



高等数学A

第5章 空间解析几何

5.6 空间曲线及其方程

中南大学开放式精品示范课堂高等数学建设组



5.6 空间曲线及其方程

5.6.1 空间曲线方程引例

5.6.2 空间曲线的一般方程

5.6.3 空间曲线的参数方程

5.6.4 空间曲线在坐标面上的投影

5.6.5 小结





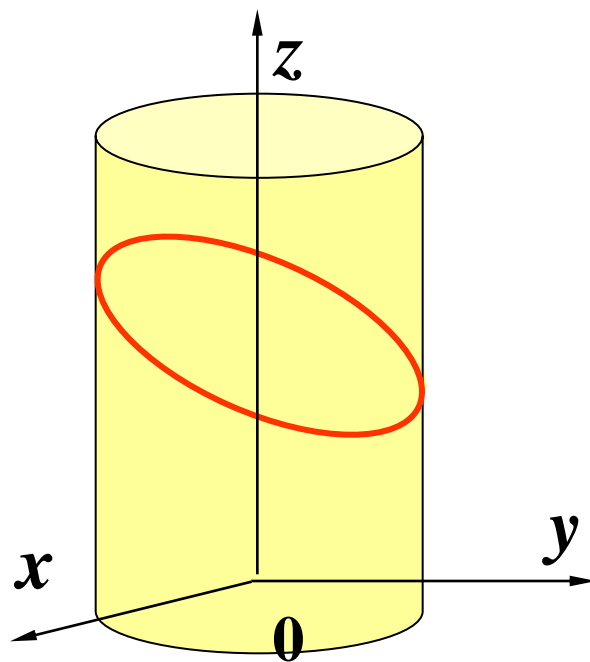
5.6.1 空间曲线及其方程引例

引例：在空间直角坐标系中，圆柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $x+y+z=2$ 的交线是什么图形？一般来说， $F(x, y, z) = 0$ ， $G(x, y, z) = 0$ 代表什么图形？

表示圆柱面与平面的交线为一个椭圆

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

一般来说，代表一条空间曲线。





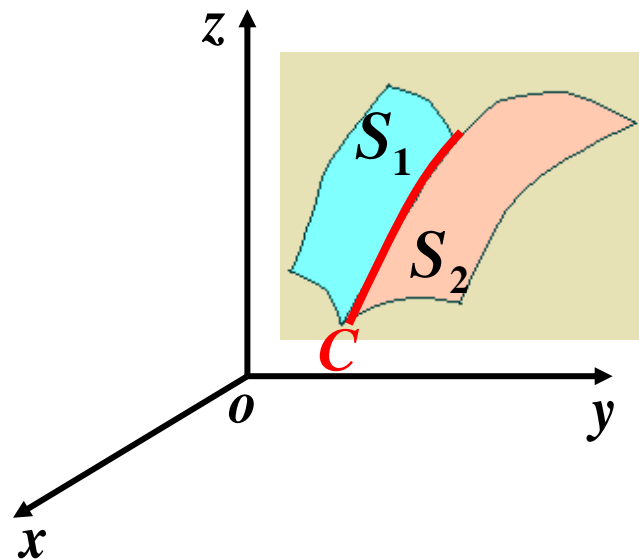
5.6.2 空间曲线的一般方程

空间曲线C可看作空间两曲面的交线.

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

空间曲线的一般方程

特点：曲线上的点都满足方程，满足方程的点都在曲线上，不在曲线上的点不能同时满足两个方程.





5.6.2 空间曲线的一般方程

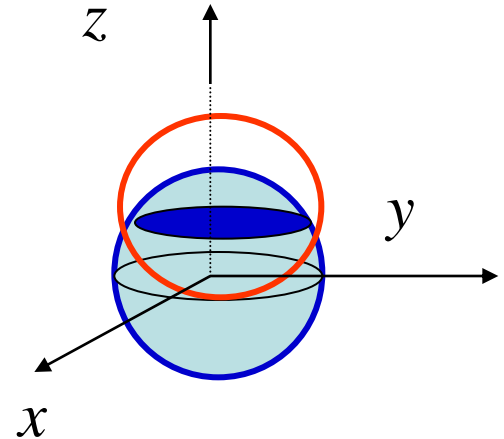
例1 方程组
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1 \end{cases}$$
 表示怎样的曲线?

