gamma^{n-1}\\&=A+B\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}+C\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}.\end{aligned}$$

這個等式對於一切使得循環方程式成立的n的值都成

立：$n=3, 4, 5\cdots\cdots$

注意，

$$-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=-\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right),$$

$$-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=-\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right);$$

所以依照棣莫弗公式：

$$u_n=A+B\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}+C\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}$$

$$=A+(-1)^{n-1}B\left[\cos\frac{\pi}{3}(n-1)-i\sin\frac{\pi}{3}(n-1)\right]$$

$$+(-1)^{n-1}C\left[\cos\frac{\pi}{3}(n-1)+i\sin\frac{\pi}{3}(n-1)\right]$$

$$=A+(B+C)(-1)^{n-1}\cos\frac{\pi}{3}(n-1)$$

$$+i(-B+C)(-1)^{n-1}\sin\frac{\pi}{3}(n-1).$$

命 $B+C=A_1$ 和 $i(-B+C)=A_2$；那麼這個公式就可以改寫成

$$u_n=A+A_1(-1)^{n-1}\cos\frac{\pi}{3}(n-1)$$

$$+A_2(-1)^{n-1}\sin\frac{\pi}{3}(n-1)\qquad(n\geqslant 3),$$

而留下來的只是求未知係數 A, A_1 和 A_2. 設 $n=3$, $n=4$ 和 $n=5$，我們得到含三個未知數的三個方程式：

$$u_3=1=A+A_1\cos\frac{2\pi}{3}+A_2\sin\frac{2\pi}{3}=A-\frac{1}{2}A_1+\frac{\sqrt{3}}{2}A_2,$$

$$u_4=3=A-A_1\cos\frac{3\pi}{3}-A_2\sin\frac{3\pi}{3}=A+A_1,$$

$$u_5=2=A+A_1\cos\frac{4\pi}{3}+A_2\sin\frac{4\pi}{3}=A-\frac{1}{2}A_1-\frac{\sqrt{3}}{2}A_2.$$

由此求出：

$$A=2,\ A_1=1 \text{ 和 } A_2=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

如此，

$$u_n=2+(-1)^{n-1}\left[\cos(n-1)\frac{\pi}{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin(n-1)\frac{\pi}{3}\right]$$

$$=2+(-1)^n\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\sin(n-2)\frac{\pi}{3}\qquad(n\geqslant 3).$$

我們看到，這例子裏面級數的普遍項是用三角函數來表示的，而這和級數的週期性完全符合。

最後，舉一個直接有關多項式除法的例子。

假設給了兩個多項式 $P(x)=3+x^2-x^5$ 和 $Q(x)=2-x-2x^2+x^3$；我們的問題就是要決定用 $Q(x)$ 除 $P(x)$ 所得商的係數的結構．這個商的係數的級數

$$u_1=D_0,\ u_2=D_1,\cdots\cdots,\ u_n=D_{n-1},\cdots\cdots,$$

我們在第2節中已經看到，是一個循環級數，它的各項適合方程式(20)：

$$D_{n+k}=-\frac{B_1}{B_0}D_{n+k-1}-\cdots\cdots-\frac{B_k}{B_0}D_n\qquad(n\geqslant l-k+1).$$

此處 k 是 $Q(x)$ 的次數，B_0, B_1,……, B_k 是 $Q(x)$ 的係數而 l 是 $P(x)$ 的次數.

因此，$k=3$, $B_0=2$, $B_1=-1$, $B_2=-2$, $B_3=1$, $l=5$:

$$D_{n+3}=\frac{1}{2}D_{n+2}+\frac{2}{2}D_{n+1}-\frac{1}{2}D_n \quad (n\geqslant 5-3+1=3).$$

即
$$D_{n+3}=\frac{1}{2}D_{n+2}+D_{n+1}-\frac{1}{2}D_n \quad (n\geqslant 3).$$

特徵方程式是
$$q^3=\frac{1}{2}q^2+q-\frac{1}{2},$$

即
$$q^3-q-\frac{1}{2}(q^2-1)=(q-\frac{1}{2})(q-1)(q+1)=0.$$

所以它的根是
$$\alpha=\frac{1}{2},\ \beta=1,\ \gamma=-1,$$

而 D_n 的公式是

$$D_n=A\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n+B\cdot 1^n+C(-1)^n \quad (n\geqslant 3).$$

