练习 3.1

（3.1.1 原函数与不定积分的概念）

一、选择题：

1. 若 $f(x)$ 的导数是 $\sin x$，则 $f(x)$ 的一个原函数为（　　）.

（A）$1+\sin x$　　　　（B）$1-\sin x$

（C）$1+\cos x$　　　　（D）$1-\cos x$

解：因为 $f'(x)=\sin x$，若设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则须 $F''(x)=\sin x$，故应选（B）.

2.设 $f(x)$ 连续，则 $[\int f(\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x]'=$（　　）.

（A）$f(\mathrm{e}^{-x})$　　　　（B）$f(\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x$

（C）$\mathrm{e}^{-x}f(\mathrm{e}^{-x})$　　　　（D）$-\mathrm{e}^{-x}f(\mathrm{e}^{-x})$

解：记 $g(x)=f(\mathrm{e}^{-x})$，那么 $[\int f(\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x]'=[\int g(x)\mathrm{d}x]'=g(x)=f(\mathrm{e}^{-x})$.故应选（$B$）.

3.函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续是 $f(x)$ 存在原函数的（　　）

（A）充分而非必要条件　　　　（B）必要而非充分条件

（C）充分必要条件　　　　（D）既非充分又非必要条件

解：选（A）

二、填空题：

1.设 $F(x)$ 是函数 $\dfrac{e^x}{x}$ 的一个原函数，则 $\mathrm{d}F(x^2)=$__________________.

解：根据原函数的概念知，$F'(x)=\dfrac{e^x}{x}$，从而

$$dF(x^2)=F'(x^2)\cdot 2xdx=\frac{e^{x^2}}{x^2}\cdot 2xdx=\frac{2e^{x^2}}{x}dx.$$

2. 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $\mathrm{e}^{3x}\cos 2x$，则 $\int f'(x)\mathrm{d}x=$__________________________.

解：根据原函数的概念知，$f(x)=(e^{3x}\cos 2x)'=e^{3x}(3\cos 2x-2\sin 2x)$，从而

$$\int f'(x)dx=f(x)+C=e^{3x}(3\cos 2x-2\sin 2x)+C.$$

3. $\int\sqrt{1-\sin 2x}\mathrm{d}x=$_______________________$(\sin x\le\cos x)$.

解：原式 $=\int(\cos x-\sin x)dx=\sin x+\cos x+C$.

三、计算解答

1. ⑴ $\int 2^x 3^{2x} 4^{3x}\,\mathrm{d}x$　　　　⑵ $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}\mathrm{d}x$

解：⑴原式 $=\int (2\cdot 3^2\cdot 4^3)^x dx=\frac{(2\cdot 3^2\cdot 4^3)^x}{\ln(2\cdot 3^2\cdot 4^3)}+C$.

⑵解：原式 $=\int \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\int \frac{1}{\sin^2 x}dx-\int \frac{1}{\cos^2 x}dx=-\csc x-\sec x+C$.

2.已知 $F(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续，在 $(-1,1)$ 内 $F'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，且 $F(1)=\frac{3\pi}{2}$, 求 $F(x)$.

解：因为 $F(x)=\int F'(x)dx=\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+C$，又 $F(1)=\frac{3\pi}{2}$, 所以 $C=\pi$，

故 $F(x)=\arcsin x+\pi$.

3. 已知 $f(x)=f(x+4), f(0)=0$，且在 $(-2,2)$ 内 $f'(x)=|x|$，求 $f(9)$.

解：因为 $f'(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<2,\\ -x, & -2<x<0,\end{cases}$ 所以 $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2}{2}+C_1, & 0\le x<2,\\ -\frac{x^2}{2}+C_2, & -2<x<0,\end{cases}$

又因为函数可导必连续，则有 $f(0)=f(0+0)=f(0-0)$，从而 $C_1=C_2=0$，故

$f(x)=\begin{cases} \frac{x^2}{2}, & 0\le x<2,\\ -\frac{x^2}{2}, & -2<x<0,\end{cases}$ 则有 $f(9)=f(5+4)=f(5)=f(1)=\frac{1}{2}$.

练习 3.2

（3.1.2 不定积分的性质）

一、选择题

1．下列结论不正确的是（　　）.

（A）一切初等函数在其定义区间上都有原函数　（B）凡奇函数的原函数都是偶函数

（C）若 $f(x)$ 的某个原函数为常数，则 $f(x)\equiv 0$　（D）$[\int f(x)\mathrm{d}x]'=\int f'(x)\mathrm{d}x$

解：应选（D）.

2. 设 $f(x^2-1)=\ln\frac{x^2}{x^2-1}$，且 $f(\varphi(x))=\ln(1+x)$，则不定积分 $\int \varphi(x)\mathrm{d}x=$（　　）

（A）$-\ln|x|$；　（B）$-\ln|x|+C$；　（C）$\ln|x|$；　（D）$\ln|x|+C$

解：$f(x^2-1)=\ln\dfrac{x^2}{x^2-1}=\ln(1+\dfrac{1}{x^2-1})$，令 $t=\dfrac{1}{x^2-1}$，$f(\dfrac{1}{t})=\ln(1+t)$，故 $\varphi(x)=\dfrac{1}{x}$，

$\int\varphi(x)\mathrm{d}x=\ln|x|+C$，选（$D$）

3. 设 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上的一个原函数，如果在点 $x_0\in(a,b)$ 处有 $f(x_0)=0$，$f'(x_0)>0$，则（　　）

（A）x_0 是 $F(x)$ 的极小值点

（B）x_0 是 $F(x)$ 的极大值点

（C）$(x_0,F(x_0))$ 是曲线 $y=F(x)$ 的拐点

（D）x_0 不是 $F(x)$ 的极值点

解：选（A）

二、填空题

1. $\int xf'(3x^2+1)\mathrm{d}x=$____________________________.

解：$\int xf'(3x^2+1)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{6}\int f'(3x^2+1)\mathrm{d}(3x^2+1)=\dfrac{1}{6}f(3x^2+1)+C$.

2. 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导，且当 $x>0$ 时，有 $\int f(x^3)\mathrm{d}x=(x-1)\mathrm{e}^{-x}+C$，则

$f(1)=$______________.

解：依题意，$f(x^3)=[(x-1)\mathrm{e}^{-x}]'=(2-x)\mathrm{e}^{-x}$，令 $x=1$ 得 $f(1)=\mathrm{e}^{-1}$.

3. 设 $f'(\ln x)=\begin{cases}1 & 0<x\le 1\\ x & x>1\end{cases}$ 及 $f(0)=2$，则函数 $f(x)=$______________

解：令 $t=\ln x, x=e^t$，$f'(t)=\begin{cases}1 & t<0\\ e^t & t>0\end{cases}$，$f(x)=\begin{cases}x+C_1 & x\le 0\\ e^x+C_2 & x>0\end{cases}$，由 $f(0)=2$ 及 $x=0$ 处的连续性得 $f(x)=\begin{cases}x+2 & x\le 0\\ e^x+1 & x>0\end{cases}$.

三、计算

1. $\int\dfrac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}}\mathrm{d}x$　　2. $\int\dfrac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}\mathrm{d}x$　　3. $\int\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}\mathrm{d}x$

解：1.原式=$\int(x^{\frac{1}{4}}-2x^{\frac{5}{12}}+x^{-\frac{1}{4}})\mathrm{d}x=\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}-\frac{24}{17}x^{\frac{17}{12}}+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}+C$

2.原式=$\int\frac{\sqrt{(x^2+\frac{1}{x^2})^2}}{x^3}\mathrm{d}x=\int\frac{x^2+\frac{1}{x^2}}{x^3}\mathrm{d}x=\int(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^5})\mathrm{d}x=\ln|x|-\frac{1}{4x^4}+C$

3.原式=$\int(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}})\mathrm{d}x$

$=\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|-\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+C=\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2+1}}\right|+C$

练习 3.3

（3.1.3 基本积分表）

一、选择题

1. 设有函数$\ln(ax)$与$\ln(bx)$，且$a\neq b$，则（　　）.

（A）$\ln(ax)$的原函数是$\frac{1}{ax}$，$\ln(bx)$的原函数是$\frac{1}{bx}$

（B）$\ln(ax)$与$\ln(bx)$的原函数都是$\frac{1}{x}$

（C）$\ln(ax)$与$\ln(bx)$的原函数不相等

（D）$\ln(ax)$与$\ln(bx)$的原函数相等，但不是$\frac{1}{x}$

解：应选（C）

2. 设$f(x)$连续，且$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$，则下列各式中正确的是（　　）.

（A）$\int f(\mathrm{e}^{2x})\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=F(\mathrm{e}^{2x})+C$　　（B）$\int f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x=F(\sin x)+C$

（C）$\int f(\cos x)\sin x\mathrm{d}x=F(\cos x)+C$　　（D）$\int f(\frac{1}{x})\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=F(\frac{1}{x})+C$

解：本题考查不定积分凑微分法，只有（B）正确，其余三个选项都是错误的，其正确形式如下：$\int f(\mathrm{e}^{2x})\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int f(\mathrm{e}^{2x})\mathrm{d}\mathrm{e}^{2x}=\frac{1}{2}F(\mathrm{e}^{2x})+C$，

$\int f(\cos x)\sin x\mathrm{d}x=-\int f(\cos x)\mathrm{d}\cos x=-F(\cos x)+C$，

$\int f(\frac{1}{x})\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\int f(\frac{1}{x})\mathrm{d}(\frac{1}{x})=-F(\frac{1}{x})+C$.

3.设$f'(\cos^2 x)=\sin^2 x$，则不定积分$\int f(x)\mathrm{d}x=$（　　）.