解
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$$

均表示球面,

两个球面的交线为圆.





5.6.2 空间曲线的一般方程

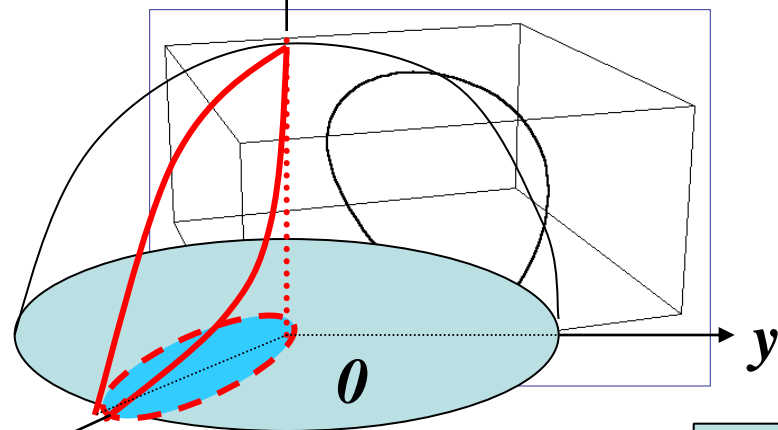
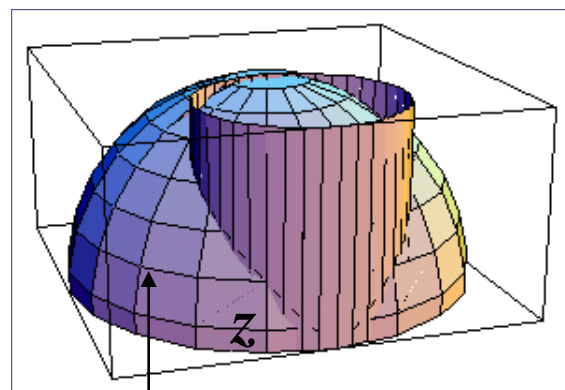
例2 方程组
$$\begin{cases} z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \\ (x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = \frac{a^2}{4} \end{cases}$$
 表示怎样的曲线?

解 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$

上半球面,

$(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$ 圆柱面,

交线如图.





5.6.3 空间曲线的参数方程

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad \text{空间曲线的参数方程}$$

当给定 $t = t_1$ 时，就得到曲线上的一个点 (x_1, y_1, z_1) ，随着参数的变化可得到曲线上的全部点。

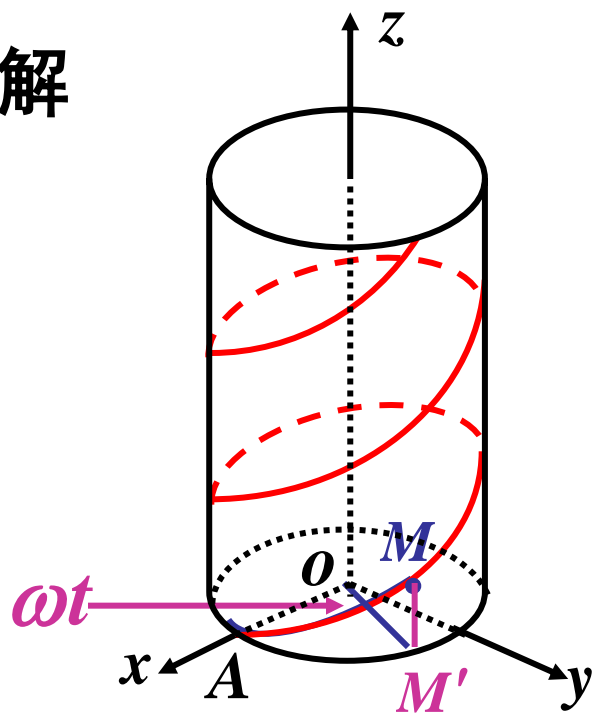




5.6.3 空间曲线的参数方程

例3 如果空间一点 M 在圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 上以角速度 ω 绕 z 轴旋转，同时又以线速度 v 沿平行于 z 轴的正方向上升（其中 ω 、 v 都是常数），那么点 M 构成的图形叫做**螺旋线**。试建立其参数方程。