設 $n=3$, $n=4$ 和 $n=5$; 得出三個方程式:

$$D_3=\frac{1}{8}A+B-C,\quad D_4=\frac{1}{16}A+B+C,$$

$$D_5=\frac{1}{32}A+B-C.$$

這裏面的未知數不僅是係數 A, B 和 C,還有 D_3, D_4, D_5 三個數. 要想確定它們,只須實際用 $Q(x)$ 去除 $P(x)$,到商的五次項爲止. 我們得出:

$$
\begin{array}{l|l}
3+x^2-x^5 & 2-x-2x^2+x^3 \\ \cline{2-2}
3-\frac{3}{2}x-3x^2+\frac{3}{2}x^3 & \frac{3}{2}+\frac{3}{4}x+2\frac{3}{8}x^2+1\frac{3}{16}x^3+2\frac{19}{32}x^4 \\ \cline{1-1}
\quad\frac{3}{2}x+4x^2-\frac{3}{2}x^3-x^5 & \\
\quad\frac{3}{2}x-\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{2}x^3+\frac{3}{4}x^4 & \\ \cline{1-1}
\qquad 4\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{4}x^4-x^5 & \\
\qquad 4\frac{3}{4}x^2-2\frac{3}{8}x^3-4\frac{3}{4}x^4+2\frac{3}{8}x^5 & \\ \hline
\qquad\qquad 2\frac{3}{8}x^3+4x^4-3\frac{3}{8}x^5 & \\
\qquad\qquad 2\frac{3}{8}x^3-1\frac{3}{16}x^4-2\frac{3}{8}x^5+1\frac{3}{16}x^6 & \\ \hline
\qquad\qquad\qquad 5\frac{3}{16}x^4-x^5-1\frac{3}{16}x^6 & \\
\qquad\qquad\qquad 5\frac{3}{16}x^4-2\frac{19}{32}x^5-5\frac{3}{16}x^6+2\frac{19}{32}x^7. & \\ \hline
\qquad\qquad\qquad\qquad 1\frac{19}{32}x^5+4x^6-2\frac{19}{32}x^7. &
\end{array}
$$

由此，

$$D_0=\frac{3}{2},\quad D_1=\frac{3}{4},\quad D_2=2\frac{3}{8},\quad D_3=1\frac{3}{16},$$

$$D_4=2\frac{19}{32},\quad D_5=\frac{51}{64}.$$

所以，上面得出的方程組成爲:

$$\frac{1}{8}A+B-C=1\frac{3}{16},$$

$$\frac{1}{16}A+B+C=2\frac{19}{32},$$

$$\frac{1}{32}A+B-C=\frac{51}{64},$$

由此求出: $A=4\frac{1}{6},\quad B=\frac{3}{2},\quad C=\frac{5}{6}.$

如此 $D_n=4\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2^n}+\frac{3}{2}+\frac{5}{6}(-1)^n\ (n\geqslant 3).$

我們的問題便解決了．由所得的公式可以陸續算出:

$$D_6=2\frac{51}{128},\ D_7=\frac{179}{256},\ D_8=2\frac{179}{512},\cdots\cdots$$

9. 上面各例中的特徵方程式都只有單根．現在再看第12頁中講到過的自然數平方的和的級數這個例子．對於這個級數循環方程式的形式是

$$S_{n+4}=4S_{n+3}-6S_{n+2}+4S_{n+1}-S_n,$$

因而，特徵方程式是這樣的:

$$q^4=4q^3-6q^2+4q-1,$$

也就是 $q^4-4q^3+6q^2-4q+1=(q-1)^4=0.$

它只有一個四重根: $q=1$; 所以這裏我們也只能得出一個適合循環方程式的幾何級數，這個級數的公比就是 1.

在這種情形下，必須找出其他較簡單的循環級數，來和上

述幾何級數共同構成所設方程式的基. 在本例中,這樣的級數是:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\cdots\cdots,\ (n-1),\cdots\cdots,$$

$$0,\ 1,\ 4,\ 9,\cdots\cdots,\ (n-1)^2,\cdots\cdots,$$

$$0,\ 1,\ 8,\ 27,\cdots\cdots,\ (n-1)^3,\cdots\cdots$$

(這是讀者容易證實的). 這裏我們只仔細地看看下面一個典型例子,而不講一般的情況,因那是需要相當繁重的計算的.

假設有一個循環方程式

$$u_{n+k}=C_{k-1}^{k}a\,u_{n+k-1}-C_{k-2}^{k}a^2\,u_{n+k-2}+\cdots\cdots$$
$$+(-1)^{k-1}C_0^k\,a^k\,u_n, \qquad (57)$$

此處 C_{k-1}^{k}, C_{k-2}^{k},……, C_0^k 是 k 階的二項式展開式的係數(也就是由 k 個不同物件每次取 $k-1$, $k-2$, …… 個的組合數). 相當的特徵方程式

$$q^k=C_{k-1}^{k}aq^{k-1}-C_{k-2}^{k}a^2q^{k-2}+\cdots\cdots+(-1)^{k-1}C_0^k a^k$$

