第二章
拉普拉斯变换

主讲：张晓斌

Fourier变换的两个限制：

(1) 可以进行傅里叶变换的函数必须在整个数轴上有定义，定义于$[0,+\infty)$,而不必考虑$t<0$时取值的函数不能取傅里叶变换；

(2)绝对可积的条件太强。许多简单函数的傅氏变换或者不存在，或者为非常义下的广义函数给应用带来很大的不方便。

§1 Laplace变换的概念

设指数衰减函数 $\varphi(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ e^{-\beta t}, & t\geq 0\end{cases}\quad(\beta>0).$

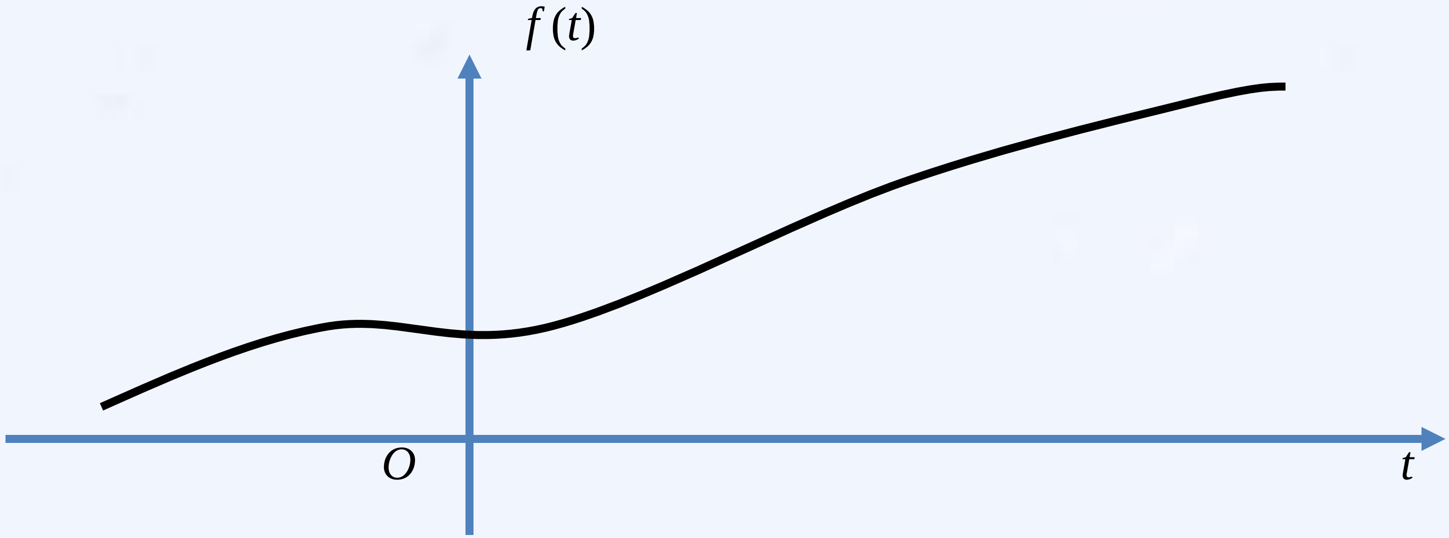
考虑 $f(t)\ t\in(-\infty,+\infty)$,有 $f(t)u(t)=f(t)\ t\geq 0.$

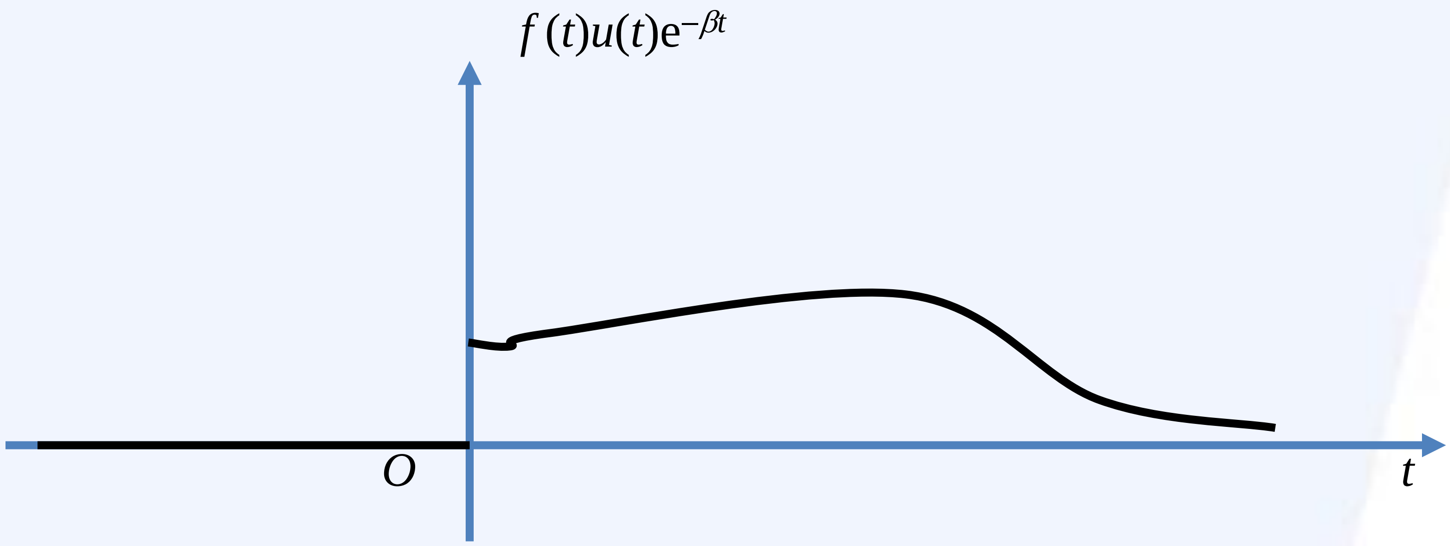
若存在 $\beta>0$,使 $\int_{-\infty}^{+\infty}\left|e^{-\beta t}f(t)\right|dt<+\infty$.

