第六讲 对数与对数函数

KE QIAN XUE SHENG DU YU CE

课前学生读与测

读　知识与方法梳理

1．对数的概念及运算性质

(1)对数的概念

如果$a^b=N(a>0，a\neq 1)$，那么b叫做以a为底N的对数，记$\underline{\log_a N=b(a>0，a\neq 1)}$.

以10为底的对数叫做常用对数，记作$\underline{\lg N}$.以无理数$e=2.71828\cdots$为底的对数叫做自然对数，记作$\underline{\ln N}$.

(2)对数的性质

①__零与负数__没有对数；②$\log_a 1=\underline{0}$；③$\log_a a=\underline{1}$；④$a^{\log_a N}=N$(对数恒等式).

(3)对数的运算法则

① $\log_a MN=$ ___$\log_a M+\log_a N$___；② $\log_a \dfrac{M}{N}=$ ___$\log_a M-\log_a N$___；③$\log_a M^n=n\log_a M(n\in\mathbf{R})$，(其中 $a>0$，$a\neq1$，$M>0$，$N>0$.)

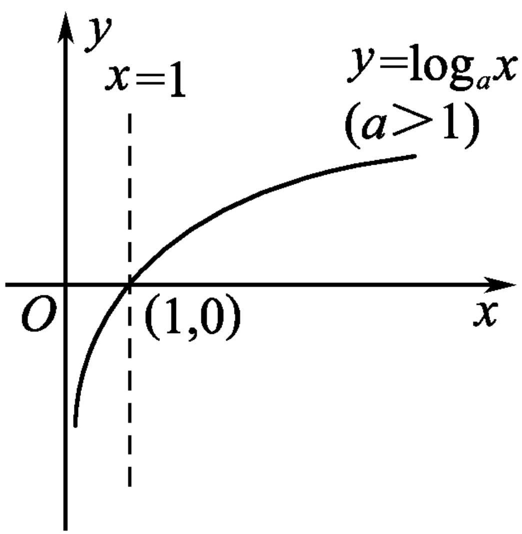
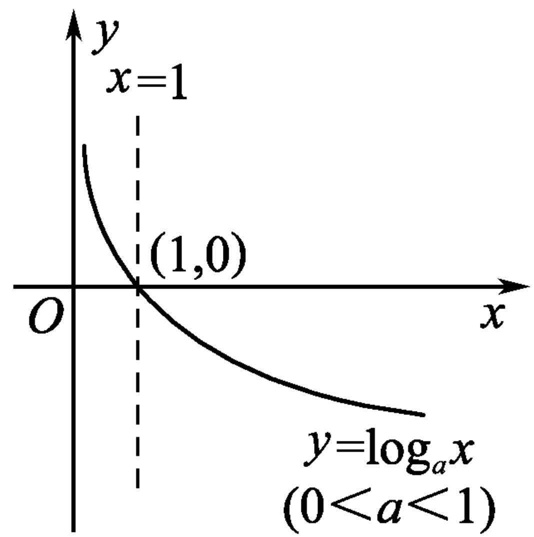
(4)对数换底公式及几个对数恒等式.

①$\log_a b=$ ______ ($b>0$，$a>0$ 且 $a\neq1$，$m>0$ 且 $m\neq1$)

②$\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$

③$\log_a b=\log a^n b^n$

2．对数函数$y=\log_a x(a>0$，且$a\neq 1)$的图象和性质

	$a>1$	$0<a<1$
图象		

	$a>1$	$0<a<1$
性质	(1)定义域：$(0,+\infty)$	(1)定义域：$(0,+\infty)$
	(2)值域：**R**	(2)值域：**R**
	(3)过点$(1,0)$，即$x=1$时，$y=0$	(3)过点$(1,0)$，即$x=1$时，$y=0$
	(4)当$x>1$时，$y>0$当$0<x<1$时，$y<0$	(4)当$x>1$时，$y<0$当$0<x<1$时，$y>0$
	(5)是$(0,+\infty)$上的增函数	(5)是$(0,+\infty)$上的减函数

3.指数函数$y=a^x$与对数函数$y=\log_a x$互为反函数($a>0$且$a\neq 1$)其图象关于直线$y=x$对称.