可以寫成這個形式: $(q-a)^k=0.$

它有一個 k 重根 $q=a$; 很明顯地,

$$(a-a)^k=a^k-C_{k-1}^{k}a^k+C_{k-2}^{k}a^k-\cdots\cdots$$
$$+(-1)^kC_0^k\,a^k=0. \qquad (58)$$

我們再觀察下面一般的恆等式:

$$(a-a)^{k-m}=a^{k-m}-C_{k-m-1}^{k-m}a^{k-m}$$
$$+C_{k-m-2}^{k-m}a^{k-m}-\cdots\cdots+(-1)^{k-m}C_0^{k-m}a^{k-m}=0,$$

這裏 $m=0, 1, 2, \cdots\cdots, k-1$，也就是

$$(1-1)^{k-m}=C_{k-m}^{k-m}-C_{k-m-1}^{k-m}+C_{k-m-2}^{k-m}-\cdots\cdots$$
$$+(-1)^{\mu}C_{k-m-\mu}^{k-m}+\cdots\cdots+(-1)^{k-m}C_{0}^{k-m}=0. \qquad (59)$$

等式 (59)，和 $m=0$ 相當的，有如下形式：

$$C_{k}^{k}-C_{k-1}^{k}+C_{k-2}^{k}-\cdots\cdots+(-1)^{\mu}C_{k-\mu}^{k}$$
$$+\cdots\cdots+(-1)^{k}C_{0}^{k}=0. \qquad (59')$$

注意，

$$C_{k-\mu}^{k}=\frac{k(k-1)\cdots\cdots(\mu+1)}{1\cdot 2\cdots\cdots(k-\mu)}$$
$$=\frac{k(k-1)\cdots\cdots(k-m+1)}{(k-m-\mu+1)\cdots\cdots(k-\mu)}C_{k-m-\mu}^{k-m}$$
$$(m=1,2,\cdots\cdots, k-1;\ 0\leqslant\mu\leqslant k-m),$$

也就是

$$k(k-1)\cdots\cdots(k-m+1)C_{k-m-\mu}^{k-m}$$
$$=(k-m-\mu+1)\cdots\cdots(k-\mu)C_{k-\mu}^{k}, \qquad (60)$$

用因數 $k(k-1)\cdots\cdots(k-m+1)$ 來乘 (59′) 式中相應的各等式 $(m=1, 2,\cdots\cdots, k-1)$，然後依照 (60) 將它們寫成如下形狀：

$$(k-m+1)\cdots\cdots kC_{k}^{k}-(k-m)\cdots\cdots(k-1)C_{k-1}^{k}+\cdots\cdots$$
$$+(-1)^{\mu}(k-m-\mu+1)\cdots\cdots(k-\mu)C_{k-\mu}^{k}$$
$$+\cdots\cdots+(-1)^{k-m}1\cdot 2\cdots\cdots mC_{0}^{k}=0 \qquad (59'')$$
$$(m=1, 2,\cdots\cdots, k-1).$$

我們現在來證明，當 $m=0, 1, 2, \cdots\cdots, k-1$ 時，下列等式是正確的：

$$k^m C_k^k-(k-1)^m C_{k-1}^k+\cdots\cdots+(-1)^\mu (k-\mu)^m C_{k-\mu}^k$$
$$+\cdots\cdots+(-1)^k\cdot 0^m C_0^k=0. \qquad (61)$$

事實上，當 $m=0$ 時，上面的等式和 (59′) 合一，因而它是正確的。

依數學歸納法來論證，假定當 $m=0, 1, \cdots\cdots, j(j\leqslant k-2)$ 時，等式 (61) 是正確的，那麼我們只須證明，當 $m=j+1$ 時，等式 (61) 也是正確的。為了這一目的，先引進一個 $j+1$ 次的多項式：

$$f(x)=(x-j)(x-j+1)\cdots\cdots(x-1)x$$
$$=x^{j+1}-\beta_j x^j-\cdots\cdots-\beta_1 x. \qquad (62)$$

用 $\beta_1, \beta_2, \cdots\cdots, B_j$ 這些數相應地乘在等式 (61) 中，$m=1, 2, \cdots\cdots, j$ 時的各式，則得

$$\left.\begin{aligned}
&\beta_1 k C_k^k-\beta_1(k-1)C_{k-1}^k\\
&\qquad+\cdots\cdots+\beta_1(-1)^\mu(k-\mu)C_{k-\mu}^k\\
&\qquad\qquad+\cdots\cdots+\beta_1(-1)^k\cdot 0\cdot C_0^k=0,\\
&\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\beta_j k^j C_k^k-\beta_j(k-1)^j C_{k-1}^k\\
&\qquad+\cdots\cdots+\beta_j(-1)^\mu(k-\mu)^j C_{k-\mu}^k\\
&\qquad\qquad+\cdots\cdots\beta_j(-1)^k\cdot 0^j\cdot C_0^k=0.
\end{aligned}\right\} \qquad (63)$$

再將相當於 $m=j+1$ 的等式 (59″) 寫成下面的形狀:

$$f(k)C_k^k-f(k-1)C_{k-1}^k+\cdots\cdots+(-1)^\mu f(k-\mu)C_{k-\mu}^k$$
$$+\cdots\cdots+(-1)^k f(0)C_0^k=0 \qquad (64)$$

[我們這兒利用了 $(k-j)\cdots\cdots k=f(k)$, $(k-j-1)\cdots\cdots(k-1)=f(k-1)$, $\cdots\cdots$, $(k-j-\mu)\cdots\cdots(k-\mu)=f(k-\mu)$, $\cdots\cdots$等關係].