解



取时间 t 为参数，动点从 A 点出发，经过 t 时间，运动到 M 点
 M 在 xoy 面的投影 $M'(x, y, 0)$

$$x = a \cos \omega t$$

$$y = a \sin \omega t$$

$$z = vt$$

螺旋线的参数方程





5.6.3 空间曲线的参数方程

螺旋线的参数方程还可以写为

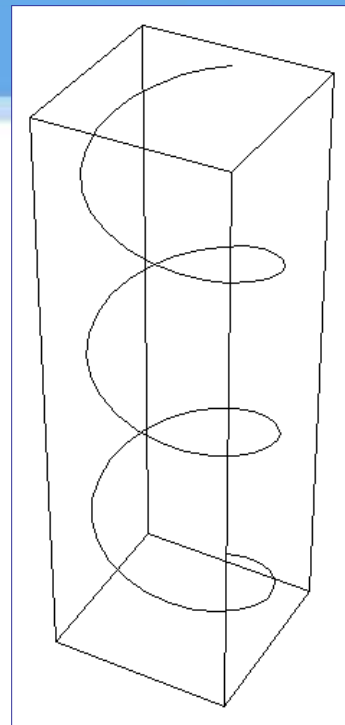
$$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = a \sin \theta \\ z = b \theta \end{cases} \quad (\theta = \omega t, \quad b = \frac{v}{\omega})$$

螺旋线的重要性质：

上升的高度与转过的角度成正比。

即 $\theta: \theta_0 \rightarrow \theta_0 + \alpha$, $z: b\theta_0 \rightarrow b\theta_0 + b\alpha$,

$\alpha = 2\pi$, 上升的高度 $h = 2b\pi$ 螺距





例4. 将下列曲线化为参数方程表示:

$$(1) \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 2x + 3z = 6 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \\ x^2 + y^2 - ax = 0 \end{cases}$$

解: (1) 根据第一方程引入参数, 得所求为

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = \frac{1}{3}(6 - 2\cos t) \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

(2) 将第二方程变形为 $(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$, 故所求为

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos t \\ y = \frac{a}{2}\sin t \\ z = a\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos t} \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$





5.6.4 空间曲线在坐标面上的投影

在讲直线与平面之关系时，曾介绍过如何求空间直线在某平面上的投影. 下面介绍一般的空间曲线在坐标面上的投影.

$$\text{设空间曲线的一般方程: } \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

消去变量 z 后得: $H(x, y) = 0$

曲线关于 xoy 的**投影柱面**

投影柱面的特征:

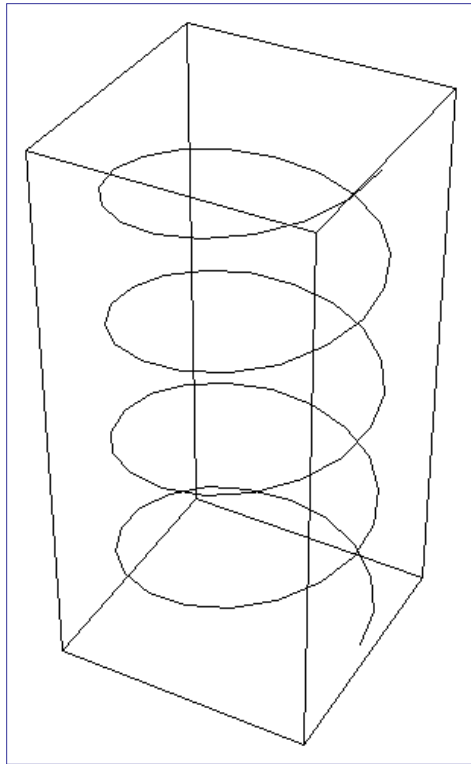
以此空间曲线为准线，垂直于所投影的坐标面.



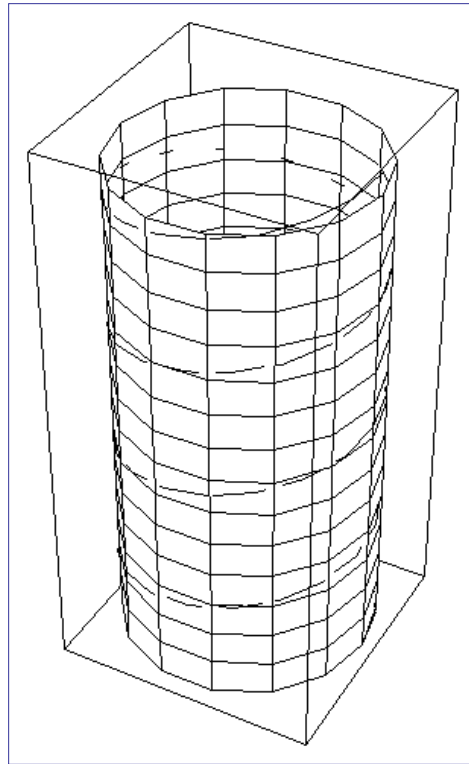
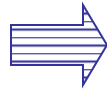