那么 $f(t)u(t)e^{-\beta t}$的傅氏积分总是存在的。

$$\mathcal{F}[f(t)u(t)e^{-\beta t}]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)u(t)e^{-\beta t}e^{-j\omega t}dt$$

$$=\int_{0}^{+\infty}f(t)e^{-(\beta+j\omega)t}dt\ \underline{\underline{s=\beta+j\omega}}\int_{0}^{+\infty}f(t)e^{-st}dt\ \underline{\underline{\Delta}}\ F(s)$$


$f(t)$
O
t


$f(t)u(t)e^{-\beta t}$
O
t

1. 定义：

设 $f(t)$是$[0,+\infty)$上的实(或复)值函数，若对参数 $s=\beta+j\omega$, $F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$在s平面的某一区域内收敛，则称其为$f(t)$的Laplace变换，记为

$$\mathcal{L}[f(t)]=F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$f(t)$称为$F(s)$的Laplace逆变换，记为$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$.
$F(s)$称为象函数，$f(t)$称为象原函数.

例1 求单位阶跃函数 $u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$ 的拉氏变换.

根据拉氏变换的定义, 有

$$\mathcal{L}[u(t)]=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

这个积分在Re(s)>0时收敛, 而且有

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{s}$$

所以 $\mathcal{L}[u(t)]=\dfrac{1}{s}\quad(\mathrm{Re}(s)>0).$

例2 求指数函数 $f(t)=\mathrm{e}^{kt}$ 的拉氏变换(k为实数).

根据拉氏变换的定义, 有

$$\mathcal{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{kt}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(s-k)t}\mathrm{d}t$$

- 这个积分在Re(s)>k时收敛, 而且有

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(s-k)t}\mathrm{d}t=-\frac{1}{s-k}\mathrm{e}^{-(s-k)t}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{s-k}$$

$$\boxed{\text{所以}\ \mathcal{L}[\mathrm{e}^{kt}]=\frac{1}{s-k}\quad(\mathrm{Re}(s)>k).}$$

其实k为复数时上式也成立, 只是收敛区间为

Re(s)>Re(k)

2. 拉氏变换的存在定理

若函数$f(t)$满足:

(1) 在$t\geq 0$的任一有限区间上分段连续;

(2) 当$t\to+\infty$时, $f(t)$的增长速度不超过某一指数函数,

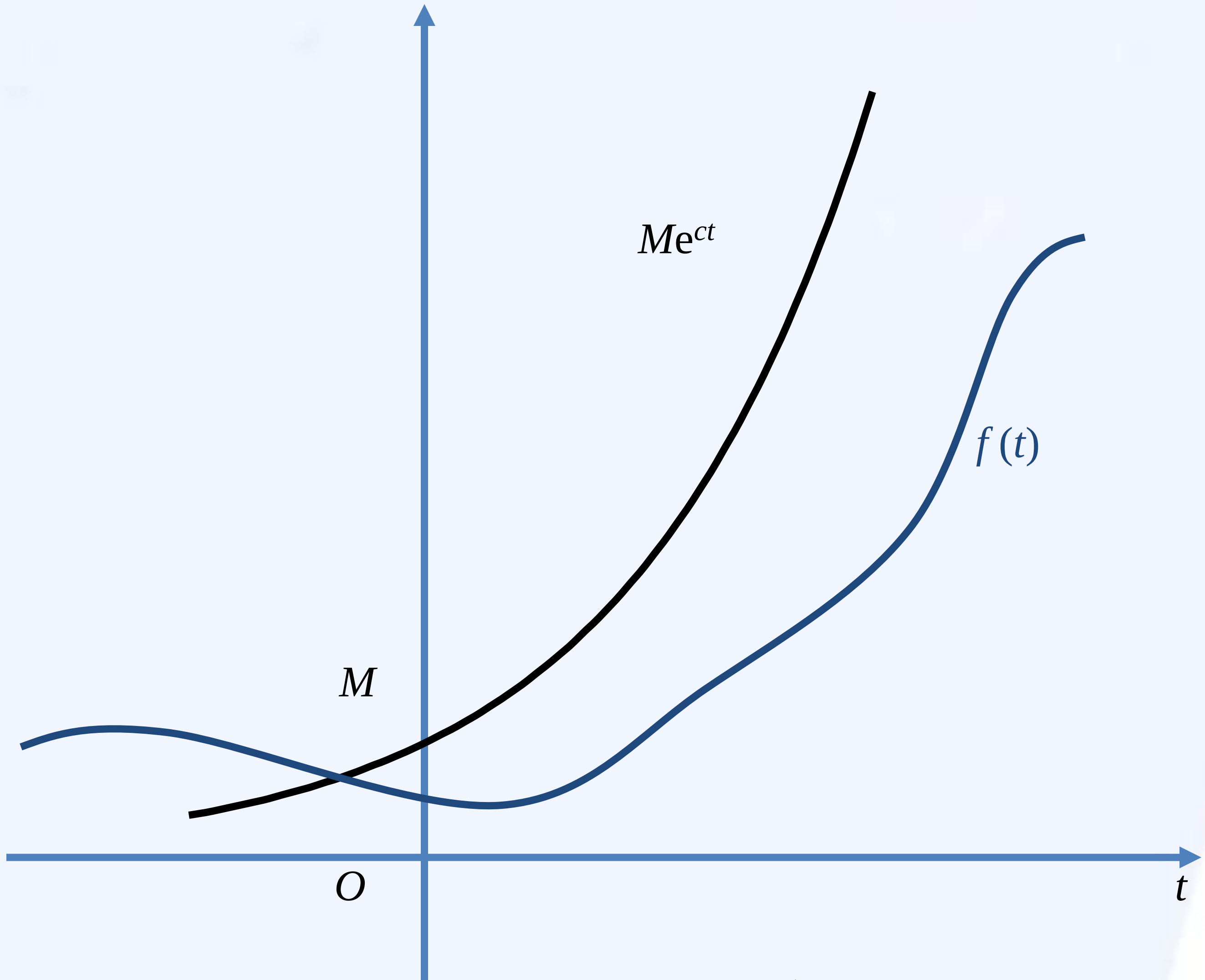
即存在常数 $M>0$及$c\geq 0$, 使得$|f(t)|\leq M\mathrm{e}^{ct}$, $0\leq t<+\infty$