测

1．(2009 湖南)$\log_2\sqrt{2}$的值为(　　)

A．$-\sqrt{2}$　　　　B.$\sqrt{2}$

C．$-\frac{1}{2}$　　　　D.$\frac{1}{2}$

[解析]　由 $\log_2\sqrt{2}=\log_2 2^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log_2 2=\frac{1}{2}$，

易知 D 正确．

[答案]　D

2．(2011·佛山一模)已知函数$f(x)$为奇函数，且当$x>0$时，$f(x)=\log_2 x$.则满足不等式$f(x)>0$的x的取值范围是________.

[答案]　$(-1,0)\cup(1，+\infty)$

3．(2010·天津文数)设$a=\log_5 4$，$b=(\log_5 3)^2$，$c=\log_4 5$，则(　　)

A．$a<c<b$　　B．$b<c<a$

C．$a<b<c$　　D．$b<a<c$

[解析]　因为$0<\log_5 3<1$，所以$0<(\log_5 3)^2<\log_5 3$，又$\log_5 3<\log_5 4<1$　$\log_4 5>1$，所以$b<a<c$.

[答案]　D

KE NEI SHI SHENG JIANG YU XUE

课内师生讲与学

主要题型研究

题型 1 对数式的运算

例 1 (1)计算$\frac{1}{2}\lg\frac{32}{49}-\frac{4}{3}\lg\sqrt{8}+\lg\sqrt{245}$；

(2)若 $\lg a+\lg b=2\lg(a-2b)$，求 $\log_4\frac{a}{b}$之值．

[分析] 本题主要考查对数的基础知识以及恒等变形的能力．

[解]　(1)原式$=\frac{1}{2}(\lg 32-\lg 49)-\frac{4}{3}\lg 8^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\lg 245$

$=\frac{1}{2}(5\lg 2-2\lg 7)-\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}\lg 2+\frac{1}{2}(2\lg 7+\lg 5)$

$=\frac{5}{2}\lg 2-\lg 7-2\lg 2+\lg 7+\frac{1}{2}\lg 5$

$=\frac{1}{2}\lg 2+\frac{1}{2}\lg 5$

$=\frac{1}{2}\lg(2\times 5)$

$=\frac{1}{2}\lg 10=\frac{1}{2}.$

(2)$\because \lg a+\lg b=2\lg(a-2b)$

$\therefore \lg ab=\lg(a-2b)^2$

$\therefore ab=(a-2b)^2$，$a^2+4b^2-5ab=0$

$(a-4b)(a-b)=0$　$a=4b$ 或 $a=b$

又 $a-2b>0$ 即 $a>2b$ $\therefore a=4b$

$\therefore \log_4\frac{a}{b}=\log_4\frac{4b}{b}=1$

[点评与警示]　解决含多个对数式的求值化简问题，关键是熟练掌握对数的运算性质，不但要能正用、逆用这些公式，还要会变式应用，创造条件去应用.

◆变形思考1

(2010 辽宁)设 $2^a=5^b=m$，且$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2$，则 $m=$(　　)

A. $\sqrt{10}$　　B. 10

C. 20　　D. 100

[解析]　$a=\log_2 m$，$b=\log_5 m$，则$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{\log_2 m}+\frac{1}{\log_5 m}=$

$\log_m 2+\log_m 5=\log_m 10=2$，

$\therefore m=\sqrt{10}$，故选 A.

[答案]　A

题型2　比较大小

例2　比较大小，并说明理由：

(1)0.3^2，$\log_2 0.3, 2^{0.3}$；

(2)$\log_4 9$，$\log_9 25$，$\log_5 5\sqrt{5}$.

[分析]　由于两组数都不是同一个函数的函数值，难以用一个函数单调性作出判断，应依据函数的性质，采用间接比较的方法.

[解]　(1)由指数函数单调性可知 $2^{0.3}>2^0=1$；由对数函数的单调性可知 $\log_2 0.3<\log_2 1=0$；而 $0.3^2=0.09\in(0,1)$.

综上可知 $\log_2 0.3<0.3^2<2^{0.3}$.

(2)因为 $\log_5 5\sqrt{5}=\frac{3}{2}$，$\log_4 9>\log_4 8=\frac{3}{2}$，$\log_9 25<\log_9 27=\frac{3}{2}$.

所以 $\log_4 9>\log_5 5\sqrt{5}>\log_9 25$.

[点评与警示]　①函数的单调性揭示了自变量的大小与函数值大小的相互转换关系；②当不能用一个函数的单调性作出判断时，应通过引入第三个过渡量(如0,1等)搭桥，进而求解.

