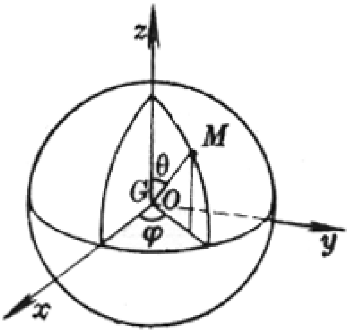
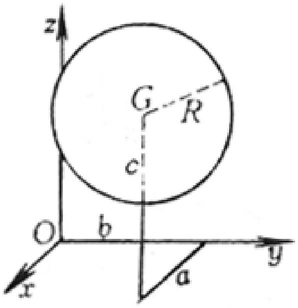
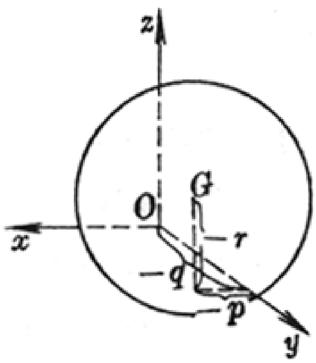
§6 二 次 曲 面

一、球面

[球面的方程、球心与半径]

方 程 与 图 形	球心与半径
$x^2+y^2+z^2=R^2$ 或 $\begin{cases} x=R\sin\theta\cos\varphi \\ y=R\sin\theta\sin\varphi \\ z=R\cos\theta \end{cases}$ (球面坐标方程.式中φ为经度,θ为余纬度) 	球心　$G(0,0,0)$ 半径　R
$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ 或 $\begin{cases} x=a+R\sin\theta\cos\varphi \\ y=b+R\sin\theta\sin\varphi \\ z=c+R\cos\theta \end{cases}$ (球面坐标方程式中φ,θ 同上) 	球心　$G(a,b,c)$ 半径　R

方 程 与 图 形	球心与半径
$x^2+y^2+z^2+2px+2qy+2rz+d=0,$ $p^2+q^2+r^2>d$ 	球心　$G(-p,-q,-r)$ 半径　$\sqrt{p^2+q^2+r^2-d}$

[球面的切面与法线] 设一平面 P 通过球面上一点 M 且垂直于半径 GM,则称 P 为球面在 M 的切面.直线 MG 称为球面在点 M 的法线.

设球面方程为

$$x^2+y^2+z^2+2px+2qy+2rz+d=0$$

则球面在点 $M(x_0,y_0,z_0)$的切面方程为

$$x_0x+y_0y+z_0z+p(x+x_0)+q(y+y_0)+r(z+z_0)+d=0$$

球面在点 $M(x_0,y_0,z_0)$的法线方程为

$$\frac{x-x_0}{x_0+p}=\frac{y-y_0}{y_0+q}=\frac{z-z_0}{z_0+r}$$

[两个球面的交角] 设两个球面

$$S_1 \quad x^2+y^2+z^2+2p_1x+2q_1y+2r_1z+d_1=0$$
$$S_2 \quad x^2+y^2+z^2+2p_2x+2q_2y+2r_2z+d_2=0$$

两个球面的交角是指它们在交点的两个切面的夹角,记作θ,则

$$\cos\theta=\frac{2p_1p_2+2q_1q_2+2r_1r_2-d_1-d_2}{2\sqrt{p_1^2+q_1^2+r_1^2-d_1}\sqrt{p_2^2+q_2^2+r_2^2-d_2}}$$

因公式中不包含交点的坐标,所以在两个球面的交线上的各点的交角必相等.