將 (63) 和 (64) 逐項相加,就得

$$[\beta_1 k+\cdots\cdots+\beta_j k^j+f(k)]C_k^k$$
$$-[\beta_1(k-1)+\cdots\cdots+\beta_j(k-1)^j+f(k-1)]C_{k-1}^k+\cdots\cdots$$
$$+(-1)^\mu[\beta_1(k-\mu)+\cdots\cdots+\beta_j(k-\mu)^j+f(k-\mu)]C_{k-\mu}^k$$
$$+\cdots\cdots+(-1)^k[\beta_1\cdot 0+\cdots\cdots+\beta_j\cdot 0^j+f(0)]C_0^k=0.$$

但是由於 (62),

$$\beta_1 x+\beta_2 x^2+\cdots\cdots+\beta_j x^j+f(x)=x^{j+1}.$$

所以得到的結果取得這個形式:

$$k^{j+1}C_k^k-(k-1)^{j+1}C_{k-1}^k+\cdots\cdots+(-1)^\mu(k-\mu)^{j+1}C_{k-\mu}^k$$
$$+\cdots\cdots+(-1)^k\cdot 0^{j+1}\cdot C_0^k=0.$$

這也就是當 $m=j+1$ 時等式 (61) 的形狀. 因此關係式 (61) 的正確性證明完畢.

最後,我們看任意一個次數不高於 $k-1$ 的多項式:

$$P(x)=A_{k-1}x^{k-1}+A_{k-2}x^{k-2}+\cdots\cdots+A_0. \qquad (65)$$

相應地用 A_0, A_1, ……, A_{k-1} 乘在等式 (61) 中 $m=0$, 1, 2,……, $k-1$ 時的各式，則得

$$A_0C_k^k-A_0C_{k-1}^k+\cdots\cdots$$
$$+(-1)^\mu A_0C_{k-\mu}^k+\cdots\cdots+(-1)^kA_0C_0^k=0,$$

$$A_1kC_k^k-A_1(k-1)C_{k-1}^k+\cdots\cdots$$
$$+(-1)^\mu A_1(k-\mu)C_{k-\mu}^k+\cdots\cdots+(-1)^kA_1\cdot 0\cdot C_0^k=0,$$

……………………………………………………………

$$A_{k-1}k^{k-1}C_k^k-A_{k-1}(k-1)^{k-1}C_{k-1}^k+\cdots\cdots$$
$$+(-1)^\mu A_{k-1}(k-\mu)^{k-1}C_{k-\mu}^k+\cdots\cdots$$
$$+(-1)^kA_{k-1}\cdot 0^{k-1}\cdot C_0^k=0.$$

將它們逐項相加，就得

$$(A_0+A_1k+\cdots\cdots+A_{k-1}k^{k-1})C_k^k$$
$$-[A_0+A_1(k-1)+\cdots\cdots+A_{k-1}(k-1)^{k-1}]C_{k-1}^k+\cdots\cdots$$
$$+(-1)^\mu[A_0+A_1(k-\mu)+\cdots\cdots+A_{k-1}(k-\mu)^{k-1}]C_{k-\mu}^k$$
$$+\cdots\cdots+(-1)^k[A_0+A_1\cdot 0+\cdots\cdots+A_{k-1}\cdot 0^{k-1}]C_0^k=0,$$

也就是

$$P(k)\cdot C_k^k-P(k-1)\cdot C_{k-1}^k+\cdots\cdots+(-1)^kP(0)\cdot C_0^k=0. \quad (66)$$

所以，任意一個次數不高於 $k-1$ 的多項式 $P(x)$ 適合關係式 (66).

特例，設 $P(x)=(x+n-1)^m$，此處 n 是一個任意的自然數而 m 是不大於 $k-1$ 的整數，$0\leqslant m\leqslant k-1$.