◆变形思考2

设$a=\log_{0.7}0.8$，$b=\log_{1.1}0.9$，$c=1.1^{0.9}$，则a、b、c的大小顺序是(　　)

A．$a<b<c$　　B．$b<c<a$

C．$b<a<c$　　D．$c<b<a$

[解析]　因为$0<a=\log_{0.7}0.8<\log_{0.7}0.7=1$，$b=\log_{1.1}0.9<\log_{1.1}1=0$，$c=1.1^{0.9}>1.1^{0}=1$，所以选C.

[答案]　C

题型3　对数函数的图象及性质的应用

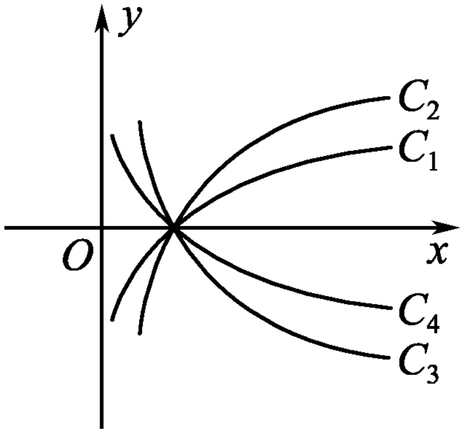
例3　如下图所示，曲线 C_1，C_2，C_3，C_4 都是对数函数 $y=\log_a x$ 的图象，已知 a 取 $\sqrt{3}$，$\frac{4}{3}$，$\frac{3}{5}$，$\frac{1}{10}$ 四个值，则相应于 C_1，C_2，C_3，C_4 的 a 的值依次为(　　)

A. $\sqrt{3}$，$\frac{4}{3}$，$\frac{3}{5}$，$\frac{1}{10}$

B. $\sqrt{3}$，$\frac{4}{3}$，$\frac{1}{10}$，$\frac{3}{5}$

C. $\frac{4}{3}$，$\sqrt{3}$，$\frac{3}{5}$，$\frac{1}{10}$

D. $\frac{4}{3}$，$\sqrt{3}$，$\frac{1}{10}$，$\frac{3}{5}$



[解]　解法一：因为对数函数的底数越大，函数图象越远离 y 轴的正半轴，所以 C_1，C_2，C_3，C_4 对应的 a 值依次由大到小，即 C_1，C_2，C_3，C_4 的 a 值依次为 $\sqrt{3}$，$\frac{4}{3}$，$\frac{3}{5}$，$\frac{1}{10}$，故选 A.

解法二：作直线 $y=1$，与 C_1，C_2，C_3，C_4 交点的横坐标，即为各对数底的值.

[点评与警示]　对数函数图象的分布规律为：位于第一象限的部分，随着底数的由小到大，图象从左到右分布.

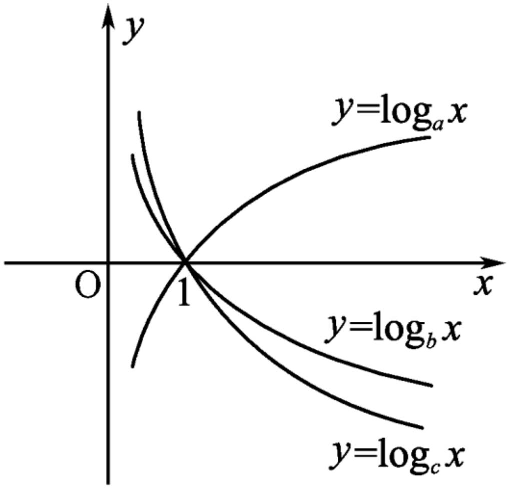
◆变形思考3 如右图，三个对数函数的图象，若$a^{x1}=b^{x2}=c^{x3}>1$，则x_1，x_2，x_3的大小关系是(　　)

A．$x_1>x_2>x_3$

B．$x_3>x_2>x_1$

C．$x_3>x_1>x_2$

D．$x_2>x_1>x_3$



[解析]　由图可知$a>1>c>b>0$，作曲线c_1：$y=a^x$，c_2：$y=b^x$，c_3：$y=c^x$，并作$y=2$，与曲线交点坐标$A(x_{1,}2)$，$B(x_{2,}2)$，$C(x_{3,}2)$，知$x_1>x_2>x_3$，故选A.