两个球面的正交条件为

$$2p_1p_2+2q_1q_2+2r_1r_2-d_1-d_2=0$$

[球面束·两个球面的根面] 设

$$S_\lambda \quad S_1+\lambda S_2=0$$

式中 S_1 和 S_2 如(1)式定义,λ 为参数,则有

$$(1+\lambda)(x^2+y^2+z^2)+2(p_1+\lambda p_2)x+2(q_1+\lambda q_2)y+2(r_1+\lambda r_2)z+$$
$$(d_1+\lambda d_2)=0$$

对 $\lambda(\lambda\neq-1)$ 的一个确定值,S_λ 表示一个球面,当 λ 取一切值 $(\lambda\neq-1)$ 时,S_λ 所表示的球面的全体称为球面束. $\lambda=-1$时为一平面,称为两个球面 S_1,S_2 的根面,其方程为

$$2(p_1-p_2)x+2(q_1-q_2)y+2(r_1-r_2)z+(d_1-d_2)=0$$

根面与 S_1 和 S_2 的连心线垂直,束中任一球面 S_λ 的中心在连心线上,且分连心线的比为λ .

[球面汇·三个球面的根轴] 设 S_1 和 S_2 如(1)式定义,又设

$$S_3 \quad x^2+y^2+z^2+2p_3x+2q_3y+2r_3z+d_3=0$$

设

$$S_{\lambda\mu} \quad S_1+\lambda S_2+\mu S_3=0$$

式中 λ,μ 为二独立参数,则有

$$(1+\lambda+\mu)(x^2+y^2+z^2)+2(p_1+\lambda p_2+\mu p_3)x$$
$$+2(q_1+\lambda q_2+\mu q_3)y+2(r_1+\lambda r_2+\mu r_3)z$$
$$+(d_1+\lambda d_2+\mu d_3)=0$$

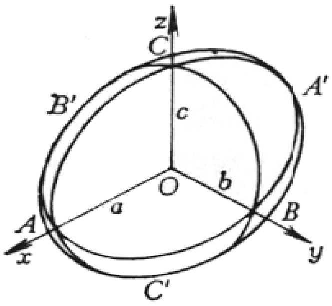
对 λ,μ $(\lambda+\mu\neq-1)$ 的一对确定值,$S_{\lambda\mu}$ 表示一个球面,当 λ,μ 取一切值 $(\lambda+\mu\neq-1)$ 时,$S_{\lambda\mu}$ 所表示的球面的全体称为球面汇.

三个球面中每对球面的根面分别为

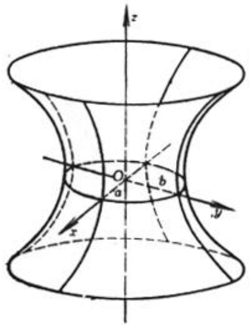
$$S_1-S_2=0,\quad S_2-S_3=0,\quad 和\ S_2-S_1=0$$

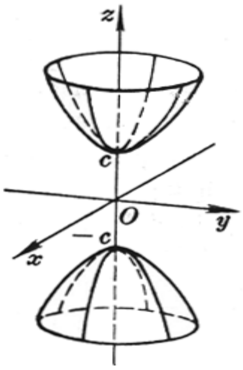
这三个平面交于一条直线,称为 S_1,S_2,S_3 的根轴.

二、椭球面

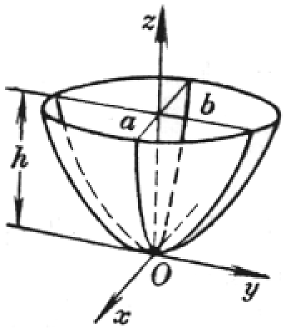
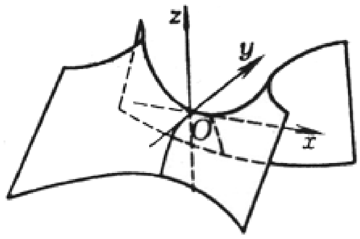
方 程 与 图 形	基 本 元 素	特　　征
[椭球面] $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$ $(a \ge b \ge c)$  当 $a=b$ 时为旋转椭球面 $$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$ (在 Ozx 平面上的曲线 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 绕 z 轴旋转而得到) 当 $a=b=c$ 时为球面 $$x^2+y^2+z^2=a^2$$	顶点 $\begin{cases} A,A'(\pm a,0,0) \\ B,B'(0,\pm b,0) \\ C,C'(0,0,\pm c) \end{cases}$ 主轴 $\begin{cases} \text{长轴} \quad AA'=2a \\ \text{中轴} \quad BB'=2b \\ \text{短轴} \quad CC'=2c \end{cases}$ 主平面及其方程: Oxy 平面 $z=0$ Oyz 平面 $x=0$ Ozx 平面 $y=0$ 主轴的方程: AA' $y=z=0$ BB' $z=x=0$ CC' $x=y=0$ 中心 $O(0,0,0)$ 直径平面 通过中心的平面	任一平面与椭球面的交线为一椭圆(特殊情况下为一圆). 平行于一已知方向 ***d*** 的一组弦的中点在一个平面上,该平面是一直径平面,它共轭于方向 ***d***. 三个主平面是分别共轭于主轴的直径平面. 椭球体的体积: $$V=\frac{4}{3}\pi\ abc$$ $\approx 4.1888abc$