（A）$\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+Cx$　　　　（B）$\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+Cx+C$

（C）$\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+C$　　　　（D）$\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+C_1x+C_2$

解：令 $t=\cos^2 x$， $f'(t)=1-t$， $f(t)=t-\frac{t^2}{2}+C$， $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+C_1x+C_2$，

选（D）

二、填空题

1.不定积分 $\int\frac{3^x+2^{x+1}}{4^x}\mathrm{d}x=$______________

解：原式= $\int(\frac{3}{4})^x+2\cdot(\frac{1}{2})^x\mathrm{d}x=\frac{(\frac{3}{4})^x}{\ln\frac{3}{4}}+2\cdot\frac{(\frac{1}{2})^x}{\ln\frac{1}{2}}+C=\frac{(\frac{3}{4})^x}{\ln 3-\ln 4}-\frac{1}{2^{x-1}\ln 2}+C$

2.不定积分 $\int(|1+x|+|1-x|)\mathrm{d}x=$______________

解：$|1+x|+|1-x|=\begin{cases}-2x & x\le -1\\ 2 & -1<x\le 1\\ 2x & x>1\end{cases}$，原式=$\begin{cases}-x^2+C_1 & x\le -1\\ 2x+C_2 & -1<x\le 1\\ x^2+C_3 & x>1\end{cases}$

3.设 $f(x)=f(x+4)\ (-\infty<x<\infty)$， $f(0)=0$，且在$[-2,2)$内 $f'(x)=\max\{1,x^2\}$，则 $f(5)$及 $f(2)$ 分别为______________

解： $f'(x)=\begin{cases}x^2 & -2\le x<-1,1<x<2\\ 1 & -1\le x\le 1\end{cases}$， $f(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}+C_1 & -2\le x<-1\\ x+C_2 & -1\le x\le 1\\ \frac{x^3}{3}+C_3 & 1<x<2\end{cases}$，由 $f(0)=0$

及 $x=-1,1$ 处的连续性，得 $f(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}-\frac{2}{3} & -2\le x<-1\\ x & -1\le x\le 1\\ \frac{x^3}{3}+\frac{2}{3} & 1<x<2\end{cases}$

所以 $f(5)=f(1)=1, f(2)=f(-2)=-\frac{10}{3}$

三、计算

1. $\int\frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}x$　　　2. $\int\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}\mathrm{d}x$　　　3. $\int\frac{x^2-1}{x^4+1}\mathrm{d}x$

解：1.原式=$\frac{1}{2}\int \ln\frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}(\ln\frac{1+x}{1-x})=\frac{1}{4}\ln^2\frac{1+x}{1-x}+C$

2.原式=$\int\frac{1}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}\mathrm{d}(\sin x-\cos x)=\frac{3}{2}(\sin x-\cos x)^{\frac{2}{3}}+C=\frac{3}{2}\sqrt[3]{1-\sin 2x}+C$

3.原式=$\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{(x+\frac{1}{x})^2-2}\mathrm{d}(x+\frac{1}{x})=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}+C$

$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}+C$

练习 3.4

（3.1.4 换元积分法）

一、选择题：

1. 已知$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}f'(\arcsin x)\mathrm{d}x=2\arcsin^2 x+C$，且 $f(0)=1$，则 $f(x)=$（　　）.

（A）$2x^2+1$；　（B）$2\arcsin^2 x$；　（C）$2x^2$；　（D）$2\arcsin^2 x+C$

解：因为$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}f'(\arcsin x)\mathrm{d}x=\int f'(\arcsin x)\mathrm{d}(\arcsin x)=f(\arcsin x)+C_1$，

从而 $f(\arcsin x)=2\arcsin^2 x+C_0$，则有 $f(x)=2x^2+C_0$，由 $f(0)=1$ 得 $C_0=1$，

故 $f(x)=2x^2+1$，应选（A）

2. 设 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}$，则$\int\frac{f'(\ln x)}{x}\mathrm{d}x=$（　　）.

（A）$-\frac{1}{x}+C$；　（B）$-\ln x+C$；　（C）$\frac{1}{x}+C$；　（D）$\ln x+C$

解：因为$\int\frac{f'(\ln x)}{x}dx=\int f'(\ln x)d\ln x=f(\ln x)+C=e^{-\ln x}+C=\frac{1}{x}+C$，故选（$C$）

3.用换元法计算不定积分$\int\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$时使用变量代换（　　）是不适宜的.

（A）$t=\sqrt{x^2+1}$；　（B）$x=\tan t(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2})$；　（$C$）$x=\frac{1}{t}$；　（$D$）$t=x^2$

解：选（D）

二、填空题：

1.设 $\int f(x)\mathrm{d}x=\sin x\cdot\ln x+C$，则 $\int\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=$____________________________；

$\int f(x)f'(x)\mathrm{d}x=$___________________________________.

解：因为 $f(x)=(\sin x\ln x+C)'=\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}$，

所以 $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int\frac{1}{f(x)}df(x)=\ln\left|f(x)\right|+C=\ln\left|\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right|+C$；

$\int f(x)f'(x)dx=\int f(x)df(x)=\frac{1}{2}f^2(x)+C=\frac{1}{2}(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x})^2+C$.

2. $\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=$_________________________.

解一：令 $x=a\sin t$，则 $\int\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}=a\int\sin tdt=-a\cos t+C=-\sqrt{a^2-x^2}+C$.

解二：$\int\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{1}{2}\int\frac{d(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\sqrt{a^2-x^2}+C$

3.设 $a\neq 0$，不定积分 $\int\frac{\mathrm{d}x}{(ax+b)\sqrt{\ln(ax+b)}}=$__________________________.

解：原式 $=\frac{1}{a}\int\frac{d(ax+b)}{(ax+b)\sqrt{\ln(ax+b)}}=\frac{1}{a}\int\frac{d\ln(ax+b)}{\sqrt{\ln(ax+b)}}=\frac{2}{a}\sqrt{\ln(ax+b)}+C$

三、计算下列不定积分：

1. $\int\cos^4 x\sin^3 x\mathrm{d}x$；　　2. $\int\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\mathrm{d}x$；　　3. $\int\frac{x+1}{\sqrt{3+4x-4x^2}}\mathrm{d}x$；

解：1. $\int\cos^4 x\sin^3 dx=\int\cos^4 x(\cos^2 x-1)d\cos x=\frac{1}{7}\cos^7 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+C$

2. 令 $x=3\sec t$，则 $\int\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx=3\int\tan^2 tdt=3\int(\sec^2 t+1)dt=3\tan t+3t+C$

$=\sqrt{x^2-9}-3\cos\frac{3}{x}+C$

3. 解：原式 $=-\frac{1}{4}\int\frac{-2x+1-3}{\sqrt{\frac{3}{4}+x-x^2}}dx=-\frac{1}{4}\int\frac{d(\frac{3}{4}+x-x^2)}{\sqrt{\frac{3}{4}+x-x^2}}+\frac{3}{4}\int\frac{d(x-\frac{1}{2})}{\sqrt{1-(x-\frac{1}{2})^2}}$

$$=-\frac{1}{4}\sqrt{3+4x-4x^2}+\frac{3}{4}\arcsin(x-\frac{1}{2})+C$$

练习 3.5

（3.1.5 分部积分法）

一、选择题：

1. 设 $\frac{\ln x}{x}$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int xf'(x)\mathrm{d}x=$（　　）.

（A）$\frac{\ln x}{x}+C$；　（B）$\frac{\ln x+1}{x^2}+C$；　（C）$\frac{1}{x}+C$；　（D）$\frac{1}{x}-\frac{2\ln x}{x}+C$

解：依题意，$f(x)=(\frac{\ln x}{x})'=\frac{1-\ln x}{x^2}$，$\int f(x)dx=\frac{\ln x}{x}+C_0$，所以

$$\int xf'(x)\mathrm{d}x=\int xdf(x)=xf(x)-\int f(x)dx=\frac{1-\ln x}{x}-\frac{\ln x}{x}+C=\frac{1}{x}-\frac{2\ln x}{x}+C,$$

故应选（D）

2. 设 e^{-x} 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int xf(x)\mathrm{d}x=$（　　）.

（A）$\mathrm{e}^{-x}(1-x)+C$；　（B）$\mathrm{e}^{-x}(x+1)+C$；　（C）$\mathrm{e}^{-x}(x-1)+C$；　（D）$-\mathrm{e}^{-x}(x+1)+C$

解：因为 $f(x)=(\mathrm{e}^{-x})'$，则 $f(x)\mathrm{d}x=(\mathrm{e}^{-x})'\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x})$，于是

$\int xf(x)\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x})=x\mathrm{e}^{-x}-\int\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=x\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-x}+C=\mathrm{e}^{-x}(x+1)+C$，故应选（$B$）

3．甲、乙两学生分别用以下的不同方法计算不定积分 $\int\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x$：

甲：$\int\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x\overset{t=\sqrt{x}}{=}\int\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t=2\arctan t+C=2\arctan\sqrt{x}+C$

乙：$\int\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x\overset{x=\frac{1}{t}}{=}\int\frac{1}{\sqrt{t}(1+t)}\mathrm{d}t$，移项合并得 $\int\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x=C$

你的判断是（　　）

（A）甲的计算方法正确而乙的计算方法不正确

（B）甲的计算方法不正确而乙的计算方法正确

（C）甲、乙的计算方法都正确

（D）甲、乙的计算方法都不正确

解：选（A）

二、填空题：

1. 设 $f(x)=\mathrm{e}^x\cos x$，则 $\int xf''(x)\mathrm{d}x=$______________________________.

解：$\int xf''(x)\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}f'(x)=xf'(x)-\int f'(x)\mathrm{d}x=xf'(x)-f(x)+C$

$$=x(e^x\cos x)'-e^x\cos x+C=x(e^x\cos x-e^x\sin x)-e^x\cos x+C$$

2. $\int x\sec^2 x\mathrm{d}x=$____.

解：$\int x\sec^2 x dx=\int x d\tan x=x\tan x-\int\tan x dx=x\tan x+\ln|\cos x|+C$.

3. $\int\arctan\frac{1}{x}\mathrm{d}x=$____.

