第一章主要内容

一 、极限

1 定义：

2 运算法则：（1）四则运算（2）复合函数

3 性质：（1）有界性 （2）唯一性 （3）保号性

（4）有界函数与无穷小量的乘积是无穷小量。

（5）$\lim f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$，

其中$\lim \alpha(x)=0$。

4 无穷小量的阶：

5 求极限的方法：

(1) 定义，运算法则及性质；

(2) 夹逼定理；

(3) 单调有界原理（求数列极限）；

(4) 单侧极限与极限的关系；

(5) 两个重要极限：

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n}=e}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e}$$

(6)　利用等价无穷小代换；

(7)　罗必达法则（注意应用条件）；

(8)　利用泰勒公式。

常用的等价无穷小量：　　当 $x \to 0$ 时，

$\sin x \sim x$，　$\tan x \sim x$，　$\ln(1+x) \sim x$

$\arcsin x \sim x$，　$\arctan x \sim x$，　$e^x - 1 \sim x$,

$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$,　$a^x - 1 \sim x \ln x$

$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$，

二 、连续性

1　定义： $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$； $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$。

2　性质：　（1）初等函数在其定义域内是连续的。

（2）连续等价与左右连续且相等。

3　间断点的类型：　（1）第一类间断点；

（2）第二类间断点。

4　闭区间上连续函数的性质：

（1）　零点存在定理；

（2）　介值定理；

（3）　最大值，最小值定理；

第二章主要内容

1、导数的定义

$$y'\Big|_{x=x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x};$$

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x};$$

函数$f(x)$在点x_0处可导$\Leftrightarrow$左导数$f'_-(x_0)$和右导数$f'_+(x_0)$都存在且相等.

2、基本导数公式（常数和基本初等函数的导数公式）

$(C)' = 0$

$(x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)' = \sec^2 x$

$(\cot x)' = -\csc^2 x$

$(\sec x)' = \sec x tgx$

$(\csc x)' = -\csc x ctgx$

$(a^x)' = a^x \ln a$

$(e^x)' = e^x$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\text{arccot}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

3、求导法则

(1) 函数的和、差、积、商的求导法则

设 $u=u(x), v=v(x)$ 可导，则

（1）$(u \pm v)' = u' \pm v'$，　（2）$(cu)' = cu'$（c是常数），

（3）$(uv)' = u'v + uv'$，　（4）$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2} \ (v \neq 0)$.

(2) 反函数的求导法则

如果函数 $x=\varphi(y)$ 的反函数为 $y=f(x)$，则有

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

(3) 复合函数的求导法则

设 $y = f(u)$, 而 $u = \varphi(x)$ 则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 的导数为 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$ 或 $y'(x) = f'(u) \cdot \varphi'(x)$.

(4) 对数求导法

先在方程两边取对数,然后利用隐函数的求导方法求出导数.

适用范围:

多个函数相乘和幂指函数 $u(x)^{v(x)}$ 的情形.

(5) 隐函数求导法则

用复合函数求导法则直接对方程两边求导.

(6) 参变量函数的求导法则

若参数方程$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$确定$y$与$x$间的函数关系,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)};\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}.$$

注意: 1、熟记求导公式;

2、复合函数求导要熟练掌握;

3、求分段函数在分段点处得到是要用定义。

4、高阶导数 (二阶和二阶以上的导数统称为高阶导数)

二阶导数 $f''(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x},$

一般地，函数 $f(x)$ 的 $n-1$ 阶导数的导数称为函数 $f(x)$ 的 n 阶导数，记作 $f^{(n)}(x), y^{(n)}, \dfrac{d^n y}{dx^n}$ 或 $\dfrac{d^n f(x)}{dx^n}$.