5.6.4 空间曲线在坐标面上的投影

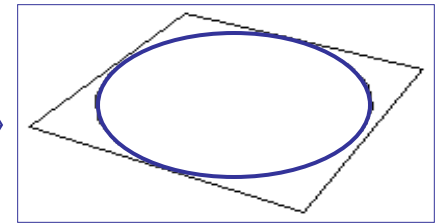
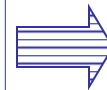
如图:投影曲线的研究过程.



空间曲线



投影柱面



投影曲线



5.6.4 空间曲线在坐标面上的投影

空间曲线在 xoy 面上的**投影曲线**

$$\begin{cases} H(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

类似地：可定义空间曲线在其他坐标面上的投影

yoz 面上的**投影曲线**, xoz 面上的**投影曲线**,

$$\begin{cases} R(y, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T(x, z) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$



5.6.4 空间曲线在坐标面上的投影

例4 求曲线
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

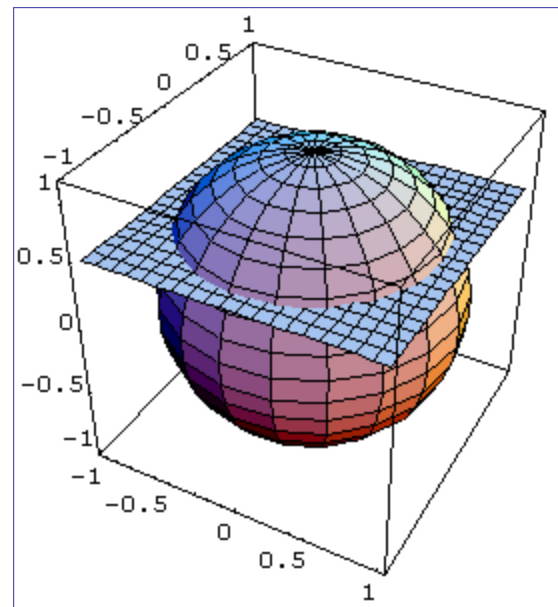
在坐标面上的投影.

解 (1) 消去变量 z 后得

$$x^2 + y^2 = \frac{3}{4},$$

在 xoy 面上的投影为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{3}{4}, \\ z = 0 \end{cases}$$





5.6.4 空间曲线在坐标面上的投影

(2) 因为曲线在平面 $z = \frac{1}{2}$ 上,

所以在 xOz 面上的投影为线段.

$$\begin{cases} z = \frac{1}{2}, & |x| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}; \\ y = 0 \end{cases}$$

(3) 同理在 yOz 面上的投影也为线段.

$$\begin{cases} z = \frac{1}{2}, & |y| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}. \\ x = 0 \end{cases}$$





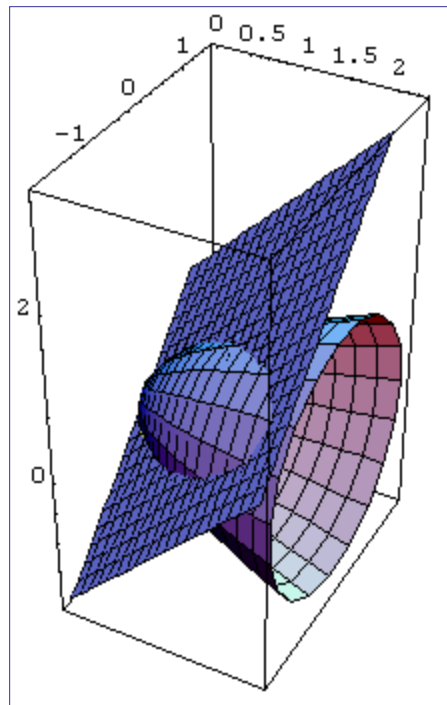
5.6.4 空间曲线在坐标面上的投影

例5 求抛物面 $y^2 + z^2 = x$ 与平面 $x + 2y - z = 0$ 的截线在三个坐标面上的投影曲线方程.