解：$\int\arctan\frac{1}{x}dx=x\arctan\frac{1}{x}-\int xd(\arctan\frac{1}{x})=x\arctan\frac{1}{x}+\int\frac{x}{1+x^2}dx$

$$=x\arctan\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x^2}d(1+x^2)=x\arctan\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$$

三、计算下列不定积分：

1. $\int x^2\sin 2x\mathrm{d}x$；　　2. $\int\frac{x\sin x}{\cos^5 x}\mathrm{d}x$；

3. $\int\frac{x+1}{x(1+xe^x)}\mathrm{d}x$；　　4. $\int\frac{e^x}{x}(1+x\ln x)\mathrm{d}x$；

解：1. 原式$=\int x^2 d(-\frac{1}{2}\cos 2x)=-\frac{1}{2}x^2\cos 2x+\int x\cos 2x dx$

$$=-\frac{1}{2}x^2\cos 2x+\int xd(\frac{1}{2}\sin 2x)=-\frac{1}{2}x^2\cos 2x+\frac{1}{2}x\sin 2x-\frac{1}{2}\int\sin 2x dx$$

$$=-\frac{1}{2}x^2\cos 2x+\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C.$$

2. $\int\frac{x\sin x}{\cos^5 x}dx=-\int\frac{x}{\cos^5 x}d\cos x=\frac{1}{4}\int xd\frac{1}{\cos^4 x}=\frac{1}{4}\int xd\sec^4 x$

$$=\frac{1}{4}x\sec^4 x-\frac{1}{4}\int\sec^4 x dx=\frac{1}{4}x\sec^4 x-\frac{1}{4}\int(1+\tan^2 x)d\tan x$$

$$=\frac{1}{4}x\sec^4 x-\frac{1}{4}\tan x-\frac{1}{12}\tan^3 x+C.$$

3. 原式$=\int\frac{(x+1)e^x}{xe^x(1+xe^x)}dx=\int\frac{d(xe^x)}{xe^x(1+xe^x)}=\int(\frac{1}{xe^x}-\frac{1}{1+xe^x})d(xe^x)$

$$=\int\frac{d(xe^x)}{xe^x}-\int\frac{d(1+xe^x)}{1+xe^x}=\ln(xe^x)-\ln(1+xe^x)+C=\ln\frac{xe^x}{1+xe^x}+C.$$

4. 原式$=\int\frac{e^x}{x}dx+\int e^x\ln x dx=\int e^x d\ln x+\int e^x\ln x dx$

$$=e^x\ln x-\int e^x\ln x dx+\int e^x\ln x dx=e^x\ln x+C.$$

练习 3.6

（3.1.6 有理函数的分解）

一、选择题

1. 设 $\dfrac{x^2+ax+b}{(x+1)^2(x^2+1)}$ 的原函数为有理函数，则常数 a,b 的值分别为（　　）

（A）0，1；　（B）1，0.5；　（C）1，1；　（D）0，0.5

解：$\int\dfrac{x^2+ax+b}{(x+1)^2(x^2+1)}\mathrm{d}x=\int\dfrac{\mathrm{A}}{x+1}+\dfrac{B}{(x+1)^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+1}\mathrm{d}x$

$=\mathrm{A}\ln|x+1|-\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{C}{2}\ln|x^2+1|+\mathrm{D}\arctan x+C_1$

要上式为有理函数，则需满足 $\mathrm{A}=0,C=0,D=0$，即 $\dfrac{x^2+ax+b}{(x+1)^2(x^2+1)}=\dfrac{B}{(x+1)^2}$，B 是常数，故 $a=0,b=1$，选（A）

2. $\dfrac{x^3+3x+1}{(x-1)^2(x^2+1)^2}$ 的部分分式的形式为（　　）

（A）$\dfrac{A}{(x-1)^2}+\dfrac{Bx+C}{(x^2+1)^2}$；　（$B$）$\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{(x-1)^2}+\dfrac{C}{x^2+1}+\dfrac{D}{(x^2+1)^2}$；

（C）$\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{(x-1)^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+1}+\dfrac{Ex+F}{(x^2+1)^2}$；　（$D$）$\dfrac{A}{(x-1)^2}+\dfrac{Bx+C}{x^2+1}+\dfrac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$

解：选（C）

3. $\dfrac{x^2+1}{(x+1)(x^2-2x+1)}$ 的部分分式的形式为（　　）

（A）$\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{Bx+C}{x^2-2x+1}$；　（$B$）$\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x^2-2x+1}$；

（C）$\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{Bx}{x^2-2x+1}$；　（$D$）$\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{(x-1)^2}$

解：选（D）

二、填空题

1. $\int\dfrac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\mathrm{d}x=$____________________.

解:待定系数法,原式=$\int(\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x+5})\mathrm{d}x=\ln|x-2|+\ln|x+5|+C=\ln|(x-2)(x+5)|+C$

2. $\int\dfrac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}\mathrm{d}x=$____________________.

解：待定系数法，原式= $\int(\frac{-\frac{1}{2}}{x+1}+\frac{2}{x+2}+\frac{-\frac{3}{2}}{x+3})\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x+1}+2\int\frac{\mathrm{d}x}{x+2}-\frac{3}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x+3}$

$$=-\frac{1}{2}\ln|x+1|+2\ln|x+2|-\frac{3}{2}\ln|x+3|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x+2)^4}{(x+1)(x+3)^3}\right|+C$$

3. $\int\frac{x^4}{x^4+5x^2+4}\mathrm{d}x=$ ______________________.

解：待定系数法，原式= $\int\left[1+\frac{1}{3(x^2+1)}-\frac{16}{3(x^2+4)}\right]\mathrm{d}x=x+\frac{1}{3}\arctan x-\frac{8}{3}\arctan\frac{x}{2}+C$

三、计算

1. $\int\frac{x^4+2x^3-3}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x$；　　2. $\int\frac{x}{x^3-3x+2}\mathrm{d}x$；　　3. $\int\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}\mathrm{d}x$

解：1. 利用带余除法，将被积函数由假分式化为整式与真分式之和，得

原式 $=\int(x^2-2+\frac{4x+1}{x^2+2x+2})\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-2x+\int\frac{2(x^2+2x+2)'-3}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x$

$$=\frac{x^3}{3}-2x+2\ln(x^2+2x+2)-\int\frac{3}{1+(x+1)^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x^3}{3}-2x+2\ln(x^2+2x+2)-3\arctan(x+1)+C.$$

2. 利用待定常数法将其分解为最简分式之和，设

$$\frac{x}{x^3-3x+2}=\frac{x}{(x+2)(x-1)^2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2},$$

通分整理得 $x=(A+B)x^2+(-2A+B+C)x+(A-2B+2C)$，

比较等式两边同次幂的系数，得 $\begin{cases}A+B=0,\\-2A+B+C=1,\\A-2B+2C=0,\end{cases}$

解得 $A=-\frac{2}{9},B=\frac{2}{9},C=\frac{1}{3}$.

于是 $\int\frac{x}{x^3-3x+2}dx=-\frac{2}{9}\int\frac{dx}{x+2}+\frac{2}{9}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{(x-1)^2}=\frac{2}{9}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|-\frac{1}{3(x-1)}+C$.

3. 利用待定常数法将其分解为最简分式之和，设 $\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x-1}$，

通分整理得$\begin{cases}A+C=1\\B+2C=0\\-A-B+C=1\end{cases}$，解得$A=\frac{1}{2},B=-1,C=\frac{1}{2}$，

故$\int\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}\mathrm{d}x=\int[\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{2(x-1)}]\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\ln|x-1|+C=\frac{1}{2}\ln|x^2-1|+\frac{1}{x+1}+C$$

练习 3.7

（3.1.7 有理函数的积分）

一、选择题

1. 下列不定积分计算不正确的是（　　）

（A）$\int\frac{x}{2+x}dx=x-2\ln|2+x|+C$；　　（$B$）$\int\frac{x^2}{2+x}dx=\frac{x^2}{2}-2x+4\ln|2+x|+C$；

（C）$\int\frac{x}{(2+x)^2}dx=-\ln|2+x|-\frac{2}{2+x}+C$　（D）$\int\frac{x^2}{(2+x)^2}dx=x-4\ln|2+x|-\frac{2}{2+x}+C$

解：选（C）原式$=\int\frac{(x+2)-2}{(2+x)^2}dx=\int[\frac{1}{2+x}-\frac{2}{(2+x)^2}]dx=\ln|2+x|+\frac{2}{2+x}+C$.

2. 下列不定积分计算不正确的是（　　）

（A）$\int\frac{x}{2+x^2}dx=\frac{1}{2}\ln(2+x^2)+C$；　　（$B$）$\int\frac{x^2}{2+x^2}dx=1-2\ln(2+x^2)+C$；

（C）$\int\frac{x^3}{2+x^2}dx=\frac{x^2}{2}-\ln(2+x^2)+C$　　（D）$\int\frac{x}{(2+x^2)^2}dx=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2+x^2}+C$

解：选（B）原式$=\int\frac{(2+x^2)-2}{2+x^2}dx=\int(1-\frac{2}{2+x^2})dx=x-\sqrt{2}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}+C$

3．设$f(x)$为连续的单调函数，$f^{-1}(x)$是其反函数，且$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$，则$\int f^{-1}(x)\mathrm{d}x=$（　　）.

（A）$xf^{-1}(x)$；　　（B）$xf^{-1}(x)+C$；

（C）$xf^{-1}(x)-F[f^{-1}(x)]+C$；　　（$D$）$F[f^{-1}(x)]+C$

解：记$y=f^{-1}(x)$，则$x=f(y)$，有

$$\int f^{-1}(x)\mathrm{d}x=\int y\mathrm{d}f(y)=yf(y)-\int f(y)\mathrm{d}y=yf(y)-F(y)+C$$

$$=xf^{-1}(x)-F[f^{-1}(x)]+C.$$ 故选（C）

二、填空题

1. $\int\frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)(x^2+x+1)}=$____________________.

解：原式$=\int(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x^2+x+1})\mathrm{d}x=\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$

2. $\int(\frac{x}{x^3-3x+2})^2\mathrm{d}x=$____________________.

解：原式$=\int\left[\frac{4}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{4}{x-2}+\frac{4}{(x-2)^2}\right]\mathrm{d}x=4\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|-\frac{1}{x-1}-\frac{4}{x-2}+C$

3. $\int\frac{\mathrm{d}x}{x(x^{10}+1)^2}$ =____________________

解：原式$=\int\frac{x^9\mathrm{d}x}{x^{10}(x^{10}+1)^2}=\frac{1}{10}\int\frac{\mathrm{d}x^{10}}{x^{10}(x^{10}+1)^2}\overset{u=x^{10}}{=\!=\!=\!=}\frac{1}{10}\int\frac{\mathrm{d}u}{u(u+1)^2}$

$$=\frac{1}{10}\int[\frac{1}{u(u+1)}-\frac{1}{(u+1)^2}]\mathrm{d}u=\frac{1}{10}\int[\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}-\frac{1}{(u+1)^2}]\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{10}\ln\left|\frac{u}{u+1}\right|+\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{u+1}+C=\frac{1}{10}\ln\frac{x^{10}}{x^{10}+1}+\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{x^{10}+1}+C.$$

三、计算

1. $\int\frac{x(1+x^2)}{1+x^4}\mathrm{d}x$；　2. $\int\frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$；　3. $\int\frac{2x^4-x^3-x+1}{x^3-1}\mathrm{d}x$

解：1. 原式$=\frac{1}{2}\int\frac{dx^2}{1+(x^2)^2}+\frac{1}{4}\int\frac{dx^4}{1+x^4}=\frac{1}{2}\arctan x^2+\frac{1}{4}\ln(1+x^4)+C.$

2. 原式$=\int\ln x d(-\frac{1}{1+x})=-\frac{\ln x}{1+x}+\int\frac{1}{(1+x)x}dx=-\frac{\ln x}{1+x}+\int(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x})dx$

$$=-\frac{\ln x}{1+x}+\ln|x|-\ln|1+x|+C=-\frac{\ln x}{1+x}+\ln\left|\frac{x}{1+x}\right|+C.$$