莱布尼兹公式.

$$(u\cdot v)^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v''$$

$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)}+\cdots+uv^{(n)}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$$

常用的 高阶导数公式

(1) $(a^x)^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a \quad (a > 0)$ $\qquad (e^x)^{(n)} = e^x$

(2) $(\sin kx)^{(n)} = k^n \sin(kx + n \cdot \frac{\pi}{2})$

(3) $(\cos kx)^{(n)} = k^n \cos(kx + n \cdot \frac{\pi}{2})$

(4) $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$ $\qquad (x^n)^{(n)} = n!$

(5) $(\frac{1}{x})^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$ $\qquad (\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$

$(\frac{1}{x \pm 1})^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(x \pm 1)^{n+1}}$ $\qquad (\frac{1}{1-x})^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

5、微分的定义

定义 设函数$y = f(x)$在某区间内有定义，x_0及$x_0 + \Delta x$在这区间内，如果

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$$

成立（其中A是与Δx无关的常数），则称函数$y = f(x)$在点x_0可微，并且称$A \cdot \Delta x$为函数$y = f(x)$在点x_0相应于自变量增量Δx的微分，记作$dy\big|_{x=x_0}$或$df(x_0)$，即

$$dy\big|_{x=x_0} = A \cdot \Delta x.$$

微分 dy 叫做函数增量 Δy 的线性主部.（微分的实质）

6、导数与微分的关系

定理 函数 $f(x)$ 在点 x_0 可微的充要条件是函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，且 $A = f'(x_0)$.

7、 微分的求法

$$\boxed{dy = f'(x)dx}$$

求法： 计算函数的导数，乘以自变量的微分.

8、 微分的基本法则

函数和、差、积、商的微分法则

$$d(u \pm v) = du \pm dv \qquad d(Cu) = Cdu$$

$$d(uv) = vdu + udv \qquad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

微分形式的不变性

无论 x 是自变量还是中间变量，函数 $y = f(x)$ 的微分形式总是 $\boxed{dy = f'(x)dx}$

基本初等函数的微分公式

$$d(C)=0 \qquad d(x^{\mu})=\mu x^{\mu-1}dx$$

$$d(\sin x)=\cos x dx \qquad d(\cos x)=-\sin x dx$$

$$d(\tan x)=\sec^2 x dx \qquad d(\cot x)=-\csc^2 x dx$$

$$d(\sec x)=\sec x\tan x dx \qquad d(\csc x)=-\csc x\cot x dx$$

$$d(a^x)=a^x\ln a dx \qquad d(e^x)=e^x dx$$

$$d(\log_a x)=\frac{1}{x\ln a}dx \qquad d(\ln x)=\frac{1}{x}dx$$

$$d(\arcsin x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \qquad d(\arccos x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$d(\arctan x)=\frac{1}{1+x^2}dx \qquad d(\text{arccot}\, x)=-\frac{1}{1+x^2}dx$$

9、导数和微分的求法

1. 正确使用导数及微分公式和法则

2. 熟练掌握求导方法和技巧

(1) 求分段函数的导数

注意讨论分界点处左右导数是否存在和相等

(2) 隐函数求导法 $\longrightarrow$ 对数微分法

(3) 参数方程求导法 $\xleftarrow{\text{转化}}$ 极坐标方程求导

(4) 复合函数求导法 (可利用微分形式不变性)

(5) 高阶导数的求法 —— 逐次求导归纳；

间接求导法; 利用莱布尼兹公式.

第三章内容小结:

一、微分中值定理:

罗尔(Rolle)中值定理:

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)$，则在(a,b)内至少存在一点ξ$(a<\xi<b)$，使得： $f'(\xi)=0$

拉格朗日(Lagrange)中值定理:

若 $f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，则在(a,b)内至少存在一点ξ$(a<\xi<b)$，使得： $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

柯西(Cauchy)中值定理:

设 $f(x)$和$g(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且 $g'(x)$在(a,b)内每一点处均不为零，则在(a,b)内至少有一点ξ$(a<\xi<b)$，使得: $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$。

二、洛比达法则: 注意应用的条件

三、泰勒公式：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ (ξ 在 x_0 与 x 之间)

或 $R_n(x)=o((x-x_0)^n)$

麦克劳林(Maclaurin)公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad (0<\theta<1)$$

——带拉格朗日余项的麦克劳林公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$+o(x^n) \qquad (x\to 0)$$

——带佩亚诺余项的麦克劳林公式

常用函数的麦克劳林公式　　当 $x \to 0$ 时

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots$$

$$+ \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

四、导数的应用

1 函数单调性的判定法：

若 $f'(x)>0$，则 $y=f(x)$ 单调增加；

若 $f'(x)<0$，则 $y=f(x)$ 单调减少.

2 函数极值的判定法

定理1（第一充分条件）：

(1) 若 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时， $f'(x)>0$； $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$在x_0处取得极大值.