则 $f(t)$的拉氏变换

$$F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

在半平面$\mathrm{Re}(s)>c$上一定存在, 并且在$\mathrm{Re}(s)>c$

的半平面内, $F(s)$为解析函数.



注1:大部分常用函数的Laplace变换都存在(常义下);

注2：存在定理的条件是充分但非必要条件.

§2 Laplace变换的性质与计算

本讲介绍拉氏变换的几个性质，它们在拉氏变换的实际应用中都是很有用的. 为方便起见，假定在这些性质中，凡是要求拉氏变换的函数都满足拉氏变换存在定理中的条件，并且把这些函数的增长指数都统一地取为c. 在证明性质时不再重述这些条件.

1.线性性：$\mathcal{L}[f_i(t)] = F_i(s)\ (i=1,2)$，则

$$\mathcal{L}[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s),$$

$$\mathcal{L}^{-1}[b_1 F_1(s) + b_2 F_2(s)] = b_1 f_1(t) + b_2 f_2(t)$$

例3 求 $f(t)=\sin kt$ (k为实数) 的拉氏变换

$$\mathcal{L}[\sin kt] = \int_0^{+\infty} \sin kt\, \mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2\mathrm{j}} \int_0^{+\infty} (\mathrm{e}^{\mathrm{j}kt} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kt}) \mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}t$$

$$= \frac{-\mathrm{j}}{2} \left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(s-\mathrm{j}k)t} \mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(s+\mathrm{j}k)t} \mathrm{d}t \right)$$

$$= \frac{-\mathrm{j}}{2} \left(\frac{1}{s-\mathrm{j}k} - \frac{1}{s+\mathrm{j}k} \right) = \frac{k}{s^2+k^2}, \quad (\mathrm{Re}(s)>0)$$

$$\boxed{\mathcal{L}[\sin kt] = \frac{k}{s^2+k^2}}$$ 同理可得 $$\boxed{\mathcal{L}[\cos kt] = \frac{s}{s^2+k^2}}$$

如果函数$f(t)$在$t>0$及$t=0$的任意一个邻域内有定义

则，此时Laplace变换的定义应为

$$\mathscr{L}[f(t)]=\int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

例4 求单位脉冲函数 $\delta(t)$的拉氏变换

解 $$\mathscr{L}[\delta(t)]=\int_{0}^{+\infty} \delta(t)e^{-st}dt$$

$$=\int_{0^-}^{+\infty} \delta(t)e^{-st}dt=\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-st}dt=e^{-st}\big|_{t=0}=1.$$

类似可证： $\mathscr{L}[\delta^{(n)}(t)]=s^n$， $(\mathrm{Re}(s)>0)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta^{(n)}(t)f(t)dt=(-1)^n f^{(n)}(0).$$

2.微分性质:

$$\mathcal{L}[f(t)]=F(s)\left(\mathrm{Re}(s)>c\right),\text{则}$$

$$\mathcal{L}[f'(t)]=sF(s)-f(0)\quad\left(\mathrm{Re}(s)>c\right)$$

$$\mathcal{L}\left[f^{(n)}(t)\right]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)$$

$$=s^nF(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{n-1-k}f^{(k)}(0)\left(n=1,2,\cdots\right)\quad\left(\mathrm{Re}(s)>c\right)$$

特别当 $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$ 时，有

$$\boxed{\mathcal{L}\left[f^{(n)}(t)\right]=s^nF(s)}$$

此性质可以使我们有可能将$f(t)$的微分方程转化为$F(s)$的代数方程.