3. 解：原式$=\int\frac{2x^4-2x-x^3+1+x}{x^3-1}dx=\int(2x-1+\frac{x}{x^3-1})dx$

$$=x^2-x+\frac{1}{3}\int(\frac{1}{x-1}-\frac{x-1}{x^2+x+1})dx=x^2-x+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{2x+1-3}{x^2+x+1}dx$$

$$=x^2-x+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx$$

$$=x^2-x+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)+\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

练习 3.8

（3.1.8 三角函数的有理式的积分）

一、选择题

1. 下列不定积分的计算中，使用分部积分法失效的是（　　）

（A）$\int e^x\sin x dx$；　　（B）$\int\frac{e^x}{x}dx$；

（C）$\int x^2e^x dx$；　　（D）$\int x\arctan x dx$

解：选（B）

2. $\frac{\cos 2x}{1+\sin x\cos x}$的一个原函数为（　　）

（A）$\ln(2+\sin 2x)$；　　（B）$\ln(1+\sin 2x)$；

（C）$\ln|2+\sin 2x|$；　　（D）$\ln(2-\sin 2x)$

解：选（A）

3. 下列不定积分计算不正确的是（　　）

（A）$\int\frac{1}{\sin^6 x+\cos^6 x}dx=\arctan(\tan^3 x)+C$

（B）$\int\frac{1}{\sin^6 x+\cos^6 x}dx=\arctan(\frac{1}{2}\tan 2x)+C$

（C）$\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x dx=e^x(\cot x+\csc x)+C$

（D）$\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x dx=e^x\tan\frac{x}{2}+C$

解：选（C）$\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x dx=e^x(-\cot x+\csc x)+C$

二、填空题

1. $\int\frac{1}{\sin x+\cos x}dx$ =______________________

解：原式$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d(x+\frac{\pi}{4})}{\sin(x+\frac{\pi}{4})}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\csc(x+\frac{\pi}{4})-\cot(x+\frac{\pi}{4})\right|+C$.

2. $\int \cos x \cos 2x \cos 3x \mathrm{d}x$ =____________________

解：利用积化和差公式，原式=$\frac{1}{2}\int \cos 2x(\cos 4x+\cos 2x)\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\int \cos 2x\cos 4x\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int \cos^2 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int(\cos 6x+\cos 2x)\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int(1+\cos 4x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{24}\int \cos 6x\mathrm{d}6x+\frac{1}{8}\int \cos 2x\mathrm{d}2x+\frac{x}{4}+\frac{1}{16}\int \cos 4x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{24}\sin 6x+\frac{1}{8}\sin 2x+\frac{1}{16}\sin 4x+\frac{x}{4}+C$$

3. $\int \frac{2\sin x-\cos x}{3\sin^2 x+4\cos^2 x}\mathrm{d}x$=____________________

解：原式=$\int \frac{2\sin x}{3\sin^2 x+4\cos^2 x}\mathrm{d}x-\int \frac{\cos x}{3\sin^2 x+4\cos^2 x}\mathrm{d}x=-2\int \frac{\mathrm{d}\cos x}{3+\cos^2 x}-\int \frac{\mathrm{d}\sin x}{4-\sin^2 x}$

$$=-\frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{\mathrm{d}\frac{\cos x}{\sqrt{3}}}{1+(\frac{\cos x}{\sqrt{3}})^2}-\frac{1}{4}\int(\frac{1}{2-\sin x}+\frac{1}{2+\sin x})\mathrm{d}\sin x$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\cos x}{\sqrt{3}}-\frac{1}{4}\ln\frac{2+\sin x}{2-\sin x}+C$$

三、计算

1. $\int \frac{1}{\cos x(5+3\cos x)}dx$；　　2. $\int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$；　　3. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(2+\cos x)\sin x}$；

解：1. 原式$=\frac{1}{5}\int(\frac{1}{\cos x}-\frac{3}{5+3\cos x})dx=\frac{1}{5}\ln|\sec x+\tan x|-\frac{3}{5}\int \frac{1}{5+3\cos x}dx$，

令$u=\tan\frac{x}{2}$，则$\int \frac{1}{5+3\cos x}dx=\int \frac{du}{u^2+4}=\frac{1}{2}\arctan\frac{u}{2}+C_1=\frac{1}{2}\arctan(\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2})+C_1$，

所以，$\int \frac{1}{\cos x(5+3\cos x)}dx=\frac{1}{5}\ln|\sec x+\tan x|-\frac{3}{10}\arctan(\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2})+C$

2. 法一：设$T_1=\int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$，$T_2=\int \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$，则

$$T_1+T_2=\int dx=x+C_1,$$

$$T_2-T_1=\int \frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\int \frac{d(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}=\ln|\sin x+\cos x|+C_2$$，所以

$$T_1=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln|\sin x+\cos x|+C.$$

法二：$\int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\int \frac{\sin x+\cos x-\cos x+\sin x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx$

$$=\int\frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}dx-\int\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx-\int\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx,$$

即 $2\int\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\int dx-\int\frac{d(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}=x-\ln|\sin x+\cos x|+C_1$，

所以，$\int\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln|\sin x+\cos x|+C$.

法三：$\int\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\sin(x+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4})}{\sin(x+\frac{\pi}{4})}dx$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\sin(x+\frac{\pi}{4})-\cos(x+\frac{\pi}{4})}{\sin(x+\frac{\pi}{4})}d(x+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}\int[1-\cot(x+\frac{\pi}{4})]d(x+\frac{\pi}{4})$$

$$=\frac{1}{2}[x+\frac{\pi}{4}-\ln\left|\sin(x+\frac{\pi}{4})\right|]+C_1=\frac{1}{2}[x-\ln\left|\sin(x+\frac{\pi}{4})\right|]+C.$$

法四：令 $\tan x=t$.

法五：令 $\tan\frac{x}{2}=t$.

3. 法一：令 $u=\cos x$，则 原式 $=\int\frac{\sin x dx}{(2+\cos x)\sin^2 x}=\int\frac{d\cos x}{(2+\cos x)(1-\cos^2 x)}$

$$=\int\frac{du}{(u^2-1)(u+2)}=\frac{1}{3}\int(\frac{2-u}{u^2-1}+\frac{1}{u+2})du$$

$$=\frac{1}{3}\int(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}+\frac{1}{u+2})du-\frac{1}{3}\int\frac{u}{u^2-1}du$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{(u-1)(u+2)}{u+1}\right|-\frac{1}{6}\ln|u^2-1|+C=\frac{1}{6}\ln\frac{(1-\cos x)(2+\cos x)^2}{(1+\cos x)^3}+C.$$

法二：令 $u=\tan\frac{x}{2}$，则得，原式 $=\frac{1}{3}\ln\left|\tan^3\frac{x}{2}+3\tan\frac{x}{2}\right|+C$.

练习 3.9

（3.1.9 简单无理函数的积分）

一、选择题

1. 设 $R(u,v,w)$ 是变量 u,v,w 的有理式，则计算不定积分 $\int R(x,\sqrt[p]{ax+b},\sqrt[q]{ax+b})$ 时应做的变量代换为（　　）（其中 p,q 是互质的正整数，r,s 分别是 p,q 的最小公倍数和最大公约数）

（A）$t=\sqrt[p]{ax+b}$；　（B）$t=\sqrt[q]{ax+b}$；　（C）$t=\sqrt[r]{ax+b}$；　（D）$t=\sqrt[s]{ax+b}$

解：选（C）

2. 用换元法计算不定积分 $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$ 时使用变量代换（　　）是不适宜的

（A）$t=\sqrt{x^2+1}$；　（B）$x=\tan t \quad (-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2})$；　（C）$x=\frac{1}{t}$；　（D）$t=x^2$

解：选（D）

3. 计算不定积分 $\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}\mathrm{d}x$ 时，下列变量代换中最佳的是（　）

（A）$t=\sqrt{x}$；　（B）$t=x\sqrt{x}$；　（C）$t=\sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}$；　（D）$t=1-x\sqrt{x}$

解：选（B）$t=x\sqrt{x}$，$x=t^{\frac{2}{3}}$，$\mathrm{d}x=\frac{2}{3}t^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}t$，

原式 $=\int\sqrt{\frac{t^{\frac{2}{3}}}{1-t}}\cdot\frac{2}{3}t^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}t=\frac{2}{3}\int(1-t)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t=\frac{4}{3}(1-t)^{\frac{1}{2}}+C=\frac{4}{3}(1-x^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}}+C$

二、填空题

1. $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}=$____________________

解: 解: 令 $u=\sqrt{x}+\sqrt{1+x}$，则 $\frac{1}{u}=\sqrt{1+x}-\sqrt{x}$，从而 $x=(\frac{u^2-1}{2u})^2$，$\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot\frac{u^4-1}{u^3}\mathrm{d}u$.

于是，原式 $=\int\frac{1}{1+u}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{u^4-1}{u^3}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int\frac{(u-1)(u^2+1)}{u^3}\mathrm{d}u$

$$=\frac{1}{2}\int(1-\frac{1}{u}+\frac{1}{u^2}-\frac{1}{u^3})\mathrm{d}u=\frac{1}{2}(u-\ln|u|-\frac{1}{u}+\frac{1}{2u^2})+C$$

将 $u=\sqrt{x}+\sqrt{1+x}$ 代入上式右端并化简，得

原式 $=\frac{x}{2}+\sqrt{x}-\frac{1}{2}\sqrt{x(1+x)}-\frac{1}{2}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x})+C$.