三、双曲面

方 程 与 图 形	基 本 元 素	特　　征
[单叶双曲面] $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$  [双叶双曲面] $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$	主轴 $\begin{cases} \text{实长轴} \quad 2a \\ \text{实短轴} \quad 2b \\ \text{虚 轴} \quad 2c \end{cases}$ 中心 $O(0,0,0)$ 主平面及其方程: Oxy 平面 $z=0$ Oyz 平面 $x=0$ Ozx 平面 $y=0$	平行于 z 轴的平面与双曲面的交线都是双曲线(对于单叶双曲面,可能是一对相交直线). 平行于 Oxy 平面的平面与双曲面的交线都是椭圆. 单叶双曲面上有两族直母线,它们的方程是 $$\begin{cases} \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right) \\ 1-\frac{y}{b}=\lambda\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right) \end{cases}$$ (λ为参数) 与

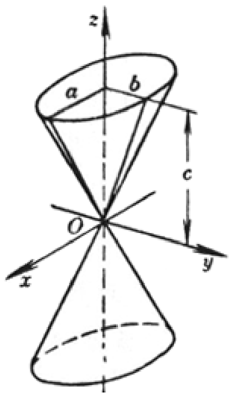
 当 $a=b$ 时,为 [旋转双曲面] (在 Oxz 平面上的曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm 1$ 绕 z 轴旋转而得到)		$\begin{cases}\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\mu\left(1-\frac{y}{b}\right)\\ 1+\frac{y}{b}=\mu\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)\end{cases}$ (μ为参数)

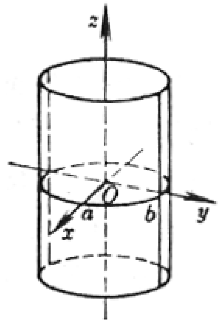
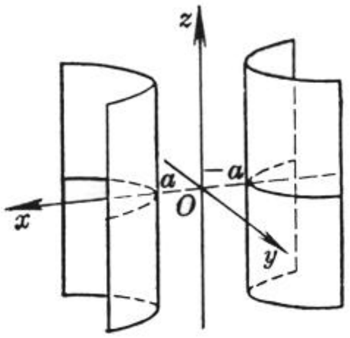
四、抛物面