例5 求$f(t)=t^m$ 的拉氏变换（*m*为正整数）。

由于$f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(m-1)}(0)=0$,而$f^{(m)}(t)=m!$

一方面$\mathcal{L}\left[f^{(m)}(t)\right]=\mathcal{L}[m!]=m!\mathcal{L}[1]=m!\frac{1}{s};$

另一方面$\mathcal{L}\left[f^{(m)}(t)\right]=s^m\mathcal{L}\left[t^m\right];$

$$\Rightarrow s^m\mathcal{L}\left[t^m\right]=\frac{1}{s}m!\Rightarrow\mathcal{L}\left[t^m\right]=\frac{1}{s^{m+1}}m!\quad(\mathrm{Re}(s)>0).$$

象函数的微分性质:

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathcal{L}^{-1}\left[F'(s)\right] = -tf(t) \quad \left(\operatorname{Re}(s) > c\right)\\ &\left(\mathcal{L}\left[tf(t)\right] = -F'(s) \Rightarrow f(t) = \frac{\mathcal{L}^{-1}\left[F'(s)\right]}{-t}\right)\end{aligned}}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F^{(n)}(s)\right] = (-t)^n f(t)$$

$$\left(\mathcal{L}\left[t^n f(t)\right] = (-1)^n F^{(n)}(s)\right)$$

例6 求 $f(t) = t^2 \cos kt$ (k为实数) 的拉氏变换.

$$\mathcal{L}\left[t^2 \cos kt\right] = (-1)^2 \mathcal{L}\left[\cos kt\right]''(s) = \left(\frac{s}{s^2 + k^2}\right)'' = \frac{2s^3 - 6k^2 s}{(s^2 + k^2)^3}$$

3. 积分性质: $\mathcal{L}[f(t)] = F(s) \quad (\operatorname{Re} s > c)$,则

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s}$$

$$\mathcal{L}\{\underbrace{\int_0^t \mathrm{d}t \int_0^t \mathrm{d}t \cdots \int_0^t}_{n次} f(t)\mathrm{d}t\} = \frac{1}{s^n}F(s)$$

例7 求 $f(t) = \int_0^t \cos t\, dt$ **的拉氏变换.**

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t \cos t dt\right] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[\cos t] = \frac{1}{s}\frac{s}{s^2+1} = \frac{1}{s^2+1}$$

象函数积分性质：$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ 则

$$\boxed{\Rightarrow \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^{\infty} F(s)\,\mathrm{d}s.}$$

一般地,有 $\mathcal{L}\left[\dfrac{f(t)}{t^n}\right] = \underbrace{\int_s^{\infty}\mathrm{d}s\int_s^{\infty}\mathrm{d}s \cdots \int_s^{\infty}}_{n\text{次}} F(s)\,\mathrm{d}s$

$$\mathscr{L}[u(t)] = \mathscr{L}[1] = \frac{1}{s}, \quad (\mathrm{Re}(s) > 0)$$

$$\mathscr{L}[e^{kt}] = \frac{1}{s-k}, \quad (\mathrm{Re}(s) > k)$$

$$\mathscr{L}[\sin kt] = \frac{k}{s^2+k^2}, \quad (\mathrm{Re}(s) > 0)$$

$$\mathscr{L}[\cos kt] = \frac{s}{s^2+k^2}, \quad (\mathrm{Re}(s) > 0)$$

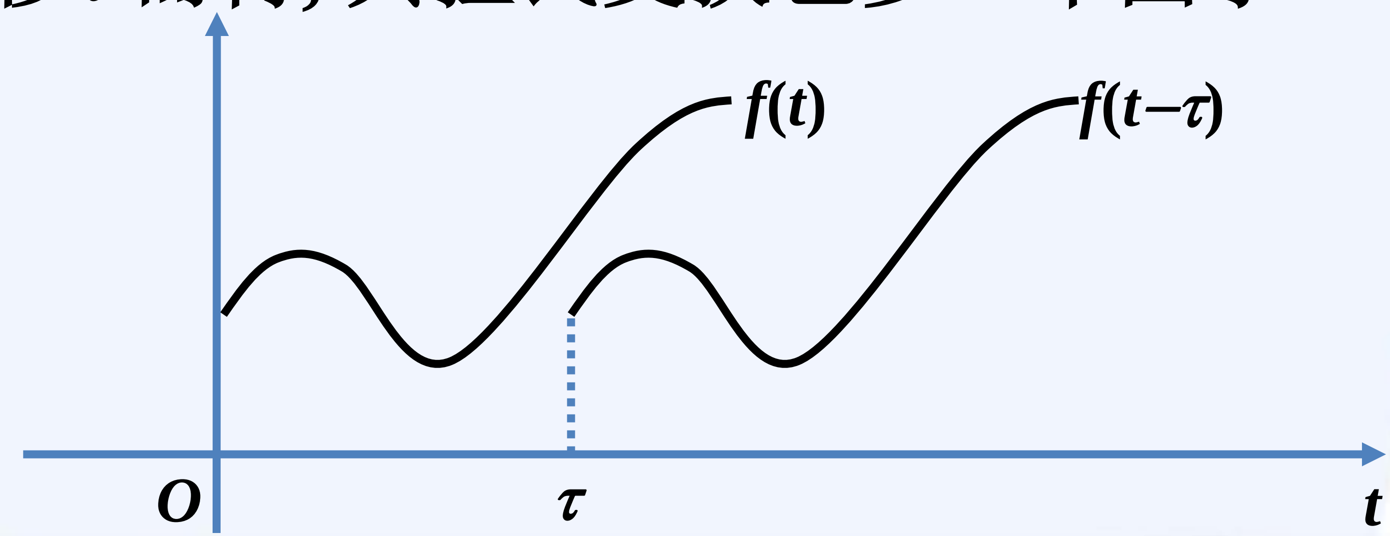
$$\mathscr{L}[t^m] = \frac{m!}{s^{m+1}}, (m\text{为整数}) \quad (\mathrm{Re}(s) > 0)$$