2. $\int\frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\mathrm{d}x$ =____________________

解：利用换元法，令 $\sqrt[6]{x+1}=u$ 则 $x=u^6-1,\mathrm{d}x=6u^5\mathrm{d}u$，故

原式 $=6\int\frac{u^5(1-u^3)}{1+u^2}\mathrm{du}=6\int(-u^6+u^4+u^3-u^2-u+1+\frac{u-1}{1+u^2})\mathrm{du}$

$$=-\frac{6}{7}u^7+\frac{6}{5}u^5+\frac{3}{2}u^4-2u^3-3u^2+6u+3\ln(1+u^2)-6\arctan u+C$$

3. $\int \frac{x^2+1}{(x^2-1)\sqrt{x^4+1}}\mathrm{d}x=$________________

解：原式= $\int \frac{\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}}{\sqrt{\frac{x^4+1}{(x^2-1)^2}}}\mathrm{d}x$

又 $\int \frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\left[\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x+1)^2}\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1})+C_1=-\frac{x}{x^2-1}+C_1$

所以 $\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{d}\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{x^2-1}}$，

原式 $=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int \mathrm{d}\frac{\frac{\sqrt{2}x}{x^2-1}}{\sqrt{1+(\frac{\sqrt{2}x}{x^2-1})^2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}x}{x^2-1}+\sqrt{1+(\frac{\sqrt{2}x}{x^2-1})^2}\right|+C$

$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}x+\sqrt{x^4+1}}{x^2-1}\right|+C$

三、计算

1. $\int \frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x$；　　2. $\int \frac{x}{x-\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$；　　3. $\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}\mathrm{d}x$

解：1. 解：令 $u=\sqrt{e^x-1}$，则 $x=\ln(1+u^2)$，从而有

$$\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx=\int \frac{(1+u^2)\ln(1+u^2)}{u}\cdot\frac{2u}{1+u^2}du=2\int \ln(1+u^2)du$$

$$=2u\ln(1+u^2)-4\int \frac{u^2}{1+u^2}du=2u\ln(1+u^2)-4\int(1-\frac{1}{1+u^2})du$$

$$=2u\ln(1+u^2)-4u+4\arctan u+C=2x\sqrt{e^x-1}-4\sqrt{e^x-1}+4\arctan\sqrt{e^x-1}+C$$

2. 原式 $=\int \frac{x(x+\sqrt{x^2-1})}{(x-\sqrt{x^2-1})(x+\sqrt{x^2-1})}dx=\int x(x+\sqrt{x^2-1})dx$

$$=\int x^2dx+\int x\sqrt{x^2-1}dx=\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}\int\sqrt{x^2-1}d(x^2-1)=\frac{x^3}{3}+\frac{1}{3}(x^2-1)^{\frac{3}{2}}+C.$$

3. 解：令 $\sqrt{x}=t$，则有

原式$=\int \frac{2t^2}{\sqrt{1-t^3}}dt=-\frac{2}{3}\int \frac{1}{\sqrt{1-t^3}}d(1-t^3)=-\frac{4}{3}\sqrt{1-t^3}+C=-\frac{4}{3}\sqrt{1-x\sqrt{x}}+C$.

练习 3.10

（3.1.10 关于积分问题的一些补充说明）

一、选择题

1. 下列说法正确的是（　）

（A）区间 I 上有间断点的函数一定不存在原函数

（B）函数是区间 I 内的连续的奇函数，则其所有的原函数都是偶函数

（C）函数是区间 I 内的连续的偶函数，则其所有的原函数都是奇函数

（D）初等函数的原函数未必是初等函数

解：选（A）

2. 设函数 $f(x)=\mathrm{e}^{3x}$，则不定积分 $\int \frac{f'(\ln x)}{3x}\mathrm{d}x$ =（　　）

（A）$\frac{1}{2}x^2+C$　　（B）$\frac{1}{2}x^2$　　（C）$\frac{1}{3}x^3+C$　　（D）$\frac{1}{3}x^3$

解：选（A）

3. 下列不定积分计算不正确的是（　　）

（A）$\int xf''(x)\mathrm{d}x=xf'(x)-f(x)+C$　　（B）$\int f'(2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}f(2x)+C$

（C）$f'(x^2)=\frac{1}{x}$，$f(x)=2\sqrt{x}+C$　　（D）$\int f'(\mathrm{e}^{-x})\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=f(\mathrm{e}^{-x})+C$

解：选（D）$\int f'(\mathrm{e}^{-x})\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-f(\mathrm{e}^{-x})+C$

二、填空题

1. $\int \sin(\ln x)\mathrm{d}x$ =________________________.

解：连续运用分部积分法，原式= $x\sin(\ln x)-\int x\cos(\ln x)\frac{1}{x}\mathrm{d}x=x\sin(\ln x)-\int\cos(\ln x)\mathrm{d}x$

$x\sin(\ln x)-x\cos(\ln x)-\int\sin(\ln x)\mathrm{d}x$，所以原式=$\frac{x}{2}\left[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)\right]+C$

2. $\int \frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$ =________________________.

解：令 $t=\arctan x$，原式=$\int \frac{\mathrm{e}^t}{\sec^3 t}\cdot\sec^2 t\mathrm{d}t=\int \mathrm{e}^t\cos t\mathrm{d}t=\int \mathrm{e}^t\mathrm{d}\sin t=\mathrm{e}^t\sin t-\int \mathrm{e}^t\sin t\mathrm{d}t$

$=\mathrm{e}^t\sin t+\int \mathrm{e}^t\mathrm{d}\cos t=\mathrm{e}^t(\sin t+\cos t)-\int \mathrm{e}^t\cos t\mathrm{d}t$，

即原式=$\frac{\mathrm{e}^t(\sin t+\cos t)}{2}+C=\frac{x+1}{2\sqrt{1+x^2}}\mathrm{e}^{\arctan x}+C$

3. $\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\mathrm{d}x$ =________________________.

解：①若 $a=b=0$，则原式=C；

②若 $a=0, b\neq 0$，则原式=$\int \sin bx\mathrm{d}x=-\frac{1}{b}\cos bx+C$

③若 $a\neq 0$，则原式=$\frac{1}{a}\int \sin bx\mathrm{d}e^{ax}=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a^2}\int \cos bx\mathrm{d}e^{ax}=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a^2}e^{ax}\cos bx-\frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin bx\mathrm{d}x,$$

整理得，原式=$\frac{a^2}{a^2+b^2}\left[\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a^2}e^{ax}\cos bx\right]=\frac{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}+C$

综上 $\int e^{ax}\sin bx\mathrm{d}x=\begin{cases} C & a=b=0 \\ \frac{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}+C & \text{其他} \end{cases}$

三、计算证明

1. $\int \frac{(1+x^2)\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；　2. $\int \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\mathrm{d}x \quad (a<b)$；

3. 证明：若 $P(x)$ 为 n 次多项式，则

$$\int P(x)e^{ax}\mathrm{d}x=e^{ax}\left[\frac{P(x)}{a}-\frac{P'(x)}{a^2}+\cdots+(-1)^n\frac{P^{(n)}(x)}{a^{n+1}}\right]+C$$

解:1. 原式$=\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx+\int \frac{\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx=\int \arcsin x d\arcsin x+\int \frac{\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx$

$$=\frac{1}{2}(\arcsin x)^2+\int \frac{\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx,$$

令 $\arcsin x=t$，则 $\int \frac{\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx=\int \frac{t}{\sin^2 t}dt=\int td(-\cot t)=-t\cot t+\int \cot tdt$

$$=-t\cot t+\ln|\sin t|+C_1=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\arcsin x+\ln|x|+C_1,$$

所以，原式$=\frac{1}{2}(\arcsin x)^2-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\arcsin x+\ln|x|+C$.

2. 法一：原式=$\int \frac{1}{x-a}\sqrt{\frac{(x-a)}{(b-x)}}\mathrm{d}x \overset{t=\sqrt{\frac{(x-a)}{(b-x)}}}{=} \int \frac{1+t^2}{(b-a)t^2}\cdot t\cdot\frac{2(b-a)t}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t=2\int\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$

$$=2\arctan t+C=2\arctan\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}+C$$

法二：令 $t=x-\dfrac{a+b}{2}$，原式$=\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{(\frac{b-a}{2}+t)(\frac{b-a}{2}-t)}}\mathrm{d}t=\int\frac{1}{\sqrt{(\frac{b-a}{2})^2-t^2}}\mathrm{d}t$

$$=\arcsin\frac{2t}{b-a}+C=\arcsin\frac{2x-(a+b)}{b-a}+C$$

法三：原式$=\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x-a}\sqrt{b-x}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sqrt{x-a}}\cdot\frac{1}{\sqrt{(b-a)-(x-a)}}\mathrm{d}x$

$$=\int\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x-a}{b-a}}}\frac{1}{\sqrt{b-a}\sqrt{x-a}}\mathrm{d}x=2\int\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x-a}{b-a}}}\mathrm{d}\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{b-a}}\overset{t=\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{b-a}}}{=}2\int\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$$

$$=2\arcsin t+C=2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}+C$$

法四：令 $x-a=(b-a)\sin^2 t$，原式$=\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{(b-a)\sin^2 t\cdot(b-a)\cos^2 t}}(b-a)2\sin t\cos t\mathrm{d}t$

$$=2\int\mathrm{d}t=2t+C=2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}+C$$

3.证明：连续多次利用分部积分法

$$\int P(x)\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int P(x)\mathrm{d}(\mathrm{e}^{ax})=\frac{1}{a}P(x)\mathrm{e}^{ax}-\frac{1}{a}\int P'(x)\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}P(x)\mathrm{e}^{ax}-\frac{1}{a^2}\int P'(x)\mathrm{d}(\mathrm{e}^{ax})$$

$$=\frac{1}{a}P(x)\mathrm{e}^{ax}-\frac{1}{a^2}P'(x)\mathrm{e}^{ax}+\frac{1}{a^2}\int P''(x)\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x$$

$$=\cdots$$

$$=\mathrm{e}^{ax}\left[\frac{P(x)}{a}-\frac{P'(x)}{a^2}+\cdots+(-1)^n\frac{P^{(n)}(x)}{a^{n+1}}\right]+C$$

因为 $P(x)$ 为 n 次多项式，所以 $P^{(n+1)}(x)\equiv 0$，从而上述等式括号中导数到 $P^{(n)}(x)$ 为止.

练习 3.11

（3.2.1-3.2.2　定积分的概念与性质）

一、选择题：

1．下列不等式中，成立的为（　　）.

（A）$\int_1^2 x^3dx>\int_1^2 x^2dx$　　　（B）$\int_0^1 x^3dx>\int_0^1 x^2dx$

（C）$\int_{-1}^{-2} x^2dx>\int_{-1}^{-2} x^3dx$　　　（D）$\int_0^{-1} x^2dx>\int_0^{-1} x^3dx$

解：因为在区间 $(1,2)$ 内 $x^3 > x^2$，故有 $\int_1^2 x^3 dx > \int_1^2 x^2 dx$，从而应选（$A$）.

2．$I_1 = \int_0^1 e^x dx$，$I_2 = \int_0^1 (1+x)dx$，则下列结论成立的是（　　）.

（A）$I_1 > I_2$　　（B）$I_1 < I_2$　　（C）$I_1 \geq I_2$　　（D）$I_1 \leq I_2$

解：设 $f(x) = e^x - (1+x) = e^x - x - 1$，$f'(x) = e^x - 1$，而 $x \in (0,1)$，故 $f'(x) > 0$，$f(x)$ 为增函数. 而 $f(0) = 0$，从而 $f(x) > 0$，即 $e^x > 1 + x$，所以 $\int_0^1 e^x dx > \int_0^1 (1+x)dx$. 故应选（$A$）

3.设 $f(x)$ 为连续函数，则 $\lim_{b \to a} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx =$（　　）.