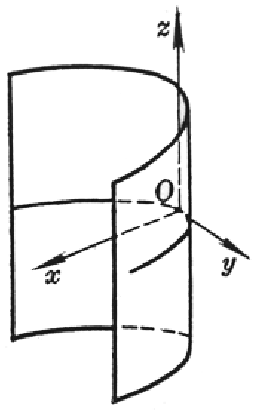
方 程 与 图 形	基 本 元 素	特　　　征
[椭圆抛物面] $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$  当 $a=b$ 时,为旋转抛物面 $z=\frac{x^2+y^2}{a^2}$ (在 Ozx 平面上的曲线 $z=\frac{x^2}{a^2}$ 绕 z 轴旋转而得到) [双曲抛物面] $z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ 	顶点 $O(0,0,0)$ 主轴　z 轴 主平面及其方程: Oyz 平面 $x=0$ Ozx 平面 $y=0$	椭圆抛物面与平行于 z 轴的平面的交线是抛物线;与平行于 Oxy 的平面的交线都是椭圆. 体积 $V=\frac{1}{2}\pi abh^2$ 体积 $V=\frac{1}{2}\pi a^2h^2$ 双曲抛物面与平行于 Oyz 的平面(或平行于 Ozx 的平面)的交线是抛物线;与平行于 Oxy 的平面的交线是双曲线. 双曲抛物面的形状呈马鞍形,所以也称为马鞍面. 双曲抛物面上有两族直母线,它们的方程是 $\begin{cases}\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\lambda\\ \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{z}{\lambda}\end{cases}$ (λ为参数) 与

		$\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=\mu z \\ \dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=\dfrac{1}{\mu} \end{cases}$ (μ为参数)

五、 锥面与柱面

方 程 与 图 形	基 本 元 素	特 征
[椭圆锥面] $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$  当 $a=b$ 时，为圆锥面 (在 Oxz 平面上的直线 $\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=0$绕 z 轴旋转而得到)	主轴 z 轴 顶点 原点 O a,b 为 $z=c$ 的平面与锥面的交线(椭圆)的半轴	椭圆锥面与平行于 Oxy 的平面 $z=h$ 的交线是椭圆 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{\left(\dfrac{ha}{c}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(\dfrac{hb}{c}\right)^2}=1 \\ z=h \end{cases}$ 与 Oxy 平面交于原点 O.

[椭圆柱面] $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$  当 $a=b$ 时,为圆柱面 $x^2+y^2=a^2$	准线的方程为 $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases}$ 母线的方向数为(0,0,1)	椭圆柱面与任何平行于 Oxy 的平面的交线都是同样的椭圆 $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ z=h\end{cases}$
[双曲柱面] $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 	准线的方程为 $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases}$ 母线的方向数为 (0,0,1)	

方 程 与 图 形	基 本 元 素	特　　征
[抛物柱面] $y^2=2px$ 	准线的方程为 $\begin{cases}y^2=2px\\ y=0\end{cases}$ 母线的方向数为 (0,0,1)	

[渐近锥面] 二次锥面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ 为双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm 1$ 的渐近锥面		与双曲线的渐近线类似,通过 z 轴的每个平面与双曲面的交线为一对共轭双曲线,与锥面的交线是两条直线,即这对双曲线的渐近线.

六、　一般二次曲面

1.　二次曲面的一般性质

上面所列举的椭球面、双曲面、抛物面等,它们的方程关于 x,y,z 都是二次的.关于 x,y,z 的一般二次方程的形式是

$$ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy+2px+2qy+2rz+d=0$$

它表示的曲面称为一般二次曲面.这里列举这些曲面的一些共同性质.

[直线与二次曲面的交点] 一直线与一个二次曲面交于两点(实的,虚的,重合的).或者这直线全在曲面上,此时称它为二次曲面的直母线或母线.

[平面与二次曲面的交线] 任一平面与一个二次曲面的交线为一个二次曲线.

[二次曲面的直径平面与中心] 一个二次曲面的平行于已知方向的弦的中点在一个平面上,称为直径平面,它平分某一组平行弦.设已知方向的方向数为 l,m,n,则直径平面的方程为

$$(al+hm+gn)x+(hl+bm+fn)y+(gl+fm+cn)z+(pl+qm+rn)=0$$

或改写为

$$(ax+hy+gz+p)l+(hx+by+fz+q)m+(gx+fy+cz+r)n=0$$

当 l,m,n 变动时,这个方程表示一个平面把,由此二次曲面的直径平面组成一个平面把.把内任一平面都通过下列三个平面的交点:

$$\begin{aligned}ax+hy+gz+p&=0\\hx+by+fz+q&=0\\gx+fy+cz+r&=0\end{aligned}$$

如果交点不在曲面上,则称它为二次曲面的中心,如果交点在曲面上,则称它为二次曲面的顶点.凡有中心的二次曲面称为有心二次曲面,其余的都称为无心二次曲面.