(2) 若 $x\in(x_0-\delta,x_0)$时， $f'(x)<0$； $x\in(x_0,x_0+\delta)$时，$f'(x)>0$；则 $f(x)$在x_0处取得极小值.

(3) 若当$x\in(x_0-\delta,x_0)$及$x\in(x_0,x_0+\delta)$时， $f'(x)$的符号相同，则 $f(x)$在x_0处无极值.

定理2(第二充分条件)

设 $f(x)$ 在 x_0 处具有二阶导数,且 $f'(x_0)=0$,
$f''(x_0)\neq 0$, 则

(1) 当 $f''(x_0)<0$时, 函数 $f(x)$在x_0处取得极大值;

(2) 当 $f''(x_0)>0$时, 函数 $f(x)$在x_0处取得极小值。

3 求极值的步骤:

(1) 求导数 $f'(x)$;

(2) 求驻点, 即方程 $f'(x)=0$ 的根;及不可导点。

(3) 检查 $f'(x)$ 在驻点及不可导点左右 的正负号

或 $f''(x)$ 在该点的符号,判断极值点;

(4) 求极值.

4 最大值、最小值问题

求最值的步骤:

（1）求驻点和不可导点;

（2）求区间端点及驻点和不可导点的函数值， 比较大小，最大的就是最大值，最小的就是最小值。

实际问题求最值: （1）建立目标函数;

（2）求最值;

注意: 若目标函数只有唯一驻 点，则该点的数值即为所求的最大值（或 最小值）.

5 曲线的凹凸与拐点

（1）凹凸性的定义、拐点的定义：

（2）凹凸性的判别：

设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内具有二阶导数，若在(a,b)内

(1) $f''(x)>0$，则 $f(x)$ 在$[a,b]$上的图形是凹的；

(2) $f''(x)<0$，则 $f(x)$ 在$[a,b]$上的图形是凸的；

（3）求拐点的步骤：

（1）求出 $f''(x)=0$的所有零点；

（2）求出 $f''(x)$不存在的点（但$f(x)$在此点有定义)；

（3）考查$f(x)$在这些点左右的凹凸性。

6 曲率： 曲率 $k=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$. 曲率半径 $\rho=\dfrac{1}{k}$,

7 渐近线：

(1) 水平渐近线：

如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$ (b 为常数)

那么 $y=b$ 就是 $y=f(x)$ 的一条水平渐近线.

（2）斜渐近线

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a,\qquad \lim_{x\to\infty}[f(x)-ax]=b.$$

那么 $y=ax+b$ 就是曲线 $y=f(x)$ 的一条斜渐近线.

8、函数作图的步骤

第一步 确定函数$y = f(x)$的定义域，间断点。对函数进行奇偶性、周期性等性态的讨论；

第二步 求出$f'(x) = 0$的点和$f'(x)$不存在的点，即求出$f(x)$的所有可能的极值点；

第三步 求出$f''(x) = 0$的点和$f''(x)$不存在的点，即求出$f(x)$的所有可能的拐点；

第四步 列表，判断单调区间，凹凸区间，极值点，拐点等；

第五步 求曲线的渐近线；

第六步 必要时，定出曲线的某些特殊点，如截距等；

第七步 作图。

9 证明不等式常用的方法：

1．　利用单调性、极值、最值；

2．　利用拉格朗日中值定理；

3．　利用泰勒公式（带拉格朗日余项）；

4．　利用函数凹凸性的定义。

第四章内容小结

1、不定积分的概念：$\int f(x)dx = F(x) + C$;

2、不定积分的计算：

第一换元法（凑微分法）；

第二换元法（变量替换法）；

分部积分法。

常用的凑微分公式:

$$dx=\frac{1}{a}d(ax+b)\,;\quad x^{n}dx=\frac{1}{n+1}dx^{n+1};$$

$$\frac{1}{x}dx=d(\ln x);\quad \frac{1}{\sqrt{x}}dx=2d\sqrt{x};\quad \frac{1}{x^{2}}dx=-d(\frac{1}{x})$$

$$\cos xdx=d\sin x;\quad \sin xdx=-d\cos x$$

$$\sec^{2}xdx=d\tan x;\quad \csc^{2}xdx=-d\cot x$$

$$\frac{1}{1+x^{2}}dx=d\arctan x;\quad \frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}dx=d\arcsin x$$

$$\left(1+\frac{1}{x^{2}}\right)dx=d(x-\frac{1}{x});\quad e^{x}dx=de^{x}$$

基本积分表

(1) $\int k dx = kx + C \quad (k\text{是常数})$

(2) $\int x^{\mu} dx = \dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1);$