（A）$f(b)$　　（B）$f(\xi)$　　（C）$f(a)$　　（D）以上结论都不对

解：由中值定理得 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$，$\xi \in (a,b)$，所以

$\lim_{b \to a} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = \lim_{b \to a} \frac{1}{b-a} \cdot f(\xi)(b-a) = \lim_{\xi \to a} f(\xi) = f(a)$.故应选（$C$）.

二、填空题：

1. 设 $f(x)$ 是连续函数，且 $\int_0^{x^3-1} f(t)dt = x$，则 $f(7) =$ ________.

解：两边对 x 求导得 $3x^2 f(x^3-1) = 1$，令 $x^3 - 1 = 7$，得 $x = 2$，所以 $f(7) = \left.\frac{1}{3x^2}\right|_{x=2} = \frac{1}{12}$.

2. $\lim_{n \to \infty} (\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n})$ = ________.

解：原式 $= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{i}{n}} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x)\Big|_0^1 = \ln 2$.

3. $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} (\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \sqrt{1+\frac{n}{n}}) =$ ________.

解：函数 $f(x) = \sqrt{1+x}$ 在[0, 1]上连续，故可积且 $\int_0^1 \sqrt{1+x} dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$

把[0, 1]区间 n 等分，取 $\Delta x_i = \frac{1}{n}$，$\xi_i = \frac{i}{n}$ 则

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\cdots\sqrt{1+\frac{n}{n}})$$

$$=\int_0^1\sqrt{1+x}dx=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$$

三、计算解答

1.证明：$\sqrt{\frac{2}{e}}\le\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} e^{-x^2}dx\le\sqrt{2}$.

解：设 $f(x)=e^{-x^2}$ ，则 $f'(x)=-2xe^{-x^2}$ ，令 $f'(x)=0$，解得 $x=0$，且推知 $x=0$ 为 $f(x)$ 在 $[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}]$ 内的最大值点，而 $f(x)$ 分别在 $(-\frac{\sqrt{2}}{2},0)$ 及 $(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$ 内单调，

故 $e^{-(\pm\frac{\sqrt{2}}{2})^2}\le f(x)\le e^0$ ，即 $\frac{1}{\sqrt{e}}\le f(x)\le 1$，所以 $\sqrt{\frac{2}{e}}\le\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x)dx\le\sqrt{2}$.

2.用定积分的定义计算由 $y=x+1$ 及 $x=1, x=2, y=0$ 所围成的图形的面积.

解：将区间 $[1,2]$ n 等分，取 $\Delta x_i=\frac{1}{n}$，则 $x_i=1+\frac{i}{n}$.

$$S=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(2+\frac{i}{n})\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}(\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n}+\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2})=2+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(1+n)}{2}$$

$$=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}.$$

3.已知 $\int_0^1\ln(1+x)dx=2\ln 2-1$，求极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}$.

解一： $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\cdots(1+\frac{n}{n})}$

$$=\lim_{n\to\infty} e^{\ln\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\cdots(1+\frac{n}{n})}}=\lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(1+\frac{i}{n})}=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(1+\frac{i}{n})}=e^{\int_0^1\ln(1+x)dx}=e^{2\ln 2-1}=\frac{4}{e}.$$

解二：记 $a_n=\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}$ ，

取对数得 $\ln a_n=\frac{1}{n}[\ln(1+\frac{1}{n})+\ln(1+\frac{2}{n})+\cdots\ln(1+\frac{n}{n})]=\sum_{i=1}^{n}\ln(1+\frac{i}{n})\cdot\frac{1}{n}$,

所以，$\lim_{n\to\infty}\ln a_n=\int_0^1\ln(1+x)dx=2\ln 2-1$，故 $\lim_{n\to\infty} a_n=\frac{4}{e}$.

练习 3.12

（3.2.3-3.2.4　中值定理与 Newton-Leibniz 公式）

一、选择题：

1.下列各式中正确的是（　　）.

（A）$\mathrm{d}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(t)\mathrm{d}t$　　　　（B）$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = f(x)$

（C）$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^b f(x)\mathrm{d}x = -f(x)$　　　　（D）$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(t)$

解：因为$\frac{d}{dx}\int_x^b f(x)dx = -f(x)$，故应选（C）.

2.若$k \neq 0$，且$\int_0^k (2x-3x^2)\mathrm{d}x = 0$，则$k =$（　　）.

（A）$-\frac{3}{2}$　　（B）-1　　（C）1　　（D）$\frac{3}{2}$

解：由于$\int_0^k (2x-3x^2)\mathrm{d}x = (x^2-x^3)\Big|_0^k = k^2(1-k)$，令$k^2(1-k)=0$，得$k=0$或$k=1$，故应选（C）.

3.设函数$y=\int_0^x (t-1)\mathrm{d}t$，则$y$有（　　）.

（A）极小值$\frac{1}{2}$　　（B）极小值$-\frac{1}{2}$　　（C）极大值$\frac{1}{2}$　　（D）极大值$-\frac{1}{2}$

解：因为$y'=x-1$，$y''=1>0$，令$y'=0$得驻点$x=1$，且在$x=1$处函数y取得极小值

$y(1)=\int_0^1 (t-1)dt = (\frac{t^2}{2}-t)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$.故应选（B）.

二、填空题：

1.设$\int_1^x f(x)dx = x[f(x)+1]$，则$f(x)=$________________.

解：两边对x求导得$f(x)=f(x)+1+xf'(x)$，所以$f'(x)=-\frac{1}{x}$，两边积分得$f(x)=-\ln|x|+C$，将$x=1$代入等式$\int_1^x f(x)dx = x[f(x)+1]$可得$f(1)=-1$，将$x=1$代入等式$f(x)=-\ln|x|+C$可得$C=-1$，所以$f(x)=-\ln|x|-1$..

2.$\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos 2x}dx =$______________________________.

解：$\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos 2x}dx = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}|\cos x|dx$

$=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx - \sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos x dx + \sqrt{2}\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\cos x dx = 4\sqrt{2}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x(1+t^2)e^{t^2-x^2}dt=$________________________.

解：原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\int_0^x(1+t^2)e^{t^2}dt}{xe^{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1+x^2)e^{x^2}}{(1+2x^2)e^{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x^2}{1+2x^2}=\frac{1}{2}$.

三、计算解答

1. 设$\int_0^x t\ln(1+t)dt+\int_1^y\frac{\sin t}{t}dt=0$，求$\frac{dy}{dx}$.

解：两边对x求导得$x\ln(1+x)+\frac{\sin y}{y}y'=0$，所以$y'=-\frac{xy\ln(1+x)}{\sin y}$.

2. 设$\int_0^y e^t dt-\int_0^{e^x-1}\cos|t|dt=0$，求$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

解：两边对x求导得$e^y y'-\cos|e^x-1|\cdot e^x=0$，所以$y'=e^{x-y}\cos|e^x-1|$. 在原方程中令$x=0$，有$\int_0^{y(0)}e^t dt-\int_0^{e^0-1}\cos|t|dt=\int_0^{y(0)}e^t dt=0$，所以$y(0)=0$. 故$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}=1$.

练习 3.13

（3.2.5-3.2.6　定积分的换元积分法与分部积分法）

一、选择题：

1.下列积分**不正确**的是（　　）.

（A）$\int_{-1}^1\frac{dx}{x^2}=-\left.\frac{1}{x}\right|_{-1}^1=-2$　　（B）$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=2$

（C）$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=0$　　（D）$\int_{-1}^1\sqrt{1-x^2}dx=2\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=\frac{\pi}{2}$

解：因为（A）中的积分不能用牛顿-莱布尼茨公式，其他三项利用奇偶函数的积分性质及定积分的几何意义可得，故应选（A）.

2.设函数$f(x)$连续，则在下列变上限定积分定义的函数中，必为偶函数的是（　　）.

（A）$\int_0^x t[f(t)+f(-t)]dt$　　（B）$\int_0^x t[f(t)-f(-t)]dt$

（C）$\int_0^x f(t^2)dt$　　（D）$\int_0^x f^2(t)dt$

解：在（A）中令$F(x)=\int_0^x t[f(t)+f(-t)]dt$，则

$$F(-x)=\int_0^{-x} t[f(t)+f(-t)]\mathrm{d}t \overset{u=-t}{=\!=\!=} \int_0^{x}(-u)[f(-t)+f(u)]\mathrm{d}(-u)$$

$$=\int_0^{x} u[f(-t)+f(u)]\mathrm{d}u=F(x),$$

故应选（A）.

3.设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_0^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}=b(b\neq 0)$，则常数 a,b 应分别为（　　）.

（A）1，$\frac{1}{2}$　　（B）$\frac{1}{2}$，1　　（C）0，0　　（D）1，1

解：当 $x\to 0$时，分子分母都$\to 0$，则应用洛必达法则有

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_0^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}=\lim_{x\to 0}\frac{(ax-\sin x)'}{(\int_0^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}dt)'}=\lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{\frac{\ln(1+x^3)}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x(a-\cos x)}{\ln(1+x^3)}(\frac{0}{0}\text{型})$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{[x(a-\cos x)]'}{[\ln(1+x^3)]'}=\lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x+x\sin x}{\frac{3x^2}{1+x^3}}=b(b\neq 0)$$

而此时 $x\to 0$时，分子$\to a-1$,分母$\to 0$而$\mathrm{b}\neq 0$所以$a-1=0\Rightarrow a=1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x+x\sin x}{\frac{3x^2}{1+x^3}}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x^3)(1-\cos x+x\sin x)}{3x^2}(\frac{0}{0}\text{型})$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{[(1+x^3)(1-\cos x+x\sin x)]'}{[3x^2]'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2(1-\cos x+x\sin x)+(1+x^3)(2\sin x+x\cos x)}{6x}(\frac{0}{0}\text{型})$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{[3x^2(1-\cos x+x\sin x)+(1+x^3)(2\sin x+x\cos x)]'}{(6x)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{6x\ (1-\cos x+x\sin x)+3x^2(2\sin x+x\cos x)+3x^2(2\sin x+x\cos x)+(1+x^3)(3\cos x-x\sin x)}{6}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3\cos x}{6}=\frac{1}{2}=b$$

故应选（A）.

二、填空题：

1.若 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，则 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=$ ________________.

解：令 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=C$，则 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}+C\sqrt{1-x^2}$，而

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(\frac{1}{1+x^2}+C\sqrt{1-x^2})\mathrm{d}x=\arctan x\Big|_0^1+C\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}C,$$

由 $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{4}C=C$，得 $C=\dfrac{\pi}{4-\pi}$，故 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{4-\pi}$.

2. $\int_{-1}^{1}(|x|+x)\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=$____________________.

解：$\int_{-1}^{1}(|x|+x)\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=2\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=2(-x\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x})\Big|_0^1=2(1-\mathrm{e}^{-1})$.