[二次曲面的主平面与主轴] 如果直径平面垂直于被它所平分的弦,则称为主平面(对称平面),每个二次曲面至少有一个实主平面,非旋转二次曲面的任两主平面是互相垂直的,它们的交线为主轴.

[二次曲面的切面与法线] 二次曲面在一点 $M(x_0,y_0,z_0)$的切面方程为

$$\begin{aligned}&ax_0x+by_0y+cz_0z+f(y_0z+z_0y)+g(z_0x+x_0z)\\&\quad+h(x_0y+y_0x)+p(x+x_0)+q(y+y_0)+r(z+z_0)+d=0\end{aligned}$$

在点 M 与二次曲面的切面垂直的直线称为曲面在点 M 的法线,它的方程可写为

$$\frac{x-x_0}{ax_0+hy_0+gz_0+p}=\frac{y-y_0}{hx_0+by_0+fz_0+q}=\frac{z-z_0}{gx_0+fy_0+cz_0+r}$$

[二次曲面的圆截面] 如果一个平面与一个二次曲面的交线为一个圆,则称该平面为曲面的圆截面.

如果二次曲面不是球面,则通过空间中一点,二次曲面有六个圆截面;其中一般有两个实圆截面,四个虚圆截面;而且六个圆截面中有几个是重合的.

2.二次曲面的不变量

由二次曲面的一般方程

$$ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy+2px+2qy+2rz+d=0 \tag{1}$$

的系数组成的下列四个函数:

$$\varDelta=\begin{vmatrix} a & h & g & p \\ h & b & f & q \\ g & f & c & r \\ p & q & r & d \end{vmatrix}, D=\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$$

$$I=a+b+c,\ J=ab+bc+ca-f^2-g^2-h^2$$

称为二次曲面的不变量,即经过坐标变换后,这些量是不变的.行列式 Δ 称为二次方程(1)的判别式.

3.二次曲面的标准方程及形状

<table>
<tr><th colspan="3">不 变 量</th><th>坐标变换后的方程</th><th>曲 线 形 状</th></tr>
<tr><td rowspan="3">$D\neq 0$
有心二次曲面</td><td colspan="2">$\Delta>0$</td><td rowspan="3">$Ax^2+By^2+Cz^2+\frac{\Delta}{D}=0$
式中 A,B,C,为特征方程
$u^2-Iu^2+Ju-D=0$
的三个特征根</td><td>A,B,C,异号时为单叶双曲面
A,B,C,同号时无轨迹</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\Delta<0$</td><td>A,B,C, 同号时为椭球面
A,B,C, 异号时为双叶双曲面</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\Delta=0$</td><td>A,B,C,同号时无轨迹
A,B,C,异号时为二次锥面</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$D=0$
无心二次曲面</td><td colspan="2">$\Delta<0$</td><td rowspan="2">$Ax^2+By^2\pm 2\sqrt{-\frac{\Delta}{J}}z=0$</td><td>椭圆抛物面
(A,B 都是正的时,根号前取负号; A,B 都是负的时,根号前取正号)</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\Delta>0$</td><td>双曲抛物面</td></tr>
<tr><td>$\Delta=0$</td><td>$J\neq 0$</td><td>$Ax^2+By^2+\delta=0$</td><td>$\delta\neq 0$: A,B,C,同号时为椭圆柱面或无轨迹, A,B,异号时为双曲柱面
$\delta=0$: A,B,C,异号时为一对相交平面.
A,B 同号时无轨迹</td></tr>
</table>

		$J=0$	$Ax^2+py=0$	抛物柱面
			$x^2-a^2=0$	一对平行平面
			$x^2+a^2=0$	无轨迹
			$x^2=0$	一对重合平面