特别地 $\int \dfrac{dx}{x^2} = -\dfrac{1}{x} + C, \quad \int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C,$

(3) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C;$

(4) $\int \cos x dx = \sin x + C;$

(5) $\int \sin x dx = -\cos x + C;$

(6) $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C;$

(7) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C;$

(8) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x dx = \tan x + C;$

(9) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C;$

(10) $\int e^x dx = e^x + C;$ (11) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$

(12) $\int shx\, dx = ch\, x + C;$ (13) $\int chxdx = shx + C;$

(14) $\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$;

(15) $\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$;

(16) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$.

第五章内容小结

1、定积分的概念：

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \;,\; \lambda = \max_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}, \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

2、定积分的几何意义： 曲边梯形的面积。

3、性质： 线性性质；区间可加性；不等式的性质；

估值定理；积分中值定理

4、 Newton-Leibniz 公式：

$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

5、 变上限积分：

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad \Phi'(x) = f(x)$$

推广： 若 $\Phi(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt$，则

$$\Phi'(x) = f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x).$$

6、定积分计算法：换元法与分部积分法；

注意：被积函数带绝对值或被积函数是分段函数时定积分的计算积分。

一些特殊积分：

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_{0}^{a} f(x)dx, & f(x)\text{偶函数} \\ 0, & f(x)\text{奇函数} \end{cases};$$

$$f(x+T) = f(x) \Rightarrow \int_{0}^{nT} f(x)dx = n\int_{0}^{T} f(x)dx;$$

7、定积分应用

(1) 平面图形的面积

(2) 体积：① 旋转体的体积(切片法和柱壳法)；

② 已知平行截面的面积求立体的体积。

(3) 平面曲线的弧长

(4) 变力所作的功

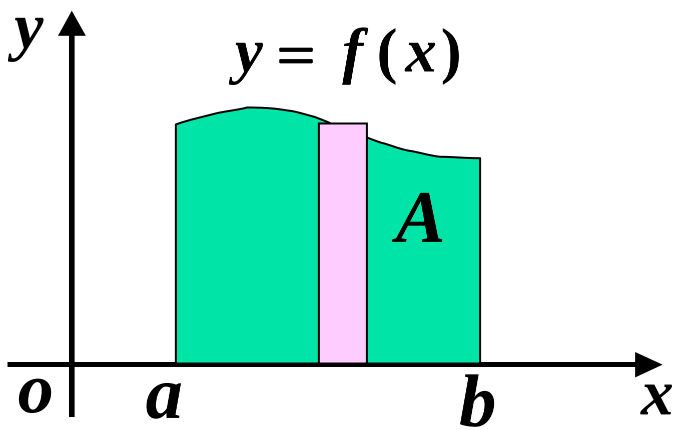
(5) 水的侧压力

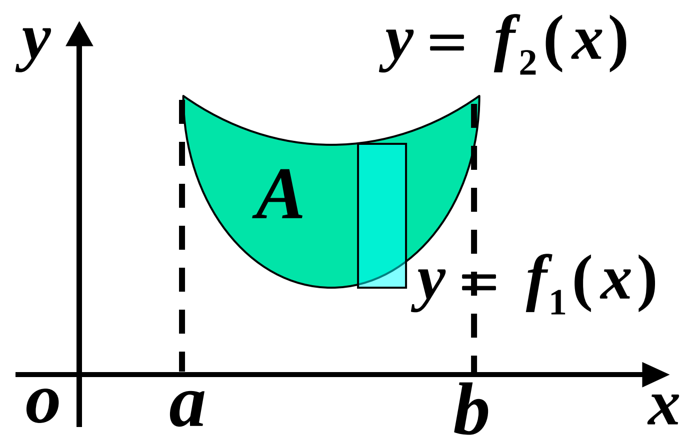
(6) 引力

定积分应用的常用公式

(1)　平面图形的面积

直角坐标情形





$$A=\int_a^b f(x)dx \qquad A=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]dx$$