3.设 $f(x)=\begin{cases} x\mathrm{e}^{x^2}, & -\dfrac{1}{2}\le x<\dfrac{1}{2} \\ -1, & x\ge\dfrac{1}{2} \end{cases}$，则 $\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x-1)\mathrm{d}x=$____________________.

解：先换元然后分段积分，令 $x-1=t$，则 $x=t+1$，$\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$，当 $\dfrac{1}{2}\le x\le 2$ 时，有 $-\dfrac{1}{2}\le t\le 1$，于是 $\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x-1)\mathrm{d}x=\int_{-\frac{1}{2}}^{1} f(t)\mathrm{d}t=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} t\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(-1)\mathrm{d}t=0-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}$.

三、计算解答：

1（1）. $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x$；

解：$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx=2\int_{\frac{1}{2}}^{1}\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}d\sqrt{x}=2\int_{\frac{1}{2}}^{1}\arcsin\sqrt{x}d\arcsin\sqrt{x}$

$=(\arcsin\sqrt{x})^2\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=\dfrac{3\pi^2}{16}$.

1（2）. $\int_{-3}^{2}\min(2,x^2)\,\mathrm{d}x$；

解：$\int_{-3}^{2}\min(2,x^2)\,dx=\int_{-3}^{-\sqrt{2}}2\,dx+\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}x^2\,dx+\int_{\sqrt{2}}^{2}2\,dx=10-\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$.

2（1）. $\int_a^b|2x-a-b|\,\mathrm{d}x\ (a<b)$；

解：$\int_a^b|2x-a-b|\,dx=\int_a^{\frac{a+b}{2}}(a+b-2x)\,dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}(2x-a-b)\,dx$

$=[(a+b)x-x^2]\Big|_a^{\frac{a+b}{2}}+[x^2-(a+b)x]\Big|_{\frac{a+b}{2}}^{b}=\dfrac{(b-a)^2}{2}$.

2（2）. $\int_0^1\ln(x+\sqrt{1+x^2})\,\mathrm{d}x$；

解：$\int_0^1\ln(x+\sqrt{1+x^2})\,\mathrm{d}x=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})\Big|_0^1-\int_0^1\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\ln(1+\sqrt{2})-\sqrt{1+x^2}\Big|_0^1$

$$=\ln(1+\sqrt{2})-\sqrt{2}+1.$$

3（1）. $\int_0^{\pi} x\sin^6 x\cos^4 x\,\mathrm{d}x$；

解：$\int_0^{\pi} x\sin^6 x\cos^4 x\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 x\cos^4 x\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 x(1-\sin^2 x)^2\mathrm{d}x$

$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^6 x-2\sin^8 x+\sin^{10} x)\mathrm{d}x$

$=\pi(\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-2\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{9}{10}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2})=\frac{3\pi^2}{512}$.

3（2）. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4 x}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$.

解：$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4 x}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4 x}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin^4 x}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$，对右边的第二个积分，令 $x=-t$，则

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin^4 x}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin^4 t}{1+e^{t}}\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4 x}{1+e^{x}}\mathrm{d}x$，于是

原式$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{1+e^{-x}}+\frac{1}{1+e^{x}})\sin^4 x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\,\mathrm{d}x=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{16}$.

练习 3.14

（3.2.7　广义积分）

一、选择题：

1.下列反常积分中收敛的是（　　）.

（A）$\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x\mathrm{d}x$　　（B）$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$　　（C）$\int_{-1}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$　　（D）$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

解：由反常积分的定义可得（C）成立.

2. 反常积分$\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{-kx}\mathrm{d}x$收敛时，$k$ 应满足（　　）.

（A）$k>0$　　（B）$k\ge 0$　　（C）$k<0$　　（D）$k\le 0$

解：当 $k\ne 0$ 时，$\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{-kx}\mathrm{d}x=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\mathrm{e}^{-kx}\mathrm{d}x=\lim_{a\to-\infty}(-\frac{1}{k}\mathrm{e}^{-kx})\Big|_a^0=\lim_{a\to-\infty}(-\frac{1}{k}+\frac{1}{k\mathrm{e}^{ka}})$，

当 $k>0$ 时，$\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{-kx}\mathrm{d}x=+\infty$，当 $k<0$ 时，$\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{-kx}\mathrm{d}x=-\frac{1}{k}$，

当$k=0$时，$\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{-kx}\mathrm{d}x=\lim\limits_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\mathrm{d}x=\lim\limits_{a\to-\infty}x\Big|_{a}^{0}=\lim\limits_{a\to-\infty}(-a)=+\infty$，故应选（$C$）.

3．下列广义积分收敛的是（　　）.

（A）$\int_{e}^{+\infty}\frac{\ln x}{x}dx$　　（B）$\int_{e}^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx$　　（C）$\int_{e}^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^2}dx$　　（D）$\int_{e}^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

解：$\int_{e}^{+\infty}\frac{\ln x}{x}dx=\int_{e}^{+\infty}\ln x d\ln x=\frac{1}{2}\ln^2 x\Big|_{e}^{+\infty}=\infty;$

$\int_{e}^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx=\int_{e}^{+\infty}\frac{1}{\ln x}d\ln x=\ln\ln x\Big|_{e}^{+\infty}=\infty;$

$\int_{e}^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^2}dx=\int_{e}^{+\infty}\frac{1}{(\ln x)^2}d\ln x=-\frac{1}{\ln x}\Big|_{e}^{+\infty}=1;$

$\int_{e}^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}dx=\int_{e}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\ln x}}d\ln x=2\sqrt{\ln x}\Big|_{e}^{+\infty}=\infty.$

故选(C).

二、填空题：

1. $\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{2-x}}=$ ______________.

解：$\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{2-x}}=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_{1}^{b}\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{2}}=\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{1}{e}\arctan\frac{e^{x}}{e}\Big|_{1}^{b}$

$$=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{e}(\arctan\frac{e^{b}}{e}-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{e}(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{4e}.$$

2. $\int_{0}^{+\infty}\frac{x}{(1+x)^3}\mathrm{d}x=$ ______________.

解：原式$=\int_{0}^{+\infty}\frac{x+1-1}{(1+x)^3}dx=\int_{0}^{+\infty}[\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{(1+x)^3}]dx=[-\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2(1+x)^2}]_{0}^{+\infty}=\frac{1}{2}$

3. $\int_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{(2-x)\sqrt{1-x}}=$ ______________..

解：令$u=\sqrt{1-x}$，则$x=1-u^2$，

原式$=\int_{1}^{0}\frac{-2u\mathrm{d}u}{(1+u^2)u}=2\int_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}=2\arctan u\Big|_{0}^{1}=\frac{\pi}{2}$.

三、计算解答

1（1）. $\int_{3}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^4\sqrt{x^2-2x}}$

解： 令 $x-1=\sec\theta$, 则 $dx=\sec\theta\tan\theta\, d\theta$,

$$原式=\int_3^{+\infty}\frac{dx}{(x-1)^4\cdot\sqrt{(x-1)^2-1}}=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec\theta\tan\theta}{\sec^4\theta\tan\theta}d\theta=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\theta)\cos\theta d\theta=\frac{2}{3}-\frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

1（2）. $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$；

解： $原式=\int_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx,$

因为 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx \overset{x=\frac{1}{t}}{===} \int_1^0\frac{\ln\frac{1}{t}}{1+\frac{1}{t^2}}(-\frac{1}{t^2}dt)=\int_1^0\frac{\ln t}{1+t^2}dt=-\int_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}dx,$

所以，$原式=\int_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}dx-\int_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}dx=0.$

2.已知 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x-a}{a+a})^x=\int_a^{+\infty}4x^2\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$ ，求常数 a .

解：$左边=\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{2a}{x+a})^x=e^{-2a}$，

$$右边=-2\int_a^{+\infty}x^2d(e^{-2x})=-2x^2e^{-2x}\Big|_a^{+\infty}+4\int_a^{+\infty}xe^{-2x}dx=2a^2e^{-2a}-2\int_a^{+\infty}xd(e^{-2x})$$

$$=2a^2e^{-2a}-2xe^{-2x}\Big|_a^{+\infty}+2\int_a^{+\infty}e^{-2x}dx=2a^2e^{-2a}+2ae^{-2a}+e^{-2a},$$

有 $e^{-2a}=2a^2e^{-2a}+2ae^{-2a}+e^{-2a} \quad\Rightarrow\quad a=0,或\ a=-1.$

3.证明: $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

证：令 $x=\frac{1}{t}$，则 $dx=-\frac{1}{t^2}dt$

有 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^4}dx=\int_{+\infty}^0\frac{-\frac{1}{t^2}dt}{1+\frac{1}{t^4}}=\int_{+\infty}^0\frac{-t^2}{1+t^4}dt=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx,$

令 $I=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^4}dx$，

$$2I=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^4}dx+\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx=\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx=\int_0^{+\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2}))=\frac{\pi}{\sqrt{2}},$$

从而可得， $I=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

练习 3.15

（3.3.1-3.3.2　定积分的几何应用）

一、选择题：

1. 由曲线 $ax=y^2$ 与曲线 $ay=x^2$ 所围成的面积是（　　）.

（A） $\frac{a^2}{3}$　　（B） $\frac{3}{a^2}$　　（C） $\frac{a^3}{3}$　　（D） $\frac{3}{a^3}$

解：由 $\begin{cases}ax=y^2\\ay=x^2\end{cases}$ 可以得到交点的坐标为 $A(a,a)$ 以及 $O(0,0)$. 故所围成的面积为

$$s=\int_0^a(\sqrt{ax}-\frac{x^2}{a})dx=[\frac{2}{3a}(ax)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3a}x^3]\Big|_0^a=\frac{2}{3a}a^3-\frac{1}{3a}a^3=\frac{a^2}{3}$$

故应选（A）

2. 曲线 $y=\ln\cos x$ 夹在 $0\le x\le a<\frac{\pi}{2}$ 之间的弧长为（　　）.

（B） $\ln\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2})$　　（B） $\ln\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2})$

（C） $\ln\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2})$　　（D） $\ln\cot(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2})$

解：首先有 $y'=\frac{-\sin x}{\cos x}=-\tan x$，所求的弧长为

$$s=\int_0^a\sqrt{1+\tan^2 x}dx=\int_0^a\sqrt{1+y'^2(x)}dx=\int_0^a\frac{dx}{\cos x}=\ln\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2})$$

故应选(C).

3. 曲线 $y=\sin^{\frac{3}{2}}x$ $(0\le x\le\pi)$ 与 x 轴围成的图形绕 x 轴旋转所成的旋转体的体积为（　　）.