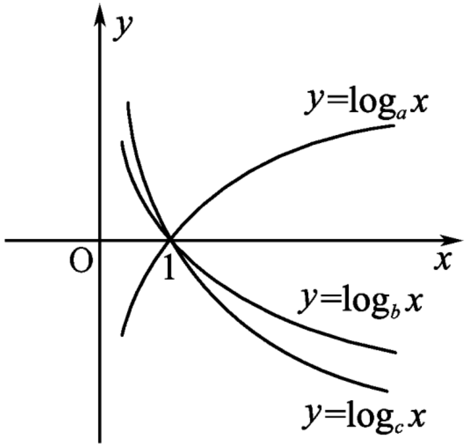
[答案]　A

例 4　(2010·全国Ⅰ，7)已知函数$f(x)=|\lg x|$.若$a\neq b$，且$f(a)=f(b)$，则$a+b$的取值范围是(　　)

A．$(1，+\infty)$　　B．$[1，+\infty)$

C．$(2，+\infty)$　　D．$[2，+\infty)$

[解析]　$f(x)=|\lg x|$的图象如图所示，由题不妨设 $0<a<1$，$b>1$，



$\therefore |\lg a|=-\lg a$，$|\lg b|=\lg b$，

$\therefore -\lg a=\lg b$，

即$\dfrac{1}{a}=b$，$a+b=a+\dfrac{1}{a}>2(\because a\neq b)$.

◆变形思考4

设$0<a<1$，函数$f(x)=\log_a(a^{2x}-2a^x-2)$，则使$f(x)<0$的$x$取值范围是(　　)

A．$(-\infty，0)$　　　　B．$(0，+\infty)$

C．$(-\infty，\log_a 3)$　　　　D．$(\log_a 3，+\infty)$

[解析]　$\because 0<a<1$，

$\therefore$由$f(x)<0$可得：$a^{2x}-2a^x-2>1$，即$(a^x-3)(a^x+1)>0$.

$\therefore a^x>3$，$\therefore x<\log_a 3$，故选C.

[答案]　C

题型4　对数函数的综合问题

例5　对于函数 $f(x)=\log_a\dfrac{x+b}{x-b}$ $(a>0，a\neq 1，b>0)$.

(1)讨论 $f(x)$的奇偶性；

(2)讨论 $f(x)$的单调性；

(3)求此函数的值域.

[分析]　按奇偶函数定义判断其奇偶性，判断单调性应先分析真数表示的函数 $u(x)=\dfrac{x+b}{x-b}$，注意不能超过函数的定义域，求函数的值域注意真数的影响.

[解]　(1)由$\frac{x+b}{x-b}>0\Leftrightarrow(x-b)(x+b)>0$ 及 $b>0$ 得定义域$(-\infty，-b)\cup(b，+\infty)$.

由 $f(x)+f(-x)=\log_a[(\frac{x+b}{x-b})(\frac{x-b}{x+b})]=\log_a 1=0$，可知此函数为奇函数.

(2)由于 $u(x)=\frac{x+b}{x-b}=1+\frac{2b}{x-b}$在$(-\infty，-b)$和$(b，+\infty)$上是减函数，所以当 $0<a<1$ 时，

$f(x)$在$(-\infty，-b)$和$(b，+\infty)$是增函数；

当 $a>1$ 时，$f(x)$在$(-\infty，-b)$和$(b，+\infty)$上是减函数.

(3)$\because b>0$.$\therefore$真数 $u(x)=1+\frac{2b}{x-b}\neq 1$，故 $f(x)\neq 0$，从而原函数的值域是$(-\infty，0)\cup(0，+\infty)$.

[点评与警示]　(1)要判断函数的单调性，必须首先确定其定义域，特别是对数函数，切记真数大于零，以免产生错解;(2)注意分类讨论与灵活运用复合函数的单调性.

◆变形思考5

对于函数 $f(x)=\log_2\dfrac{x+1}{x-1}$

(1)求函数 $f(x)$的奇偶性；

(2)求函数 $f(x)$的单调性；

(3)求此函数的值域.