$$\mathscr{L}[\delta^{(n)}(t)] = s^n, \quad (\mathrm{Re}(s) > 0)$$

4.平移性(延迟性): $\mathcal{L}[f(t)]=F(s)\ \big(t<0, f(t)=0\big)$,则

$$\boxed{\mathcal{L}[f(t-\tau)]=e^{-s\tau}\mathcal{L}[f(t)]=e^{-s\tau}F(s)\quad \big(\mathrm{Re}(s)>c\big)}$$

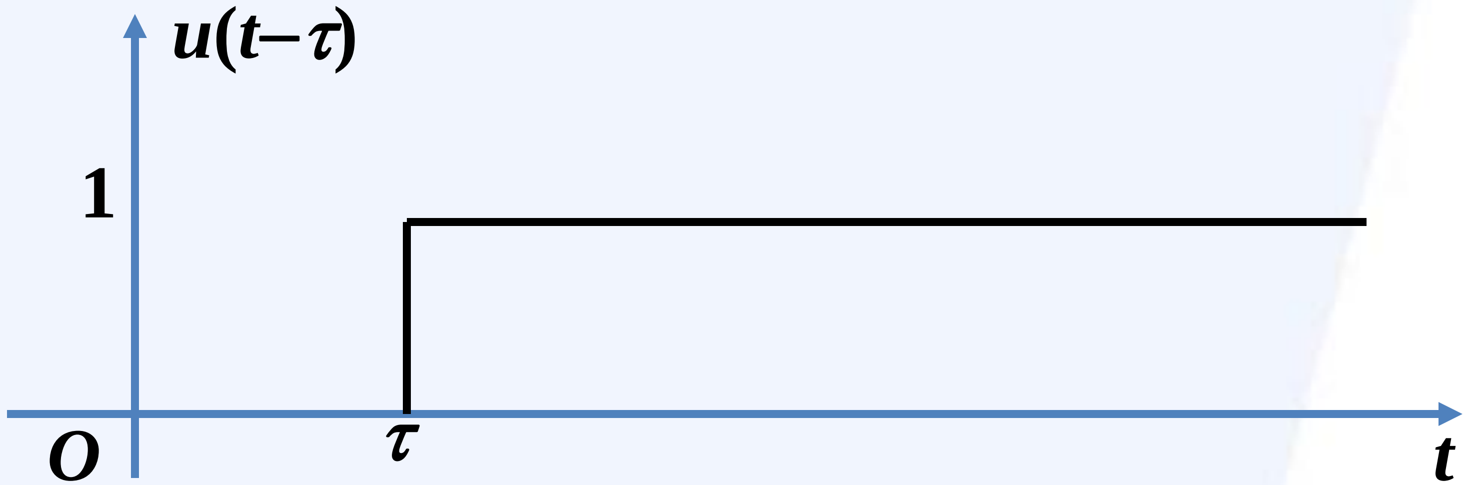
函数$f(t-\tau)$与$f(t)$相比, $f(t)$从$t=0$开始有非零数值. 而$f(t-\tau)$是从$t=\tau$开始才有非零数值. 即延迟了一个时间τ. 从它的图象讲, $f(t-\tau)$是由$f(t)$沿t轴向右平移τ而得, 其拉氏变换也多一个因子$e^{-s\tau}$.



例8 求函数 $u(t-\tau)=\begin{cases}0 & t<\tau\\ 1 & t>\tau\end{cases}$ 的拉氏变换.

已知 $\mathcal{L}[u(t)]=\dfrac{1}{s}$,根据延迟性质

$$\mathcal{L}[u(t-\tau)]=\frac{1}{s}e^{-s\tau}$$



5.位移性：$\mathcal{L}[f(t)]=F(s)\left(\mathrm{Re}(s)>c\right)$,则

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathcal{L}\left[e^{\alpha t}f\left(t\right)\right]=F(s-\alpha)\quad\left(\mathrm{Re}(s-\alpha)>c\right)\\&\mathcal{L}^{-1}\left[F(s-\alpha)\right]=e^{\alpha t}f\left(t\right)\end{aligned}}$$

例9 求 $f\left(t\right)=e^{at}\sin kt$ **的拉氏变换.**

已知$\mathcal{L}[\sin kt]=\dfrac{k}{s^2+k^2}$,由位移性质得

$$\mathcal{L}[\mathrm{e}^{at}\sin kt]=\frac{k}{(s-a)^2+k^2},\mathrm{Re}(s)>a$$

例10 求 $f(t)=e^{at}$ **的拉氏变换.**

已知$\mathcal{L}[1]=\dfrac{1}{s}$,由位移性质得

$$\mathcal{L}[e^{at}]=\frac{1}{s-a},\mathrm{Re}(s)>a$$

本次课内容结束
暂时没有作业

§3 Laplace逆变换

前面主要讨论了由已知函数$f(t)$求它的象数$F(s)$, 但在实际应用中常会碰到与此相反的问题, 即已知象函数$F(s)$求它的象原函数$f(t)$. 本节就来解决这个问题.