参数方程所表示的函数

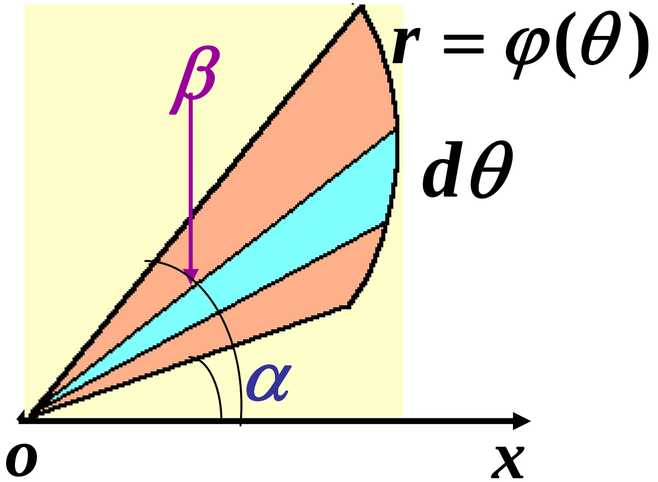
如果曲边梯形的曲边为参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$

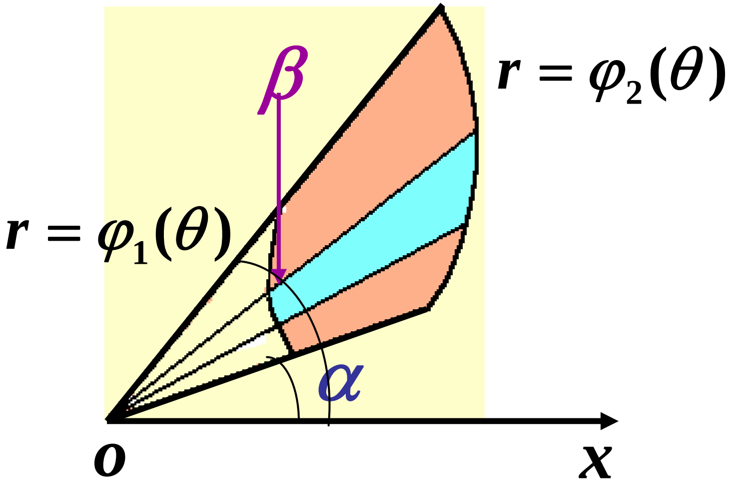
曲边梯形的面积 $A = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\varphi'(t)dt$

（其中t_1和t_2对应曲线起点与终点的参数值）

在$[t_1,t_2]$（或$[t_2,t_1]$）上$x = \varphi(t)$具有连续导数，$y = \psi(t)$连续.