[解]　(1)由$\frac{x+1}{x-1}>0\Leftrightarrow(x+1)(x-1)>0$ 定义域为$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

由 $f(x)+f(-x)=\log_2\frac{x+1}{x-1}+\log_2\frac{-x+1}{-x-1}$

$=\log_2\frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{x-1}{x+1}=\log_2 1=0$

$f(x)=-f(-x)$

$\therefore f(x)$为奇函数

(2)由于 $u(x)=\frac{x+1}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}$

在$(-\infty,-1)$和$(1,+\infty)$为减函数，所以当 $2>1$ 时

$y=\log_2\frac{x+1}{x-1}$在$(-\infty,-1)$和$(1,+\infty)$上是减函数

(3)$\because u(x)=1+\frac{2}{x-1}\neq 1$　故 $f(x)\neq 0$

从而原函数的值域是$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

例 6 对于函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2ax+3)$，解答下列问题：

(1)若 $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$，求实数 a 的取值范围；

(2)若 $f(x)$的值域为 $\mathbf{R}$，求实数 a 的取值范围；

(3)若函数 $f(x)$在$[-1,+\infty)$内有意义，求实数 a 的取值范围；

(4)若函数 $f(x)$的定义域为$(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$，求实数 a 的值.

[分析]　(1)将问题转化为求不等式的解集为全体实数时的参数的取值问题；(2)将问题转化为使函数$u=x^2-2ax+3$的值域为$\mathbf{R}^+$时的参数取值问题；(3)将问题转化为求使$u=x^2-2ax+3>0$对$x\in[-1,+\infty)$上恒成立的参数取值；(4)命题等价于$x^2-2ax+3>0$的解集为$\{x|x<1或x>3\}$.

[解]　设 $u=g(x)=x^2-2ax+3=(x-a)^2+3-a^2$

(1)∵$u>0$ 对 $x\in \mathbf{R}$ 恒成立，∴$u_{\min}=3-a^2>0$

∴$-\sqrt{3}<a<\sqrt{3}$

∴实数 a 的取值范围是$(-\sqrt{3}，\sqrt{3})$.

(2)∵$f(x)$值域为 $\mathbf{R}$∴$u=g(x)$的值域为$(0，+\infty)$

∴$\Delta=4a^2-12\geqslant 0$ 即 $a\geqslant\sqrt{3}$或 $a\leqslant-\sqrt{3}$.

∴实数 a 的取值范围是$(-\infty，-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3}，+\infty)$.

(3)由 $f(x)$在$[-1,+\infty)$上有意义，知 $u=x^2-2ax+3>0$ 对 $x\in[-1,+\infty)$上恒成立.

∵$g(x)$的对称轴为 $x=a$

∴当 $a<-1$ 时 $g(-1)>0$ 即$\begin{cases}a<-1\\2a+4>0\end{cases}$

解得$-2<a<-1$

当 $a\geq-1$ 时 $\Delta<0$，即$-\sqrt{3}<a<\sqrt{3}$

∴$-1\leq a<\sqrt{3}$

故所求 a 的取值范围是$(-2,-1)\cup[-1,\sqrt{3})$即$(-2,\sqrt{3})$.

(4)命题等价于$x^2-2ax+3>0$的解集为$\{x|x<1或x>3\}$

$\therefore x^2-2ax+3=0$的两根为1和3，

$\therefore 2a=1+3$即$a=2$

[点评与警示]　对数函数的值域为**R**时，其真数必须取遍所有的正数.

JIE TI JING YAN GONG XIANG

解题经验共享

1．对于对数运算，要注意避免出现下列的错误

(1) $\log_a xy = \log_a x \log_a y$；

(2) $\log_a(x \pm y) = \log_a x \pm \log_a y$；

(3) $\log_a \frac{x}{y} = \frac{\log_a x}{\log_a y}$等等.

2．对数函数的单调性受到底数a大小变化的影响，因此解题时常对底数a按$0<a<1$和$a>1$进行分类讨论.

3．形如$y=\log_a f(x)(a>0，a\neq 1)$的函数有如下性质

(1)定义域是函数$u=f(x)$定义域与不等式$f(x)>0$的解集的交集M；

(2)求值域时，先确定函数$u=f(x)(x\in M)$的值域，然后以u的值域作为函数$y=\log_a u(a>0，a\neq 1)$的定义域，从而求得函数$y=\log_a f(x)(a>0，a\neq 1)$的值域．

4．对数值的大小比较的方法．

(1)化同底后利用函数的单调性；

(2)作差或作商法；

(3)利用中间量(0或1)；

(4)化同真数后利用图象比较．

5．“当底数与真数同时大于1或底数与真数同时大于0而小于1时，对数值是正数，否则对数值小于0”．这一结论对解选择题，填空题很有帮助，能大大提高解题的效率．

KE WAI XUE SHENG LIAN YU WU

课外学生练与悟