由拉氏变换的概念可知, 函数$f(t)$的拉氏变换, 实际上就是$f(t)u(t)e^{-\beta t}$的傅氏变换.

$$\mathcal{F}[f(t)u(t)e^{-\beta t}]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)u(t)e^{-\beta t}e^{-j\omega t}dt$$

$$=\int_{0}^{+\infty}f(t)e^{-(\beta+j\omega)t}dt \underline{\underline{s=\beta+j\omega}} \int_{0}^{+\infty}f(t)e^{-st}dt \triangleq F(s)$$

因此, 按傅氏积分公式, 在$f(t)$的连续点就有

$$f(t)u(t)\mathrm{e}^{-\beta t}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)u(\tau)\mathrm{e}^{-\beta\tau}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega\left[\int_{0}^{+\infty} f(\tau)\mathrm{e}^{-(\beta+\mathrm{j}\omega)\tau}\mathrm{d}\tau\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\beta+\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega, t>0$$

等式两边同乘以$\mathrm{e}^{\beta t}$, 则

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\beta+\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{(\beta+\mathrm{j}\omega)t}\mathrm{d}\omega, t>0$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\beta+\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{(\beta+\mathrm{j}\omega)t}\mathrm{d}\omega, t>0$$

令 $\beta+\mathrm{j}\omega=s, d\omega=\frac{1}{j}\mathrm{d}s$, 有

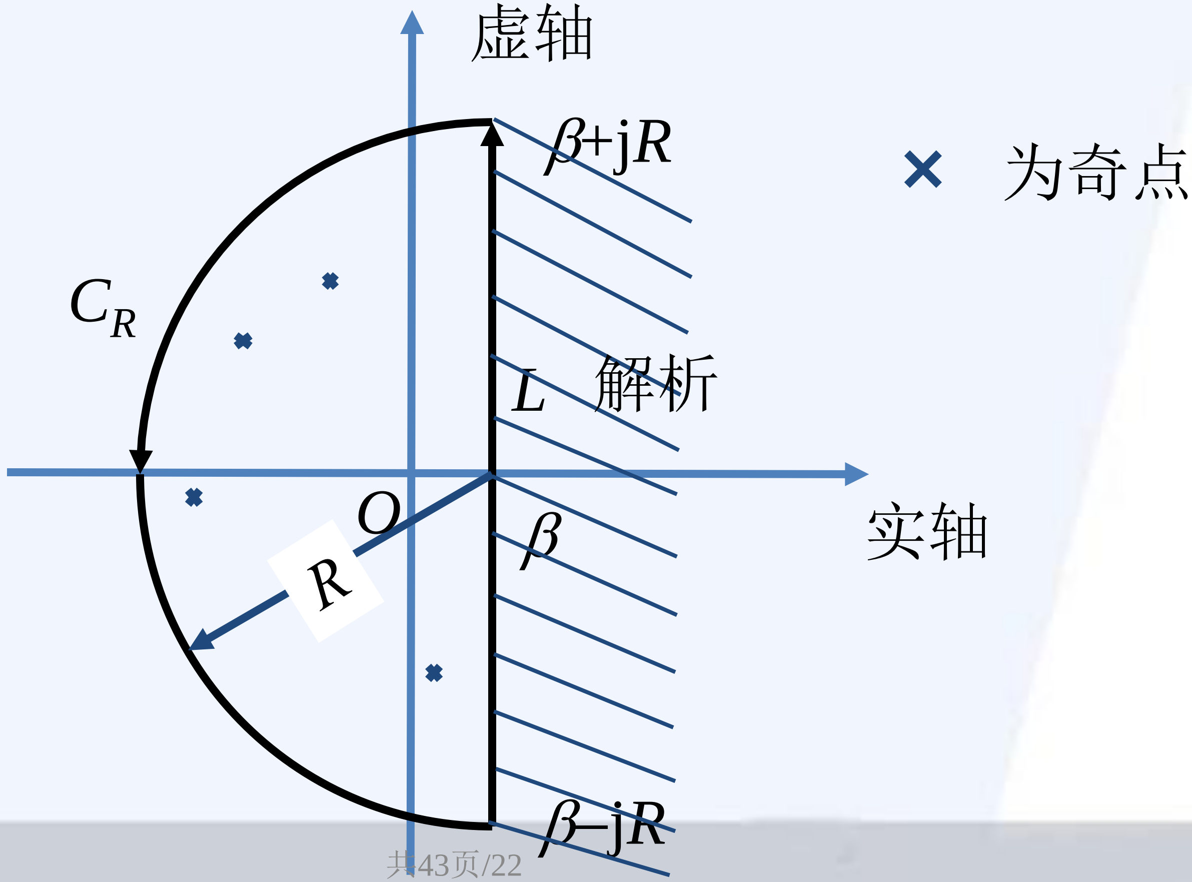
$$f(t)=\frac{1}{2\pi\,\mathrm{j}}\int_{\beta-\mathrm{j}\infty}^{\beta+\mathrm{j}\infty}F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s,\ t>0.$$

右端的积分称为拉氏反演积分.

计算复变函数的积分通常比较困难, 但是可以用留数方法计算.

定理：若$F(s)$在全平面只有有限个奇点$s_1, \cdots, s_n$ (均在$\mathrm{Re}\, s = \beta$左侧)，且$\lim\limits_{s\to\infty} F(s) = 0$，则$t > 0$时

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\int_{\beta-\mathrm{j}\infty}^{\beta+\mathrm{j}\infty} F(s)e^{st}ds = \sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}\left[F(s)e^{st}, s_k\right].$$



例1 求$F(s)=\dfrac{1}{s(s-1)^2}$的逆变换.