（A） $\frac{4}{3}$　　（B） $\frac{4}{3}\pi$　　（C） $\frac{2}{3}\pi^2$　　（D） $\frac{2}{3}\pi$

解：所求旋转体的体积为

$$V=\int_0^{\pi}\pi y^2dx=\pi\int_0^{\pi}\sin^3 xdx=-\pi\int_0^{\pi}(1-\cos^2 x)d\cos x=-\pi[\cos x-\frac{\cos^3 x}{3}]_0^{\pi}=\frac{4}{3}\pi.$$

故应选(B).

二、填空题：

1. 曲线 $y=\ln x$ 与两直线 $y=(e+1)-x$ 及 $y=0$ 所围成的平面图形的面积为______.

解：由 $y=\ln x$ 及 $y=(e+1)-x$ 求出交点 $A(e,1)$，所以

$$S=\int_1^e\ln xdx+\int_e^{e+1}[(e+1)-x]dx=\frac{3}{2}.$$

2. 星形线 $x=a\cos^3 t$，$y=a\sin^3 t$ 的全长为______________.

解：利用对称性，$S=4S_1=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}dt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}3a\cos t\sin tdt=6a$.

3. 心形线 $r=a(1+\cos\theta)$ 的全长为____________.

解：$S=2S_1=2\int_0^{\pi}\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}d\theta=2\sqrt{2}a\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos\theta}d\theta=4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}d\theta=8a$.

三、计算解答

1. 求双纽线 $r^2=a^2\cos 2\theta$ 所围成且在 $r=\frac{a}{\sqrt{2}}$ 内的图形面积.

解：由 $r^2=a^2\cos 2\theta$ 及 $r=\frac{a}{\sqrt{2}}$ 求得 $\theta=\frac{\pi}{6}$.

$$A_1=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{a^2}{4}d\theta+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{a^2\cos 2\theta}{2}d\theta=\frac{a^2}{4}(\frac{\pi}{6}+1-\frac{\sqrt{3}}{2}),$$

而 $A=4A_1=a^2(\frac{\pi}{6}+1-\frac{\sqrt{3}}{2})$.

2. 求曲线 $y=x^2-2x$，$y=0$，$x=1$，$x=3$ 所围成的平面图形的面积 S，并求该平面图形绕轴旋转一周所得旋转体的体积 V.

解：设位于 x 轴下方的面积为 S_1，位于 x 轴上方的面积为 S_2，则

$$S_1=\int_1^2(2x-x^2)dx=(x^2-\frac{1}{3}x^3)\Big|_1^2=\frac{2}{3},$$

$$S_2=\int_2^3(x^2-2x)dx=(\frac{1}{3}x^3-x^2)\Big|_2^3=\frac{4}{3},$$

故所求图形的面积 $S=S_1+S_2=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=2$.

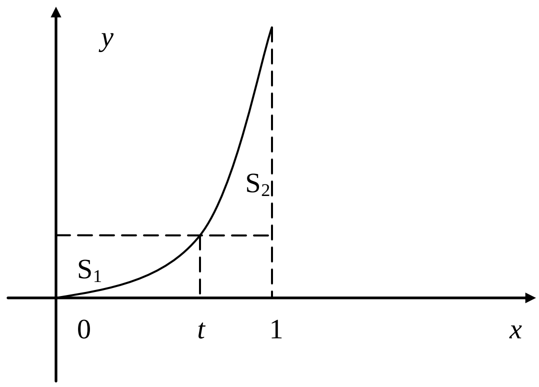
平面图形 S_1 绕 y 轴旋转一周所得旋转体体积为

$$V_1=\int_1^2 2\pi x|x^2-2x|dx=\int_1^2 2\pi x(2x-x^2)dx=\frac{11}{6}\pi,$$

平面图形 S_2 绕 y 轴旋转一周所得旋转体体积为 $V_2=\int_2^3 2\pi x(x^2-2x)dx=\frac{43}{6}\pi$，

故所求旋转体体积为 $V=V_1+V_2=\frac{11}{6}\pi+\frac{43}{6}\pi=9\pi$.

3. 在闭区间 $[0,1]$ 上给定函数 $y=x^2$，点 t 在什么位置时，面积 S_1 和 S_2 之和分别具有最大值和最小值？



解： $S_1=\int_0^t(t^2-x^2)dx=\frac{2}{3}t^3$，

$S_2=\int_t^1(x^2-t^2)dx=\frac{1}{3}-t^2+\frac{2}{3}t^3$，

令 $(S_1+S_2)_t'=0$，即 $4t^2-2t=0$，

解得 $t_1=0,t_2=\frac{1}{2}$. 又 $S_1(0)+S_2(0)=\frac{1}{3}$， $S_1(\frac{1}{2})+S_2(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$， $S_1(1)+S_2(1)=\frac{2}{3}$，

故当 $t=1$ 时， $\max(S_1+S_2)=\frac{2}{3}$；当 $t=\frac{1}{2}$ 时， $\min(S_1+S_2)=\frac{1}{4}$.

练习 3.16

（3.3.3-3.3.4　定积分的物理应用）

一、选择题：

1. 圆弧 $x=a\cos\varphi,y=a\sin\varphi\ (|\varphi|\le\alpha\le\pi)$ 的重心坐标为（　　）.

（A） $(\frac{a\sin\alpha}{\alpha},0)$　　　（B） $(\frac{a\cos\alpha}{\alpha},0)$

（C） $(0,\frac{a\sin\alpha}{\alpha})$　　　（D） $(0,\frac{a\cos\alpha}{\alpha})$

解：设重心的坐标是 (ξ,η)，依题意得 $\eta=0$，圆弧长 $s=2a\alpha$，

因为 $M_y=\int_0^s xds=\int_{-a}^a a^2\cos\varphi d\varphi=2a^2\sin\alpha$，所以 $\xi=\frac{2a^2\sin\alpha}{2a\alpha}=\frac{a\sin\alpha}{\alpha}$

故应选（A）.

2. 长度 $l=10m$ 且密度按 $\delta=6+0.3x\,kg/m$ 而变化的一根轴， x 为距轴两端点中的一端的距

离，则轴的质量为（ ）.

（A）70 （B）75 （C）80 （D）85

解：将轴 n 等分，每份的长$\Delta x=\dfrac{10}{n}$，把每小段近似的看成是均匀的，并以右端点的密度作为小段的密度，轴的质量可看作$n\to\infty$时$\sum_{i=1}^{n}(6+0.3\times\dfrac{10}{n}i)\times\dfrac{10}{n}$的极限，即

$$M=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(6+0.3\times\frac{10}{n}i)\times\frac{10}{n}=\lim_{n\to\infty}[60+\frac{15(n+1)}{n}]=75$$

故应选（B）.

3. 若 1（kg）的力能使弹簧伸长 1（cm），则要使弹簧伸长 10（cm），需要的功（$kg\cdot m$）为（ ）

（A）0.05 （B）0.1 （C）0.5 （D）1

解：由胡克定律知，$F=kx$，其中F为弹性恢复力，x为伸长量。

由条件知：$k=1$，因而$F=x$。现将 10（cm）n 等分，每份上的恢复力的大小近似的看作是不变的，并取右端点来做和，所求的功可看作$n\to\infty$时$\sum_{i=1}^{n}\dfrac{10}{n}i\times\dfrac{10}{n}$的极限，即

$$M=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{10}{n}i\times\frac{10}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{50(n+1)}{n}=50(kg\cdot cm)=0.5(kg\cdot m)$$

故应选（C）

二、填空题：

1. 函数$y=2xe^{-x}$在$[0,2]$上的平均值为______________.

解：$I=\dfrac{1}{2-0}\int_0^2 2xe^{-x}dx=1-3e^{-2}$.

2. 边长为a米的正方形薄片直立地沉浸在水中，它的一个顶点位于水平面，一对角与水面平行，则薄片一侧所受的压力为______________.

解：建立坐标系使得OB的直线方程为$y=x$，AB的直线方程为$y=\sqrt{2}a-x$，压力为

$$F=2\gamma[\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a}x\cdot xdx+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}a}^{\sqrt{2}a}x(\sqrt{2}a-x)dx]=\frac{\sqrt{2}}{2}\gamma a^3$$（牛顿）.

3. 一盛液体的容器，由曲边梯形$a\le y\le b,0\le x\le\varphi(y)$绕$y$轴旋转而成，现容器内盛满比重为$r$的液体，为计算把液体全部抽出所要做的功，应取____________为积分变量，积分元素$dw=$____________________，功$w=$____________________.

解：取y为积分变量，则$dw=\gamma\pi\varphi^2(y)(b-y)dy$，从而$w=\int_a^b\gamma\pi\varphi^2(y)(b-y)dy$.

三、计算解答

1. 设一锥形贮水池，深 15 米，口径 20 米，盛满水，今以唧筒将水吸尽，问要作多少功？

解：建立坐标系后，AB 的直线方程为 $y=-\frac{2}{3}x+10$，

功元素 $dw=x\pi y^2dx=\pi x(10-\frac{2}{3}x)^2dx$，

于是 $w=\int_0^{15}\pi x(10-\frac{2}{3}x)^2dx=1875(\text{吨米})\approx 57697.5(\text{千焦})$

2. 一底为 8 厘米，高为 6 厘米的等腰三角形片，铅直地沉没在水中，顶在上底在下且与水面平行，而顶离水面 3 厘米，试求它每面所受的压力.

解：建立坐标系后，取 x 为积分变量，变化区间为 $[3,9]$. AB 的直线方程为 $y=\frac{2}{3}x-2$，

压力元素 $dp=2xydx=2x(\frac{2}{3}x-2)dx$，

所以 $p=\int_3^9 2x(\frac{2}{3}x-2)dx=168(\text{克})=1.6464(\text{牛顿})$.

3. 用铁锤将一铁钉击入木板，设木板对铁钉的阻力与铁钉击入木板的深度成正比，在击第一次时，将铁钉击入木板 1 厘米，如果铁锤每次打击铁钉所做的功相等，问第二次击锤后，铁钉又击入多少？

解：设锤击第二次时，铁钉又击入 h 厘米，由于木板对铁钉的阻力 f 与铁钉击入木板的深度 $x(cm)$ 成正比，即 $f=kx$. 功元素 $dw=fdx=kxdx$.

击第一次时所作的功 $w_1=\int_0^1 kxdx=\frac{1}{2}k$.

击第二次时所作的功 $w_2=\int_1^{1+h} kxdx=\frac{1}{2}k(h^2+2h)$.

因为 $w_1=w_2$，所以 $\frac{1}{2}k=\frac{1}{2}k(h^2+2h)$，由 $h^2+2h-1=0$，解得 $h=-1+\sqrt{2}$.