高等数学A

第4章 无穷级数

复习课

中南大学开放式精品示范课堂高等数学建设组

第六章内容小结

1. 数项级数
   - 正项级数
   - 交错级数
   - 任意项级数

2. 幂级数
   - 幂级数的收敛半径与收敛域
   - 幂级数的和函数与数项级数的和
   - 将函数展开成Taylor级数

3. Fourier级数
   - 周期函数展开成Fourier级数
   - $[0,\pi]$上的函数展开成正(余)弦级数
   - Fourier级数的和函数

常见题型

1.将函数展开成幂级数

2. 利用已知幂级数展开式求幂级数的和函数

3. 求数项级数的和

4. 将函数展开成Fourier级数

5. 求Fourier级数的和函数

例1 将 $f(x) = x\arctan x - \ln\sqrt{1+x^2}$ 展开成麦克劳林级数.

例2 将$f(x) = \dfrac{x-1}{4-x}$展开成$(x-1)$的幂级数,并求$f^{(n)}(1)$.

例3 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{n!}x^n$ 的和函数.

例4 证明级数$\pi^2 + \dfrac{\pi^4}{3!} + \dfrac{\pi^6}{5!} + \cdots + \dfrac{\pi^{2n}}{(2n-1)!} + \cdots$收敛,并求和.

例5 将函数$f(x)=2+|x| \quad (-1\le x\le 1)$内展开成以2为周期的付氏级数，并由此求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$的和.

例6 设$f(x)=\begin{cases} x & -3\le x<0 \\ 2-\frac{2}{3}x & 0\le x\le 3 \end{cases}$,写出以6为周期的Fourier级数在[–3,3]上的和函数的表达式.

例7 证明：当$0\le x\le \pi$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n^2}=\frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi^2}{6}$.

例1 将 $f(x)=x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$ 展开成麦克劳林级数.

解 $\because f'(x)=\arctan x=\int_0^x \frac{1}{1+x^2}dx$

$$=\int_0^x[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}]dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\therefore f(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}.$$

由 $-1<x^2<1$ 得 $-1<x<1$

且当$x=\pm 1$时,级数为$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$都收敛,

$$\therefore\ f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)},\quad(-1\le x\le 1).$$

例2 将$f(x)=\dfrac{x-1}{4-x}$展开成$(x-1)$的幂级数,并求$f^{(n)}(1)$.

解

$$\because \frac{1}{4-x}=\frac{1}{3-(x-1)}=\frac{1}{3\left(1-\dfrac{x-1}{3}\right)}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-1}{3}\right)^n$$

$$\therefore \frac{x-1}{4-x}=(x-1)\cdot\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-1}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-1}{3}\right)^{n+1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{n+1}}{3^{n+1}}$$

由$-1<\dfrac{x-1}{3}<1$得$-2<x<4$

且当$x=-2$或4时$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{n+1}}{3^{n+1}}$都发散,

$$\therefore\ f(x)=\frac{x-1}{4-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{n+1}}{3^{n+1}},\qquad (-2<x<4)$$

由Taylor系数公式可得,

$$\frac{f^{(n)}(1)}{n!}=\frac{1}{3^n}$$

$$\therefore\ f^{(n)}(1)=\frac{n!}{3^n}.$$

例3 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^n$ 的和函数.

解 $\because \rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0,$

$\therefore R=+\infty$，收敛域为$(-\infty,+\infty)$.

设$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-n+n}{n!}x^n$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n-1)+n}{n!}x^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n-1)}{n!}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^n$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}$$

$$= x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$= x^2 e^x + x e^x$$

例4 证明级数$\pi^2+\frac{\pi^4}{3!}+\frac{\pi^6}{5!}+\cdots+\frac{\pi^{2n}}{(2n-1)!}+\cdots$收敛，

并求和.

解 设$S(x)=x^2+\frac{x^4}{3!}+\frac{x^6}{5!}+\cdots(|x|<+\infty)$

$$xe^x=x+x^2+\frac{x^3}{2!}+\frac{x^4}{3!}+\cdots$$

$$xe^{-x}=x-x^2+\frac{x^3}{2!}-\frac{x^4}{3!}+\cdots \qquad xe^x-xe^{-x}=2S(x)$$

$$S(x)=x\frac{e^x-e^{-x}}{2}=x\cdot\sinh x$$

$$\therefore S(\pi)=\pi\cdot\sinh\pi.$$

例5 将函数$f(x)=2+|x| \quad (-1\le x\le 1)$内展开成以2

为周期的付氏级数，并由此求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$的和.

解 $\because \quad f(x)=2+|x| \quad (-1\le x\le 1)$是偶函数,

且$-1\le x\le 1$时处处连续.

$$\therefore \quad a_0=\frac{2}{1}\int_0^1(2+x)dx=5,$$

$$a_n=\frac{2}{1}\int_0^1(2+x)\cos\frac{n\pi x}{1}dx=2\int_0^1 x\cos n\pi x dx$$

$$=\frac{2}{n\pi}\int_0^1 xd\sin n\pi x=\frac{2}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1]$$

$$=\begin{cases}0, & n=2k\\ -\dfrac{4}{n^2\pi^2}, & n=2k-1\end{cases}\quad (k=1,2,\cdots),\qquad b_n=0,$$

故 $$2+|x|=\frac{5}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}-\frac{4}{\pi^2(2k-1)^2}\cos(2k-1)\pi x$$

$$=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)\pi x}{(2k-1)^2}.\qquad (-1\le x\le 1)$$

取 $x=0$, 由上式得 $$2=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2},$$

$$\therefore \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8},$$

$$\text{而} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2},$$

$$\therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{8}\cdot\frac{4}{3}=\frac{\pi^2}{6}.$$

例6 设$f(x)=\begin{cases} x & -3\le x<0 \\ 2-\dfrac{2}{3}x & 0\le x\le 3 \end{cases}$,写出以6为周期的Fourier级数在[–3,3]上的和函数的表达式.

解 $f(x)$的Fourier级数在 $x=0$ 处收敛于

$$\frac{f(0+0)+f(0-0)}{2}=\frac{2+0}{2}=1;$$

在$x=\pm3$处收敛于$\dfrac{f(-3+0)+f(3-0)}{2}=\dfrac{2-2+(-3)}{2}=-\dfrac{3}{2}$;

在$-3<x<3$与$0<x<3$时,收敛于$f(x)$.

所以所求的和函数的表达式为:

$$S(x)=\begin{cases} x, & -3<x<0 \\ 2-\dfrac{2}{3}x, & 0<x<3 \\ 1, & x=0 \\ -\dfrac{3}{2}, & x=\pm 3 \end{cases}$$

例7 证明：当$0 \le x \le \pi$时，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n^2}=\frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi^2}{6}$.

证　设 $f(x)=\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{\pi x}{2}$,

将 $f(x)$ 在$[0,\pi]$上展开成余弦级数

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2}\right)dx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{12}-\frac{\pi^3}{4}\right)=-\frac{\pi^3}{3},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2}\right)\cos n\pi dx$$

$$=\frac{2}{n\pi}[(\frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2})\sin nx\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2})\sin nx dx]$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}\int_0^{\pi}(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2})d\cos nx=\frac{2}{n^2\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{1}{n^2}.$$

$$\therefore\quad \frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2}=-\frac{\pi^2}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n^2}.\qquad (0\le x\le\pi)$$

故 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n^2}=\frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi^2}{6}.$$