這時等式 (66) 成爲

$$(k+n-1)^m C_k^k-(k+n-2)^m C_{k-1}^k+\cdots\cdots$$
$$+(-1)^k(n-1)^m C_0^k=0,$$

如果用 α^{k+n-1} 乘它並用 1 代替 C_k^k，它變成

$$(k+n-1)^m\alpha^{k+n-1}=C_{k-1}^k\alpha(k+n-2)^m\alpha^{k+n-2}$$
$$-C_{k-2}^k\alpha^2(k+n-3)^m\alpha^{k+n-3}+\cdots\cdots$$
$$+(-1)^{k-1}C_0^k\alpha^k(n-1)^m\alpha^{n-1}. \quad (67)$$

將 (67) 和 (57) 加以比較，我們看出，下面 k 個級數中的任意一個都適合循環方程式 (57)：

$$\left.\begin{array}{ll}1,\ \alpha,\ \alpha^2,\cdots\cdots,\alpha^{n-1},\cdots\cdots, & (m=0);\\ 0,\ \alpha,\ 2\alpha^2,\cdots\cdots,(n-1)\alpha^{n-1},\cdots\cdots, & (m=1);\\ 0,\ \alpha,\ 2^2\alpha^2,\cdots\cdots,(n-1)^2\alpha^{n-1},\cdots\cdots, & (m=2);\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ 0,\ \alpha,\ 2^{k-1}\alpha^2,\cdots\cdots,(n-1)^{k-1}\alpha^{n-1},\cdots\cdots, & (m=k-1).\end{array}\right\} \quad (68)$$

如果我們能夠證明，這些級數構成 (57) 的基，那麼就可得出，適合方程式 (57) 的任何級數的項有這樣的形式：

$$u_n=[B_0+B_1(n-1)+\cdots\cdots+B_{k-1}(n-1)^{k-1}]\alpha^{n-1}$$
$$=Q(n-1)\alpha^{n-1}, \quad (69)$$

此處 $Q(x)=B_0+B_1x+B_2x^2+\cdots\cdots+B_{k-1}x^{k-1}$ 是一個具有任

意的係數，而次數不高於 $k-1$ 的多項式.

這只要證明，k 個一次聯立方程式:

$$B_0+B_1\cdot 0+\cdots\cdots+B_{k-1}\cdot 0^{k-1}=u_1,$$

$$B_0+B_1\cdot 1+\cdots\cdots+B_{k-1}\cdot 1^{k-1}=u_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$B_0+B_1(k-1)+\cdots\cdots+B_{k-1}(k-1)^{k-1}=u_k,$$

不管 $u_1,\cdots\cdots,u_k$ 的值怎樣，對於 $B_0, B_1,\cdots\cdots,B_{k-1}$ 都有解，即 (根據第 19 頁的命題) 方程組

$$B_0=0,$$

$$B_0+B_1+\cdots\cdots+B_{k-1}=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$B_0+(k-1)B_1+\cdots\cdots+(k-1)^{k-1}B_{k-1}=0$$

只有零解. 但是上面的方程組意味着,

$$Q(0)=Q(1)=\cdots\cdots=Q(k-1)=0,$$

即方程式

$$B_0+B_1x+\cdots\cdots+B_{k-1}x^{k-1}=0$$

的次數雖然不比 $k-1$ 高，但卻至少有 k 個相異的根: 0, 1, 2,……, $k-1$. 由此得出

$$B_0=B_1=\cdots\cdots=B_{k-1}=0,$$

這樣就完全證明了，(68) 中的級數構成一切適合方程式 (57) 的級數的基.

上面講的只是合於 (57) 這種形式的方程式的級數，普遍

地說來，任意一個循環級數所適合的方程式可以是最一般的：

$$u_{n+k}=a_1u_{n+k-1}+a_2u_{n+k-2}+\cdots\cdots+a_ku_n(a_k\neq 0),\quad(70)$$

而和它相當的特徵方程式

$$q^k=a_1q^{k-1}+\cdots\cdots+a_k\quad(71)$$

可以有 a 重根 α, b 重根 β, ……, c 重根 γ, 共有 $a+b+\cdots\cdots+c=k$ 個根.

對於這種最一般的情況，可以證明，它的基由下面 k 個級數構成：

$$1,\ \alpha,\ \alpha^2,\cdots\cdots,\ \alpha^{n-1},\cdots\cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$0,\ \alpha,\ 2^{a-1}\alpha^2,\cdots\cdots,\ (n-1)^{a-1}\alpha^{n-1},\cdots\cdots,$$

$$1,\ \beta,\ \beta^2,\cdots\cdots,\ \beta^{n-1},\cdots\cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$0,\ \beta,\ 2^{b-1}\beta^2,\cdots\cdots,\ (n-1)^{b-1}\beta^{n-1},\cdots\cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$1,\ \gamma,\ \gamma^2,\cdots\cdots,\ \gamma^{n-1},\cdots\cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$0,\ \gamma,\ 2^{c-1}\gamma^2,\cdots\cdots,\ (n-1)^{c-1}\gamma^{n-1},\cdots\cdots$$

所以

$$u_n=Q(n-1)\alpha^{n-1}+R(n-1)\beta^{n-1}+\cdots\cdots+S(n-1)\gamma^{n-1},\quad(72)$$

此處 $Q(x)$, $R(x)$, ……, $S(x)$ 是一些隨級數而定的多項式，

次數相應地不高於 $a-1, b-1, \cdots\cdots, c-1$.