解 截线方程为

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = x \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

如图,





5.6.4 空间曲线在坐标面上的投影

(1) 消去 z 得投影
$$\begin{cases} x^2 + 5y^2 + 4xy - x = 0 \\ z = 0 \end{cases},$$

(2) 消去 y 得投影
$$\begin{cases} x^2 + 5z^2 - 2xz - 4x = 0 \\ y = 0 \end{cases},$$

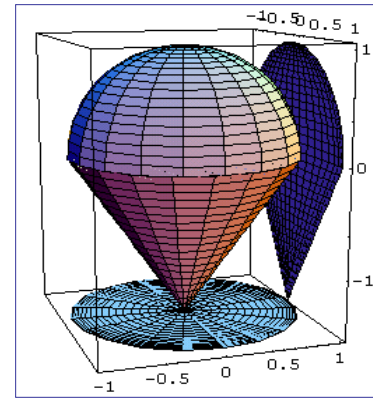
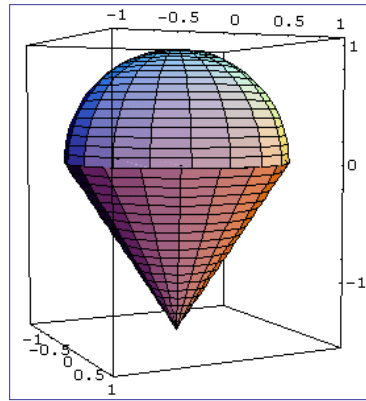
(3) 消去 x 得投影
$$\begin{cases} y^2 + z^2 + 2y - z = 0 \\ x = 0 \end{cases}.$$



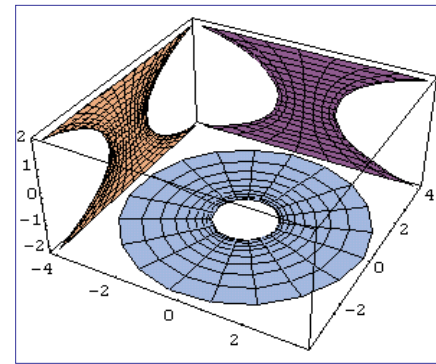
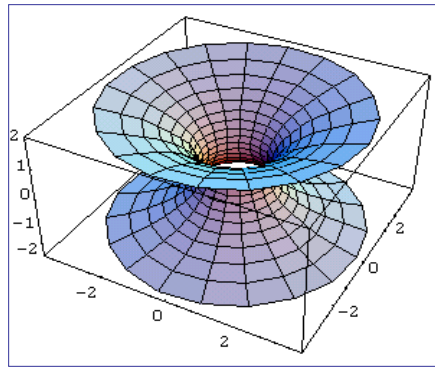
5.6.4 空间曲线在坐标面上的投影

补充：空间立体或曲面在坐标面上的投影.

空间立体



曲面





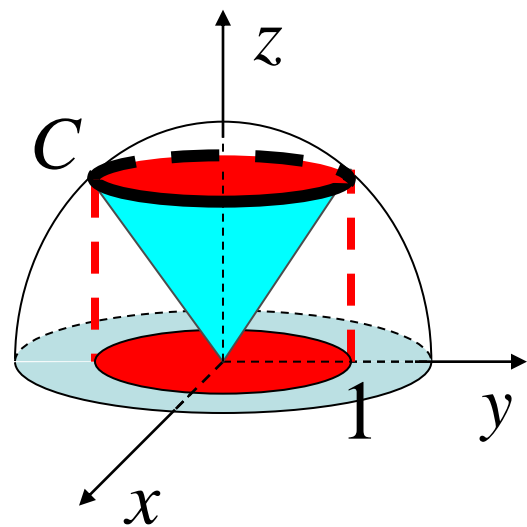
5.6.4 空间曲线在坐标面上的投影

例6 设一个立体,由上半球面 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 和 $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ 锥面所围成,求它在 xoy 面上的投影.