$s=0$为一级极点,$s=1$为二级极点,

$$f(t)=\operatorname{Res}\left[F(s)e^{st},0\right]+\operatorname{Res}\left[F(s)e^{st},1\right]$$

$$=\left.\frac{1}{(s-1)^2}\mathrm{e}^{st}\right|_{s=0}+\lim_{s\to1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{1}{s}\mathrm{e}^{st}\right]$$

$$=1+\lim_{s\to1}\left(\frac{t}{s}\mathrm{e}^{st}-\frac{1}{s^2}\mathrm{e}^{st}\right)$$

$$=1+(t\,\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^t)=1+\mathrm{e}^t(t-1)\qquad(t>0).$$

2. 部分分式方法

例2 求$F(s)=\dfrac{1}{s^2(s+1)}$的逆变换.

$$F(s)=\frac{1}{s^2(s+1)}=\frac{1}{s^2}+\frac{-1}{s}+\frac{1}{s+1}$$

所以 $f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2(s+1)}\right]$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]$$

$$=t-1+\mathrm{e}^{-t}\qquad(t>0).$$

§4 卷积

1. 卷积的概念：两个函数的卷积是指

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

如果$f_1(t)$与$f_2(t)$都满足条件: 当$t<0$时, $f_1(t)=f_2(t)=0$, 则上式可以写成：

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{0} f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$+\int_{0}^{t} f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau+\int_{t}^{+\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$=\int_{0}^{t} f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

例1：$t * \mathrm{e}^{at} = \int_0^t \tau \mathrm{e}^{a(t-\tau)} \mathrm{d}\tau = \mathrm{e}^{at} \int_0^t \tau \mathrm{e}^{-a\tau} \mathrm{d}\tau$

$$= -\frac{1}{a}\mathrm{e}^{at} \int_0^t \tau \,\mathrm{d}\mathrm{e}^{-a\tau} = \frac{-\mathrm{e}^{at}}{a}\left[\tau \mathrm{e}^{-a\tau}\Big|_0^t - \int_0^t \mathrm{e}^{-a\tau} \mathrm{d}\tau\right]$$

$$= \frac{-\mathrm{e}^{at}}{a}\left[t\mathrm{e}^{-at} + \frac{1}{a}\mathrm{e}^{-a\tau}\Big|_0^t\right]$$

$$= \frac{-\mathrm{e}^{at}}{a}\left[t\mathrm{e}^{-at} + \frac{1}{a}(\mathrm{e}^{-at} - 1)\right]$$

$$= -\frac{t}{a} + \frac{1}{a^2}(\mathrm{e}^{at} - 1)$$

卷积定理：

设$f_1(t), f_2(t)$满足Laplace变换存在定理条件，

且$\mathcal{L}[f_1(t)] = F_1(s)$, $\mathcal{L}[f_2(t)] = F_2(s)$,

则$\mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = \mathcal{L}[f_1(t)] \cdot \mathcal{L}[f_2(t)] = F_1(s) \cdot F_2(s)$

(或：$\mathcal{L}^{-1}[F_1(s) \cdot F_2(s)] = f_1(t) * f_2(t)$.)

注：卷积公式可用来计算逆变换或卷积.

例2 $F(s)=\dfrac{1}{s^2(s^2+1)}$,求$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$

解法1: $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2}\right]-\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2+1}\right]=t-\sin t$

解法2: $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2}\right]*\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2+1}\right]=t*\sin t$