如此，**任何循環級數的普遍項 u_n 可以寫成一些 $n-1$ 的多項式**（也就是 n 的多項式，因爲兩種講法效果是一樣的）**和一些幾何級數的普遍項乘積的和的形式．這些幾何級數的公比都等於特徵方程式 (71) 的根．**

當特徵方程式的根都是單根時，上面講的多項式成爲常數，而循環級數的普遍項取得幾個幾何級數的項的和的形式．

還可以證明逆命題的正確性．就是，**任何級數 $\{u_n\}$，它的普遍項能用公式 (72) 表示的，一定是循環級數***．相應的特徵方程式 (71) 則可以按照它的根 $\alpha, \beta, \cdots\cdots, \gamma$ 和這些根的重複次數 $a, b, \cdots\cdots, c$（就是多項式 $Q, R, \cdots\cdots, S$ 的次數，各加上 1）造出．由此又立卽能求得循環方程式 (70)．

舉級數

$$u_n=(n-1)^2\cdot 2^{n-1}+3^{n-1}$$

爲例來觀察．

和 (72) 作比較，我們看出，特徵方程式的根是：$\alpha=2$，$\beta=3$，而且 α 是 $2+1=3$ 重根．所以特徵方程式必然是：

$$(q-2)^3(q-3)=q^4-9q^3+30q^2-44q+24=0,$$

而循環方程式可以寫成這樣：

$$u_{n+4}=9u_{n+3}-30u_{n+2}+44u_{n+1}-24u_n.$$

讓讀者自己證實，所設的級數適合上面這個方程式．

---

* 這兒我們將證定理和逆定理的證明都省略掉了．

10. 用一些例子來解釋第 9 節所得的結果．我們在第 2 節已經見到，算術級數的項適合這樣的方程式：

$$u_{n+2}=2u_{n+1}-u_n,$$

自然數的平方級數適合方程式

$$u_{n+3}=3u_{n+2}-3u_{n+1}+u_n,$$

而自然數的立方級數適合方程式

$$u_{n+4}=4u_{n+3}-6u_{n+2}+4u_{n+1}-u_n.$$

顯然地，所有這些方程式都是第 9 節裏講的方程式 (57) 的特例

$$u_{n+k}=C_{k-1}^k u_{n+k-1}-C_{k-2}^k u_{n+k-2}+\cdots\cdots$$

$$+(-1)^{k-1}C_0^k u_n \qquad (57')$$

裏面［在 (57) 裏設 $a=1$ 就得 (57′)］.

任何適合這個方程式的級數的普遍項，必然有如下形式［公式 (69)］：

$$u_n=B_0+B_1(n-1)+\cdots\cdots+B_{k-1}(n-1)^{k-1}. \qquad (69')$$

爲了求係數 $B_0, B_1, \cdots\cdots, B_{k-1}$，只須解下面含 k 個未知數的一次聯立方程式：

$$\left.\begin{aligned} B_0&=u_1, \\ B_0+B_1+\cdots\cdots+B_{k-1}&=u_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ B_0+B_1(k-1)+\cdots\cdots+B_{k-1}(k-1)^{k-1}&=u_k. \end{aligned}\right\} \qquad (73)$$

在算術級數的情形，$k=2$ 而公式 (69′) 取如下形式：

$$u_n=B_0+B_1(n-1),$$

方程組 (73) 則成爲

$$B_0=u_1,$$

$$B_0+B_1=u_2.$$

由此很明白地，$B_0=u_1$ 是級數的首項，而 $B_1=u_2-u_1=d$ 是級數的公差．因而

$$u_n=u_1+d(n-1).$$

我們所得到的就是大家熟知的公式．

在自然數平方或立方級數的情形，用不着做和上面相當的計算，因爲這時一開頭就已經知道，$u_n=n^2$ 和 $u_n=n^3$．不過，利用 (69′) 和 (73) 兩關係式來推出算術級數，以及自然數平方或立方級數諸項的和的公式卻是有點趣味的．

在第 4 節中我們證明了，如果一個級數 $\{u_n\}$ 的項適合這樣形狀的方程式：

$$u_{n+k}=a_1u_{n+k-1}+a_2u_{n+k-2}+\cdots\cdots+a_ku_n,$$

那麼這個級數起首各項的和 $\{S_n\}$ ($S_1=u_1$，$S_2=u_1+u_2$，$S_3=u_1+u_2+u_3$，……) 適合如下的方程式：

$$S_{n+k+1}=(1+a_1)S_{n+k}$$
$$+(a_2-a_1)S_{n+k-1}+\cdots\cdots+(a_k-a_{k-1})S_{n+1}-a_kS_n.$$