解 半球面和锥面的交线为

$$C: \begin{cases} z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \\ z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}, \end{cases}$$

消去 z 得投影柱面 $x^2 + y^2 = 1$,





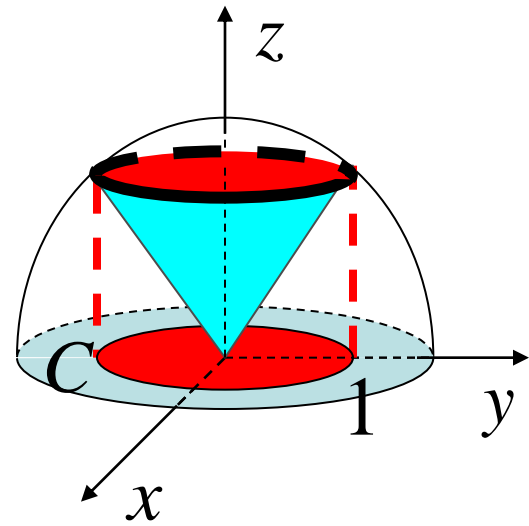
5.6.4 空间曲线在坐标面上的投影

则交线 C 在 xoy 面上的投影为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, & \text{一个圆,} \\ z = 0. \end{cases}$$

\therefore 所求立体在 xoy 面上的投影为

$$x^2 + y^2 \leq 1, z = 0.$$





5.6.5 空间曲线小结

空间曲线的一般方程、参数方程.

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

空间曲线在坐标面上的投影.

$$\begin{cases} H(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} R(y, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} T(x, z) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$





思考题

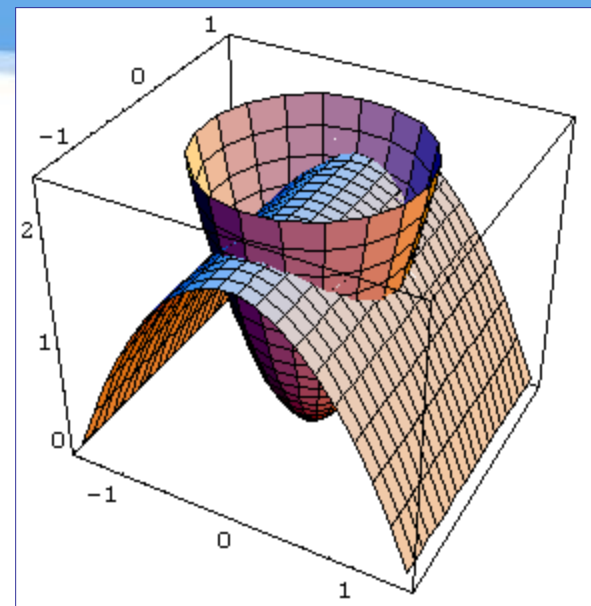
求椭圆抛物面 $2y^2 + x^2 = z$ 与抛物柱面 $2 - x^2 = z$ 的交线关于 xoy 面的投影柱面和
在 xoy 面上的投影曲线方程.





思考题解答

交线方程为
$$\begin{cases} 2y^2 + x^2 = z \\ 2 - x^2 = z \end{cases},$$



消去 z 得投影柱面 $x^2 + y^2 = 1$,

在 xoy 面上的投影为
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}.$$





1.6—1.7 曲面及其方程 空间曲线及其方程

一、填空:

1. (1) $x^2 + y^2 = 1$ 在平面及空间中分别表示 _____, _____.

(2) $x + y = 1$ 在平面及空间中分别表示 _____, _____.

2. 将曲线 $\begin{cases} y^2 + \frac{z^2}{4} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周生成的旋转曲面方程为 _____.

3. $y + z = 1$ 与 $z = x^2 + y^2$ 的交线在 xoy 面上的投影方程为 _____.

4. (1) $\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ 表示的曲线为: _____ 上的椭圆.



(2) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ z = 1 \end{cases}$ 的参数方程为 _____

(3) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x = y \end{cases}$ 的参数方程为 _____ 或 _____



二、一动点 M 到平面 $y - z = 0$ 的距离等于它到 x 轴的距离，又 M 点到 $A(0, -1, 2)$ 的距离为 1，求动点 M 的轨迹方程。





三、将 xoy 坐标面上的双曲线 $4x^2 - 9y^2 = 36$ 分别绕 x 轴及 y 轴旋转一周，求所生成的旋转曲面的方程。





四、求通过曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + 4z^2 = 1 \\ x^2 = y^2 + z^2 \end{cases}$ ，且母线平行于 z 轴的柱面方程. ↵