极坐标情形

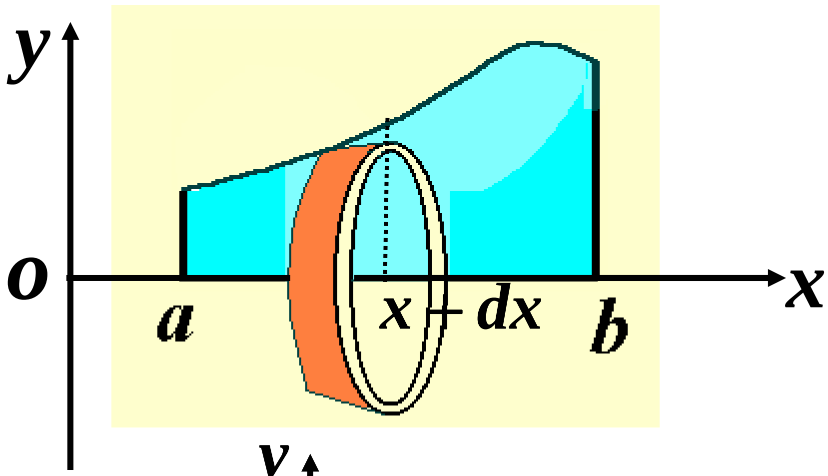




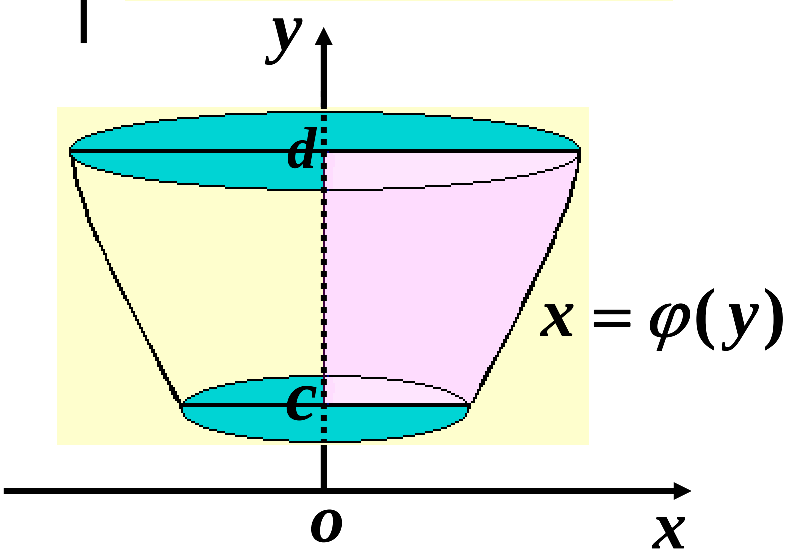
$$A=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[\varphi(\theta)]^2 d\theta$$

$$A=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[\varphi_2^2(\theta)-\varphi_1^2(\theta)]d\theta$$