在方程式 (57′) 的情況，很顯然地，

$$a_1=C_1^k,\quad a_2=-C_2^k,\cdots\cdots,\quad a_k=(-1)^{k-1}C_k^k.$$

所以

$$1+a_1=1+C_1^k=C_1^{k+1},$$

$$a_2-a_1=-(C_2^k+C_1^k)=-C_2^{k+1},$$

$$a_3-a_2=C_3^k+C_2^k=C_3^{k+1},$$

$$a_k-a_{k-1}=(-1)^{k-1}(C_k^k+C_{k-1}^k)=(-1)^{k-1}C_k^{k+1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-a_k=(-1)^kC_k^k=(-1)^kC_{k+1}^{k+1},$$

而 $\{S_n\}$ 的循環方程式可以表成如下形狀:

$$S_{n+k+1}=C_1^{k+1}S_{n+k}-C_2^{k+1}S_{n+k-1}+\cdots\cdots+(-1)^kC_{k+1}^{k+1}S_n,$$

也就是

$$S_{n+k+1}-C_1^{k+1}S_{n+k}+C_2^{k+1}S_{n+k-1}-\cdots\cdots$$
$$+(-1)^{k+1}C_{k+1}^{k+1}S_n=0.$$

因此，如果級數 $\{u_n\}$ 適合 (57′) 這種形式的 k 階方程式，那麼相當的和的級數 $\{S_n\}$ 就適合同一形式的方程式，不過是 $k+1$ 階的. 特例，對於算術級數 $k=2$, 對於自然數平方級數 $k=3$ 而對於立方級數 $k=4$; 因而，對於相當的和的級數需要在上面講過的等式 (57′), (69′), (73) 裏面將 k 取得大上 1 的數: 3, 4 和 5.

(甲) **算術級數的和**　根據上面講的按語，S_n 可以在公式 (69′) (用 S_n 代 u_n) 中取 $k=3$ 而用這公式來表出. 因而，

$$S_n=B_0+B_1(n-1)+B_2(n-1)^2.$$

係數 B_0, B_1, B_2 由方程組 (73) (同樣地取 $k=3$ 並且用

S_n 代 u_n) 決定:

$$B_0=S_1=u_1,$$

$$B_0+B_1+B_2=S_2=u_1+u_2=2u_1+d,$$

$$B_0+2\cdot B_1+2^2B_2=S_3=u_1+u_2+u_3=3u_1+3d.$$

解出來,得到

$$B_0=u_1,\ B_1=u_1+\frac{1}{2}d,\ B_2=\frac{1}{2}d.$$

所以

$$\begin{aligned}S_n&=u_1+(u_1+\frac{1}{2}d)(n-1)+\frac{1}{2}d(n-1)^2\\&=nu_1+\frac{1}{2}d(n-1)n=\frac{n[2u_1+(n-1)d]}{2}\\&=\frac{n[u_1+u_1+(n-1)d]}{2}=\frac{n(u_1+u_n)}{2}.\end{aligned}$$

(乙) **自然數平方的和** 在公式 (69′) 和公式 (73) 中取 $k=4$ 並且用 S_n 代 u_n,我們得到

$$S_n=B_0+B_1(n-1)+B_2(n-1)^2+B_3(n-1)^3$$

以及

$$B_0=S_1=1,$$

$$B_0+B_1+B_2+B_3=S_2=1+2^2=5,$$

$$B_0+2B_1+4B_2+8B_3=S_3=1+2^2+3^2=14,$$

$$B_0+3B_1+9B_2+27B_3=S_4=1+2^2+3^2+4^2=30.$$

由這組聯立方程式求出:

$$B_0=1,\ B_1=2\frac{1}{6}\quad B_2=1\frac{1}{2},\ B_3=\frac{1}{3}.$$

所以

$$S_n=1+\frac{13}{6}(n-1)+\frac{3}{2}(n-1)^2+\frac{1}{3}(n-1)^3$$

$$=\frac{1}{6}n+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{3}n^3=\frac{n(1+3n+2n^2)}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

我們所得到的就是大家早已知道的公式.

（丙）**自然數立方的和**　這個和的公式是:

$$S_n=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

它的推證留給讀者作爲練習.

最後,再看一個級數的例子: $a,\ 2a^2,\ 3a^3,\cdots\cdots,na^n,\cdots\cdots$ $(a\neq0,\ a\neq1)$.

這兒　$u_n=na^n$　$(n=1,\ 2,\ 3,\cdots\cdots)$.