解

五、求旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ ($0 \leq z \leq 4$) 在三个坐标面上的投影. ↵

1.8 二次曲面*

一、指出下列方程表示的曲面类型：*

1. $y^2 - z^2 = 2x$

2. $y^2 + x^2 = 2y$

3. $z = x^2 + y^2 + 2$ *

4. $3x^2 + 4y^2 = 5z^2 - 1$

5. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$

6. $3x^2 - 4y^2 = 5z^2 - 1$ *

7. $z^2 = x^2 + y^2$

8. $x^2 + y^2 + z^2 = 4x$

9. $4x^2 + y^2 = z$ *

解： ()

*

二、试就 k 讨论下列方程表示何种二次曲面：*

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = k$

2. $x^2 + ky^2 = 2z$ *

自测题 (第一章)

一、填空题 (每小题 4 分, 共 20 分):

1. 设 $\vec{a} = (-2, 3, -4)$, $\vec{b} = (k, 1, -1)$, 则当 $k =$ _____ 时, \vec{a} 与 \vec{b} 垂直.

2. 设 $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, 且 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $|(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})| =$ _____.

3. 若 $\vec{a} = (1, 2, 4)$, $\vec{b} = (2, -2, 1)$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ _____, $\vec{a} \times \vec{b} =$ _____.

4. 若 $\vec{a} = (1, 2, -1)$, $\vec{b} = (3, -2, 4)$, 则 $Prj_{\vec{a}} \vec{b} =$ _____, $Prj_{\vec{b}} \vec{a} =$ _____.

5. 若 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, $\vec{a} \times \vec{c} = 0$, 则 $\vec{b} \cdot \vec{c} =$ _____.



二、选择题 (每小题 4 分, 共 20 分) *

1. 设 $\vec{a} = (1, 3, -1)$, $\vec{b} = (3, 2, 3)$, 且已知 $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ 与 Oz 轴垂直, 则必有 () *

- (A) $\lambda = \mu$ (B) $\lambda = -\mu$ (C) $\lambda = 2\mu$ (D) $\lambda = 3\mu$ *

2. 设三向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 满足关系 $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$, 则 $\vec{a} \times \vec{b} =$ () *

- (A) $\vec{c} \times \vec{b}$ (B) $\vec{b} \times \vec{c}$ (C) $\vec{a} \times \vec{c}$ (D) $\vec{b} \times \vec{a}$ *

3. 向量 $\vec{a} + 2\vec{b}$ 垂直于 $\vec{a} - 4\vec{b}$, 向量 $\vec{a} + 4\vec{b}$ 垂直于 $\vec{a} - 2\vec{b}$, 则 \vec{a} 与 \vec{b} 之间的夹角为 () *

- (A) 0 (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) $\frac{\pi}{6}$ (D) $\frac{\pi}{3}$ *

4. 方程 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{3} = 0$ 表示旋转曲面, 它的旋转轴是 () *

- (A) x 轴 (B) y 轴 (C) z 轴 (D) 直线 $x = y = z$ *





5. 已知直线方程 $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ 中, 所有系数都不等于 0, 且 $\frac{B_1}{D_1} = \frac{B_2}{D_2}$,

则该直线 ()

- (A) 平行于 y 轴 (B) 与 y 轴相交 (C) 通过原点 (D) 与 y 轴重合

答案提示:





三(10分)已知 $\vec{a} = (1, 0, 0)$, $\vec{b} = (0, 1, -2)$, $\vec{c} = (2, -2, 1)$, 求一单位向量 \vec{e} , 使 $\vec{e} \perp \vec{c}$, 且 \vec{e} 与 \vec{a}, \vec{b} 共面.

+



四. (10分)点 $P(2, -1, -1)$ 关于平面 π 的对称点为 $P_1(-2, 3, 9)$, 求平面 π 的方程.

五. (12分)一平面与原点的距离为 $\frac{12}{7}$, 且在三坐标轴上的截距之比为 $a:b:c=1:2:3$, 试求这平面方程.

解



六、(12 分)空间一动点到 Ox 与 Oy 轴的距离平方和为 4, 试求轨迹方程, 并指出是什么曲面.





七、(16分)求点 $A(3, -1, 1)$ 到平面 $\pi: 2x - y + 3z - 4 = 0$ 的距离及关于此平面对称点的坐标