(2) 旋转体的体积

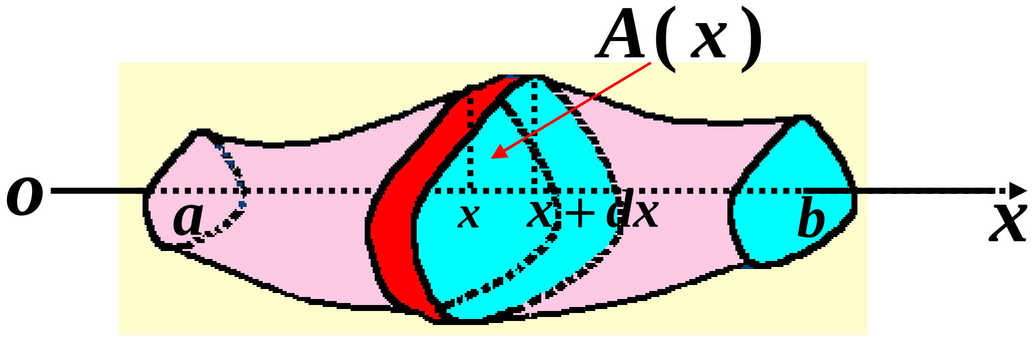


$$V=\int_a^b \pi[f(x)]^2 dx$$



$$V=\int_c^d \pi[\varphi(y)]^2 dy$$

平行截面面积为已知的立体的体积

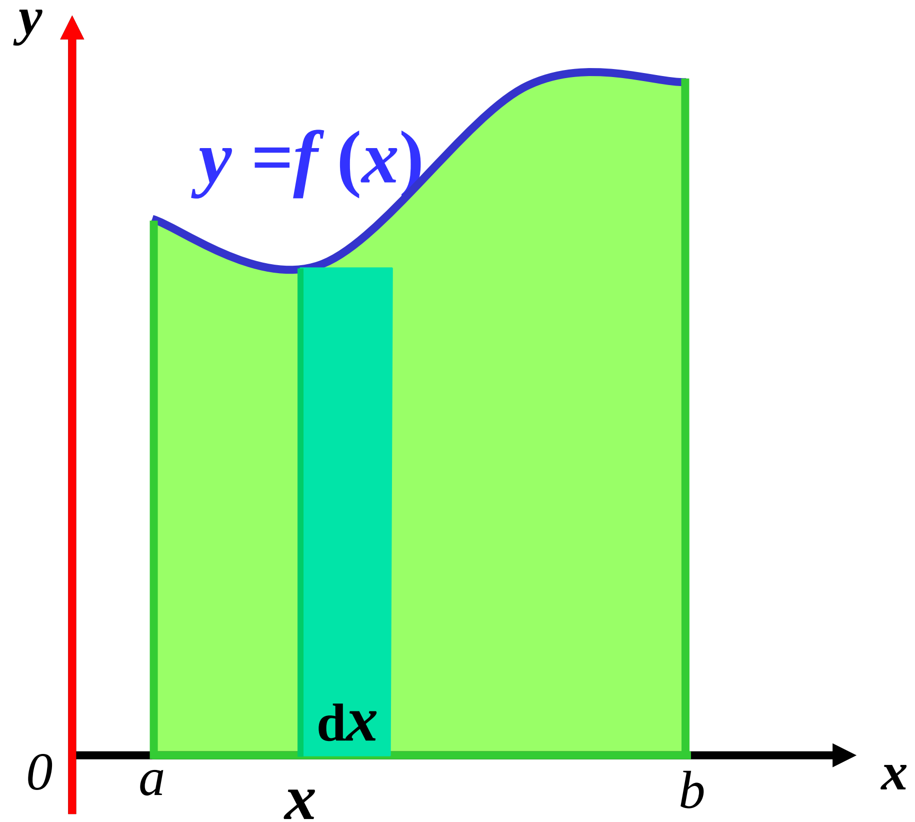


$$V=\int_a^b A(x)dx$$

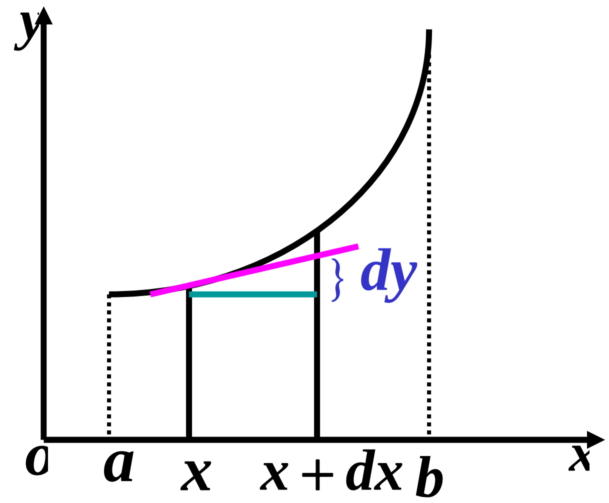
求旋转体体积— 柱壳法

曲边梯形 $y=f(x)$， $x=a, x=b, y=0$ 绕 y 轴旋转

$$V=2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$$



(3)　平面曲线的弧长



A．曲线弧为 $y = f(x)$

弧长　$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx$

B．曲线弧为 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$　$(\alpha \le t \le \beta)$

其中$\varphi(t), \psi(t)$在$[\alpha, \beta]$上具有连续导数

弧长　$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt$

C．曲线弧为 $r = r(\theta)$　$(\alpha \le \theta \le \beta)$

弧长 $s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\,d\theta$

第六章内容小结

1、一阶微分方程的解法

(1) 可分离变量的微分方程

形如 $g(y)dy = f(x)dx$

解法 $\int g(y)dy = \int f(x)dx$

分离变量法

(2) 齐次方程 形如 $\dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$

解法 作变量代换 $u = \dfrac{y}{x}$

(3) 可化为齐次的方程

形如 $\dfrac{dy}{dx}=f\left(\dfrac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$, 其中 $\dfrac{a}{a_1}\neq\dfrac{b}{b_1}$

当 $c=c_1=0$ 时, 为齐次方程. 否则为非齐次方程.

解法 令 $x=X-x_0$, $y=Y-y_0$, 化为齐次方程.

其中 x_0, y_0 是方程 $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a_1x+b_1y+c_1=0 \end{cases}$ 的根。

(4) 形如 $\dfrac{dy}{dx}=f(ax+by+c)$ a,b,c 是常数。

解法 令 $u=ax+by+c$

(5) 一阶线性微分方程

形如 $\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$

当$Q(x)\equiv 0$, 上方程称为齐次的.

当$Q(x)\not\equiv 0$, 上方程称为非齐次的.

解法 齐次方程的通解为 $y=Ce^{-\int P(x)dx}$.

非齐次微分方程的通解为

$$y=[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C]e^{-\int P(x)dx}$$

(6) 伯努利(Bernoulli)方程

形如 $$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^{\alpha}$$

当$\alpha=0,1$时，方程为线性微分方程.