容易看出,　$u_{n+2}=2au_{n+1}-a^2u_n$;

事實上,

$$2au_{n+1}-a^2u_n=2a(n+1)a^{n+1}-a^2na^n=(n+2)a^{n+2}=u_{n+2}.$$

因爲 $k=2$, $a_1=2a$ 和 $a_2=-a^2$, 所以和的級數 $\{S_n\}$ $(S_1=a,\ S_2=a+2a^2,\ S_3=a+2a^2+3a^3,\cdots\cdots)$ 應該適合下面這個方程式[參看(30)]:

$$S_{n+3}=(a_1+1)S_{n+2}+(a_2-a_1)S_{n+1}-a_2S_n$$

$$=(2a+1)S_{n+2}-(a^2+2a)S_{n+1}+a^2S_n.$$

相應的特徵方程式是這樣的:

$$q^3=(2a+1)q^2-(a^2+2a)q+a^2.$$

容易看出, $q=a$ 是能够適合上式的. 用 $q-a$ 除多項式

$q^3-(2a+1)q^2+(a^2+2a)q-a^2$,得出商式:

$$q^2-(a+1)q+a.$$

所以,特徵方程式其餘兩個根適合下面的方程式:

$$q^2-(a+1)q+a=0.$$

這兩個根是: a 和 1.

如此,特徵方程式有二重根 α 和單根 β.

所以我們得到求 S_n 的公式[利用公式(69),將其中 u_n 改寫成 S_n,並且取 $\alpha=a$, $Q(x)=B_0+B_1x$—— 一個一次多項式,$\beta=1$ 以及 $R(x)=C_0$—— 一個常數.]:

$$S_n=[B_0+B_1(n-1)]a^{n-1}+C_0 \qquad (n=1,2,3,\cdots\cdots).$$

係數 B_0, B_1 和 C_0 可以由下面的方程組求出:

$$B_0+C_0=S_1=a,$$

$$(B_0+B_1)a+C_0=S_2=a+2a^2,$$

$$(B_0+2B_1)a^2+C_0=S_3=a+2a^2+3a^3,$$

這幾個方程式就是由在公式中取 $n=1, 2, 3$ 得來的.

由此我們求得

$$B_0=\frac{a^3-2a^2}{(a-1)^2},\quad B_1=\frac{a^2}{a-1} \text{ 和 } C_0=\frac{a}{(a-1)^2}.$$

因而,

$$S_n=[B_0+B_1(n-1)]a^{n-1}+C_0=\frac{na^{n+2}-(n+1)a^{n+1}+a}{(a-1)^2}$$

$$=\frac{u_na^2-(u_{n+1}-u_n)}{(a-1)^2}.$$

結　語

看了這本書，讀者對於各種循環級數以及它們在初等數學中的作用必定有了一些概念．同時也已經知道，循環級數和它們裏面最簡單的——幾何級數以及自然數乘方級數（特例自然數本身所成的級數，那又是一個算術級數）——相去並不很遠，而且還可以用這些最簡單的級數表示出來．

但是即使在初等數學裏面也已經常常碰到並不循環的級數．例如，在整個數學科學中最爲重要的一個級數——質數構成的級數：

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\cdots\cdots$$

就是不循環的．這個級數以及它的深刻的和複雜的性質是在數論裏面研究的．

不循環的還有由多種初等函數的值所成的級數，例如：

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\cdots\cdots,\frac{1}{n},\cdots\cdots$$

（函數 $y=\frac{1}{x}$ 當 $x=1,\ 2,\ 3,\cdots\cdots$ 時的值的級數），或者

$$1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{4},\cdots\cdots,\ \sqrt{n},\cdots\cdots,$$

$$log\,1,\ \ log\,2,\ \ log\,3,\ \ log\,4,\cdots\cdots,\ log\,n,\cdots\cdots$$

（函數 $\sqrt{x}$ 和 $log\,x$ 的值的函數）等等．

研究這些以及類似的級數*（還有循環級數）是以前講的那種數學學科——定差算法的事.

最後，在初等數學課程中，尤其在高等學校裏研習的數學分析課程中，佔極重要地位的是收斂級數，即具有有限的極限的那種級數。研究這種級數是極限論中重要的問題而是屬於**數學分析**的基礎方面的。這時級數的個別的項的性質最多就只有第二等的地位：重要的只是極限存在的事實以及這個極限的大小。

作者之所以加添以上一些按語，目的是使讀者了解，我們已經闡述了的循環級數的理論，不論從對象本身來看，還是從它們所表現的法則性來看，都只能算是一般級數論的極特殊的和極狹小的一章罷了。

---

* 這裏指的是由所謂解析函數——最簡單的例子是初等函數——的值構成的級數.

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝循环级数
作者＝马库希维契著　　朱美琨译
页数＝５６
ＳＳ号＝１１１３９０６８
出版日期＝１９５２年１１月第１版

封面
正文