$$=\int_0^t \tau\sin(t-\tau)d\tau=\int_0^t \tau\, d\cos(t-\tau)$$

$$=\tau\cos(t-\tau)\Big|_{\tau=0}^{\tau=t}-\int_0^t \cos(t-s)ds$$

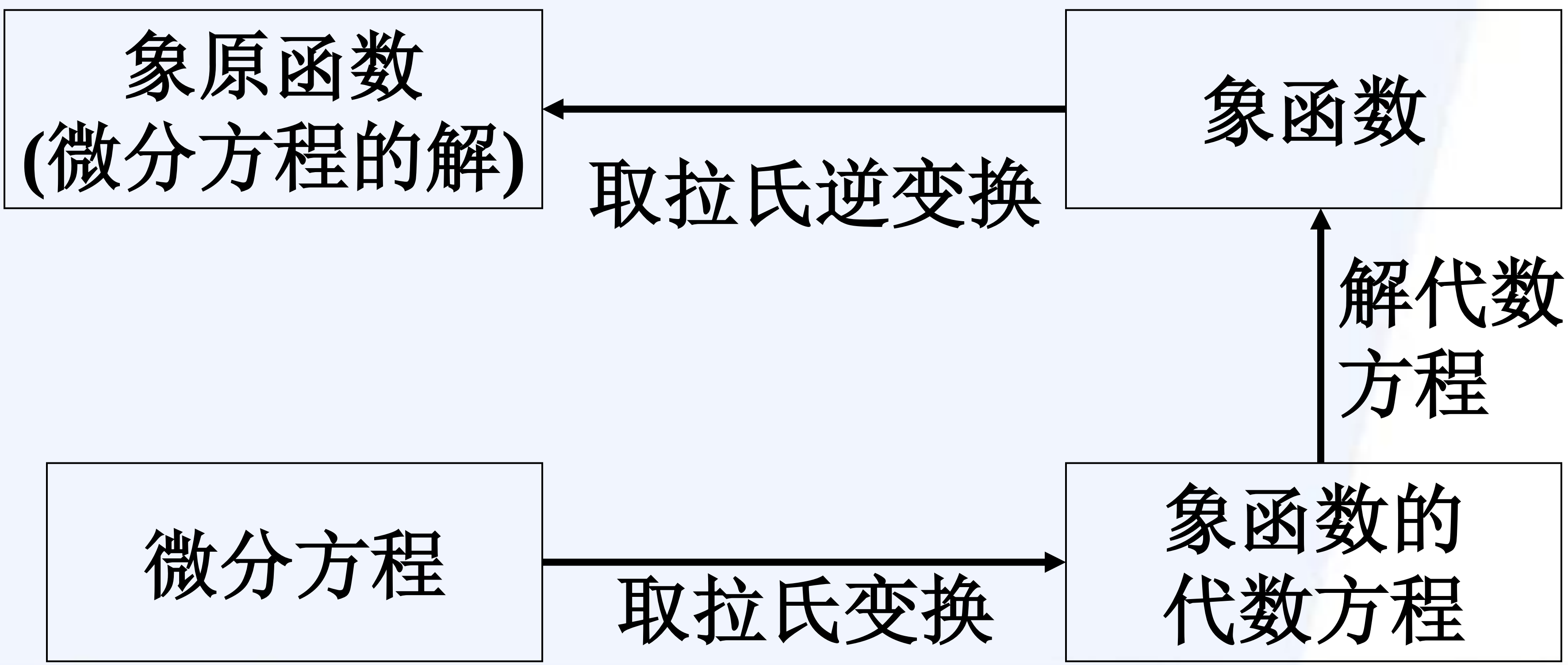
$$=t+\sin(t-s)\Big|_{\tau=0}^{\tau=t}=t-\sin t$$

§5 Laplace变换的应用

对一个系统进行分析和研究, 首先要知道该系统的数学模型, 也就是要建立该系统特性的数学表达式. 所谓线性系统, 在许多场合, 它的数学模型可以用一个线性微分方程来描述, 或者说是满足叠加原理的一类系统. 这一类系统无论是在电路理论还是在自动控制理论的研究中, 都占有很重要的地位. 本节将应用拉氏变换来解线性微分方程.

微分方程的拉氏变换解法

首先取拉氏变换将微分方程化为象函数的代数方程, 解代数方程求出象函数, 再取逆变换得最后的解. 如下图所示.



例1 求解 $\begin{cases} y''(t)+2y'(t)-3y(t)=e^{-t} \\ y(0)=0, y'(0)=1 \end{cases}$ 。

令$Y(s)=\mathcal{L}\left[y(t)\right]$,方程两边取Laplace变换,

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+2\left(sY(s)-y(0)\right)-3Y(s)=\frac{1}{s+1}$$

$$s^2Y(s)-1+2sY(s)-3Y(s)=\frac{1}{s+1}\Rightarrow$$

$$Y(s)=\frac{s+2}{(s+1)(s-1)(s+3)}$$

$$Y(s)=\frac{s+2}{(s+1)(s-1)(s+3)}$$

$$=\frac{-\frac{1}{4}}{s+1}+\frac{\frac{3}{8}}{s-1}+\frac{-\frac{1}{8}}{s+3}$$

$$\therefore y(t)=-\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{3}{8}e^{t}-\frac{1}{8}e^{-3t}$$

例2 求解 $\begin{cases} x'(t)+2x(t)+2y(t)=10e^{2t} \\ -2x(t)+y'(t)+3y(t)=13e^{2t} \\ x(0)=1, y(0)=3 \end{cases}$

令$X(s)=\mathcal{L}\left[x(t)\right], Y(s)=\mathcal{L}\left[y(t)\right]$,

$$\begin{cases} sX(s)-1+2X(s)+2Y(s)=\dfrac{10}{s-2} \\ -2X(s)+sY(s)-3+3Y(s)=\dfrac{13}{s-2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X(s)=\dfrac{1}{s-2} \\ Y(s)=\dfrac{3}{s-2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t)=e^{2t} \\ y(t)=3e^{2t} \end{cases}$$

例 3　求解积分方程

$$y(t)=h(t)+\int_0^t y(t-\tau)f(\tau)d\tau$$

其中$h(t), f(t)$为定义在$[0, +\infty)$已知函数，三者的拉普拉斯变换都存在。

解： 设$\mathcal{L}[y(t)]=Y(s), \mathcal{L}[h(t)]=H(s), \mathcal{L}[f(t)]=F(s)$

而$\int_0^t y(t-\tau)f(\tau)d\tau=y(t)*f(t)$

对方程两端取拉氏变换，由卷积定理

$$Y(s)=H(s)+Y(s)F(s)$$

$$Y(s)=\frac{H(s)}{1-F(s)}$$

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}[\frac{H(s)}{1-F(s)}]$$

若$h(t)=t^2, f(t)=\sin t$

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}[\frac{\frac{2}{s^3}}{1-\frac{1}{s^2+1}}]$$

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{2}{s^3}}{1-\frac{1}{s^2+1}}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^3}+\frac{2}{s^5}\right]$$

$$=t^2+\frac{1}{12}t^4$$

全书结束

作业
Laplace变换作业