当$\alpha\neq 0,1$时，方程为非线性微分方程.

解法　令$z=y^{1-\alpha}$,

$$y^{1-\alpha}=z$$

$$=e^{-\int(1-\alpha)P(x)dx}\left(\int Q(x)(1-\alpha)e^{\int(1-\alpha)P(x)dx}dx+C\right).$$

2、可降阶的高阶微分方程的解法

(1) $y^{(n)} = f(x)$ 型

解法　接连积分n次，得通解.

(2) $y'' = f(x, y')$ 型　特点　不显含未知函数 y.

解法　令 $y' = P(x)$,　$y'' = P'$,

代入原方程, 得　$P' = f(x, P(x))$.

(3) $y'' = f(y, y')$ 型　特点　不显含自变量 x.

解法　令 $y' = P(y)$,　$y'' = P\dfrac{dp}{dy}$,

代入原方程, 得　$P\dfrac{dp}{dy} = f(y, P)$.

3、二阶常系数齐次线性方程解法

形如 $y^{(n)} + P_1 y^{(n-1)} + \cdots + P_{n-1} y' + P_n y = f(x)$

n 阶常系数线性微分方程

$y'' + py' + qy = 0$ 二阶常系数齐次线性方程

$y'' + py' + qy = f(x)$ 二阶常系数非齐次线性方程

解法 由常系数齐次线性方程的特征方程的根确定其通解的方法称为特征方程法.

$$y'' + py' + qy = 0$$

特征方程为 $r^2 + pr + q = 0$

特征根的情况	通解的表达式
实根 $r_1 \neq r_2$	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
实根 $r_1 = r_2$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_2 x}$
复根 $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

推广：n 阶常系数齐次线性方程解法

$$y^{(n)}+P_1y^{(n-1)}+\cdots+P_{n-1}y'+P_ny=0$$

特征方程为 $r^n+P_1r^{n-1}+\cdots+P_{n-1}r+P_n=0$

特征方程的根	通解中的对应项
若是k重根r	$(C_0+C_1x+\cdots+C_{k-1}x^{k-1})e^{rx}$
若是k重共轭复根$\alpha\pm i\beta$	$[(C_0+C_1x+\cdots+C_{k-1}x^{k-1})\cos\beta x$ $+(D_0+D_1x+\cdots+D_{k-1}x^{k-1})\sin\beta x]e^{\alpha x}$

4、二阶常系数非齐次线性微分方程解法

$y'' + py' + qy = f(x)$　二阶常系数非齐次线性方程

解法　待定系数法.

(1)　$f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$ 型

设 $\bar{y} = x^k e^{\lambda x} Q_m(x)$，　$k = \begin{cases} 0 & \lambda\text{不是根} \\ 1 & \lambda\text{是单根} \\ 2 & \lambda\text{是重根} \end{cases}$，

(2) $f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$型

设 $\overline{y}=x^k e^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}(x)\sin\omega x]$,

其中 $R_m^{(1)}(x),R_m^{(2)}(x)$是$m$次多项式， $m=\max\{l,n\}$

$$k=\begin{cases}0 & \lambda\pm i\omega \text{ 不是特征方程的根时；}\\ 1 & \lambda\pm i\omega \text{ 是特征方程的单根时．}\end{cases}$$

5、欧拉方程

形如 $$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+px\frac{dy}{dx}+qy=f(x)$$

的方程称为欧拉方程，其中 p,q 是常数。

作变量变换 $x=e^t$ 或 $t=\ln x$,

则 $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right),$$

代入原方程得 $$\frac{d^2y}{dt^2}+(p-1)\frac{dy}{dt}+qy=f(e^t)$$

6、一阶线性微分方程组：消元法；

7、解微分方程应用题的方法和步骤

(1) 找出事物的共性及可贯穿于全过程的规律列方程.

常用的方法:

1) 根据几何关系列方程;

2) 根据物理规律列方程;

（1） 比例关系;

（2）牛顿第二定律;

3) 利用微元法列方程;

(2) 利用反映事物个性的特殊状态确定定解条件.

确定定解条件（个性）$\begin{cases} \text{初始条件} \\ \text{边界条件} \\ \text{可能还要衔接条件} \end{cases}$

(3) 求通解, 并根据定解条件确定特解.

(4) 分析解所包含的实际意义